POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 8

Model odnawialnego obiektu z rezerwą zimną

Rezerwowanie jest jedną z metod zwiększania niezawodności urządzeń. *Rezerwa zimna* polega na tym, że oczekujące na pracę nieobciążone elementy rezerwowe nie mogą ulec uszkodzeniu. Rezerwa zimna nazywana jest również *rezerwą nieobciążoną*. Będziemy rozpatrywali przypadek w którym uszkodzony system jest odnawialny. Prezentowany tu model stanowi uogólnienie modeli przedstawionych w pracach [5], [20], [22].

8.1. Opis i założenia

Obiekt składa się z dwóch identycznych N elementowych systemów (podstawowego i rezerwowego) oraz przełącznika. Systemy mają strukturę niezawodnościową szeregową. Czas zdatności k-tego elementu systemu ζ_k, $k = 1, \dots, N$ jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie określonym przez gęstość $f_k(t)$. W chwili uszkodzenia użytkowanego systemu, natychmiast, za pomocą przełącznika, zostaje uruchomiony identyczny system rezerwowy. Uszkodzony system jest niezwłocznie naprawiany. Jeżeli uszkodzenie systemu nastąpiło w wyniku uszkodzenia elementu o numerze k, to czas naprawy wynosi γ_k. Zakładamy, że czas naprawy elementu o numerze k jest zmienną losową o rozkładzie $H_k(t) = P(\gamma_k \leqslant t)$. Przyjmujemy, że naprawa przywraca systemowi pełną zdatność (odnowa systemu). System rezerwowy nie ulega uszkodzeniu (rezerwa zimna). Zakładamy, że przełącznik może ulec uszkodzeniu. Prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na zdatności przełącznika w chwili uszkodzenia użytkowanego systemu jest równe a. Zajście zdarzenia A' oznacza awarię obiektu. Awaria obiektu następuje również wtedy, gdy w czasie naprawy systemu ulegnie uszkodzeniu system użytkowany. Uszkodzony obiekt jest odnawialny. Czas odnowy obiektu jest nieujemną zmienna losową κ o rozkładzie określonym przez dystrybuantę $K(t) = P(\kappa \leqslant t)$. Przyjmujemy, że występujące tu wielkości losowe są niezależne, natomiast zmienne losowe mają skończone drugie momenty.

8.2. Konstrukcja modelu

Przyjmujemy następujące stany:

$N + 1$ – obydwa systemy są zdatne,

k – jeden system jest zdatny, drugi znajduje się w naprawie spowodowanej uszkodzeniem k-tego elementu, $(k = 1, \dots, N)$,

0 – awaria obiektu.

Niech $\{Y(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem stochastycznym o zbiorze stanów $S = \{0, 1, \dots, N, N+1\}$ oraz przedziałami stałych, prawostronnie ciągłych realizacjach.

Proces $\{Y(t) : t \geqslant 0\}$ nie jest procesem semi-markowskim, gdyż dla nie dla wszystkich chwil zmian jego stanów spełniony jest warunek „braku pamięci" wymagany w definicji.

Zbudujemy nowy proces by warunek ten był spełniony. Niech $\tau_0 = 0$ i niech τ_n, $n = 1, 2, \ldots$ oznacza chwilę n-tego uszkodzenia (chwilę n-tego przejścia do jednego ze stanów $0, 1, \ldots, N$).

Niech

$$X(0) = N + 1, \quad X(t) = Y(\tau_n) \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_n, \tau_{n+1}).$$

Tak określony proces $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem semi-markowskim o jądrze postaci

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_{0N+1}(t) \\ Q_{1\,0}(t) & Q_{1\,1}(t) & \cdots & Q_{1\,N}(t) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{N\,0}(t) & Q_{N\,1}(t) & \cdots & Q_{N\,N}(t) & 0 \\ Q_{N+1\,0}(t) & Q_{N+1\,1}(t) & \cdots & Q_{N+1N}(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ zostanie zdefiniowany, gdy określimy funkcje stanowiące elementy macierzy $Q(t)$. Dla $j = 1, \ldots, N$ mamy

$$Q_{N+1j}(t) = P(X(\tau_{n+1}) = j,\ \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \,|\, X(\tau_n) = N + 1) =$$
$$= P(A, \zeta_j \leqslant t, \zeta_i > \zeta_j \ \text{dla} \ i \neq j) = a \underset{D_{N+1\,j}}{\int\int \ldots \int} dF_1(x_1) dF(x_2) \cdots dF_N(x_N)\,,$$

gdzie

$$D_{N+1\,j} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : \ 0 \leqslant x_j \leqslant t, x_i > x_j,\ i \neq j\}.$$

Zamieniając całkę wielokrotną na iterowaną otrzymujemy

$$Q_{N+1\,j}(t) = a \int_0^t \prod_{i \neq j}^{N} [1 - F_i(x)] f_j(x) dx.$$

Dla $j = 0$ mamy

$$Q_{N+10}(t) = P(X(\tau_{n+1}) = 0,\ \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \,|\, X(\tau_n) = N + 1) =$$
$$= P(A,\ \min(\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \leq t) = (1 - a)(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(t))).$$

Dla $i, j = 1, \ldots, N$ mamy

$$Q_{ij}(t) = P(A, \zeta_j \leqslant t, \zeta_k > \zeta_j \ \text{dla} \ j \neq k, k = 1, \ldots, N, \gamma_i < \zeta_j).$$

Postępując podobnie otrzymujemy

$$Q_{ij}(t) = a \int_0^t H_i(x) \prod_{k \neq j}^{N} [1 - F_k(x)] f_j(x) dx.$$

Dla $i = 1, \dots, N$ oraz $j = 0$

$$\begin{aligned} Q_{i\,0}(t) &= P(\min(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \leqslant t,\ \gamma_i > \min(\zeta_1, \dots, \zeta_N)) + \\ &+ P(A',\ \min(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \leqslant t,\ \gamma_i < \min(\zeta_1, \dots, \zeta_N)) = \\ &= \int_0^t [1 - H_i(x)] dG(x) + (1-a) \int_0^t H_i(x) dG(x)\,, \end{aligned}$$

gdzie

$$G(x) = P(\min(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \leqslant t) = 1 - \prod_{k=1}^{N} [1 - F_k(x)].$$

Po uproszczeniu

$$Q_{i\,0}(t) = G(t) - a \int_0^t H_i(x) dG(x)\,.$$

Z założenia

$$Q_{0\,N+1}(t) = K(t)\,.$$

Ponieważ niezbędne elementy jądra $\boldsymbol{Q}(t)$ zostały określone więc semi-markowski proces $\{X(t) :\ t \geqslant 0\}$ stanowiący model niezawodnościowy obiektu został zdefiniowany.

8.3. Szczególne przypadki

8.3.1. Wykładnicze czasy zdatności elementów systemu

Przyjmijmy, że zmienne losowe ζ_k , $k = 1, \dots, N$ mają rozkłady wykładnicze z parametrami λ_k , $k = 1, \dots, N$ odpowiednio, tzn.

$$f_k(x) = \lambda_k e^{-\lambda_k x}, \quad x \geqslant 0.$$

W tej sytuacji, dzięki brakowi pamięci rozkładu wykładniczego, założenie dotyczące odnowy systemu w chwili awarii elementu można osłabić, zakładając jedynie odnowę uszkodzonego elementu. Wówczas dla $j = 1, \dots, N$ mamy

$$Q_{N+1\,j}(t) = a \int_0^t \prod_{i \neq j}^{N} [e^{-\lambda_i x}] \lambda_j e^{-\lambda_j x} dx = a \frac{\lambda_j}{\Lambda} (1 - e^{-\Lambda t}), \quad t \geqslant 0,$$

gdzie

$$\Lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_N.$$

Dla $j = 0$ otrzymujemy

$$Q_{N+1 0}(t) = (1-a)(1 - e^{-\Lambda t}), \quad t \geqslant 0.$$

Dla $i, j = 1, \dots, N$ mamy

$$Q_{ij}(t) = a \lambda_j \int_0^t H_i(x) e^{-\Lambda x} dx.$$

Dla $j = 0$ mamy

$$Q_{i\,0}(t) = 1 - e^{-\Lambda\, t} - a\Lambda \int_0^t H_i(x) e^{-\Lambda\, x} dx.$$

8.3.2. Systemy jednoelementowe

Przyjmujemy $N = 1$, co oznacza, że system pracujący i rezerwowy są jednoelementowe. Jądro procesu semi-markowskiego ma teraz postać

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{02}(t) \\ Q_{10}(t) & Q_{11}(t) & 0 \\ Q_{20}(t) & Q_{21}(t) & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$Q_{0\,2}(t) = K(t),$$

$$Q_{1\,0}(t) = F_1(t) - a \int\limits_0^t H_1(x) f_1(x) dx\,, \quad Q_{1\,1}(t) = a \int\limits_0^t H_1(x) f_1(x) dx\,,$$

$$Q_{2\,0}(t) = (1-a) F_1(t)\,, \quad Q_{2\,1}(t) = a F_1(t)\,.$$

8.4. Charakterystyki i parametry niezawodności

Dla ułatwienia, obliczymy niektóre charakterystyki i parametry niezawodności obiektu w szczególnym przypadku, dla modelu w którym system podstawowy i rezerwowy są jednoelementowe, a więc gdy $N = 1$.

Zmienna losowa $\Theta_A = \inf\{t : X(t) \in A\}$ jak wiemy oznacza czas pierwszego osiągnięcia przez proces $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ podzbioru A. Funkcja

$$\Phi_{iA}(t) = P\{\Theta_A \leqslant t \,|\, X_k(0) = i\},\ i \in A',$$

jest dystrybuantą rozkładu czasu pierwszego osiągnięcia podzbioru A ze stanu $i \in A'$ tego procesu semi-markowskiego.

Niech $\bar{\phi}_{iA} = \int_0^\infty t d\Phi_{iA}(t)$ oraz $\bar{\phi}_{iA}^2 = \int_0^\infty t^2 d\Phi_{iA}(t)$ oznaczają wartość oczekiwaną i drugi moment rozkładu $\Phi_{iA}(t)$ odpowiednio. W rozpatrywanym przez nas modelu $A = \{0\}$ natomiast $A' = \{1,2\}$. Zakładamy, że $P\{X(0) = 2\} = 1$. Wówczas

$$R(t) = 1 - \Phi_{20}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{8.1}$$

Skorzystamy z twierdzeń przedstawionych w 3.1.

Niech

$$\bar{q}_{ik} := \int_0^\infty t dQ_{ik}(t), \quad \bar{q}_{ik}^2 := \int_0^\infty t^2 dQ_{ik}(t)\,,$$

$$\bar{g}_i := \int_0^\infty t dG_i(t), \quad \bar{g}_i^2 := \int_0^\infty t^2 dG_i(t).$$

Ponieważ założenia twierdzeń 26, 27, 28 w przypadku rozpatrywanego tu modelu są spełnione, więc możemy obliczyć dystrybuantę rozkładu czasu zdatności obiektu, funkcję niezawodności, oczekiwany czas zdatności obiektu, drugi moment i wariancję czasu zdatności.

Jak wynika ze wspomnianych twierdzeń transformaty $\tilde{\varphi}_{iA}(s)$, wartości oczekiwane $\bar{\phi}_{iA}$ i drugie momenty $\bar{\phi}^2_{iA}$, $i \in A'$ są jedynymi rozwiązaniami układów równań

1.

$$\tilde{\varphi}_{iA}(s) - \sum_{k\in A'} \tilde{q}_{ik}(s)\tilde{\varphi}_{kA}(s) = \sum_{j\in A} \tilde{q}_{ij}(s), \quad i \in A', \tag{8.2}$$

gdzie

$$\tilde{\varphi}_{iA}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Phi_{iA}(t), \quad \tilde{q}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ij}(t).$$

2.

$$\bar{\phi}_{iA} - \sum_{k\in A'} p_{ik}\bar{\phi}_{kA} = \bar{g}_i, \quad i \in A'. \tag{8.3}$$

3.

$$\bar{\phi}^2_{iA} - \sum_{k\in A'} p_{ik}\bar{\phi}^2_{kA} = \bar{g}^2_i + 2\sum_{k\in A'} \bar{q}_{ik}\bar{\phi}_{kA}, \quad i \in A'. \tag{8.4}$$

Obliczymy najpierw parametry tych równań dla rozpatrywanego tu modelu. Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa ma postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p_{10} & p_{11} & 0 \\ p_{20} & p_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$p_{10} = 1 - p_{11}, \quad p_{11} = a\int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx,$$

$$p_{20} = (1-a), \quad p_{21} = a.$$

Pozostałe parametry układów równań wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} G_1(t) &= Q_{10}(t) + Q_{11}(t) = F_1(t), \\ G_2(t) &= Q_{20}(t) + Q_{21}(t) = F_1(t), \\ \bar{g}_1 &= E(\zeta), \quad \bar{g}^2_1 = E(\zeta^2), \\ \bar{g}_2 &= E(\zeta), \quad \bar{g}^2_2 = E(\zeta^2), \\ \bar{q}_{11} &= a\int_0^\infty x H_1(x) f_1(x) dx. \end{aligned}$$

W naszym przypadku $A' = \{1,2\}$ oraz $A = \{0\}$. Układ równań (8.2) przyjmuje kształt

$$\tilde{\varphi}_{10}(s) - \tilde{q}_{11}(s)\,\tilde{\varphi}_{10}(s) = \tilde{q}_{10}(s)\,, \tag{8.5}$$

$$\tilde{\varphi}_{20}(s) - \tilde{q}_{21}(s)\,\tilde{\varphi}_{10}(s) = \tilde{q}_{20}(s)\,. \tag{8.6}$$

Rozwiązanie tego układu równań ma postać

$$\tilde{\varphi}_{10}(s) = \frac{\tilde{q}_{10}(s)}{1 - \tilde{q}_{11}(s)}\,, \tag{8.7}$$

$$\tilde{\varphi}_{20}(s) = \tilde{q}_{20}(s) + \frac{\tilde{q}_{21}(s)\tilde{q}_{10}(s)}{1 - \tilde{q}_{11}(s)}\,. \tag{8.8}$$

Stąd transformata Laplace'a funkcji niezawodności obiektu wyrażona jest wzorem

$$\tilde{R}(s) = \frac{1 - \tilde{\varphi}_{20}(s)}{s}\,. \tag{8.9}$$

Układ równań (8.3) dla oczekiwanych czasów zdatności obiektu ma postać

$$\bar{\phi}_{10} - p_{11}\,\bar{\phi}_{10} = \bar{g}_1\,, \tag{8.10}$$

$$\bar{\phi}_{20} - p_{21}\,\bar{\phi}_{10} = \bar{g}_2\,. \tag{8.11}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań są liczby

$$\bar{\phi}_{10} = \frac{\bar{g}_1}{1 - p_{11}}, \tag{8.12}$$

$$\bar{\phi}_{20} = \bar{g}_2 + \frac{p_{21}\bar{g}_1}{1 - p_{11}}. \tag{8.13}$$

Zatem, po dokonaniu podstawień otrzymujemy oczekiwany czas zdatności obiektu

$$E(\Theta_A \,|\, X(0) = 2) = \bar{\phi}_{20} = E(\zeta) + \frac{aE(\zeta)}{1 - p_{11}}\,, \tag{8.14}$$

gdzie

$$p_{11} = a \int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx\,. \tag{8.15}$$

Jak wynika z tego wzoru oczekiwany czas zdatności obiektu istotnie zależy od rozkładów czasu zdatności pracującego systemu (elementu), rozkładu czasu odnowy uszkodzonego systemu i niezawodności przełącznika. Analiza tej zależności jako funkcji wspomnianych wielkości daje możliwość zbadania ich wpływu na oczekiwany czas zdatności obiektu.

Na przykład, przy ustalonych rozkładach czasu zdatności i czasu obsługi, wielkość ta jako funkcja parametru a, który oznacza niezawodność przełącznika, ma postać

$$T(a) = E(\zeta) + \frac{aE(\zeta)}{1 - c\,a}\,, \tag{8.16}$$

gdzie

$$c = \int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx = P\{\gamma_1 < \zeta_1\} \;=\; 1 - P\{\gamma_1 \geqslant \zeta_1\}. \tag{8.17}$$

Jak widać, funkcja ta jest nieliniowa, rosnąca, dla $a = 0$ przyjmuje wartość $T(0) = E(\zeta)$, natomiast dla $a = 1$ jej wartość wynosi $T(1) = E(\zeta) + \frac{E(\zeta)}{1-c}$.
Układ równań (8.4) dla drugich momentów rozkładów czasów zdatności obiektu ma postać

$$\bar{\phi}_{10}^2 - p_{11}\,\bar{\phi}_{10}^2 = \bar{b}_1\,, \tag{8.18}$$
$$\bar{\phi}_{20}^2 - p_{21}\,\bar{\phi}_{10}^2 = \bar{b}_2\,, \tag{8.19}$$

gdzie

$$\bar{b}_1 = E(\zeta^2) + 2\bar{q}_{11}\frac{E(\zeta)}{1-p_{11}}, \quad \bar{q}_{11} = a\int_0^\infty x H_1(x) f_1(x) dx, \tag{8.20}$$

$$\bar{b}_2 = E(\zeta^2) + \frac{2a[E(\zeta)]^2}{1-p_{11}}. \tag{8.21}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań są liczby

$$\bar{\phi}_{10}^2 = \frac{\bar{b}_1}{1-p_{11}}, \tag{8.22}$$

$$\bar{\phi}_{20}^2 = \bar{b}_2 + \frac{p_{21}\bar{b}_1}{1-p_{11}}\,. \tag{8.23}$$

Wariancję czasu zdatności obliczamy, korzystając ze znanego związku

$$V(\Theta_A \,|\, X(0) = 2) = \bar{\phi}_{20}^2 - [\bar{\phi}_{20}]^2\,. \tag{8.24}$$

Znalezienie jawnej postaci funkcji niezawodności na podstawie jej transformaty Laplace'a w wielu przypadkach jest kłopotliwe. Korzystając z twierdzenia 36 znajdziemy przybliżoną postać tej funkcji. Przypomnijmy, że zgodnie z definicją 41 proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów S i jądrze $\boldsymbol{Q}(t) = [\, p_{ij}F_{ij}(t) : i,j \in S\,]$, nazywamy *procesem zaburzonym* w stosunku do procesu $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów A' i jądrze $\boldsymbol{Q}^0(t) = [p_{ij}^0 F_{ij}(t) : i,j \in A']$, jeżeli

$$p_{ij}^0 = \frac{p_{ij}}{1-\varepsilon_i}\,, \quad i,j \in A'\,, \tag{8.25}$$

przy czym

$$\varepsilon_i = \sum_{j\in A} p_{ij} \tag{8.26}$$

Rozpatrywany przez nas proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $S = \{0,1,2\}$ można traktować jako proces zaburzony w stosunku do procesu $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $A' = \{1,2\}$, którego jądro ma postać

$$\boldsymbol{Q}^0(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}^0(t) & 0 \\ Q_{21}^0(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.27}$$

gdzie

$$Q_{11}^0(t) = p_{11}^0 F_{11}(t) , \quad Q_{21}^0(t) = p_{21}^0 F_{21}(t) .$$

Ponieważ $A = \{0\}$, oraz

$$\varepsilon_1 = p_{10} = Q_{10}(\infty) = 1 - a \int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx,$$

więc

$$p_{11}^0 = \frac{p_{11}}{1-\varepsilon_1} = 1 .$$

A ponieważ

$$\frac{Q_{11}(t)}{p_{11}} = F_{11}(t) ,$$

więc

$$Q_{11}^0(t) = F_{11}(t) = \frac{\int_0^t H_1(x) f_1(x) dx}{\int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx} .$$

Zauważmy, że $\varepsilon_2 = p_{20} = 1 - a$, a więc $p_{21}^0 = \frac{p_{21}}{1-\varepsilon_2} = 1$. Ostatecznie

$$Q_{21}^0(t) = F_{21}(t) = F_1(t).$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w proces $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{P}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{8.28}$$

Rozwiązując układ równań

$$[\pi_1^0, \pi_2^0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\pi_1^0, \pi_2^0] , \tag{8.29}$$

$$\pi_1^0 + \pi_2^0 = 1 \tag{8.30}$$

otrzymujemy rozkład stacjonarny $\boldsymbol{\pi}^0 = [1 \ , \ 0]$. Z tezy twierdzenia 36 wynika, że dla małego ε

$$P\{\Theta_A > t \,|\, X(0) = i\} = P\{\Theta_{iA} > t\} \approx \exp\left[-\frac{\sum_{i \in A'} \pi_i^0 \varepsilon_i}{\sum_{i \in A'} \pi_i^0 m_i^0} t \right] , \quad t \geqslant 0 , \tag{8.31}$$

gdzie

$$m_i^0 = \int_0^\infty [1 - G_i^0(t)] dt , \quad i \in A' , G_i^0(t) = \sum_{j \in A'} Q_{ij}^0(t) , \tag{8.32}$$

$$\varepsilon = \sum_{i \in A'} \pi_i^0 \varepsilon_i \tag{8.33}$$

oraz

$$m^0 = \sum_{i \in A} \pi_i^0 m_i^0 \, . \tag{8.34}$$

Korzystając z tych wzorów obliczamy parametry występujące w tezie twierdzenia

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 1 - a \int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx,$$

$$m^0 = m_1^0 = \frac{\int_0^\infty x H_1(x) f_1(x) dx}{\int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx} .$$

Dla ε bliskiego 0 otrzymujemy przybliżony wzór na funkcję niezawodności systemu

$$R(t) = P\{\Theta_{iA} > t\} = P\{\varepsilon\Theta_{iA} > \varepsilon t\} \approx \exp\left[-\frac{\varepsilon}{m^0}\, t\right] , \quad t \geqslant 0 \, .$$

Z postaci parametru ε wynika, że wzór ten można sensownie stosować jedynie wtedy, gdy liczba $P\{\gamma_1 \geqslant \zeta_1\}$ oznaczająca prawdopodobieństwo uszkodzenia systemu w trakcie odnowy poprzednio uszkodzonego systemu, jest mała. Ostatecznie otrzymujemy przybliżony wzór

$$R(t) = P\{\Theta_{20} > t\} \approx \exp\left[-\frac{c(1 - ac)}{m_*}\, t\right] , \tag{8.35}$$

gdzie

$$c = \int_0^\infty H_1(x) f_1(x) dx = P(\gamma_1 < \zeta_1) \, ,$$

$$m_* = \int_0^\infty x H_1(x) f_1(x) dx \, .$$

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] Domsta J., Grabski F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] Domsta J., Grabski F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] Feller W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] Feller W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] Герцбах И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] Gertsbakh I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] Gichman I.I., Skorochod A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa 1968.

[20] Gniedenko B.W., Bielajew J.K., Sołowiew A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności*. WN-T, Warszawa 1968.

[21] Grabski F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] Grabski F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] Grabski F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] Grabski F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] Grabski F, Kołowrocki K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] Grabski F., Załęska-Fornal A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] Grabski F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] Howard R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] Iosifescu M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] Jaźwiński J., Borgoń J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] Keilson, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] Kołowrocki K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] Kopociński B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] Kopocińka I., Kopociński B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] Kopocińska I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] Kopociński B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] Korczak E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] Королюк В.С., Турбин А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] Koźniewska I., Włodarczyk M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] Lee T.C., Judge G.G., Zellner A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] Limnios N., Oprisan G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] Limnios N., Oprisan G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicztncyh.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-72-3