POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 11

Systemy wielostanowe o semi-markowskich elementach

Przedstawimy proste modele nieodnawialnych i odnawialnych systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami opisującymi funkcjonowanie elementów są procesy SM o skończonych zbiorach stanów. Podejście takie było przedstawione między innymi w pracach [4], [25], [37].

11.1. Struktura systemu

Monotoniczne systemy wielostanowe omawiane były między innymi w pracach [4], [26], [32], [37],[47].

Będziemy rozważać system złożony z n elementów ponumerowanych liczbami naturalnymi, które tworzą zbiór $C = \{1, \dots, n\}$. Niech $S_k = \{0, 1, \dots, z_k\}$ oznacza zbiór stanów elementu o numerze $k \in C$. Przyjmujemy, że $S = \{0, 1, \dots z\}$ jest zbiorem stanów systemu. Przyjmujemy, że stany zbiory stanów elementów i stanów systemu są uporządkowane w sensie niezawodności. Stany o numerach z_k oraz z są stanami pełnej zdatności elementów i systemu odpowiednio. Im mniejsza liczba naturalna tym mniejszy stopień zdatności. Liczba $0 \in S_k$ oznacza stan niezdatności elementu o numerze k, liczba $0 \in S$ oznacza stan niezdatności systemu.

Funkcja

$$\varphi : S_1 \times \ldots \times S_n \to S$$

przyporządkowuje stanom elementów stan systemu jako całości. Funkcję tę nazywamy *funkcją struktury niezawodnościowej obiektu*. Mówimy, że struktura niezawodności obiektu jest *monotoniczna*, jeżeli φ jest niemalejącą funkcją każdego ze swoich argumentów oraz $\varphi(0, \dots, 0) = 0, \varphi(z_1, \dots, z_n) = s$.

Wektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ jest wektorem *ścieżki* na poziomie j systemu wielostanowego wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\boldsymbol{y}) \geqslant j$. Wektor ten jest wektorem *minimalnej ścieżki* na poziomie j, jeżeli nierówność $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ implikuje nierówność $\phi(\boldsymbol{x}) < j$, gdzie $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ oznacza $x_i \leqslant y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $x_i < y_i$ dla pewnego i. Zbiór minimalnych ścieżek odpowiadający stanowi obiektu j oznaczamy symbolem Path_j, przy czym $\mathrm{Path}_0 = \{0\}$.

11.2. Niezawodność nieodnawialnych elementów systemu

Zakładamy, że stan niezawodnościowy elementu k jest opisany za pomocą procesu

SM o jądrze

$$\begin{bmatrix} Q_{00}^{(k)}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{10}^{(k)}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{20}^{(k)}(t) & Q_{21}^{(k)}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{30}^{(k)}(t) & Q_{31}^{(k)}(t) & Q_{32}^{(k)}(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ Q_{z_k0}^{(k)}(t) & Q_{z_k1}^{(k)}(t) & \cdots & Q_{z_kz_{k-1}}^{(k)}(t) & 0 \end{bmatrix}. \tag{11.1}$$

Niech $A_k(u) = \{0, \dots, u-1\}$ oraz $A'_k(u) = S_k - A_k(u) = \{u, \dots, z_k\}$. Funkcja

$$\phi_{i[u]}^{(k)}(t) = P\{T_k(u) \leqslant t \mid X_k(0) = i\}, \; i \in A'_k(u),$$

gdzie $T_k(u) := \inf\{t : X_k(t) \in A_k(u)\}$ oznacza czas pierwszego przejścia procesu $\{X_k(t) : t \geqslant 0\}$ ze stanu $i \in A'_k(u)$ do podzbioru $A_k(u)$. Jeżeli $X_k(0) = s_k$ z prawdopodobieństwem 1, to zmienna losowa $T_k(u)$ oznacza czas przebywania elementu o numerze k w podzbiorze stanów $A'_k(u)$. Czas ten będziemy nazywać czasem zdatności elementu na poziomie (w stopniu) u.

Niech

$$\Phi_{iA}^{(k)}(t) = P\{T_k(u) \leqslant t \mid X_k(0) = i\}, \; i \in A'_k.$$

Z twierdzenia 26 wynika, że funkcje $\Phi_{i[u]}^{(k)}(t), i \in A'_k(u)$ są jedynymi rozwiązaniami układów równań

$$\Phi_{iA_k}^{(k)}(t) = \sum_{j \in A_k} Q_{ij}^{(k)}(t) + \sum_{l \in A'_k} \int_0^t \Phi_{kA_k}^{(k)}(t-x) dQ_{il}^{(k)}(x), \quad i \in A'_k, \quad k \in C.$$

Układ ten poddany transformacji Laplace'a-Stieltjesa przyjmuje postać

$$\tilde{\phi}_{i[u]}^{(k)}(s) = \sum_{j \in A_k(u)} \tilde{q}_{ij}^{(k)}(s) + \sum_{l \in A'_k(u)} \tilde{q}_{il}^{(k)}(s) \tilde{\phi}_{k[u]}^{(k)}(s), \quad i \in A'_k, \tag{11.2}$$

gdzie

$$\tilde{\phi}_{i[u]}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Phi_{i[u]}^{k)}(t), \quad \tilde{q}_{ij}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ij}^{(k)}(t).$$

Wektor

$$R_k(t) = [R_k(1,t), \dots, R_k(z,t)], \quad k \in C \tag{11.3}$$

gdzie $R_k(u,t) = P\{T_k(u) > t \mid X_k(0) = z_k\} = 1 - \phi_{z_k[u]}^{(k)}(t)$, nazywamy *wielostanową funkcją niezawodności elementu* k, [37],[?]. Transformata Laplace'a

$$\tilde{R}_k(u,s) = \int_0^\infty e^{-st} R_k(u,t) dt$$

funkcji niezawodności na poziomie u elementu k jest określona wzorem

$$\tilde{R}_k(u,s) = \frac{1 - \tilde{\phi}_{k[u]}^{(k)}(s)}{s}.$$

Kolejnym pojęciem, z którego będziemy korzystać jest *rozkład warunkowy*

$$P_{ij}^{(k)}(t) = P\{X_k(t) = j \mid X_k(0) = i\}\ ,\ \ j \in S_k$$

i *jednowymiarowy rozkład*

$$P_{j}^{(k)}(t) = P\{X_k(t) = j\},\quad j \in S_k\ .$$

Jeżeli $P\{X_k(0) = z_k\} = 1$, to $P_{z_k j}^{(k)}(t) = P_{j}^{(k)}(t)$. Funkcje $P_{ij}^{(k)}(t)$, $i,j \in S_k$, spełniają układy równań całkowych (3.35)

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \delta_{ij}[1 - G_i^{(k)}(t)] + \sum_{r\in S} \int_0^t P_{rj}^{(k)}(t-x)dQ_{ir}^{(k)}(x)\ ,\quad i,j \in S_k. \tag{11.4}$$

gdzie

$$G_i^{(k)}(t) = \sum_{j\in S} Q_{ij}^{(k)}(t).$$

Tansformacja Laplace'a-Stieltjesa prowadzi do układu równań liniowych

$$\tilde{p}_{ij}^{(k)}(s) = \delta_{ij}[1 - \tilde{g}_i^{(k)}(s)] + \sum_{r\in S} \tilde{q}_{ir}^{(k)}(s)\tilde{p}_{rj}^{(k)}(s)\ ,i,j \in S\ , \tag{11.5}$$

gdzie

$$\tilde{p}_{ij}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dP_{ij}^{(k)}(t),\quad \tilde{q}_{ir}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dQ_{ir}^{(k)}(t),$$

$$\tilde{g}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st}dG_i^{(k)}(t),\quad G_i^{(k)}(t) = \sum_{j\in S} Q_{ij}^{(k)}(t).$$

Dla rozpatrywanych tu nieodnawialnych elementów systemu zachodzi związek

$$R_k(u,t) = \sum_{j\in A_k'(u)} P_j^{(k)}(t)\ ,$$

gdzie $A_k'(u) = \{u, \ldots, z_k\}$.

W analizie niezawodności wielostanowych elementów systemu można posłużyć się *binarną reprezentacją* procesu [37].

Zdefiniujmy binarne procesy losowe $\{X_{ir}(t) : t \geqslant 0\}$, $i \in C$, $r \in S_i$ następująco

$$X_{ir}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad X_i(t) \geqslant r \\ 0 & \text{dla} \quad X_i(t) < r \end{cases}$$

Niech φ_j oznacza indykator poziomu niezawodności systemu

$$\varphi_j = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \varphi \geqslant j \\ 0 & \text{dla} \quad \varphi < j. \end{cases}$$

Z definicji minimalnej ścieżki wynika, że

$$\varphi(X_{ir}(t)) = \bigvee_{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{P}_j} \prod_{i\in C, y_i>0} X_{iy_i}(t) = 1 - \prod_{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{P}_j} (1 - \prod_{i\in \mathbb{N}, y_i>0} X_{iy_i}(t)) .$$

Funkcję φ_j można przedstawić w postaci wieloliniowej

$$\varphi(X_{ir}(t)) = \sum_{k=1}^{m} c_k \prod_{i\in C_k} X_{ia_{i,k}}(t),$$

gdzie $c_1, \ldots, c_m$ są współczynnikami całkowitymi, $\emptyset \neq C_k \subseteq C$, $1 \leqslant a_{i,k} \leqslant z_i$ dla każdego $i \in S_k$.

Zauważmy, że

$$R_k(u,t) = E[X_{ku}(t)] = P\{X_{ku}(t) = 1\} = \sum_{j\in A'_k(u)} P_j^{(k)}(t) .$$

11.3. Niezawodność systemu nieodnawialnego

Przyjmujemy, że semi-markowskie procesy losowe $\{X_1(t) : t \geqslant 0\}, \ldots, \{X_n(t) : t \geqslant\}$ są niezależne. Proces stochastyczny $\{S(t) : t \geqslant 0\}$, gdzie

$$S(t) = \varphi(X_1(t), \ldots, X_n(t)) \tag{11.6}$$

przyjmujący wartości w zbiorze stanów $S = \{0, 1, \ldots, z\}$ opisuje stan obiektu w chwili t. Proces ten *nie jest procesem semi-Markowa.*

Niech

$$T(u) := \inf\{t : S(t) \in A(u)\} ,$$

oznacza czas pierwszego przejścia procesu $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ ze stanu $i \in A'(u) = \{u, u+1 \ldots, z\}$ do podzbioru $A(u) = \{0, 1, \ldots, z-1\}$. Jeżeli $S(0) = z$ z prawdopodobieństwem 1, to zmienna losowa $T(u)$ oznacza czas przebywania systemu w podzbiorze stanów $A'(u)$. Czas ten będziemy nazywać *czasem zdatności systemu na poziomie* u. Funkcję niezawodności systemu na poziomie u, która jest określona wzorem

$$R(u,t) = P\{T(u) > t\}$$

można obliczyć korzystając ze wzoru

$$R(u,t) = \sum_{j\in A'_k(u)} P_j(t) , \tag{11.7}$$

gdzie

$$P_j(t) = P\{S(t) = j\} = P(S(t) \in \varphi^{-1}(j)) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in\varphi^{-1}(j)} P_{s_1}^1(t) \ldots P_{s_n}^n(t). \tag{11.8}$$

11.4. Przykłady wielostanowych systemów nieodnawialnych

11.4.1. Przykład 1

Zakładamy, że system składa się z trzech elementów, których stany opisane są przez niezależne procesy semi-markowskie $\{X_1(t) : t \geq 0\}$, $\{X_2(t) : t \geq 0\}$, $\{X_3(t) : t \geq 0\}$ o zbiorach stanów $S_1 = S_2 = \{0,1,2\}, S_3 = \{0,1\}$ oraz jądrach

$$\boldsymbol{Q}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} Q_{00}^{(k)}(t) & 0 & 0 \\ Q_{10}^{(k)}(t) & 0 & 0 \\ Q_{20}^{(k)}(t) & Q_{21}^{(k)}(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-\alpha t} & 0 & 0 \\ 1-(1+\beta t)e^{-\beta t} & 0 & 0 \\ p[1-(1+\gamma t)e^{-\gamma t}] & q[1-(1+\gamma t)e^{-\gamma t}] & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.9}$$

dla $k = 1,2,\ t \geqslant 0,\ \alpha,\beta,\gamma,p,q > 0\, p+q = 1,\ P\{X^{(k)}(0) = 2\} = 1$,

$$\boldsymbol{Q}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} Q_{00}^{(3)}(t) & 0 \\ Q_{10}^{(3)}(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-\kappa t} & 0 \\ 1-(1+\eta t)e^{-\eta t} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.10}$$

gdzie $t \geqslant 0$ oraz $\kappa, \eta > 0,\ P\{X^{(3)}(0) = 1\} = 1$.

Układy równań (11.4) rozwiązujemy korzystając z programu MATHEMATICA. Dla $\alpha = 0.1, \beta = 0.02, \gamma = 0.01, p = 0.2, q = 0.8, \eta = 0.01, \kappa = 0.1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_0^{(k)}(t) &= 1 - 4e^{-0.02t} + 3e^{-0.01t} - 0.016te^{-0.02t} - 0.034te^{-0.01t}, \\ P_1^{(k)}(t) &= 4e^{-0.02t} - 4e^{-0.01t} + 0.016te^{-0.02t} + 0.024te^{-0.01t}, \\ P_2^{(k)}(t) &= e^{-0.01t} + 0.01te^{-0.01t} \end{aligned} \tag{11.11}$$

dla $k = 1,2$ oraz

$$\begin{aligned} P_0^{(3)}(t) &= 1-(1+0.01t)e^{-0.01t}, \\ P_1^{(3)}(t) &= (1+0.01t)e^{-0.01t}\,. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Zakładamy, że struktura systemu określona jest wzorem

$$\begin{aligned} \varphi(s) = 0 \quad &\text{dla} \quad s = (x_1,x_2,x_3) \in D_0, \\ \varphi(s) = 1 \quad &\text{dla} \quad s = (x_1,x_2,x_3) \in D_1, \\ \varphi(s) = 2 \quad &\text{dla} \quad s = (x_1,x_2,x_3) \in D_2, \end{aligned} \tag{11.13}$$

gdzie

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(0,0,0),(0,0,1)(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0), \\ &\quad (2,0,0),(0,2,1),(0,2,0),(1,2,0),(2,1,0)\}, \\ D_1 &= \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(2,0,0),(0,2,1)\}, \\ D_2 &= \{(2,1,1),(1,2,1),(2,2,1)\}, \end{aligned}$$

Na postawie wzoru (11.8) otrzymujemy prawdopodobieństwa stanów systemu

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \sum_{(x_1,x_2,x_3)\in D_0} P_{x_1}^{(1)}(t)P_{x_2}^{(2)}(t)P_{x_3}^{(3)}(t), \\ P_1(t) &= \sum_{(x_1,x_2,x_3)\in D_1} P_{x_1}^{(1)}(t)P_{x_2}^{(2)}(t)P_{x_3}^{(3)}(t), \\ P_2(t) &= \sum_{(x_1,x_2,x_3)\in D_2} P_{x_1}^{(1)}(t)P_{x_2}^{(2)}(t)P_{x_3}^{(3)}(t). \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (11.3) otrzymujemy wielostanową funkcję niezawodności systemu

$$\boldsymbol{R}(t) = [R(1,t), R(2,t)] = [P_1(t) + P_2(t), P_2(t)].$$

11.4.2. Przykład 2

Przyjmujemy, że system składa się z dwóch elementów, których stany opisane są przez niezależne procesy semi-markowskie $\{X_1(t) : t \geqslant 0\}, \{X_2(t) : t \geqslant 0\}$, o zbiorach stanów $S_1 = \{0, 1, 2, 3, \}, S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz jądrach

$$\boldsymbol{Q}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\kappa^2 t} & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-\alpha t} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.14}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\gamma t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-\beta t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\beta t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-\beta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-\beta t} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.15}$$

gdzie $t \geqslant 0, \alpha, \beta, \gamma, \kappa > 0,\ P\{X^{(1)}(0) = 3\} = 1, P\{X^{(2)}(0) = 4\} = 1$.

Funkcja struktury φ określona jest za pomocą tabeli

Tabela 2.

φ	0	1	2	3
0	0	0	1	1
1	0	1	1	2
2	1	1	2	2
3	1	2	3	3
4	2	2	4	4

Z tabeli wartości funkcji struktury wynika, że minimalnymi ścieżkami są:

- na poziomie 1: $\boldsymbol{P}_1 = \{(0,2), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1)\}$,
- na poziomie 2: $\boldsymbol{P}_2 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$,
- na poziomie 3: $\boldsymbol{P}_3 = \{(2,2)\}$,
- na poziomie 4: $\boldsymbol{P}_4 = \{(2,4)\}$.

Stosując zasadę inkluzji-ekskluzji oraz przyjmując, że $X_{ir}X_{is} = X_{i\ \max(r,s)}$ otrzymujemy następujące indykatory poziomu systemu (dla skrócenia zapisu pomijamy parametr t):

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= X_{12} \vee X_{22} \vee X_{11}X_{21} \vee X_{11}X_{22} \vee X_{12}X_{21} = \\
&= X_{12} + X_{11}X_{21} - X_{12}X_{21} - X_{11}X_{22} + X_{12}X_{22}, \\
\varphi_2 &= X_{11}X_{23} \vee X_{12}X_{22} \vee X_{13}X_{21} \vee X_{13}X_{22} \vee X_{11} = \\
&= X_{11}X_{23} + X_{11}X_{22} + X_{11}, \\
\varphi_3 &= X_{12}X_{23} \vee X_{13}X_{23} = X_{12}X_{23}, \\
\varphi_4 &= X_{12}X_{24} \vee X_{24} = X_{24}.
\end{aligned}$$

Oznaczmy przez $R_i(j,t)$ funkcję niezawodności elementu i na poziomie j. Rozwiązując układ równań (2) oraz wyznaczając transformatę odwrotną otrzymujemy

$$R_1(j,t) = \exp(-\alpha t)\sum_{k=0}^{3-j}\frac{(\alpha t)^k}{k!}, \quad j = 1,2,3,$$

$$R_2(j,t) = \exp(-\beta t)\sum_{k=0}^{4-j}\frac{(\beta t)^k}{k!}, \quad j = 1,2,3,4.$$

Zatem

$$\begin{gathered}
R(1,t) = R_1(2,t) + R_1(1,t)R_2(1,t) - R_1(1,t)R_2(2,t) - R_1(2,t)R_2(1,t)+ \\
+R_1(2,t)R_2(2,t) = \exp(-\alpha t)(1+\alpha t) + \exp(-(\alpha+\beta)t)\frac{\alpha^2\beta^3t^5}{12}, \\
R(2,t) = R_1(1,t)R_2(3,t) + R_1(1,t)R_2(2,t) + R_1(1,t) = \\
= \exp(-(\alpha+\beta)t)[2 + 2t(\alpha+\beta) + (\frac{\beta^2}{2} + 2\alpha\beta + \alpha^2)t^2 + (\frac{\alpha\beta^2}{2} + \alpha^2\beta)t^3 + \frac{\alpha^2\beta^2}{4}t^4]+ \\
+\exp(-\alpha t)(1 + \alpha t + \frac{\alpha^2t^2}{2}), \\
R(3,t) = R_1(2,t)R_2(3,t) = \exp(-(\alpha+\beta)t)(1 + (\alpha+\beta)t + \alpha\beta t^2), \\
R(4,t) = \exp(-\beta t).
\end{gathered}$$

11.5. Systemy wielostanowe odnawialne

11.5.1. SM-model elementu

Zakładamy teraz, że stan niezawodnościowy element k jest opisany przez proces semi-Markowa $\{X_k(t) : t \geqslant 0\}$ o jądrze

$$\boldsymbol{Q}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} Q_{00}^{(k)}(t) & Q_{01}^{(k)}(t) & \cdots & Q_{0z_k}^{(k)}(t) \\ Q_{10}^{(k)}(t) & Q_{11}^{(k)}(t) & \cdots & Q_{1z_k}^{(k)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{z_k0}^{(k)}(t) & Q_{z_k1}^{(k)}(t) & \cdots & Q_{z_kz_k}^{(k)}(t) \end{bmatrix}, \tag{11.16}$$

gdzie co najmniej

$$Q_{i0}^{(k)}(t) > 0 \quad \text{dla} \quad t > 0 \quad \text{oraz} \quad i \in S_k\,,$$

$$Q_{iz_k}^{(k)}(t) > 0 \quad \text{dla} \quad t > 0 \quad \text{oraz} \quad i \in S_k$$

$$Q_{ii-1}^{(k)}(t) > 0 \quad \text{dla} \quad t > 0 \quad \text{oraz} \quad i = 2, \ldots, z_k \, .$$

Niech $P_j^{(k)}(t) = P\{X_k(t) = j\}$, $j \in S_k$, $k \in C$ oznacza jednowymiarowy rozkład procesu SM opisującego funkcjonowanie elementu o numerze k.

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 34, to

$$P_{ij}^{(k)} = \lim_{t \to \infty} P_{ij}^{(k)}(t) = P_j^{(k)} = \lim_{t \to \infty} P_j^{(k)}(t) = \frac{\pi_j^{(k)} m_j^{(k)}}{\sum\limits_{i \in S} \pi_i^{(k)} m_i^{(k)}} \, , \tag{11.17}$$

gdzie $m_i^{(k)} = \int\limits_0^\infty [1 - G_i^{(k)}(t)] dt$ oraz $\pi_i^{(k)}$, $i \in S_k$, jest stacjonarnym rozkładem włożonego łańcucha Markowa $\{X_k(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Przypomnijmy, że prawdopodobieństwa te stanowią rozwiązanie układu równań

$$\sum_{i \in S_k} \pi_i^{(k)} p_{ij}^{(k)} = \pi_j^{(k)}, \quad j \in S_k, \quad \sum_{j \in S} \pi_j^{(k)} = 1 \, , \tag{11.18}$$

gdzie $p_{ij}^{(k)} = \lim\limits_{t \to \infty} Q_{ij}^{(k)}(t)$.

11.5.2. Przykład SM-modelu elementu odnawialnego

Zakładamy, że $S_k = \{0, 1, 2, 3\}$ jest zbiorem stanów procesu semi-Markowa stanowiącego model odnawialnego elementu o numerze k. Przyjmujemy, że jądro tego procesu ma postać

$$\boldsymbol{Q}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} Q_{00}^{(k)}(t) & 0 & 0 & Q_{03}^{(k)}(t) \\ Q_{10}^{(k)}(t) & 0 & 0 & Q_{13}^{(k)}(t) \\ Q_{20}^{(k)}(t) & Q_{21}^{(k)}(t) & 0 & Q_{23}^{(k)}(t) \\ Q_{30}^{(k)}(t) & 0 & Q_{32}^{(k)}(t) & Q_{33}^{(k)}(t) \end{bmatrix} . \tag{11.19}$$

Zakładamy, że elementy tej macierzy mają postać

$$Q_{ij}^{(k)}(t) = p_{ij}^{(k)} G_i^{(k)}(t), \tag{11.20}$$

gdzie $G_i^{(k)}(t)$, $i \in S_k$ jest dystrybuantą rozkładu nieujemnej zmiennej losowej oznaczającej czas trwania stanu i.

W tym przypadku macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa $\{X(\tau_n^{(k)}) : n \in \mathbb{N}_0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{P}^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(k)} & 0 & 0 & p_{03}^{(k)} \\ p_{10}^{(k)} & 0 & 0 & p_{13}^{(k)} \\ p_{20}^{(k)} & p_{21}^{(k)} & 0 & p_{23}^{(k)} \\ p_{30}^{(k)} & 0 & p_{32}^{(k)} & p_{33}^{(k)} \end{bmatrix} . \tag{11.21}$$

Niech

$$p_{i0}^{(k)} = \alpha_i, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

oraz

$$p_{ii-1}^{(k)} = \gamma_i, \quad i = 2, 3 .$$

Rozwiązanie układu równań (11.19), w którym niewiadomymi są prawdopodobieństwa graniczne włożonego łańcucha Markowa ma postać

$$\begin{aligned} \pi_0^{(k)} &= \frac{\alpha_1\gamma_2\gamma_3 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_3}{M}, \\ \pi_1^{(k)} &= \frac{(1-\alpha_0)\gamma_2\gamma_3}{M}, \\ \pi_2^{(k)} &= \frac{(1-\alpha_0)\gamma_3}{M}, \\ \pi_3^{(k)} &= \frac{(1-\alpha_0)}{M}, \end{aligned} \tag{11.22}$$

gdzie $M = (1 - \alpha_0 + \alpha_1)\gamma_2\gamma_3 + (1 - \alpha_0 + \alpha_2)\gamma_3 + 1 - \alpha_0 + \alpha_3$.

Graniczne prawdopodobieństwa stanów elementu o numerze k obliczamy korzystając ze wzoru

$$P_j^{(k)} = \frac{\pi_j^{(k)} m_j^{(k)}}{\sum_{i=0}^{3} \pi_i^{(k)} m_i^{(k)}}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{11.23}$$

11.5.3. Gotowość wielostanowego systemu odnawialnego

Niech $S_k = S = \{0, \ldots, z\}$ dla $k = 1, \ldots, n$. Przyjmujemy, że stany wszystkich elementów systemu modelowane są przez niezależne procesy SM o jądrach określonych wzorem (??) oraz rozkładach początkowych $P\{X^{(k)}(0) = z_k\} = 1$ dla $k = 1, \ldots, n$.

Proces losowy $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ o wartościach w zbiorze S

$$S(t) = \phi(\boldsymbol{X}(t)),$$

gdzie

$$\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$$

opisuje niezawodnościowy stan systemu w chwili t. Jak już wcześniej zauważyliśmy, proces $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ nie jest na ogół procesem semi-Markowa.

Niech

$$P_\phi(t; u) = P\{\phi(\boldsymbol{X}(t)) = u\} = P\{S(t) = u\} .$$

Ponieważ z założenia procesy SM $\{X_k(t) : t \geqslant 0\}$ są niezależne, więc

$$\begin{aligned} P_\varphi(t; u) &= P\{(X_1(t), \ldots, X_n(t)) \in \varphi^{-1}(u)\} = \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \varphi^{-1}(u)} P_{i_1}^{(1)}(t) \ldots P_{i_n}^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Niech

$$P_\varphi(u) = \lim_{t\to\infty} P_\varphi(t;u)\,.$$

Ze wzoru (11.17) mamy

$$P_\phi(u) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\phi^{-1}(u)} P_{i_1}^{(1)}\ldots P_{i_n}^{(n)} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\varphi^{-1}(u)} \frac{\pi_{i_1}^{(1)} m_{i_1}^{(1)}\ldots\pi_{i_n}^{(n)} m_{i_n}^{(n)}}{\sum\limits_{j_1\in S_1}\pi_{j_1}^{(1)} m_{j_1}^{(1)}\ldots\sum\limits_{j_n\in S_n}\pi_{j_n}^{(n)} m_{j_n}^{(n)}}\,.$$

Zakładamy teraz, że wszystkie elementy systemu opisane są przez niezależne procesy semi-Markowa $\{X_k(t): t\geqslant 0\}$, $k\in C=\{1,\ldots n\}$ o identycznych jądrach $\boldsymbol{Q}(t)$. Wartość zmiennej losowej

$$N_i(t) := \#\{r\in C : X_r(t) = i\},\quad t\geqslant 0,\quad i\in S=\{0,1,\ldots,z\}$$

oznacza liczbę elementów znajdujących się w chwili t w stanie niezawodności i.

Wektor losowy

$$\{(N_0(t), N_1(t),\ldots,N_z(t)) : t\geqslant 0\}$$

ma rozkład wielomianowy

$$P\{N_0(t)=i_0, N_1(t)=i_1,\ldots,N_z(t)=i_z\} =$$
$$= \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_z!}[P_0(t)]^{i_0}[P_1(t)]^{i_1},\ldots,[P_z(t)]^{i_z},$$

gdzie $i_0+i_1+\ldots+i_z=n$, $P_u(t)=P\{X_k(t)=u\}$, $u\in S$, $k\in C$.
Stąd oraz z równości (11.23) wynika

$$\lim_{t\to\infty} P\{N_0(t)=i_0, N_1(t)=i_1,\ldots,N_z(t)=i_z\} =$$
$$= \frac{n!\;\pi_0^{i_0} m_0^{i_0}\pi_1^{i_1} m_1^{i_1}\ldots\pi_z^{i_z} m_z^{i_z}}{i_1!i_2!\ldots i_z!\left(\sum\limits_{i\in S}\pi_i m_i\right)^n}\,.$$

Zmienna losowa

$$N_{\geqslant u}(t) := \#\{r\in C:\ X_r(t)\geqslant u\},\quad t\geqslant 0,\quad u\in S=\{0,1,\ldots,z\}$$

oznacza liczbę elementów systemu których stan niezawodnościowy jest co najmniej na poziomie u. Proces losowy

$$\{N_{\geqslant u}(t):\ t\geqslant 0\}$$

ma rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, P_{\geqslant u}(t))$, gdzie

$$P_{\geqslant u}(t) = P_u(t)+\ldots+P_z(t).$$

Wielostanowy system naprawialny nazywamy systemem „k z n na poziomie u", jeżeli co najmniej k z n elementów jest w stanie niezawodności o poziomie nie mniejszym niż u. Współczynnik gotowości takiego systemu określony jest wzorem

$$P\{N_{\geqslant u}(t) \geqslant k\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (P_{\geqslant u}(t))^j (1 - P_{\geqslant u}(t))^{n-j}.$$

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, dla dużego n i dużego t otrzymujemy

$$P\{N_{\geqslant u}(t) \geqslant k\} \approx 1 - \phi\left(\frac{k - nP_{\geqslant u}}{\sqrt{nP_{\geqslant u}(1 - P_{\geqslant u})}}\right),$$

gdzie

$$P_{\geqslant u} = P_u + P_{u+1} + \ldots + P_z = \frac{\sum\limits_{j=u}^{n} \pi_j m_j}{\sum\limits_{j=0}^{n} \pi_j m_j}$$

oraz $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du\,. \tag{11.24}$$

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności*. WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] HOWARD R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] JAŹWIŃSKI J., BORGOŃ J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-72-3