POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 7

Optymalizacja obsług profilaktycznych

W eksploatacji urządzeń często stosuje się oprócz napraw również obsługi profilaktyczne. Obsługi profilaktyczne stosowane są między innymi dlatego, że na ogół krócej trwają i są tańsze od napraw.

Semi-markowkie modele procesów eksploatacji uwzględniające obsługi profilaktyczne były rozpatrywane miedzy innymi w pracach [17], [23]. Wyniki zawarte w tym rozdziale pochodzą z pracy [23].

Przyjmujemy, że naprawy i obsługi profilaktyczne są zabiegami przywracającymi obiektowi pełną zdatność. Przyjmujemy ponadto, że chwilą rozpoczęcia naprawy obiektu jest chwila jego uszkodzenia i że chwilę rozpoczęcia obsługi profilaktycznej wyznacza zasada: rozpocząć ją, gdy obiekt przepracuje bez uszkodzeń T jednostek czasu. Przedstawimy stochastyczny model procesu eksploatacji obiektu, który umożliwia sformułowanie zagadnienia optymalizacji obsług profilaktycznych obiektu przez odpowiedni dobór czasu T. Jako model procesu eksploatacji przyjmujemy 3-stanowy proces SM. Rozkład graniczny tego procesu pozwala skonstruować funkcję kryterialną, której wartość oznacza średni dochód uzyskany w jednostce czasu w długiej eksploatacji obiektu.

Ze sformułowanego i udowodnionego twierdzenia wynika, że rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia optymalizacji zależy od rozkładu czasu poprawnej pracy obiektu, od wartości oczekiwanej czasu naprawy i wartości oczekiwanej czasu trwania obsługi profilaktycznej oraz odpowiednio mierzonych dochodów i kosztów eksploatacji obiektu.

7.1. Opis i założenia

Przyjmujemy, że czas zdatności obiektu ζ jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie określonym przez gęstość $f(\cdot)$, ze skończoną dodatnią wartością oczekiwaną $\overline{\zeta} = E(\zeta)$. Uszkodzony obiekt jest naprawiany. Naprawa przywraca obiektowi pełną zdatność i trwa przez losowy czas γ. Przyjmujemy, że γ jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie zdefiniowanym przez $G(t) = P\{\gamma \leqslant t\}$ o dodatniej wartości oczekiwanej $\bar{\gamma} = E(\gamma)$. Niezależnie od tego obiekt podlega obsługom profilaktycznym. Obsługa profilaktyczna dokonywana jest po upływie czasu η od chwili zakończenia poprzedniej obsługi profilaktycznej lub naprawy. Zakładamy, że η jest zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant T \\ 1 & \text{dla} \quad t > T \end{cases}.$$

W wyniku obsługi profilaktycznej zostaje przywrócona obiektowi pełna zdatność. Czas trwania każdej obsługi profilaktycznej jest nieujemną zmienną losową κ o dystrybuancie $U(t) = P\{\kappa \leqslant t\}$ i dodatniej wartości oczekiwanej $\bar{\kappa} = E(\kappa)$. Przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ rozpoczyna się użytkowanie zdatnego obiektu i każda chwila odnowy rozpoczyna kolejny cykl eksploatacji obiektu określony przez wzajemnie niezależne zmienne losowe o identycznych rozkładach jak rozkłady wzajemnie niezależnych zmiennych losowych $\zeta, \gamma, \eta, \kappa$. W jednostce czasu użytkowanie obiektu przynosi a jednostek dochodu. Obiekt uszkodzony, znajdujący się w naprawie, przynosi straty. Koszt naprawy przypadający na jednostkę czasu naprawy wynosi b jednostek. Koszt obsługi profilaktycznej na jednostkę czasu wynosi c. Przyjmujemy $a > 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0$.

7.2. Model procesu eksploatacji obiektu

Skonstruujemy proces stochastyczny, który będzie stanowił model procesu eksploatacji obiektu. W tym celu przyjmujemy następujące stany:

1 – użytkowanie obiektu

2 – naprawa

3 – obsługa profilaktyczna.

Niech $\{X(t) : t \geq 0\}$ będzie procesem stochastycznym o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3\}$ i niech $0 = \tau_0, \tau_1, \tau_2 \ldots$ będą zmiennymi losowymi oznaczającymi chwile, w których następują zmiany stanów tego procesu. Z przyjętych założeń wynika, że przy znanym stanie procesu w chwili τ_n czas trwania tego stanu oraz stan osiągnięty w chwili τ_{n+1} nie zależą stochastycznie od stanów procesu w chwilach $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{n-1}$ oraz czasów ich trwania:

$$\begin{aligned} P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n) = i, X(\tau_{n-1}), \ldots, X(\tau_0), \tau_n - \tau_{n-1} \ldots \tau_1, \tau_0\} = \\ = P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n) = i\}. \qquad (7.1) \end{aligned}$$

Oznacza to, że proces $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem SM. Określimy jądro tego procesu

$$\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S], \quad t \geqslant 0,$$
$$Q_{ij}(t) = P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n) = i\}, \quad i, j \in S,$$

i rozkład początkowy

$$p_i^{(0)} = P\{X(0) = i\}, \quad i \in S. \qquad (7.2)$$

Jądro rozpatrywanego procesu SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{21}(t) & 0 & 0 \\ Q_{31}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.3)$$

Niezerowe elementy jądra zależą od rozkładów zmiennych losowych $\zeta, \gamma, \eta, \kappa$:

$$Q_{12}(t) = P\{\zeta \leqslant t, \eta > \zeta\} = \int_0^t [1 - H(x)] f(x) dx = \tag{7.4}$$

$$= \begin{cases} F(t) & \text{dla} \quad t \leqslant T \\ F(T) & \text{dla} \quad t > T \end{cases},$$

$$Q_{13}(t) = P\{\tau \leqslant t, \zeta > \tau\} = \int_0^t [1 - F(x)] dH(x) = \tag{7.5}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant T \\ 1 - F(T) & \text{dla} \quad t > T \end{cases},$$

$$Q_{21}(t) = P\{\gamma \leqslant t\} = G(t), \tag{7.6}$$

$$Q_{31}(t) = P\{\kappa \leqslant t\} = U(t). \tag{7.7}$$

Rozkład początkowy wyraża się wzorem

$$p_i = Pr\{X(0) = i\} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = 1 \\ 0 & \text{dla} \quad i = 2, 3 \end{cases}. \tag{7.8}$$

Jądro oraz rozkład początkowy procesu $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ zostały określone, a zatem model procesu eksploatacji obiektu został zbudowany.

7.3. Charakterystyki

Na podstawie modelu wyznaczamy charakterystyki, które umożliwiają nam sformułowanie zagadnienia optymalizacji obsług profilaktycznych obiektu.

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa $\{X(\tau_n);\ n \in \mathbb{N}_0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

gdzie

$$p_{12} = \lim_{t \to \infty} Q_{12}(t) = F(t), \tag{7.10}$$

$$p_{13} = \lim_{t \to \infty} Q_{13}(t) = 1 - F(t) = R(t). \tag{7.11}$$

Rozkład stacjonarny

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3]$$

włożonego łańcucha Markowa, który w tym przypadku jest jednocześnie jego rozkładem granicznym obliczymy rozwiązując układ równań (3.37). Układ ten ma teraz postać

$$\begin{array}{lcl} \pi_2 + \pi_3 & = & \pi_1 \\ \pi_1 p_{12} & = & \pi_2 \\ \pi_1 p_{13} & = & \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & 1 \end{array}. \tag{7.12}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań są liczby

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{1+p_{12}+p_{13}} = \frac{1}{2}, \\ \pi_2 &= \frac{p_{12}}{1+p_{12}+p_{13}} = \frac{F(t)}{2}, \\ \pi_3 &= \frac{p_{13}}{1+p_{12}+p_{13}} = \frac{R(t)}{2}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Wartości oczekiwane zmiennych losowych T_i, $i \in S$ oznaczających czasy trwania stanów mają postać

$$E(T_1) = \int_0^\infty td[Q_{12}(t) + Q_{13}(t)] = \tag{7.14}$$

$$= \int_0^T tf(t)dt + T[1 - F(T)] = \int_0^T R(t)dt,$$

$$E(T_2) = \int_0^\infty tdQ_{21}(t) = \int_0^\infty tdG(t) = \bar{\gamma} \tag{7.15}$$

$$E(T_3) = \int_0^\infty tdQ_{31}(t) = \int_0^\infty tdU(t) = \bar{\kappa}. \tag{7.16}$$

Na podstawie wzoru (3.56) wyznaczamy rozkład graniczny procesu $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ stanowiącego model procesu eksploatacji obiektu

$$P_1 = \frac{\int\limits_0^T R(t)dt}{M(T)}, \quad P_2 = \frac{[1 - R(T)]\bar{\gamma}}{M(T)}, \quad P_3 = \frac{R(T)\bar{\kappa}}{M(T)}, \tag{7.17}$$

gdzie

$$M(T) = \int\limits_0^T R(t)dt + [1 - R(T)]\bar{\gamma} + R(T)\bar{\kappa}.$$

7.4. Zagadnienie optymalizacji

Jak wiemy proces stochastyczny $\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ określony wzorem

$$K_j(t) = \int_0^t I_{\{j\}}(X(u))du, \quad j \in S \tag{7.18}$$

oznacza sumaryczny czas przebywania procesu $\{X(t) : t \geq 0\}$ w stanie j w przedziale $[0, t]$.

Wielkość

$$\bar{L}(t) = aE[K_1(t)] - bE[K_2(t)] - cE[K_3(t)] \tag{7.19}$$

oznacza średni dochód z eksploatacji obiektu w przedziale $[0, t]$.

Liczba

$$\bar{L} = \lim_{t\to\infty} \frac{\bar{L}(t)}{t} \tag{7.20}$$

jest średnim jednostkowym dochodem z eksploatacji obiektu w długim przedziale czasu. Ponieważ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[K_j(t)]}{t} = P_j, \tag{7.21}$$

więc

$$\bar{L} = aP_1 - bP_2 - cP_3. \tag{7.22}$$

Biorąc pod uwagę (7.17) otrzymujemy

$$\bar{L} = \frac{a\int_0^T R(t)dt - b[1 - R(T)]\bar{\gamma} - cR(T)\bar{\kappa}}{M(T)}. \tag{7.23}$$

Funkcja $\bar{L} = d(T)$ określona powyższym wzorem opisuje zależność średniego dochodu przypadającego na jednostkę czasu od okresu użytkowania T do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Funkcja ta pozwala sformułować następujące zagadnienie optymalizacji:

Znaleźć liczbę T^* spełniającą warunek

$$d(T^*) = \max_{T>0} d(T). \tag{7.24}$$

Przedstawimy twierdzenie zawierające warunki wystarczające rozwiązania tego zadania.

TWIERDZENIE 46. *Niech*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad r = \bar{\zeta} \lim_{t\to\infty} \lambda(t),$$
$$B = (b-c)\bar{\gamma}\bar{\kappa}, \quad C = (a+c)\bar{\kappa}, \quad D = (a+b)\bar{\gamma}, \quad A = C - D.$$

Jeżeli czas zdatności obiektu ζ jest zmienną losową o rosnącej w przedziale $[0,\infty)$ intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ oraz

$$B \geqslant 0, \quad B\lambda(0) < C < (1 - \frac{1}{r})D, \tag{7.25}$$

to istnieje dokładnie jedna liczba T^*, dla której funkcja $d(T), T \in [0,\infty)$ określona wzorem (7.23) przyjmuje wartość maksymalną. Liczba T^* jest pierwiastkiem równania

$$\left[A\int_0^T R(t)dt - B\right]\lambda(T) + AR(T) + D = 0. \tag{7.26}$$

D o w ó d: Pochodna funkcji kryterialnej ma postać

$$d'(T) = \frac{R(T)\{\left[A\int\limits_0^T R(T)dt - B\right]\lambda(T) + AR(T) + D\}}{\{\int\limits_0^T R(T)dt + [1-R(T)]\bar{\gamma} + R(T)\bar{\kappa}\}^2}. \tag{7.27}$$

Ponieważ, dla każdego $T \in [0,\infty), R(T) > 0$ oraz $M(T) > 0$, więc wystarczy zbadać wyrażenie

$$w(T) = \left[A\int\limits_0^T R(t)dt - B\right]\lambda(T) + AR(T) + D. \tag{7.28}$$

Na mocy założenia

$$w(0) = -B\lambda(0) + A + D = -B\lambda(0) + C > 0. \tag{7.29}$$

Wykażemy, że funkcja $w(T)$ jest malejąca w przedziale $[0,\infty)$. Dla $T \geqslant 0$ oraz $h > 0$ mamy

$$w(T+h) - w(T) = \left[A\int\limits_0^{T+h} R(t)dt - B\right][\lambda(T+h) - \lambda(T)] + \tag{7.30}$$

$$+A\lambda(T)\int\limits_0^{T+h} R(T)dt + A\left[R(T+h) - R(T)\right].$$

Korzystając z definicji funkcji $\lambda(T)$ i twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy

$$w(T+h) - w(T) = \left[A\int\limits_0^{T+h} R(t)dt - B\right][\lambda(T+h) - \lambda(T)] + \tag{7.31}$$

$$+\frac{Ah}{R(T)}\left[R'(T+\theta h)R(T) - R'(T)R(T+\theta^* h)\right], \tag{7.32}$$

gdzie $\theta, \theta^* \in (0,\ 1)$. Z przyjętych w modelu założeń oraz z założeń twierdzenia wynika, że dla dowolnego $T \in [0,\infty)$ oraz dostatecznie małego h prawa strona równości (7.31) jest ujemna. Oznacza to, że funkcja $w(T)$ jest malejąca w przedziale $[0,\infty)$.

Udowodnimy teraz, że dla pewnej liczby $T_0 > 0$ funkcja $w(T)$ ma wartość ujemną. Na podstawie nierówności (7.25) mamy

$$(1-\frac{1}{r})D - C = -A - \frac{D}{r} > 0. \tag{7.33}$$

Niech

$$\varepsilon = (-A - \frac{D}{r})\bar{\zeta} + B. \tag{7.34}$$

Na mocy nierówności (7.32) oraz założeń modelu jest $\varepsilon > 0$. Korzystając z równości

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T R(t)dt = \bar{\zeta}, \quad \lim_{T\to\infty}\lambda(T) = \frac{r}{\bar{\zeta}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{T\to\infty}\{\left[A\int_0^T R(t)dt+\bar{\zeta}(-A-\frac{D}{r})-\varepsilon\right]\lambda(T)+A\,R(T)+D\}= \tag{7.35}$$
$$-\frac{\varepsilon r}{\bar{\zeta}}<0.$$

Z ostatniej nierówności i ciągłości funkcji $w(T)$ wynika istnienie takiej liczby $T_0 > 0$, że $w(T_0) < 0$. Z własności Darboux funkcji ciągłych wynika istnienie liczby $T^* \in (0, T_0)$ takiej, że $w(T^*) = 0$. Ponieważ funkcja $w(T)$ jest malejąca, więc istnieje dokładnie jedna liczba T^* spełniająca równanie $w(T) = 0$. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

Dla $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ funkcja kryterialna $d(T)$ jest współczynnikiem gotowości obiektu

$$d(T)=\frac{\int\limits_0^T R(t)dt}{M(T)}. \tag{7.36}$$

Z udowodnionego twierdzenia dla tego przypadku wynika wniosek

WNIOSEK 21. *Jeżeli czas zdatności obiektu ζ jest zmienną losową o rosnącej w przedziale* $[0,\infty)$ *intensywności uszkodzeń* $\lambda(t)$ *oraz*

$$\bar{\kappa}<(1-\frac{1}{r})\bar{\gamma}, \tag{7.37}$$

to istnieje dokładnie jedna liczba T^* dla której współczynnik gotowości $d(T)$, $T \in$ $[0,\infty)$ *przyjmuje wartość maksymalną. Liczba T^* jest pierwiastkiem równania*

$$A\int\limits_0^T R(t)dt\,\lambda(T)+A\,R(T)+\bar{\gamma}=0, \tag{7.38}$$

gdzie $A = \bar{\kappa} - \bar{\gamma}$.

Jak widać, rozwiązanie zagadnienia optymalizacji istnieje, gdy średni czas obsługi profilaktycznej jest odpowiednio mniejszy od średniego czasu naprawy. Liczba r zależy, jak wiadomo od intensywności uszkodzeń obiektu.

7.5. Przykład

Przyjmijmy, że czas zdatności obiektu jest zmienną losową ζ o rozkładzie Erlanga rzędu 2

$$F(t)=\begin{cases}1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t} & \text{dla}\ \ t>0\\ 0 & \text{dla}\ \ t\le 0\end{cases}. \tag{7.39}$$

Załóżmy, że użytkowany obiekt przynosi a [j/h] dochodu. Przyjmijmy, że średni czas naprawy wynosi $\bar{\gamma}$ [h], jej koszt b [j/h], natomiast średni czas trwania obsługi profilaktycznej wynosi $\bar{\kappa}$ [h], a jej koszt c [j/h].

Wyznaczymy optymalny czas użytkowania obiektu od chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej, przyjmując jako kryterium optymalizacji funkcję $d(T)$, $T \in [0, \infty)$ określoną wzorem (7.23), oznaczającą średni dochód przypadający na jednostkę czasu, uzyskany w wyniku długiej eksploatacji obiektu. W tym celu obliczamy intensywność uszkodzeń, średni czas poprawnej pracy oraz parametr r

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t}{1 + \lambda t}, \quad t \geqslant 0, \tag{7.40}$$

$$\overline{\zeta} = \frac{2}{\lambda}, \quad r = \overline{\zeta} \lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 2. \tag{7.41}$$

Optymalny czas użytkowania obiektu wyznaczymy rozwiązując względem T równanie (7.26), które w tym przypadku ma postać

$$\frac{\lambda(2 - \frac{B}{A}\lambda)T + e^{-\lambda T}}{\lambda T + 1} = -\frac{D}{A}, \tag{7.42}$$

gdzie

$$B = (b - c)\overline{\gamma}\overline{\kappa}, \quad C = (a + c)\overline{\kappa}, \quad D = (a + b)\overline{\gamma}, \quad A = C - D.$$

Intensywność uszkodzeń określona wzorem (7.29) jest funkcją rosnącą spełniającą warunek $\lambda(0) = 0$. Nierówności (7.25), stanowiące warunki istnienia rozwiązania zagadnienia optymalizacji, mają w tym przypadku postać

$$B \geqslant 0, \quad 0 < C < \frac{D}{2}. \tag{7.43}$$

Nierówności te są spełnione, gdy jednostkowy koszt obsługi profilaktycznej jest odpowiednio mniejszy od jednostkowego kosztu naprawy oraz średni czas trwania obsługi profilaktycznej jest odpowiednio mniejszy od średniego czasu trwania naprawy, przy czym relacje te zależą od dochodu, jaki przynosi użytkowany obiekt, jego średniego czasu zdatności oraz intensywności uszkodzeń. Fakt ten zilustrujemy dwoma przykładami liczbowymi.

Niech

$$\begin{array}{rcll} \lambda & = & 0.01 & [1/\mathrm{h}], \\ a & = & 10 & [\mathrm{j/h}], \\ b & = & 20 & [\mathrm{j/h}], \\ c & = & 5 & [\mathrm{j/h}], \\ \overline{\kappa} & = & 15 & [\mathrm{h}], \\ \overline{\gamma} & = & 20 & [\mathrm{h}], \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \lambda & = & 0.01 & [1/\mathrm{h}], \\ a & = & 10 & [\mathrm{j/h}], \\ b & = & 20 & [\mathrm{j/h}], \\ b & = & 15 & [\mathrm{j/h}], \\ \overline{\kappa} & = & 15 & [\mathrm{h}], \\ \overline{\gamma} & = & 20 & [\mathrm{h}]. \end{array}$$

W obu przypadkach $c < b$ oraz $\overline{\kappa} < \overline{\gamma}$, a więc jednostkowy koszt obsługi profilaktycznej jest mniejszy od jednostkowego kosztu naprawy, a średni czas trwania obsługi profilaktycznej jest mniejszy od średniego czasu trwania naprawy.

W przykładzie I mamy

$$B = 4500, \quad C = 225, \quad D = 600, \quad A = -375,$$

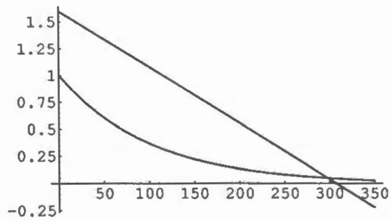
a więc nierówności (7.42) są spełnione. Po podstawieniu wartości liczbowych równanie (7.41) przyjmuje postać

$$\frac{0.0212T + e^{-0.01T}}{0.01T + 1} = 1.6. \tag{7.44}$$

Przekształcając je, otrzymujemy równanie

$$e^{-0.01T} = -0.0052T + 1.6, \tag{7.45}$$

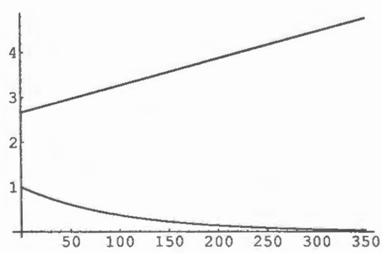
którego graficzne rozwiązanie przedstawione jest na rysunku 7.19. Przybliżonym rozwiązaniem tego równania jest liczba 297.916, a zatem optymalnym okresem użytkowania obiektu od chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej jest $T^* \approx 298$ [h].



Rys. 7.19. Ilustracja równania (7.44)

W przykładzie II mamy

$$B = 1500, \quad C = 375, \quad D = 600, \quad A = -225.$$



Rys. 7.20. Ilustracja równania (7.45)

W tym przypadku $C > D/2$, a więc układ nierówności (7.42) nie jest spełniony. Równanie (7.44), które w tym przypadku ma postać

$$e^{-0.01T} = 0.006T + 2.666, \tag{7.46}$$

nie ma rozwiązania w zbiorze $[0, \infty)$, (rysunek 7.20). Oznacza to, iż stosowanie obsług profilaktycznych w tym przypadku jest nieopłacalne.

Jeżeli jako kryterium optymalizacji przyjmiemy współczynnik gotowości systemu, to warunek wystarczający istnienia i jednoznaczności rozwiązania zadania optymalizacji przyjmuje postać

$$0 < \bar{\kappa} < \frac{\bar{\gamma}}{2}. \tag{7.47}$$

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] Howard R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] Iosifescu M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] Jaźwiński J., Borgoń J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] Keilson, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] Kołowrocki K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] Kopociński B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] Kopocińka I., Kopociński B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] Kopocińska I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] Kopociński B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] Korczak E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] Королюк В.С., Турбин А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] Koźniewska I., Włodarczyk M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] Lee T.C., Judge G.G., Zellner A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] Limnios N., Oprisan G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] Limnios N., Oprisan G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] Limnios N., Oprisan G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] Olearczuk E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] Piasecki S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] Piasecki S.: *Elementy teorii niezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] Piasecki S.: *Elementy teorii niezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] Seneta, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] Shiryayev A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] Сильвестров Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] Solovyev A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] Solovyev, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] Шпак В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-72-3