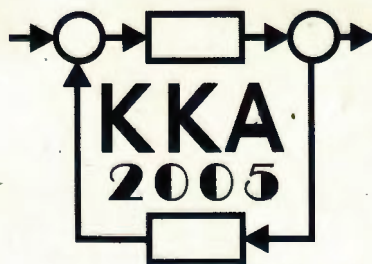


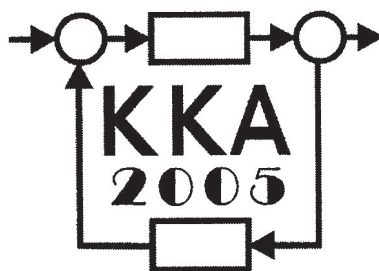
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

TEORIA STEROWANIA  
– TEORIA SYSTEMÓW

# UŻYCIE UŁAMKOWEGO FILTRU KALMANA DO ESTYMACJI PARAMETRÓW UKŁADU RZĘDU UŁAMKOWEGO

Dominik SIEROCIUK

Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny, Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej  
ul. Koszykowa 75 00-662 Warszawa, e-mail: dsieroci@ee.pw.edu.pl

**Streszczenie:** W niniejszej pracy przedstawione jest użycie algorytmu filtru Kalmana dla układów ułamkowego rzędu do estymacji parametrów oraz ułamkowego rzędu układu. W pracy znajduje się opis algorytmów estymacji wraz z przykładowymi symulacjami i analizą wyników.

**Słowa kluczowe:** Ułamkowy Filtr Kalmana, "Unscented" Ułamkowy Filtr Kalmana, układy ułamkowego różniczkowego rzędu, estymacja ułamkowego rzędu układu, identyfikacja parametryczna.

## 1. WPROWADZENIE

Historia teorii rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu sięga dość daleko, ponieważ pierwsze wzmianki na ten temat (Leibniz i L'Hospital) datuje się już na koniec XVII wieku. Jednakże wśród inżynierów dopiero pod koniec lat 60 ubiegłego wieku wzrosło zainteresowanie tą tematyką. Jak się szybko okazało, istnieje w technice wiele problemów które łatwiej jest opisać właśnie przy pomocy rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu. Pozwala on na przykład na dokładniejszy opis ośrodków stratnych i dyspersyjnych (elektrodynamika, mechanika ośrodków lepko-sprężystych, procesy elektrochemiczne, układy, w których występuje tarcie). Modele ułamkowego rzędu coraz częściej znajdują zastosowanie przy opisie układów w także robotyce, czy to jako regulator ułamkowego rzędu [10] [11], czy też do opisu samego układu robota. Jednym z kluczowych zagadnień związanych z układami o ułamkowym rzędzie różniczkowania jest identyfikacja ich parametrów, a w szczególności ich ułamkowego rzędu danego układu, o czym jest mowa w dalszej części artykułu.

## 2. PODSTAWY UŁAMKOWEGO RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

Jako definicję różniczko-całki ułamkowego rzędu została przyjęta w tej pracy definicja Grünwald'a [1] [2], która dla układów dyskretnych ma postać:

$$\Delta^n x_k = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j} \quad (1)$$

gdzie  $n$  jest ułamkowym rzędem, a  $h$  jest okresem próbkowania dalej przyjmowanym jako 1. Wyrażenie  $\Delta^n x_k$  oznacza różniczko-całkę zmiennej  $x$  w punkcie czasowym  $k$ . Gdy  $n$  jest dodatnie otrzymujemy wzór na różniczkę, gdy  $n$  jest ujemne wzór na całkę (stąd nazwa różniczko-całki), a gdy  $n = 0$  otrzymujemy tę samą funkcję. Symbol Newtona można wyznaczyć z relacji [8]:

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 0 \\ \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} & \text{dla } j > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Używając tej definicji, możemy uogólnić tradycyjny (całkowitego rzędu) model dyskretny w przestrzeni stanu na model o ułamkowym rzędzie różniczkowym. Weźmy więc tradycyjny stochastyczny dyskretny model w przestrzeni stanu opisany równaniami:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \omega_k \quad (3)$$

$$y_k = Cx_k + \nu_k \quad (4)$$

gdzie  $\omega$  i  $\nu$  są zakłóceniami w dalszej części artykułu przyjmowane jako niezależne o wartości oczekiwanej równej 0.

Równanie aktualizacji wektora stanu można przedstawić jako

$$\Delta^1 x_{k+1} = A_d x_k + Bu_k + \omega_k \quad (5)$$

gdzie  $A_d = A - I$ , a  $\Delta_k^n$  jest różnicą rzędu  $n$ , dla pierwszego rzędu równą

$$\Delta^1 x_{k+1} = x_{k+1} - x_k. \quad (6)$$

Wartość kolejnego wektora stanu można wyznaczyć z zależności:

$$x_{k+1} = \Delta^1 x_{k+1} + x_k \quad (7)$$

Można to uogólnić na różnicę niecałkowitego rzędu, która jest dyskretnym odpowiednikiem różniczki ułamkowego rzędu, przez co otrzymujemy dyskretny układ ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu.

$$\begin{aligned} \Delta^n x_{k+1} &= A_d x_k + Bu_k + \omega_k \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \end{aligned} \quad (8)$$



gdzie  $n$  może być liczą niecałkowitą, ułamkowym rzędem układu.

Dzięki takiemu zabiegowi otrzymujemy model ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu, złożony z układu trzech równań:

- obliczającego ułamkową różnicę danej zmiennej stanu (5)
- wyznaczającego kolejną zmienną stanu (8)
- równania wyjścia (takie same jak w (4)).

Dla układu, w którym równania stanu nie mają tego samego rzędu, równania przybiorą następującą postać:

$$\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} = A_d x_k + B u_k + \omega_k \quad (9)$$

$$x_{k+1} = \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \quad (10)$$

gdzie

$$\Upsilon_k = \text{diag} \left[ \binom{n_1}{k} \dots \binom{n_N}{k} \right]$$

$$\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} = \left[ \Delta^{n_1} x_{1,k+1} \dots \Delta^{n_N} x_{N,k+1} \right]^T$$

Dla deterministycznego układu ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu równanie różnicowe jest określone następującą zależnością:

$$\Delta^{n_N} y_k + a_{N-1} \Delta^{n_N-1} y_{k-1} + \dots + a_0 y_{k-N} = \quad (11)$$

$$b_{N-1} \Delta^{n_N-1} u_{k-1} + \dots + b_0 u_{k-N}$$

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad (12)$$

Przy czym współczynniki  $a_i, b_i$  są współczynnikami macierzy układu w postaci analogicznej do postaci kanonicznej regulatorowej czy obserwatorowej, na przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [ b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{N-1} ]$$

### 3. PODSTAWOWE NARZĘDZIA ESTYMACJI DLA UKŁADÓW O UŁAMKOWYM RZĘDZIE RÓŻNICOWYM

#### 3.1. Filtr Kalmana dla układów ułamkowego rzędu (FKF)

Dla układu zdefiniowanego w (9),(10) i (4) algorytm Filtru Kalmana minimalizujący następującą funkcję celu [3]:

$$\hat{x}_k = \arg \min_x [ (\tilde{x}_k - x) \bar{P}_k^{-1} (\tilde{x}_k - x)^T + (y - Cx) R_k^{-1} (y - Cx)^T ]$$

dany jest równaniami:

$$\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B u_k$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} \Upsilon_j x_{k+1-j}$$

$$\bar{P}_k = (A_d + \Upsilon_1) P_{k-1} (A_d + \Upsilon_1)^T + Q_{k-1} + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T$$

$$K = \bar{P}_k C^T (C \bar{P}_k C^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K (y_k - C \tilde{x}_k)$$

$$P_k = (I - KC) \bar{P}_k$$

Jak widać, różni się on od algorytmu dla układów całkowego rzędu sposobem wyznaczania predykcji stanu i predykcji macierzy kowariancji błędu estymacji. Predykcja macierzy kowariancji zależy od poprzednich wartości macierzy kowariancji błędu estymacji.

#### 3.2. "Unscented" Filtr Kalmana dla układów ułamkowego rzędu (UFKF)

Większość zagadnień estymacji parametrów prowadzi do powstania układów nieliniowych (w dużej mierze biliniowych). Dla układów nieliniowych zachodzi potrzeba stosowania dodatkowych modyfikacji algorytmu, takich jak zastosowanie linearyzacji przez rozwinięcie w szereg Taylora (EKF) lub wyznaczanie macierzy kowariancji i wartości oczekiwanych poprzez transformację "Unscented" (Unscented Ułamkowy Filtr Kalmana (UFKF)).

To drugie podejście daje większą dokładność przy wyznaczaniu predykcji macierzy kowariancji błędu, a dodatkowo nie wymaga różniczkowania do linearyzacji, co ma decydujące znaczenie przy estymacji rzędu układu, jak to zostanie pokazane w rozdziale 4.4.

Transformacja "Unscented" [4] [7] polega na wyznaczeniu dodatkowych punktów (13), które określają kowariancję błędu danego wektora, następnie obliczenie wartości funkcji nieliniowej dla tych punktów. Z tych wartości wyznaczenie nowej wartości oczekiwanej i kowariancji błędu wektora w chwili następnej.

Przy założeniu, że szum jest addytywny i o zerowej wartości oczekiwanej, korzystając z analogii do tradycyjnego UKF oraz liniowego FKF zdefiniowanego powyżej, możemy otrzymać następujące równania opisujące UKF dla układów ułamkowego rzędu:

Przyjęto oznaczenie, że

$$\hat{\chi}_k = [ \hat{x}_k \quad \hat{x}_k \pm (\sqrt{(L+\lambda)P_k}) ]$$

oznacza

$$\hat{\chi}_{i,k} = \begin{cases} \hat{x}_k, & i = 0 \\ \hat{x}_k + (\sqrt{(L+\lambda)P_k})_i, & i = 1 \dots L \\ \hat{x}_k - (\sqrt{(L+\lambda)P_k})_{2L-i}, & i = L+1 \dots 2L \end{cases}$$

gdzie  $\sqrt{(L+\lambda)P_k}_i$  oznacza i-tą kolumnę pierwiastka kwadratowego macierzy (np: dolno-trójkątnej faktoryzacji Cholesky'ego) a współczynniki wagowe Unscented

transformacji  $W$  są równe

$$\begin{aligned} W_0^{(m)} &= \lambda / (L + \lambda) \\ W_0^{(c)} &= \lambda / (L + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1 / (2(L + \lambda)) \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$ ,  $\alpha$  jest współczynnikiem określającym szerokość rozstawienia punktów transformacji (np.  $1 \leq \alpha \leq 1e - 4$ ),  $\kappa$  dodatkowym współczynnikiem skalującym zazwyczaj przyjmowanym jako 3-L,  $\beta$  współczynnikiem powiązany z naszą znajomością typu szumu, dla szumu Gaussowskiego przyjmowany jako  $\beta = 2$ .

Warunki początkowe algorytmu to

$$\hat{x}_0 = E[x_0], P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

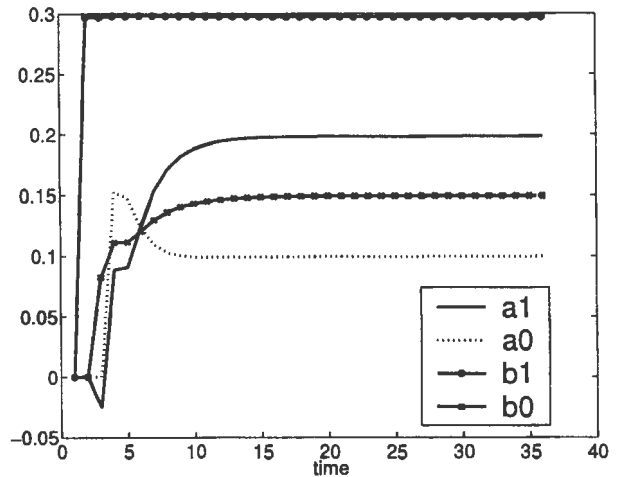
Algorytm natomiast przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_k &= [\hat{x}_k \quad \hat{x}_k \pm (\sqrt{(L + \lambda)P_k})] \\ \Delta^T \tilde{\chi}_{i,k} &= F(\hat{\chi}_{i,k-1}, u_{k-1}) \\ \tilde{\chi}_{i,k}^* &= \Delta^T \tilde{\chi}_{i,k} - \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j \hat{\chi}_{i,k-j} \\ \tilde{x}_k &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(m)} \tilde{\chi}_{i,k}^* \\ \tilde{P}_k &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\chi}_{i,k}^* - \tilde{x}_k][\tilde{\chi}_{i,k}^* - \tilde{x}_k]^T + Q_{k-1} \\ \tilde{\chi}_k &= [\tilde{x}_k \quad \tilde{x}_k \pm (\sqrt{(L + \lambda)\tilde{P}_k})] \\ \tilde{y}_{i,k} &= H[\tilde{\chi}_{i,k}] \\ \tilde{y}_k &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(m)} \tilde{y}_{i,k} \\ P_{y_k y_k} &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{y}_{i,k} - \tilde{y}_k][\tilde{y}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T + R_k \\ P_{x_k y_k} &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\chi}_{i,k} - \tilde{x}_k][\tilde{y}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T \\ \mathcal{K}_k &= P_{x_k y_k} P_{y_k y_k}^{-1} \\ \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + \mathcal{K}_k (y_k - \tilde{y}_k) \\ P_k &= \tilde{P}_k - \mathcal{K}_k P_{y_k y_k} \mathcal{K}_k \end{aligned}$$

Gdzie  $F(\hat{\chi}_{i,k-1}, u_{k-1})$  jest funkcją nieliniową wyznaczania kolejnego wektora zmiennych stanu, a  $H[\tilde{\chi}_{i,k}]$  jest nieliniową funkcją wyjścia układu. Do wyznaczania predykcji stanu układu i macierzy kowariancji błędu algorytm korzysta z poprzednich danych  $\hat{\chi}_{k-j}$ . Przez co pośrednio otrzymuje informację o poprzednich wartościach macierzy kowariancji błędu estymacji.

#### 4. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU

W rozdziale tym zostaną przedstawione poszczególne metody estymacji parametrów układu ułamkowego rzędu.



Rysunek 1. Wyniki rekurencyjnej estymacji parametrów

We wszystkich przykładach parametry estymowanego układu są równe:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.1 & a_1 &= 0.2 & b_0 &= 0.15 \\ b_1 &= 0.3 & n_1 &= 0.7 & n_2 &= 1.2 \end{aligned}$$

Wariancja szumu addytywnego wyjścia  $E[\nu^2] = 0.1$  (dla identyfikacji na podstawie równania różnicowego przyjęto wariancję szumu równą zero).

#### 4.1. Estymacja na podstawie równania różnicowego

Równanie (11) możemy przedstawić w postaci układu równań, wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \varphi_k^T &= [-\Delta^{n_N-1} y_{k-1} \quad \dots \quad -y_{k-N} \\ &\quad \Delta^{n_N-1} u_{k-1} \quad \dots \quad u_{k-N}] \\ \theta &= [a_{N-1} \quad \dots \quad a_0 \quad b_{N-1} \quad \dots \quad b_0] \\ Y_k &= [\Delta^{n_N} y_k] \end{aligned}$$

gdzie  $\varphi_k$  i  $Y_k$  są wektorami danych, a  $\theta$  wektorem identyfikowanych parametrów.

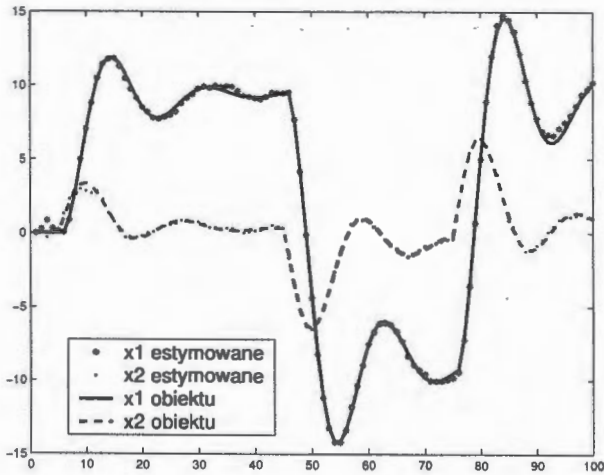
Otrzymujemy wtedy następujący układ równań w zapisie macierzowym:

$$Y = \varphi^T \theta \quad (13)$$

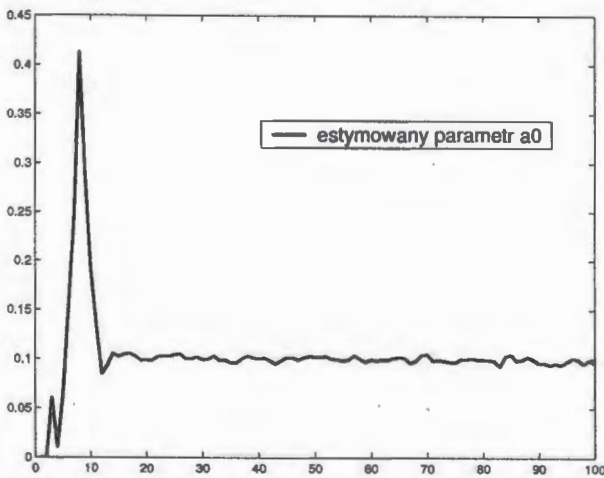
Przy większej liczbie danych niż parametrów otrzymujemy nadokreślony układ równań, który można rozwiązać przez wyznaczenie pseudoodwrotności macierzy  $\varphi$ , która jest macierzą zawierającą kolejne wektory  $\varphi_k^T$ . Pseudoodwrotność macierzy w przykładzie, którego wyniki zostały przedstawione na rys. 1, wykonano używając metody rekurencyjnej [12].

Końcowe wartości identyfikowanych parametrów wynoszą

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.1984 & a_0 &= 0.0996 \\ b_1 &= 0.2972 & b_0 &= 0.1493 \end{aligned}$$



Rysunek 2. Wyniki połączonej estymacji, wektory stanu



Rysunek 3. Wyniki połączonej estymacji, estymowany parametr

#### 4.2. Połączona estymacja stanu i parametrów

Połączona estymacja stanu i parametrów obiektu polega na poszerzeniu wektora stanu o estymowane parametry.

$$x_k^p = \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie  $x_k^p$  jest nowym wektorem stanu, a  $w_k$  jest wektorem parametrów.

Wyniki połączonej estymacji przedstawione są na rys. 2 i 3. Ze względu na nieliniowość problemu wykorzystany został algorytm oparty na transformacji "Unscented" (UFKF), aczkolwiek algorytm oparty na linearyzacji Taylor'owskiej także mógłby zostać użyty.

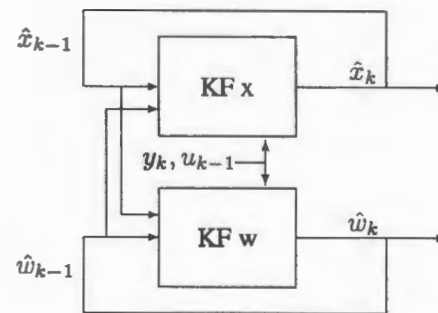
Końcowy wynik to  $a_0 = 0.0963$ . Przy funkcjach nieliniowych zdefiniowanych jako:

$$F(x_k^p, u_k) = \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ -a_0 x_{1,k} - a_1 x_{2,k} + u_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$H(x_k) = \begin{bmatrix} b_0 x_{1,k} & b_1 x_{2,k} \end{bmatrix} \quad (16)$$

#### 4.3. Estymacja dualna

Estymacja dualna polega na zastosowaniu odrębnych filtrów do estymacji wektora zmiennych stanu  $x_k$  i wektora parametrów  $w_k$  modelu. Schemat jej działania przedstawiony jest na rys. 4, gdzie KF<sub>x</sub> jest filtrem dla zmiennych stanu, a KF<sub>w</sub> jest filtrem dla parametrów modelu. Filtr KF<sub>x</sub> korzysta z poprzedniej wartości estymaty wektora parametrów  $w_{k-1}$  i danych z wejścia  $u_{k-1}$  i wyjścia  $y_k$  układu do wyznaczenia estymaty wektora stanu układu  $\hat{x}_k$ . Filtr KF<sub>w</sub> natomiast korzysta z poprzedniej wartości estymowanego przez KF<sub>x</sub> wektora stanu  $\hat{x}_{k-1}$  i z wejścia  $u_{k-1}$  i danych z wyjścia  $y_k$  układu do obliczenia własnej predykcji stanu i wyjścia układu  $\tilde{x}_k^w, \tilde{y}_k^w$  i w ten sposób wyznaczenia kolejnej estymaty parametrów układu  $\hat{w}_k$ .



Rysunek 4. Schemat Estymacji Dualnej

Przy tak zdefiniowanym problemie i w pełnej analogii do tradycyjnego UKF dla estymacji parametrów możemy zdefiniować UFKF dla estymacji parametrów układu ułamkowego rzędu.

$$\tilde{w}_k = \hat{w}_{k-1}$$

$$\hat{P}_k^w = \hat{P}_{k-1}^w + Q_{k-1}^w$$

$$\tilde{W}_k = \left[ \tilde{w}_k \tilde{w}_k \pm \left( \sqrt{(L + \lambda) \hat{P}_k^w} \right)_i \right]$$

$$\Delta^{\mathbf{T}(\tilde{W}_k)} \tilde{x}_k^w = A_d(\tilde{W}_k) \hat{x}_{k-1} + B(\tilde{W}_k) u_{k-1}$$

$$\tilde{x}_k^w = \Delta^{\mathbf{T}(\tilde{W}_k)} \tilde{x}_k^w - \sum_{j=1}^k (-1)^j \mathbf{T}_j \hat{x}_{k-j}$$

$$\tilde{Y}_{k,i}^w = C(\tilde{W}_k) \tilde{x}_{k,i}^w$$

$$\tilde{y}_k^w = \sum_{i=0}^{2L} W^{(m)} \tilde{Y}_{k,i}^w$$

$$P_{y_k y_k}^w = \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{y}_{i,k} - \tilde{y}_k] [\tilde{y}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T + R^w$$

$$P_{w_k y_k}^w = \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{W}_{i,k} - \tilde{w}_k] [\tilde{y}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T$$

$$\mathcal{K}_k^w = P_{w_k y_k}^w (P_{y_k y_k}^w)^{-1}$$

$$\hat{w}_k = \tilde{w}_k + \mathcal{K}_k^w (y_k - \tilde{y}_k^w)$$

$$P_k^w = \hat{P}_k^w - \mathcal{K}_k^w P_{y_k y_k}^w \mathcal{K}_k^w$$



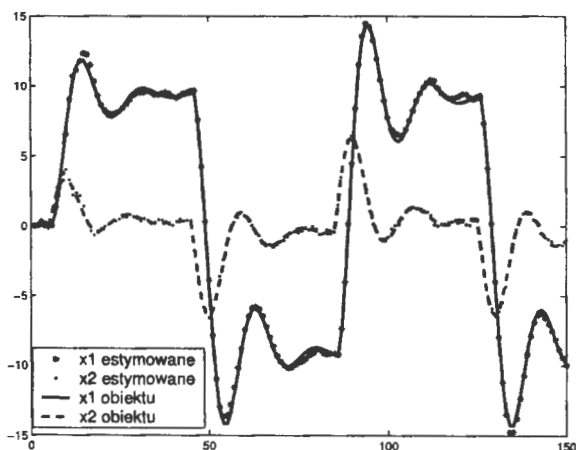
Rezultaty estymacji dualnej stanów i dwóch parametrów układu przedstawione są na rys. 5 i 6. Jako estymator zmiennych stanu (KFx) zastosowany został liniowy Filtr Kalmana dla układów ułamkowego rzędu (FKF) opisany w rozdziale 3.1. Jako estymator parametrów (KFw) użyty został UFKF dla estymacji parametrów układu ułamkowego opisany powyżej. Końcowe wartości estymowanych parametrów wynoszą  $a_0 = 0.1001$  i  $a_1 = 0.2013$ .

Parametry KFx:

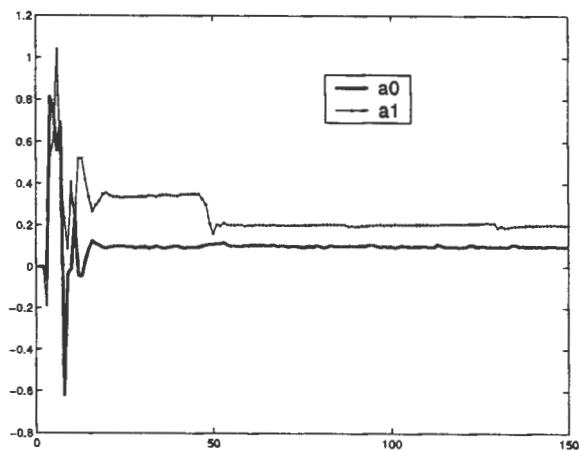
$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \\ x_0 = [0, 0], \quad R = [0.1]$$

Parametry KFw:

$$w = [a_0 \quad a_1]^T \\ P_0^w = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad Q_0^w = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \\ w_0 = [0, 0], \quad R^w = [0.1], \quad \alpha = 0.01$$



Rysunek 5. Wyniki estymacji dualnej, wektory stanu



Rysunek 6. Wyniki estymacji dualnej, estymowany parametr

#### 4.4. Estymacja dualna wektora stanu i ułamkowego rzędu układu

Umieszczając w wektorze parametrów estymowanych rząd układu otrzymujemy sposób na estymację tego rzędu. Dzięki zastosowaniu UFKF omijamy problem wyznaczania predykcji macierzy kowariancji, który nie jest trywialny przy użyciu liniowego FKF, patrz [3].

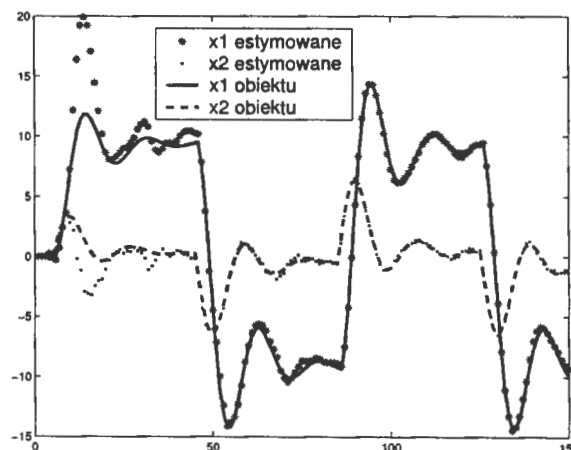
Parametry KFx:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \\ x_0 = [0, 0], \quad R = [0.1]$$

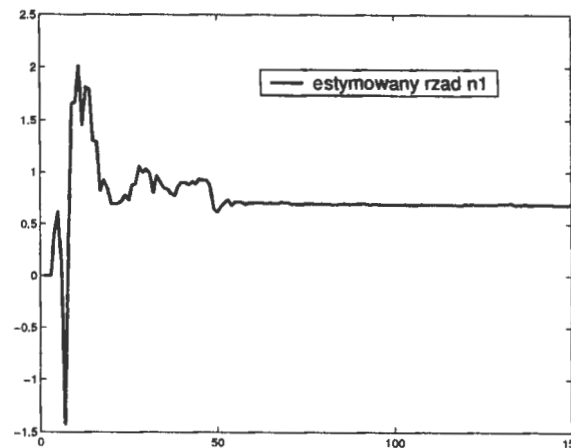
Parametry KFw:

$$w = [n_1] \\ P_0^w = [50] \quad Q_0^w = [0.0001] \\ w_0 = [0], \quad R^w = [0.05], \quad \alpha = 0.01$$

Wyniki estymacji dualnej wektora stanu i rzędu układu zostały przedstawione na rys. 7 i 8. Po początkowych zmianach wartość wektora rzędu dąży do wartości rzędu estymowanego modelu  $n_1 = 0.7$ . Końcowa wartość estymowanego rzędu układu to  $n_1 = 0.6929$ .



Rysunek 7. Wyniki estymacji dualnej stanu i rzędu, wektory stanu



Rysunek 8. Wyniki estymacji dualnej stanu i rzędu, estymowany rząd

## 5. PODSUMOWANIE

W artykule zaprezentowano różne sposoby estymacji parametrów układu o ułamkowym rzędzie różniczkowym. Przedstawiony został sposób identyfikacji parametrów przy użyciu zapisu układu w postaci równania różnicowego wraz z identyfikacją parametrów przykładowego obiektu. Kolejną grupą były algorytmy oparte na Filtrze Kalmana dla układów o ułamkowym rzędzie różniczkowym w postaci połączonej estymacji stanu i parametrów, jak i estymacji dualnej. Dla części z tych problemów okazało się koniecznym wprowadzenie Filtru Kalmana oparte o Unscented transformację. Przedstawiono wyniki estymacji połączonej przy użyciu tego filtru. Wprowadzono także jego odmianę dla estymacji parametrów w procesie estymacji dualnej i zaprezentowano wyniki takiej estymacji. Zastosowanie tego filtru umożliwiło także estymację ułamkowego rzędu układu. Wszystkie te wyniki zostały uzyskane przy obecności zaszumnionego wyjścia, co pokazuje odporność tych algorytmów.

### USING FRACTIONAL KALMAN FILTER FOR PARAMETERS OF FRACTIONAL SYSTEM ESTIMATION

**Abstract:** In this paper the use of Kalman Filter for fractional order systems parameters and order estimation is presented. The results of different methods eg. Joint Estimation, Dual Estimation are shown. The Unscented Kalman Filter for fractional order systems is also presented.

### Literatura

- [1] S. G. Samko *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993
- [2] K. S. Miller *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, December 9, 2002
- [3] D. Sierociuk *Fractional Kalman Filter algorithm for parameters and degree of fractional system estimation* International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2005 (in print), <http://www.isep.pw.edu.pl/dsieroci/fkf.pdf>
- [4] Simon Haykin *"Kalman Filtering and Neural Networks"* John Wiley & Sons, Inc., 2001
- [5] Joris De Schutter, Jan De Geeter, Tine Lefebvre, Herman Bruynickx *"Kalman Filters: A Tutorial"*, October 29, 1999 <http://citeseer.ist.psu.edu/443226.html>
- [6] A. T. Nelson, "Nonlinear Estimation and Modeling of Noisy Time-Series by Dual Kalman Filtering Methods", Oregon Graduate Institute of Science & Technology, 2000
- [7] S. Julier and J. Uhlmann "A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions", tech. rep., RRG, Dept. of Engineering Science, University of Oxford, Nov 1996. <http://citeseer.ist.psu.edu/julier96general.html>
- [8] Thierry Poinot, Jean-Claude Trigeassou *"Modelling and simulation of fractional systems using a non integer integrator"*, Proceedings of DETC.03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003
- [9] Podlubny I., Dorcak L., Kostial I. *"On fractional Derivatives, Fractional-Order Systems and  $PI^\alpha D^\mu$  - controllers"* Proceedings of the 36<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, December 10-12, 1997, San Diego, pp. 4985-4990.
- [10] J.I. Suarez, B. M. Vinagre, and Y. Q. Chen, "Spatial Path Tracking of an Autonomous Industrial Vehicle using Fractional Order Controllers," Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics, ICAR 2003, Jun-Jul 2003
- [11] Fernando B. M. Duarte, J. A. Tenreiro Machado, "Fractional-Order Dynamics in the Trajectory Control of Redundant Manipulators", INES'2001-5th International Conference on Intelligent Engineering Systems 2001,16-18/Sept/2001, Helsinki-Stockholm, Finland- Sweden
- [12] T. Söderström, P. Stoica, "Identyfikacja systemów" Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997



**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**