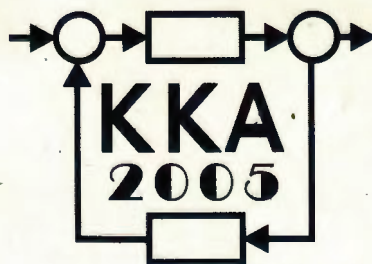


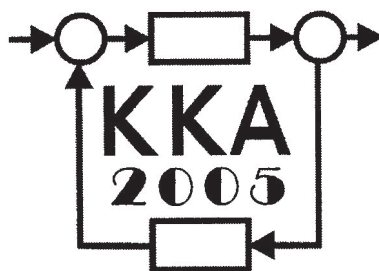
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

TEORIA STEROWANIA  
– TEORIA SYSTEMÓW

# STEROWANIE LQG Z OGRANICZENIAMAMI AMPLITUDY I WARIANCJI SYGNAŁU STERUJĄCEGO

Andrzej KRÓLIKOWSKI†, Tomasz KUBIAK, Dariusz HORLA

Politechnika Poznańska, Instytut Automatyki i Inżynierii Informatycznej, Zakład Automatyki i Informatyki  
ul. Piotrowo 3A, 60-965 Poznań, e-mail: †Andrzej.Krolikowski@put.poznan.pl

**Streszczenie:** W artykule zaproponowano algorytm dyskretnego sterowania LQG dla łącznych ograniczeń sygnału sterującego: amplitudy i wariancji. Koncepcja zaproponowanego algorytmu wykorzystuje nadrzędność ograniczenia amplitudowego w stosunku do ograniczenia wariancji. Suboptymalne sterowanie LQG z ograniczeniem amplitudy oparte jest na aproksymacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa (f.g.p.) stanu za pomocą gaussowskiej f.g.p., natomiast algorytm uwzględniający ograniczenie wariancji wykorzystuje metodę strojenia współczynnika Lagrange'a.

**Słowa kluczowe:** Sterowanie LQG. Ograniczenie amplitudowe. Ograniczenie wariancji.

## 1. WPROWADZENIE

Analiza i projektowanie układów sterowania LQG w obecności ograniczeń są przedmiotem aktualnych badań naukowych. Problem przedstawiony w artykule dotyczy takiego problemu dla ograniczeń: amplitudowego i wariancyjnego sygnału sterującego w przypadku zadania regulacji obiektem opisanym modelem ARMAX. Z uwagi na nadrzędność ograniczenia amplitudowego w stosunku do ograniczenia wariancyjnego przedstawiono w pierwszym algorytm sterowania oparty na teorii filtru Kalmana z uwzględnieniem ograniczenia amplitudowego. Następnie przedstawiono algorytm sterowania z uwzględnieniem łącznych ograniczeń, który zapewnia spełnienie ograniczenia wariancji. Możliwa jest także implementacja adaptacyjna całego algorytmu.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Obiekt opisany jest modelem ARMAX

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t + C(q^{-1})\xi_t, \quad (1)$$

gdzie  $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$  są wielomianami z operatorem przesunięcia  $q^{-1}$ , tj.,

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}, \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_nq^{-n}, \end{aligned}$$

a  $y_t, u_t$  są odpowiednio wyjściem i ograniczonym sterowaniem. Ciąg  $\{\xi_t\}$  składa się z niezależnych zmiennych losowych gaussowskich o zerowych średnich i wariancji  $\sigma_\xi^2$ . Model (1) posiada równoważną postać innowacyjną w przestrzeni stanu

$$\underline{x}_{t+1} = F\underline{x}_t + \underline{g}u_t + \underline{k}_\xi\xi_t, \quad (2)$$

$$y_t = \underline{h}^T \underline{x}_t + \xi_t, \quad (3)$$

gdzie

$$\underline{g} = [b_1, \dots, b_n]^T,$$

$$\underline{k}_\xi = [c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n]^T,$$

$$\underline{h} = [1, 0, \dots, 0]^T,$$

$$F = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_{n-1} & \dots & \dots & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Filtr Kalmana ze współczynnikiem wzmocnienia  $\underline{k}$  dla modelu (2), (3) ma postać

$$\hat{\underline{x}}_{t+1} = F\hat{\underline{x}}_t + \underline{g}u_t + \underline{k}\tilde{y}_t, \quad (4)$$

gdzie  $\tilde{y}_t = y_t - \underline{h}^T \hat{\underline{x}}_t$ . Wariancja innowacji  $\tilde{y}$  jest  $\sigma_{\tilde{y}}^2 = \underline{h}^T P_k \underline{h} + \sigma_\xi^2$ . Macierz  $P_k$  jest natomiast rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} P_k &= FP_kF^T - (FP_k\underline{h} + \sigma_\xi^2 \underline{k}_\xi)(FP_k\underline{h} + \sigma_\xi^2 \underline{k}_\xi)^T \times \\ &\quad \times (\underline{h}^T P_k \underline{h} + \sigma_\xi^2)^{-1} + \underline{k}_\xi \underline{k}_\xi^T \sigma_\xi^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Wskaźnik sterowania dla zadania regulacji

$$J = E[y_t^2 + q_u u_t^2] \quad (6)$$

należy minimalizować uwzględniając ograniczenia sygnału sterującego: amplitudowe

$$|u_t| \leq \alpha \quad (7)$$

oraz wariancyjne

$$\sigma_u^2 \leq c^2, \quad (8)$$

gdzie  $\sigma_u^2 = E[u_t^2]$ .

Prawo sterowania z ograniczeniem amplitudy jest implementowane przy pomocy funkcji nasycenia

$$u_t = \text{sat}(\underline{f}^T \hat{\underline{x}}_t; \alpha), \quad (9)$$

gdzie  $\hat{\underline{x}}_t$  jest wyjściem filtru Kalmana (4).

### 3. ALGORYTM DLA OGRANICZENIA AMPLI- TUDOWEGO

Rozważmy wpieryw zadanie regulacji, w którym występuje tylko ograniczenie amplitudowe. Algorytm suboptymalnego sterowania podano w [1], [3] dla wskaźnika

$$J = E[\underline{x}_t^T \mathbf{Q}_x \underline{x}_t + q_u u_t^2] = \text{tr} \mathbf{Q}_x \mathbf{R}_x + q_u \sigma_u^2, \quad (10)$$

gdzie  $\mathbf{R}_x = E[\underline{x}_t \underline{x}_t^T]$ . Ponadto zachodzi

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{\hat{x}} + \mathbf{P}_k, \quad (11)$$

gdzie  $\mathbf{R}_{\hat{x}} = E[\hat{\underline{x}}_t \hat{\underline{x}}_t^T]$ . Niech macierz wagowa  $\mathbf{Q}_x$  ma postać  $\mathbf{Q}_x = \underline{h} \underline{h}^T$ , wtedy minimalizacja (6) jest równoważna minimalizacji (10) [3]. Stosując dowolne stabilizujące sprzężenie zwrotne, stacjonarne równanie dla  $\mathbf{R}_{\hat{x}}$  wynikające z (4) jest

$$\mathbf{R}_{\hat{x}} = \mathbf{F} \mathbf{R}_{\hat{x}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \mathbf{R}_{\hat{x}u} \underline{g}^T + \underline{g} \mathbf{R}_{\hat{x}u}^T \mathbf{F}^T + \underline{g} \underline{g}^T \sigma_u^2 + \underline{k} \underline{k}^T \sigma_{\hat{y}}^2, \quad (12)$$

gdzie  $\mathbf{R}_{\hat{x}u} = E[\hat{\underline{x}}_t u_t]$ . Idea suboptymalnego sterowania oparta jest na aproksymacji f.g.p. stanu przez gaussowską f.g.p. Z uwagi na występowanie nieliniowości w postaci nasycenia, f.g.p. estymaty stanu  $\hat{\underline{x}}_t$  nie jest już opisana funkcją gaussowską. Przyjęto założenie, że funkcję tę można aproksymować funkcją gaussowską o zerowej wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji  $\mathbf{R}_{\hat{x}}$ , wtedy gradient wskaźnika sterowania jest wykorzystywany do wyprowadzenia iteracyjnego algorytmu obliczania stacjonarnego współczynnika sprzężenia zwrotnego  $\underline{f}$ .

Przybliżone wyrażenia dla  $\sigma_u^2$  i  $\mathbf{R}_{\hat{x}u}$ , gdy prawo sterowania przybiera postać (9), są następujące [1]:

$$\sigma_u^2 = \sigma^2 g_1(\sigma), \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_{\hat{x}u} = \mathbf{R}_{\hat{x}} \underline{f} g_2(\sigma), \quad (14)$$

gdzie

$$\sigma^2 = \underline{f}^T \mathbf{R}_{\hat{x}} \underline{f}, \quad (15)$$

oraz

$$g_1(\sigma) = \text{erf}(\alpha \sigma^{-1} 2^{-\frac{1}{2}}) - \alpha \sigma^{-1} 2^{\frac{1}{2}} \text{ierfc}(\alpha \sigma^{-1} 2^{-\frac{1}{2}}), \quad (16)$$

$$g_2(\sigma) = \text{erf}(\alpha \sigma^{-1} 2^{-\frac{1}{2}}), \quad (17)$$

przy czym  $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$  jest funkcją błędu,  $\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z)$  jest dopełnieniową funkcją błędu, a  $\text{ierfc}(z)$  oznacza całkę z tej funkcji, tj.  $\text{ierfc}(z) = \int_z^\infty \text{erfc}(t) dt$ .

Równanie (12) po podstawieniu do niego wyrażen (13) – (17) stanowi podstawę do iteracyjnego obliczania macierzy  $\mathbf{R}_{\hat{x}}$ , natomiast wskaźnik (10) po uwzględnieniu (11) oraz wyrażen na  $\sigma_u^2$ ,  $\mathbf{R}_{\hat{x}u}$  przybiera postać

$$J(\underline{f}) = \text{tr}(\mathbf{Q}_x + q_u g_1(\sigma) \underline{f} \underline{f}^T) \mathbf{R}_{\hat{x}} + \text{tr} \mathbf{Q}_x \mathbf{P}_k = J_f(\underline{f}) + \text{tr} \mathbf{Q}_x \mathbf{P}_k. \quad (18)$$

Obliczając gradient wskaźnika  $J_f(\underline{f})$ , równoważny gradientowi wskaźnika  $J(\underline{f})$ , można wyprowadzić [1] iteracyjną metodę rozwiązywania warunku jego zerowania

się i w rezultacie iteracyjny algorytm obliczania współczynnika sprzężenia zwrotnego  $\underline{f}$  w prawie sterowania (9). Ogólny schemat algorytmu wygląda następująco:

$$\underline{f}^{(k+1)} = \underline{f}^{(k)} + \alpha_k \underline{g}^{(k)}, \quad (19)$$

gdzie  $\alpha_k$  jest długością kroku oraz

$$\underline{g}^{(k)T} = d^{(k)} \left( \frac{\partial J_f}{\partial \underline{f}} \right)^{(k)T} \left( \mathbf{R}_{\hat{x}}^{(k)} \right)^{-1}, \quad (20)$$

gdzie gradient

$$\left( \frac{\partial J_f}{\partial \underline{f}} \right)^{(k)T} = \underline{e}^{(k)T} \mathbf{R}_{\hat{x}}^{(k)}. \quad (21)$$

Obliczenia dla  $k$ -tej iteracji są przeprowadzane dla  $\underline{f}^{(k)}$ . Wyrażenia na  $d^{(k)}$ ,  $\underline{e}^{(k)}$  mają postać [1]:

$$d^{(k)} = -\frac{1}{2} \left[ \left( g_1(\sigma^{(k)}) + h_1(\sigma^{(k)}) \sigma^{2(k)} \right) \times \left( \underline{g}^T \mathbf{S}^{(k)} \underline{g} + q_u \right) \right]^{-1},$$

$$\underline{e}^{(k)T} = 2 \left[ \left( g_1(\sigma^{(k)}) + h_1(\sigma^{(k)}) \sigma^{2(k)} \right) \times \left( \underline{g}^T \mathbf{S}^{(k)} \underline{g} + q_u \right) \underline{f}^{(k)T} + g_2(\sigma^{(k)}) \underline{g}^T \mathbf{S}^{(k)} \mathbf{F} + 2h_2(\sigma^{(k)}) \underline{g}^T \mathbf{S}^{(k)} \mathbf{F} \mathbf{R}_{\hat{x}}^{(k)} \underline{f}^{(k)} \underline{f}^{(k)T} \right],$$

gdzie  $\mathbf{S}^{(k)}$  jest dodatnio określonym rozwiązaniem równania

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^T \mathbf{S} \mathbf{F} + \mathbf{Q}_x + \underline{f} \left[ \left( g_1(\sigma) + h_1(\sigma) \sigma^2 \right) \left( \underline{g}^T \mathbf{S} \underline{g} + q_u \right) + 2h_2(\sigma) \underline{g}^T \mathbf{S} \mathbf{F} \mathbf{R}_{\hat{x}} \underline{f} \right] \underline{f}^T + g_2(\sigma) \left( \mathbf{F}^T \mathbf{S} \underline{g} \underline{g}^T \mathbf{F} + \underline{f} \underline{g}^T \mathbf{S} \mathbf{F} \right),$$

które można uzyskać w sposób iteracyjny dla  $\underline{f}^{(k)}$  oraz

$$h_1(\sigma) = -\alpha^2 \sigma^{-4} \text{erfc}(\alpha \sigma^{-1} 2^{-\frac{1}{2}}),$$

$$h_2(\sigma) = -\alpha \sigma^{-3} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-2^{-1} \alpha^2 \sigma^{-2}).$$

Dla iteracyjnego obliczania  $\mathbf{R}_{\hat{x}}^{(k)}$  można, dla przykładu, jako iterację początkową przyjąć  $\mathbf{R}_{\hat{x}}^{(0)} = \Sigma_\xi = \underline{k} \underline{k}^T \sigma_\xi^2$  oraz  $\underline{f}^{(0)}$ , gdzie  $\underline{f}^{(0)}$  wynika z rozwiązania standardowego zadania LQG bez ograniczeń. Tę samą wartość  $\underline{f}^{(0)}$  wygodnie jest również przyjąć jako iterację początkową w (19). Można pokazać [1], że istnieje stała  $a > 0$ , taka że dla każdego  $\alpha_k \in (0, a)$  zachodzi

$$J_f(\underline{f}^{(k+1)}) < J_f(\underline{f}^{(k)}),$$

jeśli  $\left( \frac{\partial J_f}{\partial \underline{f}} \right)^{(k)} \neq 0$ . Właściwy dobór kroku  $\alpha_k$  zapewni zatem zbieżność algorytmu.

### 4. ALGORYTM DLA OGRANICZENIA AMPLI- TUDOWEGO I WARIACYJNEGO

Należy zauważyć, że między ograniczeniem amplitudowym  $\alpha$  (7) oraz ograniczeniem wariacyjnym (8) zachodzi pewna współzależność, bowiem ograniczenie amplitudowe sygnału sterującego ogranicza automatycznie jego wariację, tj. zachodzi  $\sigma_u^2 \leq \alpha^2$ . Mając na uwadze (8)

oraz przyjmując  $c^2 = \gamma \sigma_\xi^2$  otrzymuje się

$$\gamma \leq \frac{\alpha^2}{\sigma_\xi^2}. \quad (22)$$

Oznacza to, że jeśli dla danego ograniczenia amplitudowego  $\alpha$ , zadane ograniczenie wariancyjne ma postać  $\gamma \geq \frac{\alpha^2}{\sigma_\xi^2}$ , to jest ono automatycznie spełnione, a optymalizację współczynnika sprzężenia zwrotnego można przeprowadzić tylko względem ograniczenia amplitudowego, jak podano w punkcie 3. Jeśli natomiast przy zadanym  $\alpha$ , zadane ograniczenie wariancji jest takie, że  $\gamma < \frac{\alpha^2}{\sigma_\xi^2}$ , to zadanie może mieć sens optymalizacyjny zgodnie z problemem sformułowanym w punkcie 2.

Rozważmy równania w postaci innowacyjnej (2), (3), równoważne modelowi ARMAX (1). Wskaźnik sterowania ma ponownie postać (10). Ograniczenie wariancji określone jest przez (8), a odpowiedni lagranżjan dla zadania regulacji z ograniczeniem wariancji ma postać

$$L = \text{tr } Q_x R_x + (q_u + \lambda) \sigma_u^2, \quad (23)$$

gdzie mnożnik  $\lambda \geq 0$ . Poszukiwany regulator określony jest przez

$$u_t^o = \underline{f}^{\text{opt}T} \hat{x}_t, \quad (24)$$

gdzie  $\underline{f}^{\text{opt}}$  wynika z rozwiązania odpowiedniego równania Riccatiego. Jeśli  $u_t^o$  minimalizuje lagranżjan (23) i jednocześnie spełnione jest ograniczenie (8) oraz warunek komplementarności

$$\lambda(\sigma_u^2 - c^2) = 0, \quad (25)$$

to  $u_t^o$  jest również sterowaniem optymalnym dla problemu sterowania z ograniczeniem wariancji. Głównym problemem jest tutaj określenie właściwych estymat mnożnika Lagrange'a  $\lambda$ , tak żeby spełnione były warunki (8) i (25) dla  $u_t^o$ . W praktyce realizuje się to iteracyjnie; każdy krok iteracji  $k$  obejmuje standardowe rozwiązanie problemu LQG, tj. minimalizację lagranżjanu (23) z  $\lambda = \lambda^{(k)}$  oraz uaktualnienie mnożnika według odpowiedniego algorytmu. Realizacja algorytmu wymaga równań dla  $R_{\hat{x}}$  i  $\sigma_u^2$  (patrz (27), (28)). Na podstawie tych równań można podać iteracyjny algorytm uaktualniania mnożnika Lagrange'a  $\lambda^{(k)}$  i w konsekwencji wyznaczenia optymalnego współczynnika sprzężenia zwrotnego  $\underline{f}^{\text{opt}}$ . Zaproponowany algorytm jest modyfikacją algorytmu podanego w [2] i zawiera obliczanie współczynnika sprzężenia zwrotnego przy ograniczeniu amplitudowym opisane w poprzednim algorytmie. Algorytm obejmuje następujące kroki:

**krok 1:** Przyjąć  $\lambda^{(0)} > 0, h_0 = 1, 0 < \alpha_0 < 1$ .

**krok 2:** Obliczyć  $\underline{f}^{(k)}$  zgodnie z algorytmem podanym w punkcie 3 dla

$$q_u^{(k)} = q_u + \lambda^{(k)}. \quad (26)$$

**krok 3:** Obliczyć  $R_{\hat{x}}^{(k)}$  zgodnie z równaniem (12) uwzględniając (13)–(17), tj.

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}}^{(k)} = & F R_{\hat{x}}^{(k)} F^T + (F R_{\hat{x}}^{(k)} \underline{f}^{(k)} \underline{g}^T + \underline{g} \underline{f}^{T(k)} R_{\hat{x}}^{T(k)} F^T) \\ & \times g_2(\sigma^{(k)}) + \underline{g} \underline{g}^T \underline{f}^{T(k)} R_{\hat{x}}^{(k)} \underline{f}^{(k)} g_1(\sigma^{(k)}) + \\ & + \underline{k} \underline{k}^T \sigma_{\hat{y}}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

oraz

$$\sigma_u^{2(k)} = \underline{f}^{T(k)} R_{\hat{x}}^{(k)} \underline{f}^{(k)} g_1(\sigma^{(k)}), \quad \sigma^{2(k)} = \underline{f}^{T(k)} R_{\hat{x}}^{(k)} \underline{f}^{(k)}. \quad (28)$$

**krok 4:** W celu ewentualnego zakończenia sprawdzić wartość (25), tj.

$$\psi^{(k)} = \lambda^{(k)} (\sigma_u^{2(k)} - c^2). \quad (29)$$

Jeśli  $\psi^{(k)}$  jest dostatecznie bliskie zera, zgodnie z pewnym przyjętym kryterium, to STOP, w przeciwnym wypadku przejść do kroku 5.

**krok 5:** Jeśli  $k = 0$ , to przejść do kroku 6, w przeciwnym wypadku uaktualnić  $h_k$ , o ile jest dodatnie, zgodnie z

$$h_k = h_{k-1} + \frac{\Delta \lambda^{(k)} + h_{k-1} \Delta \psi^{(k)}}{\Delta \psi^{(k)}}, \quad (30)$$

gdzie  $\Delta \lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}$ ,  $\Delta \psi^{(k)} = \psi^{(k)} - \psi^{(k-1)}$  oraz  $\psi^{(k)}$  dane jest przez (29).

**krok 6:** Uaktualnić mnożnik  $\lambda^{(k)}$  zgodnie z

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \text{sat}(\beta_k h_k \psi^{(k)}; a \lambda^{(k)}), \quad (31)$$

gdzie  $0 < a < 1$ .

**krok 7:** Obliczyć  $\beta_{k+1}$  zgodnie z

$$\beta_{k+1} = \beta_k (\gamma_0 - \beta_k) (\gamma_0 - 1)^{-1}, \quad (32)$$

gdzie  $\gamma_0 > 1$ . Przyjąć  $k \rightarrow k + 1$  oraz przejść do kroku 2.

Należy jednak zauważyć, że problem może nie mieć rozwiązania, gdy występuje zbyt silne ograniczenie, na przykład istnieją dolne granice ograniczeń amplitudy i wariancji sygnału sterującego możliwe do przyjęcia w przypadku stabilizacji niestabilnego obiektu.

W celu ewentualnej realizacji sterowania adaptacyjnego należałoby bieżące estymaty parametrów, tj.  $\hat{F}_t, \hat{g}_t, \hat{k}_{\xi,t}$ , uzyskane w wyniku rekursywnej estymacji parametrów modelu ARMAX, wykorzystywać do optymalizacji w każdej chwili  $t$  zgodnie z podanym wyżej algorytmem.

## 5. SYMULACJE

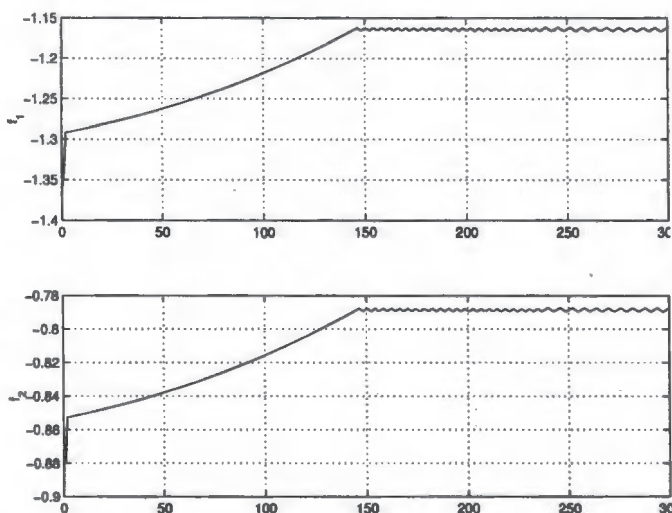
Symulacje przeprowadzono dla stabilnego modelu opisanego parametrami:  $a_1^o = 1.8, a_2^o = -0.9, b_1^o = 1.0, C(q^{-1}) = 1$  oraz  $\sigma_\xi^2 = 1.0$ . Na rysunkach 1 i 2 zilustrowano działanie przedstawionego powyżej iteracyjnego algorytmu dla  $q_u = 0.3$  i ograniczeń:  $\alpha = 3.0, c^2 = 2.0$  oraz  $Q_x = (1, 0)^T(1, 0), \lambda^{(0)} = 1.0, \alpha_0 = 0.5, \gamma_0 = 5.0, a = 0.06$ . Rysunki 3, 4 przedstawiają odpowiednie przebiegi dla  $q_u = 0.01$ . Widać, że wariancja sygnału sterującego osiąga zadane ograniczenie, a współczynniki  $f_1, f_2$  w obu przypadkach osiągają te same wartości.

## LQG CONTROL UNDER AMPLITUDE AND VARIANCE CONSTRAINTS

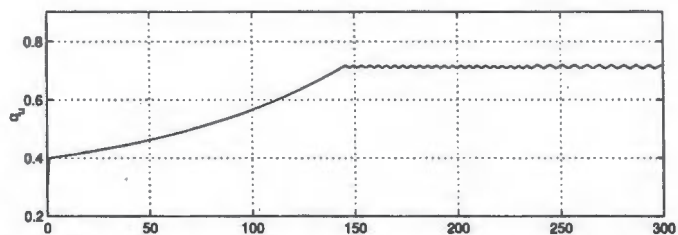
**Abstract:** A discrete-time constrained LQG control algorithm based on the Kalman filter framework is presented. Both amplitude and variance constraints imposed on the control signal are considered. Simulation results are given.

### Literatura

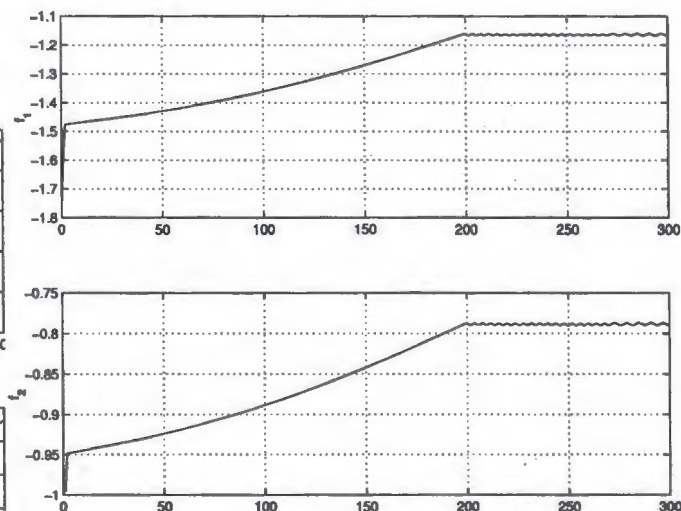
- [1] Toivonen H.T., *Suboptimal control of linear discrete stochastic systems with linear input constraints*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-28, No.2, 1983, s. 246–248.
- [2] Mäkilä P.M., Toivonen H.T., *Computational methods for parametric lq problems - a survey*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-32, No.8, 1987, s. 658–671.
- [3] Królikowski A., *Sterowanie adaptacyjne z ograniczeniami sygnału sterującego*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2004.



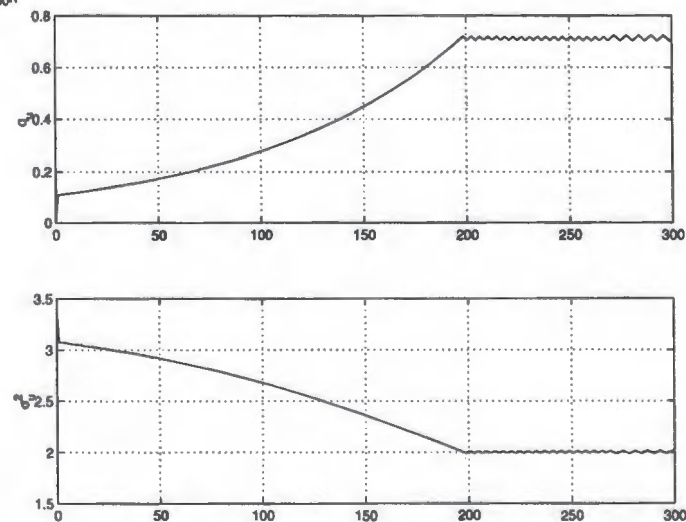
Rys. 1. Przebiegi współczynników  $f_1, f_2$ ;  $q_u = 0.3$



Rys. 2. Przebiegi współczynnika  $q_u^{(k)}$  i wariancji  $\sigma_u^2$ ;  $q_u = 0.3$



Rys. 3. Przebiegi współczynników  $f_1, f_2$ ;  $q_u = 0.01$



Rys. 4. Przebiegi współczynnika  $q_u^{(k)}$  i wariancji  $\sigma_u^2$ ;  $q_u = 0.01$





**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**