XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:

Zdzisław Bubnicki

Roman Kulikowski

Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

REFERATY PLENARNE

UKŁADY DODATNIE Z OPÓŹNIENIAMI

Tadeusz KACZOREK*

* Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny, Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, e-mail:kaczorek@isep.pw.edu.pl

Streszczenie: Przedstawiono syntetycznie aktualny stan badań dotyczących stabilności asymptotycznej i odpornej, osiągalności, sterowania z minimalną energią oraz wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych układów dyskretnych i ciągłych z opóźnieniami. Poza znanymi wcześniej publikowanymi, praca zawiera nowe wyniki niepublikowane oraz niektóre aktualne problemy otwarte w obszarze dodatnich liniowych układów z opóźnieniami.

Słowa kluczowe: układ dodatni, opóźnienie, osiągalność, stabilność, realizacja, minimalna energia.

1. WPROWADZENIE

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanu oraz odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykładami układów dodatnich są procesy przemysłowe zawierające reaktory chemiczne, wymienniki ciepła, kolumny destylacyjne itp. Układy dodatnie są określone na stożkach, a nie w przestrzeniach liniowych. Teoria takich układów jest, więc znacznie trudniejsza. Literatura dotycząca układów dodatnich jest już dość bogata [11, 13, 14]. Badania układów z opóźnieniami mają kilkunastoletnią historię i były przedmiotem wielu prac [12]. W ostatnich latach obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania badaniami dodatnich układów z opóźnieniami. Wynika to z zastosowania tych układów w różnych dziedzinach techniki, ekonomii, biologii, medycyny itp. Stabilność asymptotyczna i odporna (krzepka) dodatnich układów liniowych dyskretnych z opóźnieniami była badana w pracach [7, 8, 10, 17, 24]. Problemom osiągalności, sterowalności i sterowania z minimalną energią są poświęcone prace [5, 6, 9, 22, 27, 28]. Różne metody wyznaczania dodatnich realizacji układów dyskretnych i ciągłych zostały zaproponowane w pracach [15, 16, 18-21, 23]. W pracy tej zostanie przedstawiony aktualny stan badań w wybranych obszarach teorii dodatnich liniowych układów z opóźnieniami, a w szczególności dotyczących:

- Stabilności asymptotycznej i odpornej układów dyskretnych z opóźnieniami
- Osiągalność i sterowanie z minimalną energią tych układów
- Problem wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych dyskretnych i ciągłych układów z opóźnieniami

Poza znanymi, wcześniej publikowanymi wynikami praca ta zawiera również nowe wyniki dotychczas niepublikowane.
Zostaną też przedstawione niektóre aktualne problemy otwarte czekające na rozwiązanie.

2. DODATNIE UKŁADY DYSKRETNE

2.1. Układy bez opóźnień

Niech $R_+^{n\times m}$ będzie zbiorem $n\times m$ macierzy rzeczywistych z nieujemnymi elementami, oraz $R_+^n=R_+^{n\times 1}$.
Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

$$\overline{x}_{i+1} = A\overline{x}_i + Bu_i \qquad i\in Z_+=\{0,1,...\} \tag{2.1a}$$

$$y_i = C\overline{x}_i + Du_i \tag{2.1b}$$

przy czym $\overline{x}_i\in R^{\overline{n}}$, $u_i\in R^m$ i $y_i\in R^p$ są wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej $i\in Z_+$, a $A\in R^{\overline{n}\times\overline{n}}$, $B\in R^{\overline{n}\times m}$, $C\in R^{p\times\overline{n}}$, $D\in R^{p\times m}$.

Definicja 2.1. *Układ nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0\in R_+^{\overline{n}}$ oraz dodatniego ciągu $u_i\in R_+^m$, $i\in Z_+$ zachodzi $\overline{x}_i\in R_+^{\overline{n}}$ i $y_i\in R_+^p$ dla wszystkich $i\in Z_+$.*

Twierdzenie 2.1. [10, 11] *Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A\in R_+^{\overline{n}\times\overline{n}},\ B\in R_+^{\overline{n}\times m},\ C\in R_+^{p\times\overline{n}},\ D\in R_+^{p\times m} \tag{2.2}$$

2.2. Układy z opóźnieniami

Weźmy teraz pod uwagę układ dyskretny z q opóźnieniami opisany równaniami

$$x_{i+1} = A_0x_i + A_1x_{i-1} + \ldots + A_qx_{i-q} + B_0u_i \tag{2.3a}$$

$$y_i = C_0 x_i + Du_i \tag{2.3b}$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$, $y_i \in R^p$ są wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a $A_k \in R^{n \times n}$, $k=0,1,\dots,q$, $B_0 \in R^{n \times m}$, $C_0 \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$.

Warunki początkowe dla (3a) dane są w postaci

$$x_{-k} \in R^n \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\dots,q \tag{2.4}$$

Definiując

$$\overline{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_{i-q} \end{bmatrix} \in R^{\overline{n}}, \quad \overline{n} = (q+1)n, \quad A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & & A_q \\ I_n & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix} \in R^{\overline{n} \times \overline{n}}$$
$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{\overline{n} \times m}, \quad C = [C_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in R^{p \times \overline{n}} \tag{2.5}$$

możemy równania (3) napisać w postaci (1).

Definicja 2.2. *Układ (3) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_k \in R_+^n$, $k=0,1,\dots,q$ i dodatniego ciągu wymuszeń $u_i \in R_+^m$, $i \in Z_+$ zachodzi $x_i \in R_+^n$ oraz $y_i \in R_+^p$ dla wszystkich $i \in Z_+$.*

Twierdzenie 2.2. *Układ (3) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_k \in R_+^{n \times n}, k = 0,1,\dots,q, B_0 \in R_+^{n \times m}, C_0 \in R_+^{p \times n}, D \in R_+^{p \times m} \tag{2.6}$$

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 1 układ (3) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A, B, C określone przez (5) oraz macierz D spełniają warunki (2), które są równoważne warunkom (6).

3. STABILNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNYCH

3.1. Warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej

Układ dodatni (2.1) nazywamy stabilnym asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie $\overline{x}_i = A^i \overline{x}_0$, $i \in Z_+$ równania

$$\overline{x}_{i+1} = A\overline{x}, A \in R_+^{\overline{n} \times \overline{n}} \tag{3.1}$$

z warunkiem początkowym $x_0 \in R_+^{\overline{n}}$ spełnia warunek

$$\lim_{i \to \infty} \overline{x}_i = 0 \text{ dla każdego } \overline{x}_0 \in R_+^{\overline{n}} \tag{3.2}$$

Jak wiadomo [11, 12] układ dodatni (2.1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $z_1, z_2, \dots, z_{\overline{n}}$ macierzy A (pierwiastków równania $\det[I_{\overline{n}} z - A] = 0$) mają moduły mniejsze od 1, czyli

$$|z_k| < 1 \text{ dla } k = 1,2,\dots,\overline{n} \tag{3.3}$$

Twierdzenie 3.1. [11, 12] *Układ dodatni (2.1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki wielomianu charakterystycznego*

$$\det[I_{\overline{n}} z - A + I_{\overline{n}}] = z^{\overline{n}} + \overline{a}_{\overline{n}-1} z^{\overline{n}-1} + \dots + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0 \tag{3.4}$$

są dodatnie $\overline{a}_i > 0$ dla $i = 0,1,\dots,\overline{n}-1$.

Twierdzenie 3.2. [11, 12] *Układ dodatni (2.1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}] = I_{\overline{n}} - A$ są dodatnie, czyli*

$$|\overline{a}_{11}| > 0, \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \overline{a}_{13} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \overline{a}_{23} \\ \overline{a}_{31} & \overline{a}_{32} & \overline{a}_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det \overline{A} > 0 \tag{3.5}$$

Korzystając z (2.5) oraz działań elementarnych na wierszach i kolumnach (które nie zmieniają wartości wyznacznika) otrzymamy

$$\det[I_{\overline{n}} z - A] = \det \begin{bmatrix} I_n z - A_0 & -A_1 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & I_n z & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n z \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & I_n z^2 - A_0 z - A_1 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n z \end{bmatrix} = \dots =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & I_n z^{q+1} - A_0 z^q - \dots - A_{q-1} - A_q \\ -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \det[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - \dots - A_{q-1} - A_q] =$$
$$= z^{\overline{n}} + a_{\overline{n}-1} z^{\overline{n}-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Zostało, więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.3. *Układ dodatni z opóźnieniami (2.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki równania*

$$\begin{aligned} &\det[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - \dots - A_{q-1} - A_q] = \\ &= z^{\overline{n}} + a_{\overline{n}-1} z^{\overline{n}-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

mają moduły mniejsze od 1.

Korzystając z (2.5) oraz działań elementarnych na wierszach i kolumnach otrzymamy

$$\det\left[I_{\bar{n}}z-A\right]=\det\begin{bmatrix} I_n(z+1)-A_0 & -A_1 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & I_n(z+1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n(z+1) \end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix} I_n(z+1)-A_0 & I_n(z+1)^2-A_0(z+1)-A_1 & -A_2 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n(z+1) \end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix} 0 & I_n(z+1)^2-A_0(z+1)-A_1 & -A_2 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n(z+1) \end{bmatrix}=\dots=$$

$$=\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & M_q(z) \\ -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

przy czym

$$M_q(z)=I_n(z+1)^{q+1}-A_0(z+1)^q-A_1(z+1)^{q-1}+\dots$$
$$\dots-A_{q-1}(z+1)-A_q \tag{3.8}$$

Twierdzenie 3.4. *Układ dodani opisany równaniami (2.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego*

$$\det M_q(z)=z^{\bar{n}}+\bar{a}_{\bar{n}-1}z^{\bar{n}-1}+\dots+\bar{a}_1 z+\bar{a}_0 \tag{3.9}$$

są dodatnie, czyli $\bar{a}_i>0$ *dla* $i=0,1,\dots,\bar{n}-1$.

Dowód. Z zależności (7) i (8) wynika, że równanie charakterystyczne $\det[I_n(z+1)-A]=0$ jest równe $\det M_q(z)=0$. Stosując twierdzenie 1 do układu (2.3) napisanego w postaci (2.1) otrzymujemy tezę twierdzenia.

■

Stosując twierdzenie 2 do układu z opóźnieniami (2.3) w postaci (2.1) otrzymamy natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5. *Układ dodatni z opóźnieniami (2.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy*

$$\bar{A}=I_{\bar{n}}-A=\begin{bmatrix} I_n-A_0 & -A_1 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

są dodatnie.

3.2. Warunki wystarczające niestabilności asymptotycznej

Wykażemy, że niestabilność układu dodatniego bez opóźnień

$$x_{i+1}=A_0x_i,\quad A_0\in R_+^{n\times n} \tag{3.11}$$

implikuje niestabilność układu dodatniego z opóźnieniami (2.3).

Twierdzenie 3.6. *Układ dodatni z opóźnieniami (2.3) jest niestabilny jeżeli układ dodatni bez opóźnień (11) jest niestabilny.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 2 układ dodatni (11) jest niestabilny, jeżeli przynajmniej jeden minor główny macierzy $\bar{A}_0=\left[\bar{a}_{ij}^0\right]=I_n-A_0$ nie jest dodatni. Układ dodatni (2.3) jest więc niestabilny jeżeli przynajmniej jeden z minorów głównych macierzy

$$I_{\bar{n}}-A=\begin{bmatrix} I_n-A_0 & -A_1 & \dots & -A_{q-1} & -A_q \\ -I_n & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & I_n \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

nie jest dodatni. Z zależności (12) wynika, że jeżeli przynajmniej jeden z minorów głównych macierzy I_n-A_0 nie jest dodatni wtedy przynajmniej jeden z minorów głównych macierzy (12) nie jest również dodatni. Niestabilność układu (11) implikuje, więc niestabilność układu dodatniego (2.3).

■

Z twierdzenia 6 wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.1. *Jeżeli układ dodatni (11) jest niestabilny wtedy nie można ustabilizować układu dodatniego (2.3) poprzez odpowiedni dobór macierzy* A_k, $k=1,\dots,q$.

Twierdzenie 3.7. *Układ dodatni (2.3) jest niestabilny jeżeli przynajmniej jeden element na diagonali macierzy* $A_0=[a_{ij}^0]$ *jest większy od 1, czyli*

$$a_{kk}^0>1 \text{ dla pewnego } k\in(1,2,\dots,n) \tag{3.13}$$

Dowód. Jak wiadomo [11, 15, 6] układ dodatni (11) jest niestabilny jeżeli przynajmniej dla jednego $k\in(1,2,\dots,n)$ zachodzi (13). W tym przypadku zgodnie z twierdzeniem 6 układ dodatni (2.3) jest również niestabilny.

■

3.3. Stabilność odporna

Weźmy pod uwagę dodatni układ dyskretny z opóźnieniami opisany równaniem

$$x_{i+1}=\sum_{k=0}^{q}A_kx_{i-k},\ A_k\in[A_k^-,A_k^+]\in R_+^{n\times n} \text{ dla } k=0,1,\dots,q. \tag{3.14}$$

Układ (14) nazywamy układem przedziałowym z opóźnieniami.

Definicja 3.1. *Układ przedziałowy (14) nazywamy odpornie stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy układ*

$$x_{i+1}=\sum_{k=0}^{q}A_kx_{i-k} \tag{3.15}$$

jest stabilny asymptotycznie dla wszystkich $A_k \in [A_k^-, A_k^+] \in R_+^{n \times n}$ $(k=0,1,\ldots,q)$. Jeżeli $A_k \in [A_k^-, A_k^+] \in R_+^{n \times n}$ dla wszystkich $k=0,1,\ldots,q$ wtedy

$$A \in A_I = [A^-, A^+] \in R_+^{\tilde{n} \times \tilde{n}} \tag{3.16}$$

przy czym

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-1} & A_q \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \in R_+^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$$

oraz

$$A^- = \begin{bmatrix} A_0^- & A_1^- & \cdots & A_{q-1}^- & A_q^- \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad A^+ = \begin{bmatrix} A_0^+ & A_1^+ & \cdots & A_{q-1}^+ & A_q^+ \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Twierdzenie 3.8. *Dodatni układ przedziałowy z opóźnieniami (14) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy układ dodatni bez opóźnień*

$$\tilde{x}_{i+1} = A^+ \tilde{x}_i, \quad i \in Z_+ \tag{3.18}$$

jest stabilny asymptotycznie lub równoważnie, gdy jest stabilny asymptotycznie układ dodatni z opóźnieniami

$$x_{i+1} = A_0^+ x_0 + \sum_{k=1}^{h} A_k^+ x_{i-k}, \; i \in Z_+ \tag{3.19}$$

Dowód tego twierdzenia wynika z faktu, że wszystkie wartości własne dowolnej nieujemnej macierzy $A_k \in [A_k^-, A_k^+]$ mają moduły mniejsze od 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A^+ mają moduły mniejsze niż 1 [2].

Z twierdzenia 8 wynika, że stabilność odporna układu przedziałowego (14) nie zależy od macierzy $A_k^- \in R_+^{n \times n}$, $(k=0,1,\ldots,q)$. Można, więc przyjąć $A_k^-=0$ $k=0,1,\ldots,q$. Ponadto, jeżeli układ (15) jest stabilny asymptotycznie dla ustalonej macierzy $A_k = A_{kf} \in R_+^{n \times n}$, $k=0,1,\ldots,q$ wtedy układ ten jest również stabilny asymptotycznie dla wszystkich $A_k \in [0, A_{kf}]$, $k=0,1,\ldots,q$.

Układ (19) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki równania

$$\det(z^{h+1} I_n - \sum_{k=0}^{q} A_k^+ z^{q-k}) = z^{\tilde{n}} + \bar{a}_{\tilde{n}-1} z^{\tilde{n}-1} + \ldots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 = 0 \tag{3.20}$$

mają moduły mniejsze od 1.

Z powyższych rozważań oraz twierdzeń 4 i 5 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.9. *Układ dodatni przedziałowy z opóźnieniami jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących równoważnych warunków:*

i. *Wszystkie współczynniki wielomianu*

$$\begin{aligned} \det[(z+1)I_{\tilde{n}} - A^+] &= \det M_q^+(z) = \\ &= z^{\tilde{n}} + \tilde{a}_{\tilde{n}-1} z^{\tilde{n}-1} + \ldots + \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

są dodatnie, czyli $\tilde{a}_i > 0$ dla $i = 0,1,\ldots,\tilde{n}-1$, gdzie $\tilde{n} = (q+1)n$, macierz A^+ ma postać (13) oraz

$$M_h^+(z) = (z+1)^{q+1} I_n - \sum_{k=0}^{q} A_k^+ (z+1)^{q-k} \tag{3.22}$$

ii. *Wszystkie minory główne macierzy*

$$\bar{A}^+ = I_{\tilde{n}} - A^+ = \begin{bmatrix} I_n - A_0^+ & -A_1^+ & \cdots & -A_{q-1}^+ & -A_q^+ \\ -I_n & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & I_n \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

są dodatnie.

Twierdzenie 3.10. *Dodatni układ przedziałowy z opóźnieniami nie jest odpornie stabilny, jeżeli*

i. *Układ dodatni bez opóźnienia*

$$x_{i+1} = A_0^+ x_i, \quad i \in Z_+, \tag{3.24}$$

jest niestabilny

ii. *Przynajmniej jeden element na diagonali macierzy $A_0^+ = [a_{ij}^{0+}]$ jest większy, od 1, czyli*

$$a_{kk}^{0+} > 1 \quad \text{dla pewnego } k \in (1,2,\ldots,n) \tag{3.25}$$

Dowód. Zauważmy, że niestabilność układu dodatniego bez opóźnień

$$x_{i+1} = A_0 x_i, \quad i \in Z_+ \tag{3.26}$$

implikuje niestabilność układu dodatniego z opóźnieniami (15). Dowód warunku (i) wynika z faktu, że stabilność asymptotyczna układu (26) dla $A_0 \in [A_0^-, A_0^+] \in R_+^{n \times n}$ jest równoważna stabilności asymptotycznej układu (21) dla $A_0 = A_0^+$.

Układ dodatni (15) jest stabilny, jeżeli przynajmniej jeden element diagonali macierzy $A_0 = [a_{ij}^0]$ jest większy od 1 [15]. Zatem warunek $A_0 \in [A_0^-, A_0^+] \in R_+^{n \times n}$ jest spełniony, gdy jest spełniony warunek (25).

4. OSIĄGALNOŚĆ I STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ

4.1. Osiągalność

Rozwiązanie równania (2.1) dla zerowych warunków początkowych ma postać

$$x(i) = \sum_{r=0}^{i-1} \Phi(i-1-r)Bu(r) \tag{4.1}$$

przy czym

$$\Phi(i) = Z^{-1}\{(zI - A_0 - \sum_{k=1}^{q} A_k z^{-k})^{-1} z\} \tag{4.2}$$

jest macierzą tranzycji, a Z^{-1} jest operatorem odwrotnego przekształcenia zet [3]. Macierz tranzycji spełnia równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1) + \ldots + A_h\Phi(i-h) \tag{4.3}$$

z warunkami początkowymi

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Phi(i) = 0 \quad dla \quad i < 0 \tag{4.4}$$

Definicja 4.1. *Układ dodatni (2.1) nazywamy:*

i. *Osiągalnym w N krokach, jeżeli dla każdego stanu końcowego $x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in R_+^m$, $i=0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza układ ten z zerowego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego $x_N = x_f$.*

ii. *Osiągalnym, jeżeli dla każdego stanu końcowego $x_f \in R_+^n$ oraz zerowego stanu początkowego istnieje $N \in Z_+$ oraz $u_i \in R_+^m$, $i=0,\ldots,N-1$ takie, że $x_N = x_f$.*

Z zależności (1) dla $i=N>0$ oraz zerowych warunków początkowych mamy

$$x_N = R_N u_0^N \tag{4.5}$$

przy czym

$$R_N = [\Phi(N-1)B, \Phi(N-2)B, \ldots, \Phi(1)B, B] \tag{4.6}$$

$$u_0^N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Twierdzenie 4.1. *Zbiór stanów osiągalnych układu dodatniego jest dodatnim stożkiem wypukłym. Stożek ten jest solidny (o niepustym wnętrzu) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $N \in Z_+$ takie, że rząd macierzy osiągalności (6) jest równy n.*

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [5].

Twierdzenie 4.2. *Układ dodatni (2.1) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $N \in Z_+$ takie, że rząd $R_N = n$ oraz*

i. *istnieje macierz nieosobliwa $\bar{R}_N$ składająca się z n kolumn macierzy R_N takich, że $\bar{R}_N^{-1} \in R_+^{n \times n}$, lub równoważnie*

ii. *macierz $\bar{\mathbf{R}}_N^{-1} \in R_+^{n \times n}$ zawiera n liniowo niezależnych kolumn monomialnych (tylko jeden element dodatni, wszystkie pozostałe równe zeru)*

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli układ dodatni (2.1) jest osiągalny to jest on osiągalny w N krokach przy czym $N \geq E[n/q]$, gdzie $E[n/q]$ oznacza najmniejszą liczbę dodatnią większą lub równą n/q, a q jest liczbą liniowo niezależnych kolumn monomialnych macierzy B.*

Dowód tego twierdzenia podany jest w pracy [6].

Twierdzenie 4.4. *Układ dodatni (2.1) jest osiągalny jeżeli istnieje $N \in Z_+$ takie, że rząd $R_N = n$ oraz*

$$R_N^T [R_N R_N^T]^{-1} \in R_+^{Nm \times n} \tag{4.8}$$

Jeżeli jest spełniony warunek (8) to ciąg wymuszeń $u_i \in R_+^m$, $i=0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza układ (2.1) z zerowego stanu początkowego do stanu końcowego $x_f \in R_+^n$ można wyznaczyć z zależności

$$u_0^N = R_N^T [R_N R_N^T]^{-1} x_f \tag{4.9}$$

4.2. Sterowanie z minimalną energią

Weźmy pod uwagę układ dodatni (2.1) oraz wskaźnik jakości

$$I(u) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^T Q u_i \tag{4.10}$$

gdzie $Q \in R^{m \times m}$ jest symetryczną dodatnio określoną macierzą wag taką, że

$$Q^{-1} \in R_+^{m \times m} \tag{4.11}$$

a N jest liczbą kroków, w której układ jest przeprowadzany ze stanu zerowego do stanu końcowego x_f.

Zadanie sterowania z minimalną energią układu dodatniego (2.1) można sformułować następująco. Dane są macierze $A_k \in R_+^{n \times n}$, $(k=0,1,..,q)$, $B \in R_+^{n \times m}$, liczba kroków N, stan końcowy $x_f \in R_+^n$ oraz macierz wag Q spełniająca warunek (11). Należy wyznaczyć ciąg wymuszeń $u_i \in R_+^m$, $i=0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza ten układ ze stanu zerowego do stanu końcowego $x_f \in R_+^n$ oraz minimalizuje wskaźnik jakości (10).

Aby rozwiązać to zadanie definiujemy macierze

$$W = R_N \bar{Q}_N R_N^T \in R_+^{n \times n} \tag{4.12}$$

$$\bar{Q}_N = diag[Q^{-1},...,Q^{-1}] \in R_+^{Nm\times Nm} \quad (4.13)$$

Macierz W jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $R_N=n$.
Definiujemy ciąg wymuszeń $\hat{u}_0,\hat{u}_1,\dots,\hat{u}_{N-1}$ zależnością

$$\hat{u}_0^N = \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1} \end{bmatrix} = \bar{Q}_N R_N^T W^{-1} x_f \quad (4.14)$$

Zauważmy, że $\hat{u}_0^N \in R_+^{Nm}$ dla dowolnego $x_f \in R_+^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bar{Q}_N R_N^T W^{-1} \in R_+^{Nm\times n} \quad (4.15)$$

Twierdzenie 4.5. *Niech układ dodatni (2.1) będzie osiągalny w N krokach. Wtedy ciąg wymuszeń określony przez (14) przeprowadza ten układ z zerowego stanu początkowego do stanu $x_f \in R_+^n$ i minimalizuje wskaźnik jakości (10). Ponadto minimalna wartość wskaźnika jakości jest określona zależnością*

$$I(\hat{u}) = x_f^T W^{-1} x_f \quad (4.16)$$

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracach [6].

Wniosek 4.1. *Jeżeli $Q=qI_m$, $q>0$ to $\hat{u}_0^N = u_0^N$, a minimalna wartość wskaźnika jakości jest równa*

$$I(\hat{u}) = q x_f^T [R_N R_N^T]^{-1} x_f \quad (4.17)$$

5. WYZNACZANIE DODATNICH REALIZACJI UKŁADÓW DYSKRETNYCH

5.1. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę dyskretny układ o jednym wejściu i jednym wyjściu z q opóźnieniami

$$x_{i+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + \dots + A_h x_{i-q} + b u_i \quad (5.1a)$$

$$y_i = c x_i + d u_i, \quad i \in Z_+ = \{0,1,\dots\} \quad (5.1b)$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R$, $y_i \in R$ są wektorami stanu, wymuszeniem i odpowiedzią, a $A_k \in R^{n\times n}$, $k=0,1,\dots,q$, $c \in R^{1\times n}$, $d \in R$.

Warunki początkowe dla (1a) mają postać

$$x_{-k} \in R^n \quad dla \quad k=0,1,\dots,q \quad (5.2)$$

Zgodnie z twierdzeniem 2.2 układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_k \in R_+^{n\times n}, k=0,1,\dots,q, b \in R_+^n, c \in R_+^{1\times n}, d \in R_+ \quad (5.3)$$

Transmitancja układu (1) ma postać

$$T(z) = c\left[I_n z - A_0 - A_1 z^{-1} - \dots - A_q z^{-q}\right]^{-1} b + d \quad (5.4)$$

Definicja 5.1. *Macierze (3) nazywamy dodatnią realizacją transmitancji T(z) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają one równość (4). Realizację nazywamy minimalną wtedy i tylko wtedy, gdy wymiary macierzy A_k, $k=0,1,\dots,q$ są najmniejsze wśród wszystkich realizacji tej transmitancji T(z).*

Zadanie wyznaczania dodatniej realizacji minimalnej można sformułować następująco:

Dana jest właściwa transmitancja $T(z)$. Należy wyznaczyć dodatnią realizację minimalną macierzy $T(z)$.

Zostaną podane warunki wystarczające istnienia dodatniej realizacji minimalnej oraz procedura wyznaczania tej realizacji.

5.2. Rozwiązanie zadania

Transmitancję (4) można napisać w postaci

$$(5.5)$$

$$T(z) = \frac{z^k c[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q]_{ad} b}{\det[I_q z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q]} + d = \frac{n(z)}{d(z)} + d$$

przy czym

$$(5.6)$$

$$n(z) = z^q c[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q]_{ad} b = n_{N-1} z^{N-1} + n_{N-2} z^{N-2} + \dots + n_h z^q$$
$$d(z) = \det[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q] = z^N - a_{N-1} z^{N-1} - \dots - a_1 z - a_0$$

a M_{ad} oznacza macierz dołączoną macierzy M, $N=n(q+1)$.
Z zależności (5) mamy

$$d = \lim_{z\to\infty} T(z) \quad (5.7)$$

gdyż $\lim_{z\to\infty}\left[I_n z - A_0 - A_1 z^{-1} - \dots - A_q z^{-q}\right]^{-1} = 0$.
Część ściśle właściwa transmitancji $T(z)$ jest równa

$$T_{sp}(z) = T(z) - d = \frac{n(z)}{d(z)} \quad (5.8)$$

Zadanie wyznaczania dodatniej realizacji zostało sprowadzone do wyznaczenia macierzy

$$A_k \in R_+^{n\times n}, k=0,1,\dots,q, b \in R_+^n, c \in R_+^{1\times n} \quad (5.9)$$

dla danej ściśle właściwej transmitancji (8).

Lemat 5.1. *Ściśle właściwa transmitancja (8) ma postać*

$$T_{sp}(z)=\frac{n'(z)}{d'(z)} \tag{5.10}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy det $A_q=0$, przy czym

$$\begin{aligned} n'(z)&=\frac{n(z)}{z}, \\ d'(z)&=z^{N-1}-a_{N-1}z^{N-2}-\ldots-a_2z-a_1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dowód. Z postaci wielomianu $d(z)$ dla $z=0$ wynika, ze a_0=det A_q. Zauważmy, że $d(z)=zd'(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0=0$, a zależność (8) redukuje się do postaci (10) wtedy i tylko wtedy, gdy det $A_q=0$.

■

Lemat 5.2. *Jeżeli macierze A_q, $k=01,\ldots,q$ mają jedną z niżej podanych postaci*

$$A_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_q & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2q+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N-3q-4} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{N-2q-3} & 0 & \ldots & 0 & a_{N-q-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{q-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2q} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N-3q-5} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{N-2(q+2)} & 0 & \ldots & 0 & a_{N-q-3} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N-2} \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{q-2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2q-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N-3(q+2)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{N-2q-5} & 0 & \ldots & 0 & a_{N-q-4} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N-3} \end{bmatrix},\ldots$$

$$\ldots, A_k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{q+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-4(q+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{N-3(q+1)} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & a_{N-2(q+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{N-(q+1)} \end{bmatrix} \tag{5.12a}$$

$$\bar{A}_k=A_k^T, k=0,1,\ldots,q \tag{5.12b}$$

$$\hat{A}_k=PA_kP, k=0,1,\ldots,q,\ P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.12c}$$

$$\tilde{A}_k=\hat{A}_k^T, k=0,1,\ldots,q, \tag{5.12d}$$

$$A_0'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2q+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N-2q-3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{N-q-2} & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$A_1'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{q-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2q} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N-2(q+2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{N-q-3} & 0 & \cdots & 0 & a_{N-2} \end{bmatrix}$$

$$A_2'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{q-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2q-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N-2q-5} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{N-q-4} & 0 & \cdots & 0 & a_{N-3} \end{bmatrix},\ldots$$

$$\ldots, A_k'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{q+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-3(q+1)} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ a_{N-2(q+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{N-(q+1)} \end{bmatrix} \tag{5.12e}$$

$$\bar{A}_k{}'=(A_k')^T,\ k=0,1,\ldots,q \tag{5.12f}$$

$$\hat{A}'_k=PA_k'P, k=0,1,\ldots,q \tag{5.12g}$$

$$\tilde{A}_k'=(\hat{A}_k')^T, k=0,1,\ldots,q \tag{5.12h}$$

wtedy

$$\begin{aligned} &\det\left[I_nz^{q+1}-A_0z^q-A_1z^{q-1}-\cdots-A_q\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-\bar{A}_0z^q-\bar{A}_1z^{q-1}-\cdots-\bar{A}_q\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-\hat{A}_0z^q-\hat{A}_1z^{q-1}-\cdots-\hat{A}_q\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-\tilde{A}_0z^q-\tilde{A}_1z^{q-1}-\cdots-\tilde{A}_q\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-A_0'z^q-A_1'z^{q-1}-\cdots-A_q'\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-\bar{A}_0'z^q-\bar{A}_1'z^{q-1}-\cdots-\bar{A}_q'\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-\hat{A}_0'z^q-\hat{A}_1'z^{q-1}-\cdots-\hat{A}_q'\right]= \\ &=\det\left[I_nz^{q+1}-\tilde{A}_0'z^q-\tilde{A}_1'z^{q-1}-\cdots-\tilde{A}_q'\right]= \\ &=z^N-a_{N-1}z^{N-1}-a_{N-2}z^{N-2}-\cdots a_1z-a_0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Dowód. Rozwijając wyznacznik według pierwszego wiersza otrzymujemy

$$\det\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \cdots - A_q\right] =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc} z^{q+1} & 0 & 0 \\ -a_h z^q - a_{q-1}z^{q-1} - \cdots - a_0 & z^{q+1} & 0 \\ -a_{2q+1}z^q - a_{2q}z^{q-1} - \ldots - a_{q+1} & -1 & z^{q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{N-3q-4}z^q - a_{N-3q-5}z^{q-1} - \cdots - a_{N-4(q+1)} & 0 & 0 \\ -a_{N-2q-3}z^q - a_{N-2(q+2)}z^{q-1} - \cdots - a_{N-3(q+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{q+1} & z^{q+1} & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -1 & z^{q+1} & \ldots & -a_{N-q-2}z^q - a_{N-q-3}z^{q-1} - \cdots - a_{N-2(q+1)} \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & z^{q+1} - a_{N-1}z^q - a_{N-2}z^{q-1} - \cdots - a_{N-(q+1)} \end{array}\right| =$$

$$= z^{(n-2)(h+1)}\begin{vmatrix} z^{q+1} & -a_{N-q-2}z^q - a_{N-q-3}z^{q-1} - \cdots - a_{N-2(q+1)} \\ -1 & z^{q+1} - a_{N-1}z^q - a_{N-2}z^{q-1} - \cdots - a_{N-(q+1)} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n+2}\left|\begin{array}{cc} -a_q z^q - a_{q-1}z^{q-1} - \cdots - a_0 & z^{q+1} \\ -a_{2q+1}z^q - a_{2q}z^{q-1} - \cdots - a_{q+1} & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -a_{N-2q-3}z^q - a_{N-2(q+2)}z^{q-1} - \cdots - a_{N-3(q+1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ \ldots & -1 & z^{q+1} \\ \ldots & 0 & -1 \end{array}\right| = \ldots = z^N - a_{N-1}z^{N-1} - a_{N-2}z^{N-2} - \cdots - a_1 z - a_0$$

Dowód zależności (12b) wynika natychmiast z równości

$$\det\left[I_n z^{q+1} - \overline{A}_0 z^q - \overline{A}_1 z^{q-1} - \cdots - \overline{A}_q\right] =$$
$$= \det\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \cdots - A_q\right]^T =$$
$$= \det\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \cdots - A_q\right]$$

Biorąc pod uwagę (12c) oraz, że $P^{-1}=P^T=P$ otrzymamy

$$\det\left[I_n z^{q+1} - \hat{A}_0 z^q - \hat{A}_1 z^{q-1} - \cdots - \hat{A}_q\right] =$$
$$= \det\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \cdots - A_q\right]$$

Dowód dla (12d) jest podobny do dowodu dla (12b). Dowody w pozostałych przypadkach są analogiczne.

■

Uwaga 5.1. *Macierze (12) mają nieujemne elementy wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki a_k, $k=0,1,\ldots,N-1$ wielomianu (13) są nieujemne.*

Uwaga 5.2. *Wymiary macierzy (12) są najmniejsze spośród możliwych dla (8).*

Definicja 5.2. *Macierze A_k, $k=0,1,\ldots,q$ nazywamy cyklicznymi wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny*

$$d(z) = \det[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \ldots - A_q] = \\ = z^N - a_{N-1}z^{N-1} - a_{N-2}z^{N-2} - \ldots - a_1 z - a_0 \tag{5.14}$$

pokrywa się z wielomianem minimalnym $\Psi(z)$ czyli $d(z)=\Psi(z)$.

Jak wiadomo wielomiany te są związane zależnością

$$\Psi(z) = \frac{d(z)}{D_{n-1}(z)} \tag{5.15}$$

a $d(z)=\Psi(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $D_{n-1}(z)=1$, gdzie $D_{n-1}(z)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia $n-1$ macierzy

$$[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \ldots - A_q] \tag{5.16}$$

Lemat 5.3. *Macierze (12) są cykliczne dla dowolnych wartości współczynników A_k, $k=0,1,\ldots,N-1$.*

Dowód. Szczegóły dowodu zostaną podane tylko dla macierzy (12a), dowód w pozostałych przypadkach jest podobny. Minor stopnia $n-1$-go otrzymany przez wykreślenie drugiego wiersza i pierwszej kolumny macierzy (16) jest równy $(-1)^{n-1}$. Wobec tego $D_{n-1}(z)=1$, a z zależności (15) otrzymamy $\Psi(z)=d(z)$.

■

Macierz odwrotna macierzy (16) przyjmuje postać

$$\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \cdots - A_q\right]^{-1} = \frac{N(z)}{d(z)} \tag{5.17}$$

przy czym $N(z)$ jest $n \times n$ macierzą wielomianową, a $d(z)$ jest określony przez (14).

Macierz (17) nazywamy w postaci standardowej, jeżeli macierz $N(z)/d(z)$ jest nieredukowalna, a współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $d(z)$ jest równy 1.

Definicja 5.3. *Macierz standardowa (17) dla $n \geq 2$ jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy minor drugiego stopnia macierzy wielomianowej $N(z)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $d(z)$.*

Lemat 5.4. *Macierz standardowa (17) dla $n \geq 2$ jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A_k, $k=0,1,\ldots,q$ są cykliczne.*

Dowód. *Dostateczność.* Niech macierze A_k, $k=0,1,\ldots,q$ będą cykliczne. Wtedy zgodnie z definicją $\Psi(z)=d(z)$ i postać kanoniczna Smitha macierzy (16) ma postać

$$\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \cdots - A_q\right]_S = \\ = diag[1,1,\ldots,1,d(z)] \tag{5.18}$$

Macierz dołączona macierzy (18) ma postać

$$\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q\right]_{S_{ad}} = \\ = diag[d(z), d(z), .., d(z), 1] \tag{5.19}$$

Każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy (19) dzieli się bez reszty przez $d(z)$. Zgodnie z twierdzeniem Bineta-Cauchy'ego każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy

$$V(z)\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q\right]_{S_{ad}} U(z) \tag{5.20}$$

również dzieli się bez reszty przez $d(z)$, gdyż jest sumą iloczynów minorów stopnia drugiego macierzy unimodularnych $V(s)$, $U(s)$ oraz (19). Tak, więc macierz (17) jest macierzą normalną.

Konieczność. Udowodnimy to metodą przez zaprzeczenie. Z założenia macierz (17) jest nieredukowalna. Przypuśćmy, że macierz (17) nie jest cykliczna. Wtedy $\Psi(z) \neq d(z)$ oraz zgodnie z (15) $D_{n-1}(z) \neq 1$. W tym przypadku $d(z) = D_{n-1}(z)\Psi(z)$ a więc macierz (17) jest redukowalna. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc macierz (17) jest cykliczna.

■

Lemat 5.5. *Jeżeli macierze A_k, $k=0,1,\dots,q$ mają postać (12a) wtedy macierz dołączoną*

$$\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q\right]_{ad}$$

można rozłożyć następująco

$$N(z) = \left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q\right]_{ad} = \\ = \overline{P}(z)\overline{Q}(z) + d(z)\overline{G}(z) \tag{5.21}$$

gdzie

$$\overline{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ p_2(z) \\ p_3(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

$$p_2(z) = z^{N-(q+1)} - a_{N-1} z^{N-(q+2)} - a_{N-2} z^{N-(q+3)} - \dots - a_{q+2} z - a_{q+1}$$

$$p_3(z) = z^{N-2(q+1)} - a_{N-1} z^{N-(2q+3)} - a_{N-2} z^{N-2(q+2)} - \dots - a_{2q+3} z - a_{2(q+1)}$$

....

$$p_{n-1}(z) = z^{2(q+1)} - a_{N-1} z^{2q+1} - a_{N-2} z^{2q} - \dots - a_{N-(q+1)} z^{q+1}$$

$$p_n(z) = z^{q+1}$$

$$\overline{Q}(z) = [q_1(z) \vdots q_3(z) \dots q_n(z)]$$

$$q_1(z) = z^{N-(q+1)} - a_{N-1} z^{N-(q+2)} - a_{N-2} z^{N-(q+3)} + \dots \\ \dots a_{N-2(q+1)} z^{N-3(q+1)}$$

.... (5.23)

$$q_{n-1}(z) = z^{N-3(q+1)}$$

$$q_n(z) = z^{N-2(q+1)}$$

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & * & \dots & * & * \\ * & 0 & * & \dots & * & * \end{bmatrix}$$

(* oznacza elementy nieistotne w tych rozważaniach)

Podobne rozkłady są prawdziwe dla macierzy (12b)-(12h).

Dowód. Łatwo sprawdzić, że macierz dołączona ma postać

$$\left[I_n z^{q+1} - A_0 z^q - A_1 z^{q-1} - \dots - A_q\right]_{ad} = \\ = \left[\begin{array}{cccccc} q_1(z) & 1 & q_3(z) & \cdots & q_n(z) \\ * & p_2(z) & * & \cdots & * \\ * & p_3(z) & * & \cdots & * \\ \hline * & p_{n-1}(z) & * & \cdots & * \\ * & p_n(z) & * & \cdots & * \end{array}\right] \tag{5.24}$$

Zauważmy, że macierz (24) można napisać w postaci (21), gdyż zgodnie z lematem 4 każdy niezerowy minor stopnia drugiego dzieli się bez reszty przez $d(z)$. Łatwo sprawdzić, że macierze (22) i (23) spełniają równość (21).

■

Podstawiając (21) do (17) otrzymujemy

$$T_{sp}(z) = \frac{P(z)Q(z)}{d(z)} + G(z) \tag{5.25}$$

przy czym

$$P(z) = cz^q \overline{P}(z) = [c_1 \quad c_2 \dots c_n] z^q \begin{bmatrix} 1 \\ p_2(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{bmatrix} = c_2 z^{N-1} - c_2 a_{N-1} z^{N-2} + \\ +(c_3 - a_{N-2} c_2) z^{N-q-2} + \dots + (c_n - a_{N-(q+1)} c_{n-1} + \dots) z^{2q+1} + \dots \\ \dots - (a_{q+2} c_2 + a_{2q+3} c_3 + \dots) z^{q+1} + (c_1 - a_{q+1} c_2 - a_{2(q+1)} c_3 - \dots) z^q$$

$$Q(z) = \overline{Q}(z) b = [q_1(z) \quad 1 \quad q_3(z) \cdots q_n(z)] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \\ = b_1 z^{N-(q+1)} - a_{N-1} b_1 z^{N-(q+2)} + \dots + a_{N-1} c_2 + \\ + (b_{n-1} - a_{N-2(q+1)} b_1) z^{N-3(q+1)} + b_2$$

$$G(z) = z^h c \overline{G}(z) b \tag{5.26}$$

Uwaga 5.3. Z zależności (26) wynika, że realizacja dodatnia (9) macierzy $T_{sp}(z)$ nie zależy od macierzy wielomianowej $G(z)$ gdyż $G(z)$ jest macierzą wielomianową, a $T_{sp}(z)$ jest macierzą wymierną.

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z równości

$$P(z)Q(z) = n(z) \tag{5.27}$$

otrzymujemy równanie

$$Hx = g \tag{5.28}$$

przy czym macierz $H=[h_{ij}] \in R^{M \times M}$ $(M=n^2)$ zależy od współczynników macierzy $\overline{P}(z)$ i $\overline{Q}(z)$, $g=[g_i] \in R^M$ zależy od współczynników wielomianu $n(z)$ transmitancji (8) i

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T = = [b_1c_1, b_1c_2, \dots, b_1c_n, b_2c_1, \dots, b_nc_n]^T \in R_+^M \tag{5.29}$$

Zgodnie z lematem A (podanym w dodatku) równanie (28) ma rozwiązanie nieujemne $x \in R_+^M$ wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T H^T g u_i}{s_i} \geq 0 \tag{5.30}$$

$$dla\ wszystkich\ s_i > 0,\ i = 1, \dots, r,\ \left(r = rząd\ H^T H\right)$$

gdzie s_i jest wartością własną macierzy H^TH, a u_i jest wektorem własnym przypadkowym tej wartości własnej s_i

$$H^T H u_i = s_i u_i, i = 1, \dots, n \quad \left(\|u_i\| = 1\right) \tag{5.31}$$

Ze struktury wektora (29) wynika, że

$$x_i x_{k+n} = x_k x_{i+n} \quad dla\ i \neq k\ oraz\ i, k = 1, \dots, n \tag{5.32}$$

Znając rozwiązanie $x \in R_+^M$ równania (28) możemy wyznaczyć $b \in R_+^n$ i $c \in R_+^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (32).
Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1. *Istnieje dodatnia realizacja minimalna (3) transmitancji T(z) wtedy, gdy są spełnione następujące warunki*

i. $T(\infty) = \lim_{z \to \infty} T(z) \in R_+$

ii. *współczynniki a_k, $k=0,1,\dots,N-1$ wielomianu $d(z)$ są nieujemne, czyli*

$$a_k \geq 0 \quad dla \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \tag{5.33}$$

iii. *są spełnione warunki (30) i (32).*

Jeżeli warunki twierdzenia są spełnione to dodatnią realizacją minimalną transmitancji $T(z)$ możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 5.1.
Krok 1. Korzystając z (7) i (8) wyznaczamy d oraz część ściśle właściwą transmitancji $T_{sp}(z)$
Krok 2. Znając współczynniki a_k, $k=0,1,\dots,2n-1$ wielomianu $d(z)$ wyznaczmy macierze (12a) (lub (12b)-(12h))
Krok 3. Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z równania (27) wyznaczamy elementy macierzy H, g oraz rozwiązanie $x \in R_+^M$ równania (28)
Krok 4. Znając $x \in R_+^M$ wyznaczamy b i c.

Uwaga 5.4. *Stopień N wielomianu d(z), wymiar n minimalnej realizacji oraz liczba opóźnień q są związane zależnością N=n(q+1).*

Znając, więc liczbę opóźnień q możemy wyznaczyć wymiar minimalnej realizacji korzystając z zależności

$$n = \begin{cases} \dfrac{N}{q+1} & dla\ n\ parzystego \\ \dfrac{N+1}{q+1} & dla\ n\ nieparzystego \end{cases} \tag{5.34a}$$

a zakładając wymiar n minimalnej realizacji możemy wyznaczyć liczbę opóźnień z zależności

$$q = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n} & dla\ N\ parzystego \\ \dfrac{N-n+1}{n} & dla\ N\ nieparzystego \end{cases} \tag{5.34b}$$

5.3. Przykład

Mając daną transmitancję

$$T(z) = \frac{2z^5 - z^4 - z^3 - 4z^2 - 3z - 2}{z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1} \tag{5.35}$$

należy wyznaczyć jej dodatnią realizację minimalną (3) z dwoma opóźnieniami.

Korzystając z powyższej procedury otrzymamy

Krok 1. Z zależności (7) mamy

$$d = T(\infty) = \lim_{z \to \infty} T(z) = 2 \tag{5.36}$$

oraz

$$T_{sp}(z) = T(z) - d = \frac{z^4 - z^3 - z}{z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1}$$

Krok 2. Biorąc pod uwagę, że $d'(z)=z^5-z^4-2z^2-z-1$, ($a_5=a_2=a_1=1$, $a_3=2$, $a_4=a_0=0$) oraz korzystając z (12) dla $q=2$ otrzymujemy

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.37}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Krok 3. W tym przypadku

$$[Iz^3 - A_0z^2 - A_1z - A_2]^{-1} = \begin{bmatrix} z^3 & -1 \\ -z^2 - z & z^3 - z^2 - 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{z(z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1)} \begin{bmatrix} z^3 - z^2 - 2 & 1 \\ z^2 + z & z^3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ p_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ z^3 \end{bmatrix}, \bar{Q}(z) = \left[z^3 - z^2 - 2,\ 1\right]$$

oraz

$$P(z) = [c_1 \quad c_2] z^2 \begin{bmatrix} 1 \\ z^3 \end{bmatrix} = z^2(c_1 + c_2z^3),$$

$$Q(z) = [z^3 - z^2 - 2, 1] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1(z^3 - z^2 - 2) + b_2$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z z równości

$$(c_1 + c_2 z^3)[b_1(z^3 - z^2 - 2) + b_2] = z^3 - z^2 - 1$$

otrzymamy równanie (28) z

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} b_1c_1 \\ b_1c_2 \\ b_2c_1 \\ b_2c_2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $x^T=[1\ 0\ 1\ 0]$ i spełnia ono warunek (32).

Uwaga 5.5. *Wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy*

$$H^T H = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są równe

$$s_1 = 8.8309,\ s_2 = 4.6764,\ s_3 = 0.3575,\ s_4 = 0.1356$$

oraz

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.6818 \\ -0.6627 \\ -0.1741 \\ 0.2563 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -0.6325 \\ -0.6672 \\ 0.3441 \\ 0.1909 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0.1717 \\ 0.3299 \\ 0.5342 \\ 0.7591 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} -0.3251 \\ 0.0825 \\ -0.7523 \\ 0.5671 \end{bmatrix}$$

Warunek (30) jest, więc spełniony, gdyż

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{u_i^T H^T g u_i}{s_i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Korzystając z równości $b_1c_1=1$, $b_1c_2=b_2c_2=0$, $b_2c_1=1$ otrzymamy

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad i \quad [c_1\ c_2] = [1\ 0] \qquad (5.38)$$

Poszukiwana dodatnia realizacja minimalna jest dana przez (36), (37) i (38).

6. WYZNACZANIE DODATNIEJ REALIZACJI UKŁADÓW CIĄGŁYCH

6.1. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę układ ciągły o jednym wejściu i jednym wyjściu z q opóźnieniami opisany równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_2x(t-2h) + \dots \\ &\dots + A_q(t-qh) + bu(t) \qquad (6.1) \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

przy czym $x(t)\in R^m$, $u(t)\in R$, $y(t)\in R$, są wektorami stanu, wymuszeniem i odpowiedzią, a $A_k\in R^{m\times m}$, $k=0,1,\dots,q$ $b\in R^m$, $c\in R^{1\times m}$, $d\in R$ i $h\in R_+$.

Warunki początkowe dla (1) mają postać

$$x_0(t) \quad \text{dla} \quad t\in[-qh, 0] \qquad (6.2)$$

Definicja 6.1. *Układ (1) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0\in R_+^m$, $t\in[-qh, 0]$ oraz wszystkich wymuszeń $u_0\in R_+^m$, $t\geq 0$ zachodzi $y_0\in R_+$ dla $t\geq 0$.*

Niech M będzie zbiorem macierzy Metzlera (zbiór macierzy o nieujemnych elementach poza główną diagonalą).

Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy [15]

$$\begin{aligned} &A_0 \in M,\ A_k \in R_+^{m\times m},\ k=1,\dots,q, \\ &b\in R_+^m,\ c\in R_+^{1\times m},\ d\in R_+ \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Transmitancja układu (1) dana jest zależnością

$$\begin{aligned} &T(s) = c\left[I_m s - A_0 - A_1 w - \dots - A_q w^q\right]^{-1} b + d, \\ &w = e^{-hs} \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Definicja 6.2. *Macierze (3) nazywamy dodatnią realizacją transmitancji T(s) jeżeli macierze te spełniają równość (4). Realizację nazywamy minimalną jeżeli wymiary macierzy A_k, $k=1,\dots,q$ są minimalne wśród wszystkich realizacji transmitancji T(s).*

Zadanie wyznaczania minimalnej dodatniej realizacji można sformułować następująco. Dana jest właściwa transmitancja *T(s)*. Należy wyznaczyć dodatnią realizację minimalną (3) transmitancji *T(s)*.

Zostaną podane warunki wystarczające istnienia dodatniej realizacji minimalnej oraz procedura wyznaczania tej realizacji.

6.2. Rozwiązanie zadania

Transmitancję (4) możemy napisać w postaci

$$T(s) = \frac{c(H_{ad}(s))b}{\det H(s)} = \frac{n(s)}{d(s)} + d \qquad (6.5)$$

gdzie

$$H(s) = \left[I_m s - A_0 - A_1 w - \dots - A_q w^q\right] \qquad (6.6)$$

$$n(s) = cH_{ad}(s)b, \quad d(s) = \det H(s) \qquad (6.7)$$

Z zależności (5) mamy

$$d = \lim_{s\to\infty} T(s) \qquad (6.8)$$

ponieważ $\lim_{s\to\infty} H^{-1}(s) = 0$.

Część ściśle właściwa transmitancji $T(s)$ jest równa

$$T_{sp}(s) = T(s) - d = \frac{n(s)}{d(s)} \qquad (6.9)$$

Zadanie wyznaczania dodatniej realizacji zostało, więc sprowadzone do wyznaczenia macierzy

$$A_0 \in M,\ A_k \in R_+^{m\times m},\ k = 1,\dots,q,\quad b \in R_+^m,\ c \in R_+^{1\times m} \qquad (6.10)$$

dla danej ściśle właściwej transmitancji (9).

Lemat 6.1. *Jeżeli*

(6.11a)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,m-2} & a_{0,m-1} \end{bmatrix},$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k0} & a_{k1} & \dots & a_{k,m-2} & a_{k,m-1} \end{bmatrix},\ k = 1,\dots,q$$

lub

(6.11b)

$$A_0' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_{00} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{01} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,m-3} & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ a_{0,m-2} & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{0,m-1} \end{bmatrix},$$

$$A_k' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k,m-3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k,m-2} & 0 & \dots & 0 & a_{k,m-1} \end{bmatrix},\ k = 1,\dots,q$$

wtedy

$$\begin{aligned} &\det\left[I_m s - A_0 - A_1 w - \dots - A_q w^q\right] = \\ &= \det\left[I_m s - A_0' - A_1' w - \dots - A_q' w^q\right] = \\ &= s^m - d_{m-1}s - d_{m-2}s^{m-2} - \dots - d_1 s - d_0 \end{aligned} \qquad (6.11)$$

przy czym

$$\begin{aligned} &d_j = d_j(w) = \\ &= a_{qj}w^q + a_{q-1,j}w^{q-1} + \dots + a_{1j}w + a_{0j}, \\ &j = 1,2,\dots,m-1 \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Dowód. Rozwijając wyznacznik względem m-tego wiersza dla (11a) otrzymamy

$$\det\left[I_m s - A_0 - A_1 w - \dots - A_q w^q\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{m-2} & s - d_{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= s^m - d_{m-1}s - d_{m-2}s^{m-2} - \dots - d_1 s - d_0$$

Dla (11b) rozwinięcie wyznacznika względem pierwszego wiersza daje

$$\det\left[I_m s - A_0 - A_1 w - \dots - A_q w^n\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} s & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -d_0 & s & \dots & 0 & 0 \\ -d_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{m-3} & 0 & \dots & s & 0 \\ -d_{m-2} & 0 & \dots & -1 & s - d_{m-1} \end{vmatrix} = s^m - d_{m-1}s^{m-1} +$$

$$+(-1)^{m+2} \begin{vmatrix} -d_0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -d_1 & -1 & s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{m-3} & 0 & 0 & \dots & -1 & s \\ -d_{m-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= s^m - d_{m-1}s - d_{m-2}s^{m-2} - \dots - d_1 s - d_0$$

■

Uwaga 6.1. *Łatwo sprawdzić, że macierze*

$$\begin{aligned} A' = A_0' + A_1' w + \dots + A_q' w^q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ d_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m-3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{m-2} & 0 & \dots & 1 & d_{m-1} \end{bmatrix} \\ A = A_0 + A_1 w + \dots + A_q w^q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_{m-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (6.13)$$

są związane przekształceniem przez podobieństwo

$$A(w) = P^{-1}A'(w)P \qquad (6.14)$$

gdzie

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_{m-2} & d_{m-1} & 1 \\ d_2 & d_3 & d_4 & \dots & d_{m-1} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m-2} & d_{m-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Uwaga 6.2. *Zamiast macierzy (11) możemy również wykorzystać macierze otrzymane z (11) przez transpozycję albo dowolne przekształcenie przez podobieństwo, na przykład*

(6.16)

$$\widehat{A}_k = P^{-1}A_kP \text{ lub } \widehat{A}'_k = P^{-1}A'_kP \text{ dla } k=0,1,\dots,q$$

gdzie

$$P=P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Niech dana transmitancja $T(s)$ ma postać

$$T(s)=\frac{n(s)}{d(s)}+d \quad (6.18)$$

gdzie

(6.19)

$$n(s)=n'_{m-1}s^{m-1}+n'_{m-2}s^{m-2}+\dots+n'_1s+n'_0$$
$$n'_k=n'_k(w)=b_{k,p}w^p+b_{k,p-1}w^{p-1}+\dots+b_{k1}w+b_{k0},$$
$$k=0,1,\dots,m$$
$$d(s)=s^m-d_{m-1}s^{m-1}-d_{m-2}s^{m-2}-\dots-d_1s-d_0$$

a d_j są określone przez (13).

Znając wielomian $d(s)$ oraz korzystając z lematu 1 możemy wyznaczyć macierze (11a) lub (11b) oraz macierz dołączoną $H_{ad}(s)$. Z (19) i (5) mamy

(6.20)

$$\frac{cH_{ad}(s)b}{\det H(s)}=$$
$$=\frac{1}{d(s)}[c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]\begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) & \dots & h_{1m}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \dots & h_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \dots & h_{mm}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=$$
$$=\frac{n(s)}{d(s)}$$

przy czym

$$H_{ad}(s)=\begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) & \dots & h_{1m}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \dots & h_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \dots & h_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

jest macierzą dołączoną dla macierzy (11a) (lub (11b)). Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s i w liczników zależności (20) otrzymamy

$$Gx=f \quad (6.23a)$$

gdzie

(6.23b)

$$G=[g_{ij}]\in R_{l\bar{m}},\ \bar{m}=m^2,\ f=[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_l]$$
$$x=[x_1 \ x_1 \ \dots \ x_{\bar{m}}]=$$
$$=[b_1c_1 \ b_1c_2 \ \dots \ b_1c_m \ b_2c_1 \ \dots \ b_mc_m],$$

Elementy g_{ij} macierzy G zależą od macierzy A_k, $k=0,1,\dots,q$, a elementy wektora f zależą od współczynników b_{kj} wielomianu $n(s)$.

Zgodnie z lematem A (podanym w dodatku), jeżeli

$$\text{rząd } G = \text{rząd } [G,f] \quad (6.22)$$

to równanie (23a) ma nieujemne rozwiązanie $x\in R_+^{\bar{m}}$ wtedy, gdy

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{u_i^TG^Tfu_i}{s_i}\geq 0 \quad (6.23)$$
$$\text{dla wszystkich } s_i>0, i=1,\dots,r \ \ (r=\text{rząd } G^TG)$$

przy czym s_i jest wartością własną macierzy G^TG, a u_i wektorem własnym przyporządkowanym tej wartości własnej

$$G^TGu_i=s_iu_i,\quad i=1,\dots,\bar{m} \quad (\|u_i\|=1) \quad (6.24)$$

Z postaci wektora x (określonego przez (23b)) wynika, że

$$x_ix_{k+m}=x_kx_{i+m} \text{ dla } i\neq k \text{ oraz } i,k=1,\dots,m \quad (6.25)$$

Znając rozwiązanie $x\in R_+^{\bar{m}}$ równania (23a) możemy wyznaczyć $b\in R_+^m$ i $c\in R_+^{1\times m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (25).

Zauważmy, że dla (11) macierz A_0 jest macierzą Metzlera, a $A_k\in R_+^{m\times m}$ dla $k=1,..,q$ wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki a_{00}, $a_{01},\dots,a_{0,m-2}$ i $a_{k0},a_{k1},\dots,a_{k,m-1}$, $k=1,\dots,q$ wielomianu $d(s)$ są nieujemne, a współczynnik $a_{0,m-1}$ jest dowolny.

Zauważmy również, że dla wielomianu $d(s)$ wymiary macierzy (11) są najmniejsze z możliwych.

Zostało, więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Istnieje dodatnia realizacja minimalna (3) transmitancji $T(s)$ (danej zależnością (19)) wtedy, gdy są spełnione następujące warunki*

i. $T(\infty)=\lim_{s\to\infty}T(s)\in R_+$

ii. *Współczynniki wielomianu $d(s)$ spełniają warunki*

$$
\begin{aligned}
&a_{0i} \geq 0 \text{ dla } i = 0,1,\dots,m-2 \text{ oraz} \\
&a_{kj} \geq 0 \ \text{ dla } k = 1,\dots,q;\ j = 0,1,\dots,m-1
\end{aligned}
\qquad (6.26)
$$

a współczynnik $a_{0,m-1}$ jest dowolny.

iii. Warunki (23) i (25) są spełnione.

Jeżeli warunki twierdzenia 1 są spełnione to dodatnią realizację minimalną transmitancji $T(s)$ można wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 6.1.

Krok 1. Korzystając z (8) i (9) wyznaczamy d oraz ściśle właściwą transmitancję $T_{sp}(s)$;

Krok 2. Znając współczynniki a_{kj}, $k=0,1,\dots,q$; $j=0,1,\dots,m-1$ wielomianu $d(s)$ wyznaczamy macierze (11a) (lub (11b)).

Krok 3. Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s i w równości (21) wyznaczamy elementy macierzy G i wektora f.

Krok 4. Wyznaczamy rozwiązanie $x \in R_+^{\bar{n}}$ równania (23a).

Krok 5. Znając x wyznaczamy b i c.

6.3. Przykład

Wyznaczyć dodatnią realizację minimalną (3) transmitancji

$$
T(s) = \frac{2s^3 - (2w^2 + 4w - 3)s^2 - (3w^2 + 2w + 1)s - (5w^2 + 4w)}{s^3 - (w^2 + 2w - 1)s^2 - (w^2 + 2)s - (2w^2 + w + 1)} \qquad (6.27)
$$

Korzystając z procedury 1 otrzymujemy kolejno

Krok 1. Z zależności (8) i (9) mamy

$$
d = \lim_{s \to \infty} T(s) = 2 \qquad (6.28)
$$

oraz

$$
T_{sp}(s) = T(s) - d = \frac{s^2 - (w^2 + 2w - 3)s - (w^2 + 2w - 2)}{s^3 - (w^2 + 2w - 1)s^2 - (w^2 + 2)s - (2w^2 + w + 1)}
$$

Krok 2. Biorąc pod uwagę, że

$$
d(s) = s^3 - (w^2 + 2w - 1)s^2 - (w^2 + 2)s - (2w^2 + w + 1)
$$

$$
\begin{pmatrix} a_{00} = 1, a_{01} = 2, a_{02} = -1, a_{10} = 1, \\ a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{20} = 2, a_{21} = a_{22} = 1 \end{pmatrix}
$$

oraz korzystając z (11a) otrzymamy

$$
A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.29)
$$

Krok 3. W tym przypadku

$$
H_{ad}(s) = \left[I_m s - A_0 - A_1 w - A_2 w^2\right]_{ad} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} s^2 - (w^2 + 2w - 1)s - (w^2 + 2) & s - (w^2 + 2w - 1) & 1 \\ 2w^2 + w + 1 & s^2 - (w^2 + 2w - 1)s & s \\ (2w^2 + w + 1)s & (w^2 + 2)s + (2w^2 + w + 1) & s^2 \end{bmatrix}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&cH_{ad}(s)b = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \times \\
&\begin{bmatrix} s^2 - (w^2 + 2w - 1)s - (w^2 + 2) & s - (w^2 + 2w - 1) & 1 \\ 2w^2 + w + 1 & s^2 - (w^2 + 2w - 1)s & s \\ (2w^2 + w + 1)s & (w^2 + 2)s + (2w^2 + w + 1) & s^2 \end{bmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = s^2 - (w^2 + 2w - 3)s - (w^2 + 2w - 2)
\end{aligned}
\qquad (6.30)
$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s i w równości (30) otrzymamy równanie (23a) przy czym

$$
G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (6.31)
$$

W tym przypadku warunki (23) i (25) są spełnione.

Krok 4. Równanie (23a) z macierzami (31) ma rozwiązanie o postaci

$$
x^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T \qquad (6.32)
$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie (32) spełnia warunki (25).

Krok 5. Macierze b i c mają postać

$$
b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad c = [1 \quad 1 \quad 0] \qquad (6.33)
$$

Poszukiwana dodatnia realizacja minimalna dana jest przez (28), (29) i (33).

7. PODSUMOWANIE I PROBLEMY OTWARTE

W pracy dokonano syntetycznego przeglądu aktualnego stanu badań w wybranych obszarach teorii dodatnich liniowych układów z opóźnieniami dotyczących:

- Stabilności asymptotycznej i odpornej układów dyskretnych z opóźnieniami
- Osiągalności i sterowania z minimalną energią układów dyskretnych z opóźnieniami

- Wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych układów dyskretnych i ciągłych z opóźnieniami

Poza znanymi wcześniej publikowanymi wynikami przedstawiono nowe wyniki dotychczas niepublikowane.
Przedstawiono w pracy rozważania dotyczące układów o jednym wejściu i jednym wyjściu można stosunkowo łatwo uogólnić na przypadek układów o wielu wejściach i wielu wyjściach; dotyczy to w szczególności metod wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych układów dyskretnych i ciągłych z opóźnieniami. Dotychczas znacznie więcej udało się rozwiązać zagadnień dotyczących dodatnich układów dyskretnych niż ciągłych z opóźnieniami. W pierwszej kolejności należałoby więc uogólnić znane wyniki dla dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami na przypadek dodatnich układów ciągłych, na przykład kryteria osiągalności, sterowalności i obserwowalności, sterowanie z minimalną energią itp. Problemem otwartym jest przeniesienie tych rozważań na dwuwymiarowe (2D) układy z opóźnieniami, na układy ciągło-dyskretne z opóźnieniami oraz dodatnie układy biliniowe z opóźnieniami itp.

8. DODATEK

Weźmy pod uwagę równanie

$$Ax = b \tag{A1}$$

gdzie $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$.
Zakładamy, że równanie (A1) ma rozwiązanie, czyli

$$\text{rząd}\,[A,b] = \text{rząd}\,A \tag{A2}$$

Lemat A. *Niech będzie spełnione założenie (A2). Równanie (A1) ma nieujemne rozwiązanie $x \in R_+^n$, gdy*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T A^T b u_i}{s_i} \geq 0 \tag{A3}$$

dla wszystkich $s_i > 0, i = 1,\dots,r$ *rząd macierzy* $A^T A$

przy czym s_i jest wartością własną macierzy $A^T A$, a u_i jest wektorem własnym odpowiadającym s_i, czyli

$$A^T A u_i = s_i u_i, i = 1,\dots,n \tag{A4}$$

oraz $\|u_i\| = 1$.

Dowód. Mnożąc lewostronnie równanie (A1) przez A^T otrzymamy

$$A^T A x = A^T b \tag{A5}$$

Mnożąc lewostronnie (A5) przez u_i^T dostaniemy

$$u_i^T A^T A x = u_i^T A^T b, i = 1,\dots,n \tag{A6}$$

oraz korzystając z (A4) otrzymamy

$$s_i u_i^T x = u_i^T A^T b, i = 1,\dots,n \tag{A7}$$

Biorąc pod uwagę, że $si=0$, $i=r+1,\dots,n$ z (A7) mamy (A8)

$$x = \sum_{i=1}^{r} u_i^T x u_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T A^T b u_i}{s_i} \quad \text{dla wszystkich } s_i > 0, i = 1,\dots,r$$

Równanie (A1) ma, więc nieujemne rozwiązanie $x \in R_+^n$ wtedy, gdy jest spełniony warunek (A3).

■

Literatura

[1] Benvenuti L., Farina L. (2004) A tutorial on the positive realization problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, **49**, 5, 651-664.

[2] Biała S. (2002) *Odporna stabilność wielomianów i macierzy.* AGH Uczel. Wyd. Naukowo-Techn. Kraków.

[3] Busłowicz M. (1983) O pewnych własnościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. *Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektrotechnika*, 1,17-29.

[4] Busłowicz M. (1982) Explicit solution of discrete-delay equations, Foundations of Control Engineering, vol. 7, No. 2, 1982, pp. 67-71.

[5] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem, Krajowa Konf. Automat. Proc. Dyskretnych, 2004. 21-25.09.04 Zakopane, pp. 9-16.

[6] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. *Proc. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2004, Kusadasi, Izmir, Turkey (CD-ROM).*

[7] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Stability and robust stability of positive linear discrete-time systems with pure delay. *Proc. 10th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland 2004*, 105-108.

[8] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays. *Bull. of the Pol. Acad. Sci, Techn. Sci*, **52**, 2, 99-102.

[9] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. *Krajowa Konf. Automat. Proc. Dyskretnych*, 21-25.09.04 Zakopane, 83-90.

[10] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays-stability and robust stability. *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 10, 9-12.

[11] Farina L., Rinaldi S. (2000) *Positive Linear Systems: Theory and Applications.* Wiley, New York.

[12] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P. and A. Korytkowski (1989) *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems.* PWN, Warszawa, J. Wiley New York.

[13] Kaczorek T. (2002) *Positive 1D and 2D Systems.* Springer-Verlag, London.

[14] Kaczorek T. (2003) Some recent developments in positive systems. *Proc. 7th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*. Łódź, Poland , 25-35.

[15] Kaczorek T. (2005) Realization problem for a class of positive continuous-time systems with delays. *Proc 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'05, 27-29 June 2005, Cyprus.*

[16] Kaczorek T. (2004) Minimal realization for positive multivariable linear systems with delay. *Proc. CAITA 2004, Conference on Advances in Internet Technologies and Applications, July 8-11, 2004, Purdue, USA*, 1-12.

[17] Kaczorek T. (2004) Stability of positive discrete-time systems with time-delay. *8th World Muliconference on Systems, Cybernetics and Informatics, July 18-21, 2004 Orlando, Florida USA*, 321-324.

[18] Kaczorek T. (2004) Structure decomposition and computation of minimal realization of normal transfer matrix of positive systems. *10th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2004, 30.08-2.09.2004, Międzyzdroje*, 93-100

[19] Kaczorek T. (2004) Minimal realization problem for positive multivariable linear systems with delay, Proc. of Systems Science Conf., Wrocław 2004 (w druku).

[20] Kaczorek T. (2004) Realization problem for positive multivariable linear systems with time- delay, *Intern. Workshop "Computational Problems of Electrical Enginnering", Zakopane, 1-4.09.2004*, 186-192.

[21] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Minimal realization for positive multivariable linear systems with delay. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **14**, 2, 181-187.

[22] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. *Krajowa Konf. Autom. Proc. Dyskretnych, 2004. 21-25.09.04 Zakopane*, 83-90.

[23] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Realization problem for positive multivariable linear systems with time-delay. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **14**, 2, 101-107.

[24] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Stability and robust stability of positive linear discrete-time systems with pure delay. *10th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2004, 30.08-2.09.2004, Międzyzdroje*, 105-108.

[25] Klamka J. (1990) *Sterowanie układów dynamicznych*. Warszawa-Wrocław.

[26] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems*. Kluwer Academic Publ., Dordrecht .

[27] Sikora B. (2003) On controllability and minimum energy control of linear positive systems with delays. *Archives of Control Sciences*, **13**, 4, 431-444.

[28] Xie G., Wang L. (2003) Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays, in: *Positive Systems (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.))*, Springer- Verlag, Berlin Heidelberg, 377-384.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2