



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

**SEMI-MARKOWSKIE MODELE
NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI**

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiórach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsługi mają rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą

i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 6

Model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania

Wiele obiektów technicznych przeznaczonych jest do wykonywania różnych zadań. Przykładem mogą tu być środki transportu. Różne zadania determinują zmienną intensywność użytkowania tych obiektów. Intensywność użytkowania wpływa na niezawodność.

6.1. Opis i założenia

Obiekt może być użytkowany wykonując różne zadania z_1, \dots, z_r . Zakładamy, że wielkości z_1, \dots, z_r są wartościami zmiennej losowej Z o rozkładzie dyskretnym $P(Z = z_k) = a_k, k = 1, \dots, r$. Przyjmujemy, że w chwilach $\tau_{2n}, n \in \mathbb{N}_0$ z prawdopodobieństwem $a_k, k = 1, \dots, r$ rozpoczyna się wykonywanie zadania $z_k, k = 1, \dots, r$. Czas użytkowania obiektu wykonującego zadanie z_k , jest nieujemną zmienną losową ξ_k o rozkładzie $U_k(x) = P(\xi_k \leq x)$. Użytkowany obiekt może ulec uszkodzeniu. Przyjmujemy, że czas zdatności obiektu wykonującego zadanie z_k jest nieujemną zmienną losową ζ_k o rozkładzie $F_k(x) = P\{\zeta_k \leq x\}$. Jeżeli w przedziale czasu o długości ξ_k nie nastąpiło uszkodzenie obiektu, to z chwilą zakończenia użytkowania rozpoczyna się obsługa techniczna, która trwa przez losowy czas η_k . Nieujemna zmienna losowa η_k ma rozkład $V_k(x) = P(\eta_k \leq x)$. Jeżeli użytkowany obiekt uległ uszkodzeniu, natychmiast rozpoczyna się obsługa awaryjna, która trwa przez losowy czas γ o rozkładzie $G(x) = P(\gamma \leq x)$. Zakładamy, że w wyniku wszelkich obsług obiekt zostaje odnawiany. Chwile zakończenia obsłóg są jednocześnie chwilami rozpoczęcia zadań. Przyjmujemy, że wszystkie występujące tu zmienne losowe są wzajemnie niezależne a proces eksploatacji opisany jest przez niezależne kopie tych zmiennych losowych. Zakładamy, że przynajmniej zmienne losowe $\zeta_k, k = 1, \dots, r$ mają rozkłady absolutnie ciągle względem miary Lebesgue'a, a wszystkie zmienne losowe mają skończone wartości oczekiwane i wariancje.

6.2. Konstrukcja modelu

Przyjmujemy następujące stany:

k – użytkowanie obiektu wykonującego zadanie $z_k, k = 1, \dots, r$,

$r + k$ – obsługa techniczna obiektu po wykonaniu zadania z_k ,

$2r + 1$ – obsługa awaryjna.

Niech $\{X(t) : t \geq 0\}$ będzie procesem stochastycznym o przedziałami stałych, prawostronnie ciągłych realizacjach i zbiorze stanów $S = \{1, \dots, 2r + 1\}$.

Zmiany stanów następują w losowych chwilach $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$, przy czym użytkowanie obiektu rozpoczyna się w chwilach τ_0, τ_2, \dots , natomiast obsługa w chwilach τ_1, τ_3, \dots .

Z przyjętych założeń wynika, że jeżeli znany jest stan procesu w pewnej chwili τ_n , to czas trwania tego stanu oraz stan osiągnięty w chwili τ_{n+1} nie zależą stochastycznie od stanów procesu w chwilach $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ i czasów ich trwania. Oznacza to, że proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ jest procesem semi-markowskim.

Rozkład początkowy procesu wyraża się wzorem:

$$p_k = P(X(0) = k) = \begin{cases} a_k & \text{dla } k = 1, \dots, r \\ 0 & \text{dla } k = r+1, \dots, 2r+1 \end{cases}$$

natomiast jądro procesu ma postać

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & Q_{1r+1}(t) & 0 & \dots & 0 & Q_{12r+1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & Q_{2r+2}(t) & \dots & 0 & Q_{22r+1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{r2r}(t) & Q_{r2r+1}(t) \\ Q_{r+11}(t) & \dots & Q_{r+1r}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{2r1}(t) & \dots & Q_{2rr}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{2r+11}(t) & \dots & Q_{2r+1r}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proces zostanie określony, jeżeli wyznaczymy niezerowe elementy macierzy funkcyjnej $Q(t)$ w oparciu o rozkłady podane w założeniach. Sposób wyznaczenia elementów jądra procesu przedstawimy na przykładzie funkcji

$$Q_{kr+k}(t) = P(\tau_{n+1} - \tau_n \leq t, X(\tau_{n+1}) = r+k \mid X(\tau_n) = k), \quad k = 1, \dots, r.$$

Zauważmy, że zmiana stanu, ze stanu k (oznaczającego użytkowanie obiektu wykonującego zadanie z_k) na stan $r+k$ (oznaczający odpowiednią obsługę), w czasie nie większym niż t , zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_k \leq t$ oraz $\zeta_k > \xi_k$. Zatem

$$Q_{kr+k}(t) = P(\xi_k \leq t, \zeta_k > \xi_k) = \iint_{D_{kr+k}} dU_k(x) dF_k(y),$$

gdzie

$$D_{kr+k} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, y > x\}.$$

Zamieniając całkę podwójną na iterowaną otrzymujemy

$$Q_{kr+k}(t) = \int_0^t dU_k(x) \int_x^\infty dF_k(y) = \int_0^t [1 - F_k(t)] dU_k(x), \quad k = 1, \dots, r.$$

Rozumując podobnie otrzymujemy pozostałe niezerowe elementy jądra procesu

$$Q_{k2r+1}(t) = P(\zeta_k \leq t, \xi_k > \zeta_k) = \int_0^t [1 - U_k(t)] dF_k(x), \quad k = 1, \dots, r,$$

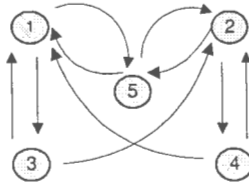
$$Q_{r+kj}(t) = P(\eta_k \leq t, Z = z_j) = a_j V_k(t), \quad k = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$Q_{2r+1j}(t) = P(\gamma_k \leq t, Z = z_j) = a_j G(t), \quad j = 1, \dots, r.$$

Zostały określone wszystkie elementy macierzy $Q(t)$, a zatem semi-markowski model funkcjonowania obiektu został zbudowany.

6.3. Charakterystyki

Dla uproszczenia zapisu i ułatwienia czytania przyjmijmy $r = 2$. Graf zmian stanów tego procesu przedstawiony jest na rysunku 6.18.



Rys. 6.18. Graf zmian stanów procesu

Jądro procesu ma teraz postać

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{13}(t) & 0 & Q_{15}(t) \\ 0 & 0 & 0 & Q_{24}(t) & Q_{25}(t) \\ Q_{31}(t) & Q_{32}(t) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{41}(t) & Q_{42}(t) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{51}(t) & Q_{52}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_{13}(t) &= \int_0^t [1 - F_1(t)] dU_1(x), & Q_{15}(t) &= \int_0^t [1 - U_1(t)] dF_1(x), \\ Q_{24}(t) &= \int_0^t [1 - F_2(t)] dU_2(x), & Q_{25}(t) &= \int_0^t [1 - U_2(t)] dF_2(x), \\ Q_{31}(t) &= a_1 V_1(t), & Q_{32}(t) &= a_2 V_1(t), \\ Q_{41}(t) &= a_1 V_2(t), & Q_{42}(t) &= a_2 V_2(t), \\ Q_{51}(t) &= a_1 G(t), & Q_{52}(t) &= a_2 G(t). \end{aligned}$$

Macierz przejścia włożonego łańcucha Markowa $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_{13} & 0 & p_{15} \\ 0 & 0 & 0 & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & 0 & 0 & 0 \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

gdzie

$$p_{13} = \int_0^{\infty} [1 - F_1(t)] dU_1(x) =: p_1, \quad p_{15} = 1 - p_{13} = 1 - p_1,$$

$$p_{24} = \int_0^{\infty} [1 - F_2(t)] dU_2(x) =: p_2, \quad p_{25} = 1 - p_{24} = 1 - p_2,$$

$$p_{31} = p_{41} = p_{51} = a_1, \quad p_{32} = p_{42} = p_{52} = a_2, \quad a_1 + a_2 = 1.$$

Rozkład stacjonarny $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_5]$ włożonego łańcucha Markowa $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ otrzymamy rozwiązując układ równań (3.58). Układ ten rozwiązujemy korzystając z programu MATHEMATICA. Oto krótki program, dzięki któremu otrzymujemy rozwiązanie

```
m={{-1, 0, a1, a1, a1}, {0, -1, 1-a1, 1-a1, 1-a1}, {p1, 0, -1, 0, 0},
  {0, p2, 0, -1, 0}, {1, 1, 1, 1, 1}}
b={0, 0, 0, 0, 1}
rozw=LinearSolve[m, b]
Simplify[rozw]
```

Rozwiązanie ma postać

$$\pi_1 = \frac{a_1}{2}, \quad \pi_2 = \frac{a_2}{2}, \quad \pi_3 = \frac{a_1 p_1}{2},$$

$$\pi_4 = \frac{a_2 p_2}{2}, \quad \pi_5 = \frac{1 - a_1 p_1 - a_2 p_2}{2}.$$

Przypomnijmy, że

$$m_{ij}^k = E[(\tau_{n+1} - \tau_n)^k | X(\tau_n) = i, X(\tau_{n+1}) = j], \quad i, j \in S, k > 0$$

oznacza k -ty moment zwykły czasu trwania stanu $i \in S$, gdy następnym stanem jest $j \in S$, natomiast

$$m_i^k = E[(\tau_{n+1} - \tau_n)^k | X(\tau_n) = i], \quad i \in S, k > 0$$

jest k -tym momentem zwykłym czasu trwania stanu $i \in S$. Jak wiemy,

$$m_{ij}^k = \int_0^{\infty} t^k dF_{ij}(t) = \frac{1}{p_{ij}} \int_0^{\infty} t^k dQ_{ij}(t), \quad i, j \in S$$

oraz

$$m_i^k = \int_0^{\infty} t^k dG_i(t) = \int_0^{\infty} t^k d \sum_{j \in S} Q_{ij}(t), \quad i \in S.$$

W rozpatrywanym tu modelu mamy

$$m_{13}^k = \frac{1}{p_1} \int_0^{\infty} t^k [1 - F_1(t)] dU_1(t), \quad m_{15}^k = \frac{1}{1 - p_1} \int_0^{\infty} t^k [1 - U_1(t)] dF_1(t),$$

$$m_{24}^k = \frac{1}{p_2} \int_0^{\infty} t^k [1 - F_2(t)] dU_2(t), \quad m_{25}^k = \frac{1}{1 - p_2} \int_0^{\infty} t^k [1 - U_2(t)] dF_2(t),$$

$$m_{31}^k = m_{32}^k = \int_0^{\infty} t^k dV_1(t) = E(\eta_1^k),$$

$$m_{41}^k = m_{42}^k = \int_0^{\infty} t^k dV_2(t) = E(\eta_2^k),$$

$$m_{51}^k = m_{52}^k = \int_0^{\infty} t^k dG(t) = E(\gamma^k),$$

$$m_1^k = \int_0^{\infty} t^k [1 - F_1(t)] dU_1(t) + \int_0^{\infty} t^k [1 - U_1(t)] dF_1(t) = E[(\min(\xi_1, \zeta_1))^k],$$

$$m_2^k = \int_0^{\infty} t^k [1 - F_2(t)] dU_2(t) + \int_0^{\infty} t^k [1 - U_2(t)] dF_2(t) = E[(\min(\xi_2, \zeta_2))^k],$$

$$m_3^k = \int_0^{\infty} t^k dV_1(t) = E(\eta_1^k),$$

$$m_4^k = \int_0^{\infty} t^k dV_2(t) = E(\eta_2^k),$$

$$m_5^k = \int_0^{\infty} t^k dG(t) = E(\gamma^k).$$

Rozkład graniczny stanów procesu

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\}, \quad j \in S = \{1, \dots, 5\}$$

obliczamy w oparciu o tezę twierdzenia 34.

$$P_j = \frac{\pi_j m_j}{\sum_{i=1}^5 \pi_i m_i}, \quad j \in S = \{1, \dots, 5\},$$

gdzie $m_i = m_i^1 = E(T_i)$ otrzymujemy z podanych powyżej wzorów, przyjmując $k = 1$.

Stan 5 jest stanem niezdatności (awarii) obiektu. Funkcje $\Phi_{15}(t)$, $\Phi_{25}(t)$, $t \geq 0$ są dystrybuantami rozkładu czasu pierwszego przejścia ze stanów 1 i 2 odpowiednio, do stanu niezdatności.

Korzystając, ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy dystrybuantę rozkładu czasu zdatności obiektu

$$F(t) = a_1 \Phi_{15}(t) + a_2 \Phi_{25}(t), \quad t \geq 0.$$

Stąd funkcja niezawodności obiektu ma postać

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - a_1 \Phi_{15}(t) - a_2 \Phi_{25}(t), \quad t \geq 0.$$

Transformaty Laplace'a-Stieltjesa funkcji $\Phi_{15}(t)$, $\Phi_{25}(t)$, $t \geq 0$ otrzymany rozwiązując układ równań liniowych, który w zapisie macierzowym ma postać (3.41):

$$(I - \tilde{q}_{A'}(s))\tilde{\phi}_{A'}(s) = \tilde{b}(s),$$

gdzie

$$I - \tilde{q}_{A'}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tilde{q}_{13}(s) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\tilde{q}_{24}(s) \\ -\tilde{q}_{31}(s) & -\tilde{q}_{32}(s) & 1 & 0 \\ -\tilde{q}_{41}(s) & -\tilde{q}_{42}(s) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\tilde{b}(s) = [\tilde{q}_{15}(s), \tilde{q}_{25}(s), 0, 0]^T,$$

$$\tilde{\phi}_{A'}(s) = [\tilde{\phi}_{15}(s), \tilde{\phi}_{25}(s), \tilde{\phi}_{35}(s), \tilde{\phi}_{45}(s)]^T.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy między innymi

$$\tilde{\phi}_{15}(s) =$$

$$= \frac{\tilde{q}_{15}(s) + \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{25}(s)\tilde{q}_{32}(s) - \tilde{q}_{15}(s)\tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{42}(s)}{1 - \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{31}(s) - \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{32}(s)\tilde{q}_{41}(s) - \tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{42}(s) + \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{31}(s)\tilde{q}_{42}(s)},$$

$$\tilde{\phi}_{25}(s) =$$

$$= \frac{\tilde{q}_{25}(s) - \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{25}(s)\tilde{q}_{31}(s) + \tilde{q}_{15}(s)\tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{41}(s)}{1 - \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{31}(s) - \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{32}(s)\tilde{q}_{41}(s) - \tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{42}(s) + \tilde{q}_{13}(s)\tilde{q}_{24}(s)\tilde{q}_{31}(s)\tilde{q}_{42}(s)}$$

Znalezienie funkcji $\Phi_{15}(t)$, $\Phi_{25}(t)$, $t \geq 0$ wymaga wyznaczenia transformat odwrotnych. Nawet przy stosunkowo prostych postaciach elementów jądra odnowy zadanie to jest rachunkowo skomplikowane. Znacznie prościej można otrzymać oczekiwany czas zdatności obiektu. Wymaga to rozwiązania układu równań liniowych o stałych współczynnikach, który w zapisie macierzowym ma postać (3.24):

$$(I - P_{A'})\bar{\Theta}_{A'} = \bar{T}_{A'},$$

gdzie

$$I - P_{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p_2 \\ -a_1 & a_1 - 1 & 1 & 0 \\ -a_1 & a_1 - 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\bar{T}_{A'} = [m_1, m_2, m_3, m_4]^T, \quad \bar{\Theta}_{A'} = [\mu_{15}, \mu_{25}, \mu_{35}, \mu_{45}]^T, \quad \bar{\phi}_{ij} = E(\Theta_{ij}) = \int_0^\infty t d\Phi_{ij}(t).$$

Oczekiwany czas zdatności obliczamy korzystając z równości

$$\mu = a_1\mu_{15} + (1 - a_1)\mu_{25}.$$

Program w MATHEMATICA umożliwia znalezienie rozwiązania tego układu równań oraz pozwala znaleźć oczekiwany czas zdatności.

```
m={{1,0,-p1,0},{0,1,0,-p2},{-a1,a1-1,1,0},{-a1,a1-1,0,1}}
b={m1,m2,m3,m4}
rozw=LinearSolve[m,b]
w=Simplify[rozw]
z={a1,1-a1,0,0}
mean=z.w
mean1=Simplify[mean]
```

Ostatecznie, oczekiwany czas zdatności wyraża się wzorem

$$\mu = \frac{a_1 m_1 + m_2 - a_1 m_2 + a_1 m_3 p_1 + m_4 p_2 - a_1 m_4 p_2}{1 - a_1 p_1 - p_2 + a_1 p_2}. \quad (6.5)$$

W podobny sposób otrzymujemy drugi moment czasu zdatności. Układ równań liniowych, w którym niewiadomymi są drugie momenty rozpatrywanych tu rozkładów, ma postać (3.26):

$$(I - P_{A'})\bar{\Theta}_{A'}^2 = B_A,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{B}_{A'} &= [b_1, b_2, b_3, b_4]^T, \quad \bar{\Theta}_{A'}^2 = [\mu_{15}, \mu_{25}, \mu_{35}, \mu_{45}]^T, \quad \mu_{ij}^2 = E(\Theta_{ij}^2) = \int_0^\infty t^2 d\Phi_{ij}(t), \\ b_1 &= m_1^2 + 2p_1 m_{13} \mu_{35} \\ b_2 &= m_2^2 + 2p_2 m_{24} \mu_{45}, \\ b_3 &= m_3^2 + 2(a_1 m_{31} \mu_{15} + (1 - a_1) m_{32} \mu_{25}), \\ b_4 &= m_4^2 + 2(a_1 m_{41} \mu_{15} + (1 - a_1) m_{42} \mu_{25}). \end{aligned}$$

Drugi moment zwykły czasu zdatności obliczamy korzystając z równości

$$\mu^2 = a_1 \mu_{15}^2 + (1 - a_1) \mu_{25}^2.$$

Łatwo możemy zauważyć, że rozwiązanie otrzymamy zastępując we wzorze (6.5) liczby m_i , $i = 1, 2, 3, 4$ odpowiednio liczbami b_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Ostatecznie

$$\mu^2 = \frac{a_1 b_1 + b_2 - a_1 b_2 + a_1 b_3 p_1 + b_4 p_2 - a_1 b_4 p_2}{1 - a_1 p_1 - p_2 + a_1 p_2}.$$

Odchylenie standardowe czasu zdatności obiektu obliczamy ze znanego wzoru

$$\sigma = \sqrt{\mu^2 - (\mu)^2}.$$

Jak zauważyliśmy, znalezienie dokładnego wzoru określającego funkcję niezawodności obiektu nie jest proste. Stosunkowo łatwo można znaleźć wzór przybliżony, korzystając z wyników dotyczących zaburzonych (zakłóconych) procesów semi-markowskich. Skorzystamy z twierdzenia Szpaka, przedstawionego w jednym z poprzednich rozdziałów.

Rozpatrywany tu proces semi-markowski o jądrze

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{13}(t) & 0 & Q_{15}(t) \\ 0 & 0 & 0 & Q_{24}(t) & Q_{25}(t) \\ Q_{31}(t) & Q_{32}(t) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{41}(t) & Q_{42}(t) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{51}(t) & Q_{52}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

traktujemy jako proces zaburzony w stosunku do do procesu semi-markowskiego $\{X^0(t) : t \geq 0\}$ o zbiorze stanów $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i jądrze

$$Q^0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{13}^0(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{24}^0(t) \\ Q_{31}^0(t) & Q_{32}^0(t) & 0 & 0 \\ Q_{41}^0(t) & Q_{42}^0(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_{13}^0(t) &= U_1(t), & Q_{24}^0(t) &= U_2(t), \\ Q_{31}^0(t) &= a_1 V_1(t), & Q_{32}^0(t) &= a_2 V_1(t), \\ Q_{41}^0(t) &= a_1 V_2(t), & Q_{42}^0(t) &= a_2 V_2(t). \end{aligned}$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w proces semi-markowski $\{X^0(t) : t \geq 0\}$ ma postać

$$P^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozkład stacjonarny $\pi^0 = [\pi_1^0, \pi_2^0, \pi_3^0, \pi_4^0]$ tego łańcucha Markowa otrzymujemy rozwiązując układ równań liniowych

$$\pi^0 P^0 = \pi^0, \quad \sum_{i=1}^4 \pi_i^0 = 1.$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $\pi^0 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Pozostałe parametry występujące w cytowanym twierdzeniu mają postać

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \int_0^\infty [1 - U_1(x)]dF_1(x), & \varepsilon_2 &= \int_0^\infty [1 - U_2(x)]dF_2(x), & \varepsilon_3 &= 0, & \varepsilon_4 &= 0, \\ m_1^0 &= E(U_1) = \int_0^\infty [1 - U_1(t)]dt, & m_2^0 &= E(U_2) = \int_0^\infty [1 - U_2(t)]dt, \\ m_3^0 &= E(V_1) = \int_0^\infty [1 - V_1(t)]dt, & m_4^0 &= E(V_2) = \int_0^\infty [1 - V_2(t)]dt, \\ \varepsilon &= \sum_{i=1}^4 \pi_i^0 \varepsilon_i = \frac{1}{4} \left(\int_0^\infty [1 - U_1(x)]dF_1(x) + \int_0^\infty [1 - U_2(x)]dF_2(x) \right), \\ \lambda &= \frac{4}{E(U_1) + E(U_2) + E(V_1) + E(V_2)}.\end{aligned}$$

Jak wynika z tezy twierdzenia Szpaka, dla małego ε , funkcja niezawodności obiektu wyraża się przybliżonym wzorem

$$R(t) \approx e^{-\alpha t}, \quad \text{gdzie } \alpha = \varepsilon \lambda. \quad (6.8)$$

Zatem

$$R(t) \approx \exp \left[- \frac{\int_0^\infty [1 - U_1(x)]dF_1(x) + \int_0^\infty [1 - U_2(x)]dF_2(x)}{E(U_1) + E(U_2) + E(V_1) + E(V_2)} t \right]. \quad (6.9)$$

Bibliografia

- [1] АНИСИМОВ В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика*, Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.
- [2] АНИСИМОВ В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика*, Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.
- [3] ASMUSSEN, S.: *Applied Probability and Queues*. Wiley, Chichester 1987.
- [4] AVEN T.: Reliability evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transactions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.
- [5] BARLOW R.E., PROSHAN F.: *Mathematical theory of reliability*. Wiley, New York, London, Sydney 1965.
- [6] BILLINGSLEY P.: *Prawdopodobieństwo i miara*. PWN, Warszawa 1987.
- [7] БРОДИ С.М., ПОГОСЯН И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания*. Наукова Думка, Киев 1977.
- [8] BOBROWSKI D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności*. WN-T, Warszawa 1985.
- [9] CINLAR E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.
- [10] CINLAR E.: Markov renewal theory: a survey.
- [11] CSENKI, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computational Implementation*. Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.
- [12] DOMSTA J., GRABSKI F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

- [13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.
- [14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.
- [15] FELLER W.: On semi-Markov processes. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.
- [16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.
- [17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.
- [18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.
- [19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa 1968.
- [20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności*. WN-T, Warszawa 1968.
- [21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.
- [22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.
- [23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsługi profilaktycznych. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.
- [24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.
- [25] GRABSKI F., KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Rotterdam 1999, p. 317-322.
- [26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.
- [27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

- [28] HOWARD R.: *Dynamic probabilistic system. Vol. II: Semi-Markov and decision processes*. Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.
- [29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*. PWN, Warszawa 1988.
- [30] JAŻWIŃSKI J., BORGON J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów*. WKŁ, Warszawa 1989.
- [31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866-870.
- [32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodności systemów. *Instytut Badań Systemowych PAN, Seria: Badania Systemowe*, tom 27, Warszawa 2001.
- [33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności*. PWN, Warszawa 1973.
- [34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki (Aplicationes Mathematicae)*, XVI, 1 (1980), p. 5-14.
- [35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki (Aplicationes Mathematicae)*, XVIII, 2 (1984), p. 187-194.
- [36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.
- [37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.
- [38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.
- [39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M.: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi*. PWN, Warszawa 1978.
- [40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*. Amsterdam-London, NHPC 1970.
- [41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.
- [42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

- [43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability*. Boston, Birkhauser 2001.
- [44] OLEARCZUK E.: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych*. WN-T, Warszawa 1972.
- [45] PIASECKI S.: *Optymalizacja systemów obsługi technicznej*. WN-T, Warszawa 1972.
- [46] PIASECKI S.: *Elementy teorii niezawodności i eksploatacji urządzeń*. WAT, Warszawa 1974.
- [47] PIASECKI S.: *Elementy teorii niezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych*. IBS PAN, Warszawa 1995.
- [48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.
- [49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.
- [50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний*. Советское Радио, Москва 1969.
- [51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurrence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.
- [52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności*. WN-T, Warszawa 1979.
- [53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

**SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI
I EKSPLOATACJI**

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególnie procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029**ISBN 83-85847-72-3**