ARYTMETYKA.

1891

1891

ARYTMETYKA

UŁOŻONA

PRZEZ

WRZEŚNIOWSKIEGO WINCENTEGO.

W WARSZAWIE,

NAKŁADEM AUTORA.

W DRUKARNI JÓZEFA UNGER

przy ulicy Miodowéj Nr. 481.

1851.

Wolno drukować, z warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

w Warszawie dnia 29 Stycznia (10 Lutego) 1851 r.

Starszy Cenzor, **L. T. Tripplin.**

Przedmowa.

Język polski, jak każdy słowiański, niezłożony z różnorodnych części, pierwotny i samoistny, zawiera wszystkie swojskie pierwiastki, z których można urabiać i składać wyrazy potrzebne do oznaczania nowych wyobrażeń. Wprowadzenie do naszego języka obcych wyrazów bynajmniéj nie jest dowodem ubóstwa jego, przypomina tylko owe chorobliwe czasy, w których nawet nazwiska rodzin na rzymskie przerabiano. Nikt temu zaprzeczyć nie może, że obce nazwy nietylko oszpecają mowę naszą, ale ją zaciemniają; bowiem każdy wyraz powinien pomagać pojęciu rzeczy, tym czasem obce wyrazy wtedy dopiero stają się zrozumiałemi, kiedy wprzód, ale mozolnie, poznamy rzeczy malowane przez nie. Tę prawdę pojęli Ci, którzy choć w części, oczyścili z obczyzny Matematykę i inne nauki: w ów czas wprowadzone do języka nowości oburzyły zapewne nałóg i przyzwyczajenie; dziś czujemy ich piękność i właściwość. W tém przekonaniu, że swojskie wyrazy, byle nie grzeszyły przeciw prawidłowości języka, a jasno malowały rzeczy lub wyobrażenia, są pożądane w naukowych książkach, do tego dzieła wprowadziłem zbyt oszczędną liczbę nowych wyrazów.

Cyfrę zastąpiłem *znakiem*, który pomiędzy liczbami nie może mieć wątpliwego znaczenia, tak samo jak cyfra. Liczbę większą w odejmowaniu nazywają niektórzy *odjemną*, mniejszą *odjemnikiem*. W Algebrze *odjemna* nazywa się ilość poprzedzona znakiem *mniéj*, co w Arytmetyce odpowiada liczbie odjąć się mającéj; dla pogodzenia więc Algebry z Arytmetyką, nazwałem liczbę większą *zmniejszalną*, a mniejszą *odjemną*. Ułamki *peryodyczne* nazwałem *zwrotowemi*, a *peryody zwrotami*; tu się sama rzecz tłomaczy. W ułamkach ciągłych *redukty* nazwałem *przywróconemi*; jakoż, ponieważ ułamek ciągły jest rozwinięciem ułamku zwyczajnego, więc wartość ciągłego wyrażona we zwyczajnym ułamku jest wartością powróconą czyli przywróconą. Obok swojskiego *stosunku* stoi tuż obca *proporcya*, która w Matematyce znaczy porównanie stosunków równych; zatém zgodnie z tém wyobrażeniem przezwałem ją *równomianem*. Francuzki *escompte*, co znaczy odliczenie z liczby, potrącanie procentu, nazwałem *potrączką*; ten wyraz dokładnie maluje wyobrażenie potrącania; brzmienie tak dobre jak np. gorączka. Nareszcie, mówiąc o prawidle czyli regule trzech, *reguła* wyraz łaciński z polskim krojem, ustąpił polskiemu wyrazowi *prawidło*.

Resztę wyrazów obcych lub z obcego źródła pochodzących, jak np. kwadrat, procent, logarytm i t. p., zostawiłem nie dlatego żeby je nie można było przepolszczyć, tylko że tu potrzebne jest współdziałanie innych części Matematyki.

Układ tego dzieła tém się jedynie różni od wielu innych, że wykład o *Miarach* położyłem po nauce o wyciąganiu pierwiastków. Do tego spowodowało mnie to przekonanie, że dopiero po obeznaniu się z podnoszeniem liczb do kwadratu i sześcianu, jako téż z wyciąganiem pierwiastków z tychże potęg, można mieć dobre pojęcie miar powierzchniowych i sześciennych. Miejsce *liczb wielorakich* najwłaściwsze jest po obeznaniu się z miarami. Taki układ nie przeszkadza wcale uczeniu dzieci liczb wielorakich zaraz po działaniach z liczbami niezłożonemi. Dla tego też właśnie, a bardziéj żeby naukę Arytmetyki uczynić więcéj zajmującą, przez zadania z liczbami mianowanemi, zamiast wstępu umieściłem Miary, Wagi i Pieniądze krajowe, bez innych objaśnień, prócz ich podziałów.

w Warszawie dnia 10 Marca 1851 r.

Wincenty Wrześniowski.

Miary długości.

Polskie. Łokieć zawiera 2 stopy. Stopa 12 cali. Cal 12 linij: zatém łokieć zawiera 24 cale. Prócz tego, łokieć w handlu dzieli się na 4 ćwiercie, a ćwierć na 6 cali.

Sążeń zawiera 3 łokcie, albo 6 stóp.

Pręt zawiera 15 stóp: dzieli się na 10 pręcików; pręcik dzieli się na 10 ławek.

Rossyjskie. Sażeń dzieli się na 3 Arszyny. Arszyn na 16 Werszków. Sażeń dzieli się jeszcze na 7 stóp. Stopa na 12 cali. Cal na 10 linij.

Wersta równa się 500 sażeniom.

Mila polska zawiera 7 werst. Mila dzieli się jeszcze na 2 pół mile, lub na 4 ćwierć mile.

Miary powierzchni.

Polskie. Łokieć kwadratowy zawiera 4 stopy kwadratowe. Stopa kwadratowa dzieli się na 144 cali kwadratowych.

Sążeń kwadratowy równa się 9 łokciom kwadratowym, lub 36 stopom kwadratowym.

Włóka zawiera 30 Morgów. Mórg równy jest 300 prętom kwadratowym.

Rossyjskie. Sażeń kwadratowy zawiera 49 stóp kwadratowych. Stopa kwadratowa obejmuje 144 cali kwadratowych.

Djesiatyna zawiera 2400 sażeni kwadratowych.

Miary objętości.

Polskie. Łokieć sześcienny zawiera 8 stóp sześciennych. Sążeń sześcienny zawiera 27 łokci sześciennych, lub 216 stóp sześciennych.

Korzec zawiera 4 ćwiercie, albo 32 garnce. Garniec zawiera 4 kwarty. Kwarta dzieli się na 4 kwaterki. Kwaterka trzyma 2 półkwaterki.

Ros yjskie. Sażeń sześcienny dzieli się na 343 stóp sześciennych. *Czetwiert* zawiera 8 Czetwieryków. Czetwieryk równy jest 8 garncom.

Wiadro obejmuje 10 Krużek, a Krużka 10 Czarek.

WAGI.

Polskie. Centnar zawiera 4 kamienie, albo 100 funtów. Kamień dzieli się na 25 funtów. Funt zawiera 16 uncyj, a uncya 2 łóty. Łót dzieli się na 4 Drachmy. Drachma na 3 skrupuły. Skrupuł na 24 granów.

Rossyjskie. Pud zawiera 40 funtów. Funt 96 Zołotników. Zołotnik 96 Doli.

Funt aptekarski dzieli się na 12 uncyj. Uncya na 8 Drachm. Drachma na 3 skrupuły. Skrupuł na 20 granów.

PIENIĄDZE.

Rubel zawiera 100 Kopiejek. Kopiejka zawiera 2 grosze polskie. Rubel więc zawiera 200 groszy polskich, czyli 6 złotych i 20 groszy. Złoty polski zawiera 30 takichże groszy.

Dukat złotem rachuje się za 20 złotych polskich. Dukat srebrem za 18 złotych polskich. Złotych polskich 6 nazywa się Talarem.

Sztuk 60 nazywa się *Kopa*. *Mendel* zawiera sztuk 15; a *Tuzin* sztuk 12.

TREŚĆ DZIEŁA.

ARYTMETYKA.

LICZBOWANIE.

1. Wszystko co ma byt, dotykalny zmysłami lub tylko rozumem pojęty, to jest, co ma rozciągłość lub trwanie, może być powiększone lub pomniejszone; może być jedno od drugiego większe lub mniejsze.

Cokolwiek może być powiększone lub pomniejszone nazywamy ILOŚCIĄ (Величина).

2. Każdą ilość uważać można albo jako całość nierozłączoną na części, albo jako złożoną ze swych części.

Ilość uważana jako niezłożona, samobytna, nazywa się JEDNOŚCIĄ (Единица).

3. Ilość uważana jako złożona z części jest dotąd zbiorem nieokreślonym, dopóki jéj nie porównamy z jednością, to jest, dopóki nie ocenimy ile jedności w sobie zawiera, a wtedy nazywa się LICZBĄ (Число). Liczba więc jest wypadkiem LICZENIA (Считание), to jest, składania lub rozkładania jedności na jednę liczbę.

Każda ilość może być zarazem jednością i liczbą: np. stado bydła jest jednością; zliczone zaś pojedyncze sztuki składające toż stado dają liczbę. Liczba więc jest porównaniem wielu razem wziętych jedności tego samego gatunku z jednością. Tak liczba stad ma za jedność jedno stado; liczba bydła ma za jedność, jedno bydlę.

Jedności składające liczbę albo są wszystkie równe, np. cale, złote, i t. p.; albo tylko jednego gatunku lecz nie równe co do wielkości, np. człowiek względem liczby ludzi, drzewo względem liczby drzew; albo mogą być różne co do wielkości i gatunku, np. sztuka monety, względem liczby sztuk rozmaitych monet. W tym ostatnim razie sztuka jest dla tego jednością, że nie zważając na różnicę monety, uważamy tylko każdą za sztukę monety.

Jednoty (indywidua) są naturalnemi jednościami swego gatunku: np. człowiek względem ludzi, stół względem stołów i t. p. Lecz cal, korzec, rubel, i t. p. części długości, objętości, monet, &c. są tylko umówionemi jednościami.

Gdzie jest jedność tam są i liczby tego samego gatunku, i odwrotnie.

4. Liczby są nieskończenie różne, to jest, rozlicznéj wielkości; nazwy tych liczb byłyby niepodobne do spamiętania, gdyby język nie miał sposobów pewną ograniczoną liczbą wyrazów, z małemi odmianami, wyrazić je wszystkie. Nazwy liczb stanowią to, co nazywamy *liczbowaniem* (Числeние) *słowném*. Zasadnicze wyrazy liczbowania w naszym języku są: JEDEN, DWA, TRZY, CZTÉRY, PIĘĆ, SZEŚĆ, SIEDM, OŚM, DZIEWIĘĆ, DZIESIĘĆ, STO, TYSIĄĆ, MILION.

Złączywszy jedność z jednością otrzymamy liczbę *dwa*, do téj liczby dodawszy jedność powstanie liczba *trzy*, i tak powiększając liczby powstałe o jedność, wypadną liczby wyżéj wymienione, aż do *dziesięciu*.

Dodawszy dziesięć do dziesięciu będzie dwa dziesiątków, które nazywamy DWADZIEŚCIA; do dwudziestu dołączywszy dziesięć, otrzymamy trzy dziesiątki, nazwane TRZYDZIEŚCI; i tak jakeśmy powiększali liczby złożone z jedności, powiększając liczby złożone z dziesiątków, otrzymamy dalsze, CZTERDZIEŚCI, PIĘĆDZIESIĄT, SZEŚĆDZIESIĄT, SIEDMDZIESIĄT, OŚMDZIESIĄT, DZIEWIĘĆDZIESIĄT. Nakoniec, liczba złożona z dziesięciu dziesiątków, czyli liczba dziesięć razy dziesięć, nazywa się STO.

Sto dodane do stu daje liczbę DWIEŚCIE, do téj liczby dołączywszy sto będzie TRZYSTA, cztéry sto daje liczbę CZTÉRYSTA, i tak następnie powiększając o jedno sto, powstaną liczby: PIĘĆSET, SZEŚĆSET, SIEDMSET, OŚMSET, DZIEWIĘĆSET; nareszcie liczba zawierająca dziesięć setków nazywa się TYSIĄC.

Tysiące uważając jako jedności zasadnicze, wymienione od jednego aż do dziewięciu, będziemy mieli te same nazwy liczb z dodatkiem wyrazu *tysiąc.* Tak więc będzie: TYSIĄC, *dwa* TYSIĄCE, *trzy* TYSIĄCE, i t. d.; potém *dziesięć* TYSIĘCY, *dwadzieścia* TYSIĘCY i t. d.; następnie *sto* TYSIĘCY, aż do *dziewięćset* TYSIĘCY.

Liczba zawierające w sobie dziesięć razy sto tysięcy, czyli tysiąc razy tysiąc, nazywa się MILION. Z dodaniem wyrazu *milion* powtórzywszy liczby poprzednio wskazane aż do *dziewięć set*, otrzymany dalsze liczby: *dwa* MILIONY, *trzy* MILIONY,... *dwadzieścia* MILIONÓW,... *sto* MILIONÓW,... *dziewięć set* MILIONÓW.

Tysiąc milionów nazywa się BILION. Biliony liczą się jak tysiące i miliony. Doszedłszy do tysiąca bilionów, otrzymamy TRYLION, tysiąc TRYLIONÓW, składa KWATRYLION i t. d. (*)

Do dziesięciu dodając liczby, jeden, dwa, trzy i t. d., aż do dziewięciu, otrzymamy liczby JEDENAŚCIE, DWANAŚCIE, TRZYNAŚCIE, CZTERNAŚCIE, PIĘTNAŚCIE, SZESNAŚCIE, SIEDMNAŚCIE, OŚMNAŚCIE, DZIEWIĘTNAŚCIE.

(*) Bilion nazywają jeszcze Miliardem.— Tryliony i następne, nie są w użyciu.

Liczby złożone z dziesiątków i jednostek, od dwudziestu aż do *stu*, są prostém połączeniem nazwisk dziesiątków i jedności, np. *pięćdziesiąt ośm*, jest pięć dziesiątków i ośm jedności. Toż samo od stu do tysiąca, od tysiąca do bilionów. Na przykład: *Dwadzieścia pięć* MILIONÓW *pięćset ośm* TASIĘCY TRZYSTA SIEDMDZIESIĄT DWA.

5. Ponieważ wyrażenie liczb słowami jest długie, a ich łączenie jest bardzo niedogodne i trudne, wynaleziono przeto znaki pisane, które usuwają te wszystkie niedogodności. Wyrażenie liczb *znakami*, czyli *cyframi* (цифра), nazywamy *liczbowanie piśmienne*.

Liczbowanie piśmienne składa się z dziesięciu znaków; z których dziewięć mają wartość pierwszych dziewięciu liczb, dziesiąty sam przez się nie oznacza żadnéj liczby. Temi znakami są:

1	2	3	4	5	6	7	8
jeden,	*dwa*,	*trzy*,	*cztéry*,	*pięć*,	*sześć*,	*siedm*,	*ośm*,

9 i 0

dziewięć, *zero*

niemające oddzielnéj wartości.

Dopisawszy zero po prawéj stronie każdéj z powyższych liczb, podniesiemy ich wartość razy dziesięć, to jest, te liczby będą znaczyć dziesiątki, które nazwiemy *jednościami drugiego rzędu:* tak więc będziemy mieli:

10	20	30	40	50
dziesięć,	*dwadzieścia*,	*trzydzieści*,	*czterdzieści*,	*pięćdziesiąt*,

60	70	80	90
sześćdziesiąt,	*siedmdziesiąt*,	*ośmdziesiąt*,	*dziewięćdziesiąt*.

W ogólności, *zero po prawéj stronie liczby dopisane, podnosi jéj wartość razy dziesięć.*

Tak więc do dziesiątków dopisawszy zero po prawéj ręce, otrzymamy liczby dziesięć razy większe od dziesiątków, to jest sta, czyli setki, które nazywamy *jedności trzeciego rzędu.* — Będziemy więc mieli:

100 200 300 400 500 600

sto, *dwieście*, *trzysta*, *czterysta*, *pięćset*, *sześćset*,

700 800 900

siedmset, *ośmset*, *dziewięćset*.

Do tych słów dopisawszy po prawéj ręce po zerze, otrzymamy liczby dziesięć razy większe od słów, to jest, tysiące (*jedności czwartego rzędu*), będzie więc:

1 000 2 000 3 000 4 000

tysiąc, *dwa tysiące*, *trzy tysiące*, *cztéry tysiące*,

5 000 6 000 7 000 8 000

pięć tysięcy, *sześć tysięcy*, *siedm tysięcy*, *ośm tysięcy*,

9 000

dziewięć tysięcy.

Do tysięcy dopisawszy po prawéj ręce zero, podniesiemy je do dziesiątków tysięcy, będzie więc:

10 000 20 000 30 000

Dziesięć tysięcy, *dwadzieścia tysięcy*, *trzydzieści tysięcy*

40 000 50 000 60 000

czterdzieści tysięcy, *pięćdziesiąt tysięcy*, *sześćdziesiąt tysięcy*,

70 000 80 000

siedmdziesiąt tysięcy, *ośmdziesiąt tysięcy*,

90 000

dziewięćdziesiąt tysięcy.

Do dziesiątków tysięcy dopisawszy po prawéj ręce zero, otrzymamy *sta tysięcy*; do stu tysięcy dopisawszy po téjże stronie zero, otrzymamy *miliony*. Tak samo czyniąc, powstaną *dziesiątki milionów*, *sta milionów*, *biliony*, &c. Będzie więc:

100 000 *sto tysięcy*, 200 000 *dwieście tysięcy* i t. d.

1 000 000 *milion*, 2 000 000 *dwa miliony*, &c.; potem 10 000 000 *dziesięć milionów*, 20 000 000 *dwadzieścia milio-*

nów, &c.; następnie 100 000 000 *sto milionów*, 200 000 000 *dwieście milion.* &c; potem 1 000 000 000 *bilion*, 2 000 000 000 *dwa biliony* i tak daléj.

Zastanowiwszy się nad tém cośmy powiedzieli, o tworzeniu liczb, wyższych od dziewięciu pierwszych, postrzeżemy: że dziesiątki wyrażone są dwiema, sta trzema, tysiące czterema, dziesiątki tysięcy pięcioma, sta tysięcy sześcioma, miliony siedmioma, dziesiątki milionów ośmioma, sta milionów dziewięcioma znakami. Czyli, że rachując od prawéj ku lewéj stronie, liczba stojąca na drugiém miejscu ma wartość dziesięć razy większą od swéj wartości gdyby sama pojedynczo stała; liczba na trzeciém miejscu ma sto razy większą wartość od wartości gdyby była sama; na czwartém miejscu tysiąc razy, na piątém dziesięć tysięcy razy większą; na szóstém sto tysięcy razy większą; na siódmém milion razy większą wartość i t. d., niż gdyby stała sama jedna.

Dla wyrażenia jedności i dziesiątków jedną liczbą, piszemy w miejscu zera, to jest, na pierwszém miejscu, rachując od prawéj ręki, liczbę jedności, a obok niéj na drugiém miejscu liczbę dziesiątków: np. *dwadzieścia sześć* piszemy 26; i to w rzeczy saméj zgadza się z przyjętą zasadą, bo 2 będąc na drugiém miejscu znaczy 2 dziesiątki, zaś 6 stojące na pierwszém miejscu znaczy 6 jedności.

Dla wyrażenia jedności, dziesiątków i stów, jedną liczbą, piszemy obok liczby dziesiątków na trzeciém miejscu liczbę wyrażającą sta: np. *cztéry sta dwadzieścia sześć*, piszemy 426, i wrzeczy saméj 4 stojące na trzeciém miejscu znaczy 4 stów, zaś znaki 2 i 6, to jest 26, zajmują miejsce dwóch zer.

Dalsze liczby ulegają w napisaniu temu samemu prawu: tak 51 273 czyta się, *pięćdziesiąt jeden tysięcy dwieście* *siedmdziesiąt trzy*, bo 5 zajmuje piąte, to jest, dziesiątków tysięcy, miejsce. Następująca liczba tak się czyta:

3	7	4	8	2	5	9	2	1
Trzy sta	*siedmdziesiąt*	*cztéry miliony*	*ośm set*	*dwadzieścia*	*pięć tysięcy*	*dziewięć set*	*dwadzieścia*	*jeden*

bowiem *trzy* zajmuje miejsce dziewiąte, *siedm* miejsce ósme, *cztéry* miejsce siódme, *ośm* miejsce szóste, *dwa* miejsce piąte, *pięć* miejsce czwarte, *dziewięć* miejsce trzecie, *dwa* miejsce drugie, nakoniec *jeden* miejsce pierwsze (*).

6. Mając na pamięci, że (rachując zawsze od prawéj ku lewéj ręce) *jedności stoją na pierwszém miejscu; dziesiątki na drugiém; sta na trzeciém; tysiące, czyli jedności tysięcy, na czwartém; dziesiątki tysiecy na piątém; sta tysięcy na szóstém; miliony, czyli jedności milionów na siódmém; dziesiątki milionów na ósmem; sta milionów na dziewiątém; biliony na dziesiątém* i t. d. *miejscu:* łatwo potrafimy wypisać znakami wszelką wysłowioną liczbę.

Jeżeli w wysłowionéj liczbie brakuje jednéj lub kilku, mających stać na pewnych miejscach, wtedy te zapełniają się zerami. Na przykład: w liczbie *dwadzieścia tysięcy ośmnaście*, opuszczone są *jedności tysięcy* i *sta*, przeto téż piszemy ją tak 20018. W liczbie *Milion siedm tysięcy trzysta*

(*) Rzymskie znaki na oznaczenie liczb są:

I,	II,	III,	IIII lub IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	VIIII lub IX,	X,	XI &.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

XX,	XXI &.	XXXX lub XL,	L,	LX &.	LXXXX lub XC,	C,	CC &.
20	21	40	50	60	90	100	200

D,	M &.	
500	1000.	

pięć, opuszczone są *sta i dziesiątki tysięcy*, jako téż *dziesiątki*, więc ją téż tak wypiszemy, 1 007 305.

7. Aby napisaną znakami liczbę wysłowić, potrzeba, dla ułatwienia, podzielić ją, poczynając od prawéj ręki ku lewéj, na oddziały po trzy znaki zawierające. W piérwszym oddziale będą jedności, dziesiątki i sta: w drugim toż samo z dodatkiem *tysięcy*; w trzecim także jedności, dziesiątki, sta, z dodatkiem *milionów* &c. Pisząc liczbę należy pamiętać o tém ułatwieniu, zwłaszcza téż kiedy liczba jest wielka: potrzeba przeto, czwarty znak odsunąć cokolwiek od trzeciego, szósty od siódmego i t. d., a tym sposobem uczynimy wyraźnemi te oddziały po trzy. W ostatnim oddziale, jak to przewidujemy, może być dwa lub tylko jeden znak. Na przykład: 15 840; 20 767 084; 164 504.

8. Liczby wyrażają zebranie pewnych rzeczy; lecz możemy usunąć wyobrażenie rzeczy pozostawiwszy tylko liczby. Gdy liczba nie przedstawia rzeczy, nazywa się *Liczbą oderwaną* (отвлеченное число); gdy zaś wyobraża rzeczy, nazywa się *Liczbą mianowaną* (именованное число). Na przykład, liczba 2 bez dodania czego, jest oderwana, taż liczba 2, np. jabłka, lub czego bądź, nazywa się mianowana.

9. Każda liczba może być powiększaną dwojakim sposobem: albo może wzrastać o pewną liczbę, albo być powiększoną pewną liczbę razy: np. 3 powiększone o 2, uczyni liczbę 5; zaś 3 powiększone 2 razy, będzie 6. Tak samo każda liczba może być pomniejszoną dwojakim sposobem, to jest, albo ubywa z niéj pewna liczba, albo staje się mniejszą pewną liczbę razy: np. gdy z liczby 8 ubędzie 2 pozostanie 6; gdy zaś liczba 8 staje się 2 razy mniejszą, będzie 4.

Gdy jedność podzielimy na pewną liczbę części, każda z tych części jest mniejsza od jedności. Liczbę mniejszą od jedności nazywamy *ułamkiem* (дробь).

10. Dla naznaczenia, że liczba do drugiéj liczby ma być dodana, używa się znaczka (+), który wymawia się wyrazem *więcéj* (плюсъ); np. 1 + 1, znaczy że do 1 dodać potrzeba 1, a wymawia się 1 *więcéj* 1.

Dla wskazania, że od liczby potrzeba odjąć inną liczbę, używa się znaczka (—) który wymawia się wyrazem *mniéj* (минусъ); np. 3 — 1, znaczy, że od 3 potrzeba odjąć 1, a wymawia się 3 *mniéj* 1.

Znak (×) położony pomiędzy dwiema liczbami pokazuje, że jedna z nich ma być powiększona tyle razy ile druga zawiera jedności i wymawia się wyrazem *pomnożone przez* (умноженное на): np. 3 × 2, znaczy że 3 mamy powiększyć 2 razy, czyli że 3 mamy pomnożyć przez 2, a wymawia się: 3 *pomnożone przez* 2.

Dwie kropki (:) położone między dwiema liczbami dają znać, że położona po lewéj ręce ma być pomniejszoną tyle razy, ile położona po prawéj ręce zawiera w sobie jedności, wymawia się zaś *poddzielone przez* (раздѣленное на); np. 6 : 2 oznacza, że 6 ma być pomniejszone 2 razy, czyli że 6 ma być podzielone przez 2, a wymawia się 6 *podzielone przez* 2. W miejsce dwóch kropek możemy napisać $\frac{6}{2}$, co również znaczy, że liczba 6, i w ogóle liczba położona nad kréską poziomą, ma być podzielona przez liczbę pod tąż kréską położoną, jak tu przez 2.

Dla pokazania, że dwie liczby, lub dwa wyrażenia liczebne, są sobie równe, pisze się między nimi znaczek (=), który wymawia się *równe* (равно); np. 5 = 3 + 2, co wymawia się: 5 *równe* 3 *więcéj* 2; podobnież 6 = 8 — 2, wymawia się 6 równe 8 mniéj 2; tak samo, 10 = 5 × 2, wymawia się: 10 równe 5 pomnożone przez 2; również $3=9:3$, wymawia się, 3 równe 9 podzielone przez 3.

W ciągu téj książki okaże się wielka użyteczność dopiero wskazanych znaczków.

Nauka powiększania lub pomniejszania się liczb, zgoła nauka o liczbach, nazywa się Arytmetyką.

DZIAŁANIA ARYTMETYCZNE LICZB CAŁKOWITYCH.

O DODAWANIU.

11. Dodawanie liczb, czyli dodawanie arytmetyczne (Сложеніе), jest działaniem, za pomocą którego łączymy w jednę liczbę ilekolwiek liczb jednego gatunku. Liczba wypadła z dodania liczb nazywa się *zbiorem*, *ogółem* albo *summą* (Сумма).

Dodawanie jest tylko skróconém doliczaniem po jednemu do danéj liczby: jakoż gdybyśmy mieli dodać do 6 liczbę 3, uważamy że toż 3 jest równe trzem jednościom, z których gdy jednę dodamy do 6 otrzymamy 7, do téj liczby dodawszy drugą jedność otrzymamy 8, na koniec do 8 dodawszy ostatnią jedność znajdziemy 9; zatem ogółem liczb 6 i 3 jest liczba 9, co też tak wskazujemy $6+3=9$.

Tym sposobem odbywane dodawanie, zwłaszcza liczb wielkich, byłoby nadzwyczaj mozolne, a praktycznie nie podobne do wykonania. Potrzeba przeto nabyć wprawy od młodości w łączeniu, przynajmniéj jednoznakowych liczb. Sposób uczenia dzieci dodawania liczb nie zbyt wielkich, zależy zupełnie od usposobienia każdego dziecka.

Dodawanie liczb większych od 9, tym sposobem ułatwia się; że oddzielnie i to naprzód dodają się jedności, potém dziesiątki, następnie sta i t. d.; tych zbiory będą nowemi liczbami, których ogół będzie ogółem liczb pierwiastkowo danych. Na przykład, gdy mamy do siebie dodać dwie liczby 75 i 48: ogół jedności jest 13, ogół zaś dziesiątków jest 11, czyli 110; te znów dwie liczby zbierając razem, mamy ogół jedności 3, ogół dziesiątków jest 2 czyli 20, ogół zaś stów jest 1 czyli 100; więc ostatecznie ogółem danych liczb 75 i 48 jest 123. Gdybyśmy zamiast pisać 13 na ogół z jedności napisali tylko 3 jedności, dziesiątki zaś wprost do dziesiątków przenieśli, bylibyśmy całą robotę ułatwili.

12. Z tego widzimy: że, aby ułatwić działanie *potrzeba wypisać liczby dane do dodawania jedne pod drugiemi tak, aby jedności stały pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, sta pod stami, tysiące pod tysiącami i t. d. i podkréślić je poziomą linią. Potém dodawszy do siebie jedności, jeśli ich ogół większy jest od 9, potrzeba napisać tylko jedność pod jednościami, dziesiątki zaś tego ogółu wprost do dziesiątków dodać; gdy znów ogół dziesiątków jest większy od 9, podpisujemy tylko dziesiątki pod dziesiątkami, dziesiątki zaś dziesiątków czyli sta, dodajemy do stów i t. d.; ostatni zaś ogół wypisuje się taki jaki był otrzymany.*

Niech będą dane do dodawania liczby 15,307, 8,2794. Do odbycia działania tak je podpiszemy:

$$
\begin{array}{r}
15 \\
307 \\
8 \\
2794 \\
\hline
\text{Ogół } 3124
\end{array}
$$

Tu ogół jedności jest 24, zatem 4 jedności podpisujemy pod jednościami, zaś 2 dziesiątki dodajemy do dziesiątków; a że z tych otrzymany ogół jest 12 dziesiątków, przeto 2 dziesiątki podpisujemy pod dziesiątkami, a 10 dziesiątków, czyli 1 sto, dodajemy do stów: tu znów otrzymamy na ogół 11 stów: więc 1 sto podpisujemy pod stami, zaś 10 stów, czyli tysiąc dodajemy do tysięcy, skąd ogół tysięcy 3 podpisujemy obok stów po lewéj ręce.

Jeżeli zebrane jedności dają na ogół okrągłą liczbę dziesiątków np. 10 lub 20, 30 i t. d. wtedy pod jednościami podpisuje się zero. Toż samo rozumie się o dziesiątkach, stach, tysiącach i t. d. Na przykład.

$$\begin{array}{r} 80749 \\ 96 \\ 9374 \\ 39801 \\ \hline \text{Ogół } 130020. \end{array}$$

W tym przykładzie ogół jedności jest 20, to jest, 2 dziesiątki a jedności nic; więc pod jednościami podpisujemy zero, a 2 dodajemy do dziesiątków, których ogół znajdziemy 22; zatém 2 dziesiątki podpisujemy pod dziesiątkami, a 2 sta dodajemy do stów. Ponieważ ogół stów jest 20, to jest 2 tysiące, przeto pod stami zero podpisujemy, a 2 tysiące dodajemy do tysiąców. Ogół tysięcy jest 20, piszemy więc pod tysiącami zero, a 2 dodajemy do dziesiątków tysięcy; nakoniec ogół dziesiątków tysięcy jest 13, i tę liczbę napiszemy obok poprzednio otrzymanych tysięcy; i tak być powinno, bo 3 są dziesiątki tysięcy, zaś 1 dziesiątkiem dziesiątków tysięcy, czyli 100 tysięcy.

13. *Sprawdzenie* (Повѣрка v. проба) tego działania, to jest, przekonanie się o dokładności otrzymanego ogółu, jest koniecznie potrzebne, zwłaszcza kiedy działanie na wielu liczbach wykonywamy. To sprawdzenie odbywa się rozmaitym sposobem.

Sposób 1. Po ukończeniu dodawania, jeżeliśmy je wykonali z dołu do góry, potrzeba toż samo powtórzyć z góry na dół; a gdy te same ogóły otrzymamy, znać żeśmy w pierwszém działaniu nie popełnili błędu; gdyby zaś okazała się różnica pomiędzy ogółami, potrzeba powtarzać dodawanie z dołu do góry i z góry na dół, dopóki z dwóch działań nie otrzymamy tego samego wypadku.

Sposób 2. Po otrzymanym ogóle wszystkich liczb danych, rozłączamy je po kilka na gromadki, każdéj z nich znajdziemy ogół, cząstkowe ogóły razem dodamy do siebie, a jeśli stąd otrzymany ogół zgadza się z ogółem z pierwszego dodawania powstałym, to nasze działanie dobrze uskutecznione było; jeśli nie, potrzeba dane liczby do dodania rozdzielić na inne gromadki i z nich otrzymane wypadki dodać do siebie. Na przykład:

I.	II.	III.
256	256	677
71	71	312
1763	1763	3854
8019	8019	4843,
677	10109	
312	4843	
3854		
Ogół 14952,	Zgodno 14952.	

W piérwszym szeregu oznaczonym przez (I), są liczby dane do dodania, ogół ich jest liczba 14952. Ten szereg liczb rozłożony został na dwie gromadki; oznaczona przez (II) zawiera piérwsze cztéry liczby od góry, których ogół jest 10109; oznaczona przez (III), zawiera resztę liczb danych, których ogół jest 4843. Ten ostatni wypadek podpisany jest pod ogółem 10109 pierwszéj gromadki; po dodaniu zaś obu wypadków otrzymaliśmy ogół zupełnie ten sam jak z dodania wszystkich liczb danych.

Uwaga. Jeżeli mamy dodać do siebie bardzo wiele liczb, potrzeba, dla uniknienia błędu, rozłożyć je na gromadki, znaleźć ich ogóły, i te dodawszy do siebie, otrzymamy ogół czyli summę wszystkich liczb danych. Dla sprawdzenia, należy też liczby rozłożyć na inne gromadki, a postąpiwszy jak poprzednio, ogół ostateczny powinien zgodzić się z pierwszym.

Na przykład: niechaj będą dane liczby do dodawania następujące, 715, 248, 17, 2098, 48, 5523, 7324, 99, 105, 843, 3079, 57.

Te liczby rozdzielimy na trzy gromadki zawierające po cztéry liczb, i otrzymamy pojedyncze ogóły, jak następuje:

715	48	105
248	5523	843
17	7324	3079
2098	99	57
3078,	12994,	4084;

te pojedyncze ogóły dodawszy do siebie będzie:

	3078
	12994
	4084
Ogół całkowity	20156

Powyżéj dane liczby rozłożymy na inne następujące gromadki, i wykonamy jak poprzednio roboty:

48	105	715
248	5523	843
17	7324	3079
2098	99	57
2411,	13051,	4694;

dodawszy te pojedyncze ogóły, będzie:

	2411
	13051
	4694
Ogół zgodny	20156

Są jeszcze inne sposoby sprawdzenia dodawania: jeden z nich późniéj zobaczymy.

ODEJMOWANIE.

14. Odejmowanie (Вычитаніе) arytmetyczne liczb, jest działanie za pomocą którego dochodzimy o ile jedna liczba jest większa od drugiéj, czyli wynajdujemy różnicę liczebną pomiędzy dwiema liczbami tego samego gatunku.

Liczba powstała z odjęcia mniejszéj od większéj liczby, nazywa się *różnicą* lub *resztą* (Остатокъ): np. odjąwszy 2 od 3 otrzymamy *resztę* czyli *różnicę* 1. Liczba od któréj odjąć mamy drugą nazywa się *zmniejszalna* (Уменьшаемое), liczba którą odjąć mamy nazywa się *odjemną* (Вычитаемое).

Odejmowanie, podobnie jak dodawanie, jest skróconém liczeniem. Jakoż, gdybyśmy mieli odjąć 3 od 5, uważamy że 3 składa się z trzech jedności: od 5 odjąwszy jednę z nich, pozostanie 4, od téj liczby odjąwszy drugą jedność pozostanie 3, na koniec od 3 odjąwszy trzecią jedność, otrzymany resztę żądaną 2.

To działanie wskazuje się tak: $5 - 3 = 2$.

Dla ułatwienia i przyśpieszenia roboty, potrzeba zawczasu wprawić się w wynajdowaniu różnic pomiędzy liczbami jednoznakowemi.

Odbywając odejmowanie na liczbach wielkich, potrzeba odejmować jedności od jedności, dziesiątki od dziesiątków, sta od stów i t. d. Na przykład, od 574 odejmując 342, odejmujemy naprzód 2 od 4 potém 4 od 7, nareszcie 3 od 5, skąd otrzymamy resztę 232.

W odejmowaniu na trzy przypadki natrafić można: 1szy Znak odjemnéj jest mniejszy od odpowiedniego znaku zmniejszalnéj. 2gi znak odjemnéj jest równy znakowi odpowiedniemu zmniejszalnéj. 3ci znak odjemnéj jest większy od znaku odpowiedniego zmniejszalnéj.

15. Z tego co poprzedziło widzimy, że dla odbycia odejmowania potrzeba, tak jak w dodawaniu, *podpisać odjemną pod zmniejszalną tak, aby jedności stały pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, sta pod stami i t. d.; potém je podkreślić. Następnie odejmuje się jedności od jedności, dziesiątki od dziesiątków* i t. d. Na przykład, dajmy że mamy znaleźć różnicę między liczbami 7281 i 3761; podpisawszy je pod sobą i wykonawszy działanie, będzie:

$$\begin{array}{r} 7281 \\ 3761 \\ \hline \text{Reszta } 3520. \end{array}$$

Tu odjąwszy 1 jedność od jednéj jedności, pozostanie na resztę zero jedności, które też na swém miejscu podpisujemy; odjąwszy 6 dziesiątków od 8 dziesiątków, resztę 2 podpisujemy pod dziesiątkami; lecz chcąc odjąć 7 stów od 2 stów, widzimy że tego inaczéj uskutecznić nie można, tylko potrzeba wziąść z następującego znaku 7 jeden tysiąc, czyli 10 stów, które dołączone do 2, czyni 12 stów, od których dopiero odjąwszy 7, otrzymamy na resztę 5 stów; te pod stami podpisujemy: nakoniec 3 tysięcy odejmujemy nie już od 7 lecz od 6 tysięcy, bowiem 1 tysiąc dołączyliśmy do stów, i otrzymaną resztę 3 podpisujemy pod tysiącami.

Głośno odbywając robotę tak się wysłowić potrzeba: 1 od 1 pozostaje zero; 6 od 8 pozostaje 2; 7 od 2 niemożna, biorę więc z poprzedzających 7 jeden, dopiero 7 od 12 pozostaje 5; 3 od 6 pozostaje 3.

Przykład II. Od liczby 200704 odjąć 8816. — Podpisawszy odjemną pod zmniejszalną i wykonawszy działanie, znajdziemy jak następuje:

200704
8816
Resztę 191888.

Objaśniając wykonane działanie uważamy: że aby 6 jedności odjąć od 4 jedności, potrzebaby ze znaku dziesiątków wziąść jeden dziesiątek, i mielibyśmy odjąć 6 od 14; lecz że brakuje dziesiątków, bo jest ich *zero*, przeto posuwamy się aż do znaku stów, z którego bierzemy 1 sto, czyli 10 dziesiątków, i te w miejscu zera mieścimy myślą; dopiero teraz z tych dziesięciu dziesiątków bierzemy jeden, czyli 10 jedności. Tak więc uważając rzeczy, z 7 stów stanie się 6, w miejscu zera będzie 9 dziesiątków, i nareszcie 14 jedności. Przyszedłszy do stów, widzimy że nie można odjąć 8 od 6, zatém potrzebaby ze znaku tysięcy wziąść jeden, lecz że tysiąców jest zero, posuwamy się do dziesiątków tysięcy, których jest znów zero, zatém idziemy dalej do stów tysięcy: dopiéro ze znaku stów tysięcy bierzemy 1, który znaczy 10 dziesiątków tysięcy; z tych 10 bierzemy 1, który znaczy 10 tysięcy; na koniec z tysiąców wziąwszy 1, zamienimy go myślą na 10 stów, do których dołączywszy 6, będziemy mieli odjąć 8 od 16 stów. Przeszedłszy do odjęcia tysięcy, przypominamy sobie żeśmy mieli w miejscu zera 10 tysięcy, z których ponieważ wzięliśmy 1, pozostało 9, zatém odejmiemy 8 od 9 tysięcy. Ponieważ od dziesiątków i stów tysięcy nic nie ma do odjęcia, zatém spuszczamy ich znaki do reszty w odpowiednie miejsca; tylko potrzeba zważać, że w miejscu zera zostało 9, a 2 zmniejszone jest o 1, więc zostało 1 setek tysięcy.

W głos tak się odbywa działanie: 6 od 4 nie można, biorę ze stów 1; (więc) 6 od 14 zostaje 8; 1 od 9 zostaje 8; 8 od 6 nie można, biorę ze stów tysięcy 1; 8 od 16 zostaje 8; 8 od 9 zostaje 1; nareszcie 9 i 1 spuszczam.

Kiedy w odjemnéj znajduje się zero, wtedy znak zmniejszalnéj odpowiedni zeru spuszcza się do reszty, np:

$$\begin{array}{r} 358 \\ 206 \\ \hline \text{Reszta } 152. \end{array}$$

16. Wypadek z odbytego odejmowania nazywa się, jakeśmy to widzieli, resztą lub różnicą. Nazwy te zależą od zadania: tak, gdy mówimy, że chcemy wiedzieć o ile liczba jedna przewyższa drugą, wtedy po odjęciu od siebie liczb danych otrzymujemy *różnicę;* kiedy zaś chcemy dowiedzić się, ile pozostanie po zmniejszeniu jednéj liczby o daną liczbę, wtedy otrzymujemy *resztę.*

Ta reszta lub różnica nazywa się jeszcze *dopełnieniem arytmetyczném* (ариѳметическое дополненіе) danéj liczby do innéj również danéj liczby, np. 2 jest dopełnieniem 3 do 5 czyli dopełnieniem pięciu; to znaczy, że do 3 dodawszy 2 mamy 5. Tu widzimy, że 2 jest różnicą między 5 i 3.

Odejmowanie wykonywa się jeszcze bardzo wygodnie przez dopełnienie odjemnéj do zmniejszalnéj. Na przykład, gdybyśmy mieli od 250734 odjąć 68095, podpisawszy pod sobą te liczby, tak jakeśmy to dotąd czynili, i podkreśliwszy je, pod spodem wypisujemy liczbę taką, żeby do odjemnéj dodana wydała zmniejszalną:

$$\begin{array}{r} 250734 \\ 68085 \\ \hline 182649 \end{array}$$

co się tak wykonywa. Pod 5 podpisuję 9, bo 9 + 5 czyni 14; z tych 14 dodaję 1 do 8 co uczyni 9, a że na dziesiątki ma wypaść 3, powinno przeto być 13, zatém pod 8 podpisuję brakujące 4: następnie, z 13 dodaję 1 do zera, co czyni 1, a że odpowiedni znak zmniejszalnéj ma być 7, więc pod zerem piszę 6 na resztę. Daléj widzę, że do 8 potrzeba dodać 2, dla otrzymania 10, te 2 należą do reszty, a 1 dodaję do 6 odjemnéj, co czyni 7, do których potrzeba 8 dodać dla otrzymania 15, te 8 należą do reszty, a 1 dodaję do odjemnéj, lecz że się ta kończy; zatém ten 1 dopisuję do reszty.

Po ukończeniu działania sprawdzamy go, dodając dopełnienie, czyli resztę, do odjemnéj, a jeżeli ogół wyrówna zmniejszalnéj, to będzie znakiem dobrego działania.

Ten sposób odejmowania jest dogodniejszy od innych, lecz przez częste wykonywania roboty tym sposobem, należy nabyć wprawy.

17. Odejmowanie odbywa się jeszcze łatwiéj przez dopełnienia do liczb 10, 100, 1 000, i t. d. na zasadzie téj; że do *jakiéjkolwiek liczby dodawszy i zarazem odjąwszy pewną liczbę, pierwsza wartość jéj nie zmienia się*: np. $5+2-2$ jest tylko 5: jako téż, *że wartość wypadku będzie ta sama, czy wprzód wykonamy dodawanie dwóch liczb a potém od ogółu odejmiemy trzecią liczbę; czy téż wprzód odbędziemy odejmowanie trzeciéj od któréjkolwiek z dwóch pierwszych liczb, a potém do reszty dodamy pozostałą liczbę.* Np. gdybyśmy mieli od summy dwóch liczb $7+5$ odjąć 4, mielibyśmy: $7+5=12$, a następnie $12-4=8$; albo $7-4=3$, a potém $3+5=8$.

Dajmy teraz że od liczby 135 092 odjąć mamy 57 386. Podług powyższéj zasady, mamy $100000-57386+135092-100000$, żądaną resztę: jakoż, 100 000 jest tu dodane i odjęte, więc nie zmienia wartości żądanéj reszty; następnie zaś, działania lubo nie w tym porządku jak zadanie wskazuje, lecz wszystkie są wykonane.

Działanie więc wykonywa się następującym sposobem. Liczby 57 386 znajdziemy dopełnienie do 100 000, które jest 42 614, do tego dodamy zmniejszalną 135 092, skąd otrzymamy ogół 177706; od którego odjąwszy 100000, znajdziemy resztę żądaną 77706.

Dla znalezienia dopełnienia do 100000, i w ogóle wszelkiéj liczby z jedności i zer złożonéj, potrzeba od niéj odjąć liczbę daną; w tym razie wszystkie zera mają wartość 9 prócz pierwszego od lewéj ręki, które warte jest 10. Dla téjto przyczyny bardzo łatwo wynajduje się dopełnienie postępując od prawéj do lewéj ręki. Tak w poprzedzającym przykładzie, aby znaleźć dopełnienie 57386, powiadamy: dopełnienie 5 do 9 jest 4, 7 do 9 jest 2, 3 do 9 jest 6, 8 do 9 jest 1, 6 do 10 jest 4, i te dopełnienia wypisawszy obok siebie, będzie 42614.

Wzór działania.

Zmniejszalna	135092	57386	Odjemna.
Dopełnienie	42614	42614	Dopełnienie.
Ogół	177706	100000	Zgodno.
Reszta	77706		

Sprawdzenie odejmowania.

18. Reszta czyli różnica dodana do odjemnéj daje ogół równy zmniejszalnéj. Ta prawda daje sposób sprawdzenia wykonanego odejmowania. Naprzykład: mamy znaleźć różnicę liczb 17346 i 5869. Odjąwszy mniejszą od większéj z danych liczb, znajdziemy różnicę 11477, do téj dodawszy liczbę mniejszą 5869, znajdziemy większą, to jest, zmniejszalną.

Uwaga. Nie trudno jest nauczycielowi ułożyć tysiączne przykłady dla wprawy swych wychowańców w dodawanie i odejmowanie, dlatego też w téj książce poprzestajemy na tych tylko przykładach, któreśmy wzięli dla objaśnienia teoryi.

O MNOŻENIU.

19. Mnożenie (Умноженіе) liczb całkowitych jest działanie, za pomocą którego z dwóch danych liczb znajdujemy trzecią, tyle razy większą od pierwszéj, ile druga zawiera w sobie jedności.

Tak np. dwie liczby 3 i 5 przez siebie pomnożone, wydają liczbę 15, która w sobie zawiera trzy piątki, to jest, tyle piątek ile 3 zawiera jedności.

Liczby dane do pomnożenia przez siebie nazywają się *czynnikami* (производитель), wypadek z uskutecznionego mnożenia nazywa się *iloczynem* (произведеніе). Liczba którą mnożymy nazywa się *mnożną* (множимое), liczba przez którą mnożymy nazywa się *mnożnikiem* (множитель). Tak, w powyższym przykładzie, 3 i 5 są czynnikami, 15 iloczynem; a jeżeli mnożymy 5 przez 3, wtedy 5 jest mnożną, zaś 3 mnożnikiem.

20. Mnożenie liczb całkowitych jest dodawaniem skróconém. Jakoż mając 4 pomnożyć przez 2, dodawszy do siebie 2 czwórki, to jest 4 + 4, otrzymamy na wypadek 8, liczbę dwa razy większą od cztérech.

Tym sposobem wykonywane mnożenie staje się trudne, a nawet praktycznie niepodobne, kiedy liczby dane do mnożenia są bardzo wielkie; dlatego potrzeba wprawić się w mnożenie liczb z jednego znaku złożonych; bo, jak się przekonamy późniéj, mnożenie choćby największych liczb, składa się z mnożeń liczb jednoznakowych.

21. Tablica mnożenia, mająca być wynalazkiem Pitagoresa greckiego filozofa, tworzy się w następujący sposób.

TABLICA PITAGORESA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

W jednym wierszu poziomym wypisują się liczby 1, 2, 3 aż do 9; potém, pod 1 wypisujemy w tym samym porządku, na linii pionowéj, téż same liczby aż do 9; dopiero wiersze poziome, odpowiadające liczbom 2, 3, 4, &c. napisanym z góry na dół, tworzą się następującym sposobem. W drugim wierszu poczynającym się od dwóch, każda liczba z lewéj ręki jest większa o 2; dodawszy więc 2 do 2, otrzymamy 4, *które jest* 2×2; do 4 dodawszy 2 będzie 6, *które jest* 2×3, i t. d. W trzecim wierszu poczynającym się od 3, każda liczba od poprzedzającéj jest o 3 większa; więc do 3 dodawszy 3 będzie 6, które jest równe 2×3; do 6 dodawszy 3 będzie 9, które jest równe 3×3. Na wzór tych dwóch wierszy tworzą się następne, odpowiadające liczbom 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Takim sposobem utworzona i ułożona tablica mnożenia, jest bardzo łatwa do użycia. Jakoż, chcąc znaleźć iloczyn z liczb 7 i 8, posuwamy palcem w wierszu poczynającym się od liczby 7, aż do kolumny stojącéj pod liczbą 8, gdzie znajdziemy żądany iloczyn 56.

22. Porządek wykonywanych mnożeń, kiedy mamy kilka czynników, jest zupełnie dowolny. Jakoż, dajmy, że mamy dwa czynniki, 3 i 4, będziemy mieli $3 \times 4 = 4 \times 3$; co tak okażemy. W jednym wierszu napiszemy trzy kreski, a że 3 ma być wzięte 4 razy, więc takich wierszy napisawszy 4, ogół wszystkich kresek będzie iloczynem z 3 przez 4.

to jest 12 kresek. Wypisawszy zaś w jednym wierszu 4 kréski i takich wierszy napisawszy 3, będzie ogół tych krések iloczynem 4×3.

to jest, 12 krések.

23. Dajmy, że mamy pomnożyć 274 przez 3, czyli dodać tę liczbę 3 razy napisaną, będzie:

$$
\begin{array}{r}
274 \\
274 \\
274 \\
\hline
\text{Iloczyn } 822:
\end{array}
$$

tu widzimy, że 4 jest przez 3 pomnożone, skąd wypadło 12 jedności; 7 również jest pomnożone przez 3, skąd otrzymaliśmy 21 dziesiątków, 2 także jest przez 3 pomnożone, skąd mamy 6 stów. Gdybyśmy te wypadki podpisali pod sobą, zważając, że piérwszy iloczyn 12 są jedności, drugi 21 są dziesiątki, czyli 210; trzeci 6 są sta, czyli 600, mielibyśmy ich ogół:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 210 \\ \underline{600} \\ \text{Iloczyn } 822. \end{array}$$

Przy wykonywaniu mnożenia to dodawanie odbywa się w następujący sposób

$$\begin{array}{r} 274 \\ \underline{3} \\ \text{Iloczyn } 822 \end{array}$$

3 razy 4 czyni 12, pod jednościami podpisujemy 2, jeden zaś dodajemy do dziesiątków; następnie 3 razy 7 czyni 21, a dodawszy 1, jest 22 dziesiątków, z tych 2 podpisujemy pod dziesiątkami, drugie 2 do stów dołączymy; nakoniec 3 razy 2 czyni 6 stów, a 2 wzięte z poprzednio otrzymanych 22 dziesiątków, czyni 8 stów; więc ostatecznie iloczyn z 274 przez 3, jest 822.

Niechaj będzie do pomnożenia 367 przez 54. Liczbę 54 można rozłożyć na 50 i 4. Ponieważ liczba 367 ma być powiększona razy 54, zatém powiększywszy ją 50 razy, potém 4 razy, ogół wypadłych iloczynów, będzie żądanym iloczynem. Jakoż, gdybyśmy 367 podpisali pod sobą razy 54, i wykonali dodawanie, otrzymalibyśmy ten sam wypadek, jak, gdybyśmy tęż liczbę 367 podpisali pod sosobą razy 50, dodali do siebie i otrzymali ogół; potém podpisali tęż liczbę razy 4 dodali do siebie i otrzymali ogół; te dwa ogóły do siebie dodawszy, znaleźlibyśmy nakoniec ogół 54 razy do siebie dodanéj liczby 367, czyli iloczyn 367×54. Z tego pokazuje sie, że iloczyn 367×54 jest równy ogółowi z iloczynów 367×50 i 367×4. Pominąwszy zero, czyli 50 uważając za 5, mnożenie 367 przez 54 staje się mnożeniem téjże liczby 367 przez 4 i przez 5; a ogół tych iloczynów jest iloczynem żądanym; zważać tylko potrzeba, że iloczyn powstały z pomnożenia przez 5 dziesiątków jest 10 razy większy od iloczynu gdyby to 5 było jednościami.

Podług tego co poprzedziło, wykonalibyśmy mnożenie w następujący sposób:

$$
\begin{array}{rcl}
367\times 4 & = & 1468 \\
367\times 50 & = & 18350 \\
\hline
\text{Ogół, czyli iloczyn} & = & 19818.
\end{array}
$$

Tym sposobem rozumując, okaże się że iloczyn dwóch jakichkolwiek liczb, np. 2759 i 468, czyli 2759×468, jest:

$$
\begin{array}{rcl}
2759\times 8 & = & 22072 \\
2759\times 60 & = & 165540 \\
2759\times 400 & = & 1103600 \\
\hline
\text{Iloczyn} & & 1291212.
\end{array}
$$

Z poprzedzających wywodów wyprowadzamy następujące prawidło mnożenia dwóch liczb przez siebie.

Pod mnożną podpisuje się mnożnik tak, aby jedności stały pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t d., (tak jak w dodawaniu i odejmowaniu), i te dwie liczby podkreślamy. Poczém wykonywamy mnożenie następującym sposobem. Naprzód: *przez jedności mnożnika mnożymy jedności, potém dziesiątki, następnie sta i t. d., mnożnéj; stąd otrzymywane iloczyny albo są jednoznakowe, albo dwuznakowe. Jeśli są jednoznakowe, podpisują się pod temi znakami mnożnéj, które mnożonemi były; jeśli zaś dwu znakowe wtedy jedności podpisują się pod odpowiedniemi znakami mnożnéj, dziesiątki zaś dodają się do następnie otrzymanego iloczynu.* Powtóre: *przez dziesiątki mnożnika mnożą się, tak jak przez jedności, wszystkie znaki mnożnéj; lecz iloczyn z pierwszego znaku, to jest jedności mnożnéj, podpisuje się pod dziesiątkami; iloczyn z dziesiątków pod stami i t. d.* Następnie: *przez sta mnożnika wykonywamy mnożenie w tym samym porządku* *jak przez poprzednie znaki, a piérwszy iloczyn podpisuje się pod stami i t. d.; aż do ostatniego znaku mnożnika.*

Wzór działania podamy na dwóch poprzedzających liczbach:

```
      2759
       468
    ------
     22072
    16554
   11036
   -------
Iloczyn 1291212.
```

To działanie tak się w głos odbywa: 8 razy 9 czyni 72, piszę 2, pozostaje 7; 8 razy 5 czyni 40, a 7 czyni 47, piszę 7, zostaje 4; 8 razy 7 czyni 56, a 4 czyni 60, piszę 0, pozostaje 6; 8 razy 2 czyni 16, a 6 czyni 22. *Potém:* 6 razy 9 czyni 54, piszę 4 (pod dziesiątkami), pozostaje 5; 6 razy 5 czyni 30, a 5 jest 35, &c.

Kiedy w mnożnéj znajduje się zero, na którémkolwiek miejscu, wtedy iloczyn z poprzedzającego znaku wypisuje się taki jaki był otrzymany, np:

```
      20406
        265
    -------
     102030
    122436
   40812
   --------
Iloczyn 5407590.
```

Jeżeli w mnożniku znajduje się zero, na którémkolwiek miejscu, na ten czas cały iloczyn przez toż zero wypuszcza się, jako będący zerem, i zaraz przez znak po niém następujący odbywa się mnożenie, usuwając w iloczynie pierwszy znak od prawéj ręki o dwa miejsca, np:

$$\begin{array}{r} 3754 \\ 206 \\ \hline 22524 \\ 7508 \\ \hline 773324. \end{array}$$

Gdy na końcu mnożnéj lub mnożnika, albo téż na końcu i mnożnéj i mnożnika, są zera, wtedy nie zważając na nie, mnożymy znaki pozostałe, a dopiero do otrzymanego iloczynu, dopisujemy po prawéj ręce tyle zer ile ich opuszczonych było, np: aby pomnożyć 260 przez 70, mnożymy tylko 26 przez 7, skąd będzie iloczyn 182, a dopiero dopisawszy do téj liczby dwa zera, otrzymamy żądany iloczyn 18200. Przyczyna takiego postępowania jest taka: mnożąc 26 zamiast 260, mnożyliśmy liczbę 10 razy mniejszą od 260, zatém i iloczyn wypadły był 10 razy mniejszy, który aby był jaki być powinien, potrzeba powiększyć go razy 10, co otrzymamy dopisawszy na końcu do 182 zero, skąd będzie 1820. Lecz mnożąc przez 7 zamiast przez 70, otrzymaliśmy iloczyn 1820 mniejszy od żądanego razy 10, zatém potrzeba go tyleż razy powiększyć, co téż otrzymamy dopisawszy na końcu zero do 1820, więc ostatecznie, do iloczynu 182 potrzeba dopisać dwa zera; zatém tyle, ile ich było razem w mnożnéj i mnożniku.

24. Mnożenie liczb bardzo wielkich jest utrudzającém umysł, przez co popełnić można błędy. Dla uniknienia tego, potrzeba przygotować sobie i na boku napisać iloczyny cząstkowe ze wszystkich znaków mnożnika przez mnożną. Wtedy można mnożenie rozpocząć od znaku najwyższego rzędu jedności; pamiętać tylko potrzeba, aby podpisując te cząstkowe iloczyny pod sobą, dla dodania ich, jedności stały pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t. d.

Dajmy na przykład, że mamy znaleźć iloczyn dwóch liczb 275942 i 3864.

WZÓR DZIAŁANIA.

Iloczyny cząstkowe.

3....827826,
8....2207536,
6....1655652,
4....1103768.

$$\begin{array}{rr} & 275942 \\ & 3864 \\ \hline & 827826 \\ & 2207536 \\ & 1655652 \\ & 1103768 \\ \hline \text{Iloczyn} & 1066239888. \end{array}$$

Obok 3, 8, 6, 4. są wypisane iloczyny cząstkowe mnożnéj przez też znaki. Piérwszy znak piérwszego iloczynu podpisany jest pod ostatnim znakiem mnożnika. Następne iloczyny cząstkowe tak są pod sobą podpisane, że ostatni znak z prawéj ręki każdego iloczynu, występuje naprzód względem poprzedzającego iloczynu. Tu jeszcze postrzegamy, że ponieważ w drugim iloczynie, obok 8, więcéj jest znaków o jeden od iloczynu poprzedzającego, przeto znak pierwszy po lewéj ręce podpisuje się pod piérwszym znakiem iloczynu piérwszego: następne iloczyny mają równą liczbę znaków, więc téż o jeden znak po lewéj ręce wsuwają się, a o jeden znak z prawéj ręki występują.

25. Mając do pomnożenia 7 przez 6, gdybyśmy toż 7 pomnożyli tylko przez 3, otrzymalibyśmy iloczyn 21, oczywiście dwa razy mniejszy od żądanego; zatém potrzeba go jeszcze przez 2 pomnożyć, to jest $2\times21=42$. Stąd widzimy, że $7\times3\times2$ jest to samo co 7×6. W ogóle, iloczyn z ilukolwiek czynników znajduje się następującym sposobem:

Jeden czynnik mnożymy przez drugi, stąd otrzymany iloczyn mnożymy przez trzeci czynnik; następnie tak otrzyma-

ny iloczyn mnożymy przez czwarty czynnik; i tak dalej aż do ostatniego czynnika postępujemy.

Tak np: $27 \times 176 \times 8 \times 94 \times 23,$

będzie: $27 \times 176 = 4752,$

$$4752 \times 8 = 38016$$

$$38016 \times 94 = 3573504$$

$$3573504 \times 23 = 82190592.$$

Gdy więc mamy bardzo wielkie liczby mnożyć przez siebie, jeżeli można rozkładamy jednę z nich, np. mnożnik na czynniki, przez które, tak jakeśmy dopiéro wskazali, wykonywamy kolejno mnożenie.

26. Ponieważ iloczyn z danych liczb zawsze ten sam jest, jakikolwiek porządek działań zachowamy (n. 22), zatém, aby sprawdzić dokładność otrzymanego iloczynu, wykonać potrzeba drugi raz mnożenie, w innym porządku czynniki ułożywszy jak w piérwszym razie, np:

$$\begin{array}{r} 317 \\ 26 \\ \hline 1902 \\ 634 \\ \hline 8242. \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 26 \\ 317 \\ \hline 182 \\ 26 \\ 78 \\ \hline 8242. \end{array}$$

27. Kiedy dwie liczby dane do pomnożenia są oderwanemi liczbami, wtedy obojętną jest rzeczą, która z nich jest mnożną; lecz kiedy są liczbami mianowanemi, wtedy mnożną jest ta liczba, która wyraża gatunek ilości w iloczynie otrzymać się mającym. Na przykład, gdyby się zapytano, ile złotych zapłacić potrzeba za 25 funtów kawy, kiedy 1 funt płaci się po 3 złote, oczywiście że zapłacić potrzeba 25 razy 3 złote; zatem 3 złote jest mnożną. W wykonywaniu mnożenia może być jednak dogodniejszy porządek zachowany.

W ogólności, gdy liczby są mianowane, *iloczyn jest liczbą tego samego gatunku co mnożna*, mnożnik zaś uważa się za liczbę oderwaną. I w saméj rzeczy, w poprzedzającém np. zadaniu, 25 może być funtów czegokolwiek, lub 25 garcy, i t. p. rzeczy; bo ostatecznie ten czynnik wyraża jedynie to, że 3 złote ma być powiększone razy 25.

NIEKTÓRE UWAGI I SKRÓCENIA.

28. Kiedy wszystkie czynniki są sobie równe, wtedy iloczyn nazywa się *wielokrotnością* lub *potęgą*. W szczególności zaś: iloczyn z dwóch równych czynników jest *dwukrotnością*, albo *potęgą drugą*, albo *kwadratem:* tak 2×2, daje iloczyn 4, który jest dwukrotnością dwóch, lub kwadratem z dwóch, lub potęgą drugą dwóch. Iloczyn z trzech równych czynników nazywa się *trzykrotnością* lub *potęgą trzecią* albo *sześcianem:* tak $3 \times 3 \times 3$ daje iloczyn 27, który jest trzykrotnością trzech, lub sześcianem z trzech, albo potęgą trzecią trzech. Iloczyn z cztérech równych czynników, zowie się *cztérokrotnością* czyli *potęgą czwartą*; iloczyn z pięciu równych czynników zowie się *potęgą piątą* i t. d.

29. Dwie tego samego gatunku ilości, nazywają się *parą*, np. para koni, to jest dwa konie. *Liczbą parzystą* nazywamy taką liczbę, którą na pary rozłożyć można. Wszelka więc liczba zakończona na znaki 2, 4, 6, 8, i na zero, jest liczbą parzystą; liczby zaś zakończone na 1, 3, 5, 7, 9, są nieparzyste.

Kiedy jeden przynajmniéj czynnik jest liczbą parzystą, tedy i iloczyn z nich jest liczbą parzystą; co łatwo sobie wytłomaczyć można.

30. Mnożąc np. 2 przez 4, otrzymamy na iloczyn 8, liczbę jednoznakową; lecz mnożąc 9 przez 9, otrzymujemy na iloczyn 81, liczbę dwuznakową. Mnożąc 10 przez 10, iloczyn 100 jest liczbą z trzech znaków złożoną, ale 99×99 daje iloczyn 9801 liczbę ze cztérech znaków złożoną. Z tych dwóch przykładów widzimy oczywiście, że *liczba znaków w iloczynie jest równa liczbie znaków razem wziętych we wszystkich czynnikach, albo o jednę mniejsza.*

31. Z tego cośmy powiedzieli w num. 23 tego dzieła, łatwo pojmiemy, że iloczyn z pewnéj liczby, np. 7, przez inną liczbę np. 5, jest równy ogółowi z iloczynów powstałych z rozmnożenia 7 przez 3 i 2, to jest, liczb na któreśmy mnożnik rozłożyli. W rzeczy saméj; $7 \times 5 = 35$, i $7 \times 3 = 21$, $7 \times 2 = 14$; ogół $21 + 14 = 35$.

Podobnież łatwo jest wyrozumować, że iloczyn z pewnéj liczby przez inną liczbę, jest równy różnicy iloczynów powstałych z pomnożenia téjże liczby przez dwie inne liczby, których różnica jest równa mnożnikowi. Na przykład: $7 \times 5 = 7 \times 7 - 7 \times 2$; gdzie $5 = 7 - 2$.

32. Te dwie prawdy posłużą nam do pośpiesznego wykonania mnożenia dwóch liczb. Uważmy na sam przód, że $5 = \frac{10}{2}$, $50 = \frac{100}{2}$; zatém np. $256 \times 5 = \frac{256 \times 10}{2}$, czyli $\frac{2560}{2}$; podobnież $256 \times 50 = \frac{25600}{2}$. Zatém mnożenie przez każdą liczbę, przynajmniéj nieprzechodzącą 100, można sprowadzić do mnożenia tylko przez 2. Dajmy że mamy 2568×25; ponieważ $25 = 20 + \frac{10}{2}$, więc mamy iloczyn szukamy $25680 \times 2 + \frac{25680}{2} = 64200$. Podobnie $377 \times 33 = 377 \times 35 - 377 \times 2$, zatém iloczyn szukany jest:

$$377 \times 20 = 7540$$
$$377 \times 10 = 3770$$
$$\frac{3770}{2} = 1885$$
$$13195$$
odjąć $377 \times 2 = 754$

Iloczyn $377 \times 33 = 12441$

w tym przykładzie rozłożyliśmy 35 na $20 + 10 + 5$.

Dajmy że mamy 5218×78, będziemy mieli iloczyn szukany:

$$5218 \times \frac{100}{2} = 260900$$
$$5218 \times \frac{100}{4} = 130450 = \frac{260900}{2}$$
$$5218 \times 2 = 10436$$
$$5218 = 5218$$
$$5218 \times 78 = 407004$$

tu rozłożyliśmy 78 na $50 + 25 + 2 + 1$.

Wziąwszy jeszcze 967×87; byłoby tak:

$$967 \times 100 = 96700$$
$$967 \times 2 = 1934$$
$$98634$$

do odjęcia $967 \times 10 = 9670$

$$967 \times \frac{10}{2} = 4835$$
$$14505 \ldots 14505$$
$$967 \times 87 = 84129;$$

w tém zadaniu uczyniliśmy $87 = 102 - 15$.

Tym sposobem mnożenie wtedy tylko jest ułatwioném i pośpieszniéj się wykonywa, kiedy na licznych i często powtarzanych przykładach nabędziemy wprawy.

33. Określenie (definicya) mnożenia, na początku tego rozdziału podana, stosuje się, jakeśmy to wyraźnie powiedzieli, tylko do mnożenia dwóch całkowitych liczb; jest zaś niedokładne kiedy idzie o pomnożenie przez siebie kilku liczb, albo kiedy przynajmniéj jeden z czynników jest ułamkiem. Lecz ilekolwiek jest czynników, możemy ostatecznie uważać jakoby było tylko dwa czynniki. Jakoż mnożymy naprzód przez siebie dwa czynniki: potem iloczyn otrzymany staje się czynnikiem, który przez trzeci z danych czynników mnożymy i t. d. Jeśli przeto uważać będziemy tylko dwa czynniki, to jest, mnożną i mnożnik, takie określenie mnożnika podać można. *Mnożenie jest działaniem, za pomocą którego otrzymujemy z dwóch liczb trzecią, która w ten sam sposób złożona jest z jednéj z nich, w jaki druga złożona jest z jedności.*

Dajmy iloczyn 6 powstały z pomnożenia 3 przez 2; tu 6 złożone jest z dwóch trójek, bo 2 złożone jest z dwóch jedności. Lecz gdyby 6 było iloczynem z liczby 12 przez połowę jednego, wtedy 6 złożone jest z połowy 12, bo i pół jest połową jednego.

Zadania dla wprawy.

I. Kiedy talar zawiera 6 złotych polskich, 274 talarów ile złotych polskich czyni? (1644 złot.).

II. Kiedy łokieć zawiera cali 24, łokci 4759 ile uczyni cali? (114216 cali).

III. Zgodzono jednego wołu za 216 złotych polskich, ile złotych zapłacić potrzeba za 75 wołów? (16200 złot.).

IV. Kupiono 215 sztuk bydła, to jest, 112 krów, 48 wołów i resztę cieląt, ile za nie zapłacono, kiedy za jednę krowę płacono 73 złote, za wołu 220 złotych, a za cielę 27 złotych? (20221 złot.).

V. Zakupiono zboża korcy 3746, korzec po złotych polskich 19. Najem śpichrza na przechowanie go przez dni

96, kosztował dziennie złotych 7; za przewiewanie zapłacono 76 złotych; przy oczyszczaniu ubyło korcy 37; resztę przewieziono o mil 3 na targ, za co zapłacono złotych 360; na tym targu sprzedano wszystko zboże po 23 złote korzec. Pytanie czy zarobiono, czy stracono na téj spekulacyi, i wiele? (zarobiono 13095 złp.)

Następujące przykłady można skróconemi sposobami rozwiązać.

VI. Za 875 owiec ile zapłacić potrzeba, kiedy jednę owcę ugodzono po 15 złp.? (13125 złp.).

VII. Zgodzono łokieć sukna po 45 złp., za 374 łokci ile złotych zapłacić przypada? (16830 złp.).

VIII. Mórg gruntu ugodzono po 17 Rubli sreb., za 3859 morgów ile zapłacić należy? (65603 R. sr.).

IX. Z powierzchni ziemi do jéj środka jest średniéj odległości wiorst 6150; rachując na wiorstę 600 sążni, ile jest sążni do środka ziemi? (3690000 sążni).

DZIELENIE.

34. Dzielenie (Дѣленie) całkowitych liczb jest działaniem, za pomocą którego dowiadujemy się, ile razy jedna liczba mieści w sobie drugą, czyli z ilu liczb mniejszych składa się liczba większa. Tak np. 6 zawiera w sobie 3 razy po 2.

Liczba którą dzielimy nazywa się *Dzielną* (Дѣлимое); liczba przez którą dzielimy nazywa się *Dzielnikiem* (Дѣлитель); nakoniec, liczba z dzielenia otrzymana, to jest, ta która pokazuje ile razy jedna z danych liczb mieści w sobie drugą, nazywa się *Ilorazem* (Частное). Tak w powyższym przykładzie, 6 jest dzielną; 2 dzielnikiem; 3 ilorazem.

Z określenia powyższego widzimy, że dzielna tyle razy mieści w sobie dzielnik, ile iloraz mieści w sobie jedności; a że iloczyn wypadły z pomnożenia dwóch liczb, tyle razy zawiera jednę z nich, ile razy druga zawiera w sobie jedności; zatém widzimy, iż te dwa działania mają z sobą taki związek: że dzielna odpowiada iloczynowi, dzielnik jednemu czynnikowi, a iloraz drugiemu czynnikowi. Więc *dzielna jest równa iloczynowi powstałemu z pomnożenia dzielnika przez iloraz.*

Widzimy jeszcze, *że dzielenie jest działaniem wprost przeciwném mnożeniu.*

35. Dzielenie jest skróconém odejmowaniem. Jakoż, aby dowiedzieć się ile razy 2 mieści się w 6, dochodzimy ile razy 2 odjąć można od 6 aż do zupełnego wyczerpania téj liczby. Tak tu mamy: $6-2=4$; $4-2=2$; $2-2=0$; ponieważ uskuteczniliśmy *trzy* razy odejmowanie, dopóki na resztę otrzymaliśmy zero, zatém 2 mieści się w sześciu 3 razy.

Tym sposobem wykonywanie dzielenia byłoby zbyt powolne i nużące, nawet niepodobne do uskutecznienia wtedy, kiedy iloraz ma być bardzo wielką liczbą. Lecz bacząc na to cośmy w poprzedzającym numerze powiedzieli, tak pośpieszniéj możemy wykonać dzielenie. Skoro np. $2\times3=6$, zatém mając 6 dzielić przez 2, postrzegamy, że 3 jest szukanym ilorazem: gdybyśmy zaś mieli dzielić 6 przez 3, ilorazem będzie 2. Uważając przeto dzielną za iloczyn z dzielnika przez iloraz, działanie zdąża do tego, *aby mając jeden czynnik* (dzielnik) *wynaleźć taki drugi czynnik* (iloraz), *któryby przez piérwszy pomnożony, wydał iloczyn równy dzielnéj.*

36. Dzielenie liczb jedno lub dwuznakowych przez liczby jednoznakowe, jest bardzo łatwe, umiejąc dobrze tablicę mnożenia Pitagoresa.

Aby wyprowadzić prawidło dzielenia liczb większych przez liczby jednoznakowe, dajmy że mamy pomnożyć liczbę 723 przez 8. Wykonajmy mnożenie zachowując oddzielnie iloczyny z jedności, dziesiątków i stów, będzie:

$$\begin{array}{r} 723 \\ 8 \\ \hline 24 \\ 160 \\ 5600 \\ \hline \text{Iloczyn } 5784. \end{array}$$

Widzimy, że ten iloczyn złożony jest z cząstkowych iloczynów, z których każdy jest 8 razy większy od odpowiednich znaków mnożnéj, jedności, dziesiątków, stów; tak 24 jest 8 razy większe od 3; 16 jest 8 razy większe od 2; 56 jest 8 razy większe od 7. Aby więc liczbę 5784 pomniejszyć, czyli podzielić przez 8, potrzeba pomniejszyć znak stów 8 razy, znak dziesiątków 8 razy i znak jedności 8 razy. Zważając że 5 (znak tysiąców), ani razu nie mieści w sobie 8, bierzemy 57 stów, i te dzielimy przez 8: przechodząc pamięcią wszystkie iloczyny z 8 przez 1, 2, 3... postrzeżemy niebawem, że $8 \times 8 = 64$, zaś $8 \times 7 = 56$; zatém 57 mieści w sobie 7 ósemek i jeszcze pozostaje 1 sto. To 1 sto dołączywszy do 8 dziesiątków będziemy mieli 18 dziesiątków; ponieważ $8 \times 2 = 16$, zaś $8 \times 3 = 24$, zatém 8 w 18 mieści się razy 2, i jeszcze zostaje 2 dziesiątki. Te 2 dziesiątki złączywszy z jednościami, otrzymamy liczbę 24, która mieści w sobie 3 ósemek. Ostatecznie więc, wypisawszy liczby w tym porządku w jakim otrzymane były, będziemy mieli iloraz 723, powstały z podzielenia liczby 5784 przez 8.

Dopiéro opisane działanie tak się wykonywa. *Po pra-*

wéj ręce dzielnéj pisze się dzielnik, przedzielony od niéj pionową kreską; ten dzielnik podkreśla się poziomą kresą, pod którą wypisuje się iloraz.

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\begin{array}{r|l} 5784 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{56} & 723 \\ 18 & \\ \underline{16} & \\ 24 & \\ \underline{24} & \\ 0. & \end{array}$$

Oto jest postępowanie. Ponieważ 5 nie mieści w sobie ośmiu, przeto dołączam po nich stojące 7; dopiero mówię 8 w 57 mieści się 7, które pod dzielnikiem piszę, uczyniwszy iloczyn z 8 przez 7, to jest 56, podpisuję je pod 57 i uskuteczniam odejmowanie. Do otrzymanéj reszty 1 spuszczam 8 stojące po 7, i te 18 uważając za nową dzielną, mówię: 8 w 18 mieści się razy 2, które w ilorazie obok 7 piszę; a uczyniwszy iloczyn z 8 przez 2, to jest 16, podpisuję pod 18 i zaraz odejmuję. Do reszty 2 spuszczam 4 po 8 stojące, a liczbę 24 wziąwszy za dzielną, uważam że 8 w 24 mieści się razy 3, które w ilorazie obok 2 piszę: uczyniwszy teraz iloczyn z 8 przez 3, ktory jest 24, podpisuję pod ostatnią cząstkową dzielną i uskuteczniam odejmowanie; skąd ponieważ otrzymałem na resztę zero, znakiem jest że 5 784 jest zupełnie podzielne przez 8.

Uwaga I. Po spuszczeniu ostatniego znaku dzielnéj i wykonaném dzieleniu, kończy się działanie, chociażby resztą ostatnią była jakakolwiek liczba nie zero.

Uwaga II. Gdy którakolwiek reszta jest większa od dzielnika, znakiem jest, żeśmy za mały wzięli iloraz; gdy zaś iloczyn z otrzymanego znaku na iloraz przez dzielnik, jest większy od cząstkowéj dzielnéj, to nas ostrzega, że iloraz wzięliśmy za wielki.

37. Pomnóżmy 3506 przez 7.

$$\begin{array}{r} 3506 \\ 7 \\ \hline \text{Iloczyn } 24542. \end{array}$$

Wziąwszy ten iloczyn za dzielną a 7 za dzielnik, oczywistą jest rzeczą, że iloraz wypaść powinien 3506. Przy wykonywaniu działania zobaczymy jak to zero w ilorazie otrzymujemy.

$$\begin{array}{r|l} 24542 & 7 \\ \cline{2-2} 21 & 3506 \\ \cline{1-1} 35 & \\ 35 & \\ \cline{1-1} 42 & \\ 42 & \\ \cline{1-1} 0. & \end{array}$$

Ponieważ 7 we dwóch nie mieści się przybieram 4, dopiéro 7 we 24 mieści się 3 razy; iloczyn $3 \times 7 = 21$ odjąwszy od 24, pozostanie 3; spuściwszy do nich 5, będzie nowa dzielna 35, w któréj 7 mieści się razy 5; te 5 pomnożone przez 7 daje iloczyn 35, który odjąwszy od poprzedzającéj cząstkowéj dzielnéj, na resztę otrzymamy zero; do téj reszty spuściwszy 4, będziemy mieli nową dzielną 4, w któréj ponieważ 7 nie mieści się, w ilorazie kładziemy zero; następnie spuściwszy 2, w nowéj dzielnéj 42 dzielnik 7 mieści się razy 6.

Stąd widzimy, *że do reszty spuściwszy następujący znak,* *gdy w tak otrzymanéj dzielnéj cząstkowéj nie mieści się dzielnik, wtedy na iloraz kładziemy zero.*

Częstokroć otrzymujemy tym sposobem dwa i więcéj zer po sobie następujących.

38. Przystąpmy teraz do dzielenia liczb w tym przypadku, gdy dzielnik składa się z kilku znaków. Dla lepszego wyjaśnienia rzeczy, dajmy że jest nam wiadomy dzielnik 274 i iloraz 5547. Pomnożywszy je przez siebie, będziemy mieli.

Dzielnik 274
Iloraz 5547

$274 \times 7 \ldots\ldots 1918$
$274 \times 4 \ldots\ldots 1096$
$274 \times 5 \ldots 1370$
$274 \times 5 \ldots 1370$

Iloczyny cząstkowe

Dzielna 1519878.

Przypatrzywszy się temu działaniu, widzimy: 1. Że dzielna składa się z iloczynów całego dzielnika przez znaki pojedyncze ilorazu. 2. Że iloczyn ostatni cząstkowy, powstały z pomnożenia dzielnika przez ostatni znak ilorazu, jest liczbą kończącą się na jednościach tego samego rzędu, którego jest znak ilorazu, przez który dzielnik był pomnożony. 3. Iloczyn z dzielnika przez znak przedostatni ilorazu, jest liczbą kończącą się na jedności tego samego porządku, którego jest mnożący znak ilorazu i t. d. Postrzegamy nakoniec, że dodając do siebie cząstkowe iloczyny, jedności tego samego rzędu wszystkich tych iloczynów wchodzą jedne w drugie. Stądto zachodzi potrzeba rozpoczynania dzielenia od jedności najwyższego rzędu.

Po tém objaśnieniu przystąpmy do podzielenia liczby 1 519 878 przez 274. Działanie uporządkowawszy tak jak w poprzedzających numerach, mamy:

	1519878	274
Iloczyn cząst.	1370	5547
	1498	
Iloczyn cząst.	1370	
	1287	
Iloczyn cząst.	1096	
	1918	
Iloczyn cząst.	1918	
Ostatnia reszta	0.	

Na sam przód postrzegamy, że skoro dzielnik jest trzy wyrazowy, do dzielenia potrzeba z dzielnéj odłączyć najmniéj trzy znaki od lewéj ręki; lecz że tu 151 nie mieści w sobie 274, przeto przybieramy znak czwarty. Będziemy więc mieli piérwszą dzielną cząstkową 1519; dopiero mnożąc w myśli 274 przez 2, 3, 4, 5, 6; przekonamy się, że iloczyn z pomnożenia dzielnika przez 6 jest większy od 1519, iloczyn zaś z pomnożenia tegoż dzielnika przez 5 jest mniejszy; zatém na iloraz zatrzymamy 5; przez które pomnożywszy dzielnik, otrzymany stąd iloczyn cząstkowy podpisawszy pod 1519, odejmujemy. Do tak otrzymanéj reszty 149 spuściwszy następujący znak 8, będzie nowa cząstkowa dzielna 1498; z poprzedzających doświadczalnych mnożeń widzimy znów, że iloczyn powstały z pomnożenia dzielnika przez 5 jest mniejszy, a z pomnożenia go przez 6, jest większy od 1498, zatém 5 zatrzymamy na iloraz, które obok piérwszego umieszczamy. Otrzymany iloczyn cząstkowy 1370, powstały z pomnożenia 274 przez 5, podpisawszy pod dzielną cząstkową 1498 i odjąwszy go, otrzymamy resztę 128, do któréj spuściwszy znak 7 po 8 następujący, będziemy mieli nową cząstkową dzielną 1287. Tu widzimy, probując, że iloczyn 274×5 jest większy od 1287, iloczyn zaś 274×4 jest mniejszy, więc 4 kładziemy do ilorazu, i zaraz przez nie mnożymy dzielnik, a iloczyn cząstkowy 1096 odejmujemy od 1287. Na koniec, do otrzymanéj reszty 191 spuściwszy ostatni znak 8, będziemy mieli ostatnią dzielną cząstkową 1918, w któréj, probując jak poprzednio, dzielnik 274 mieści się razy 7, które jest ostatnim znakiem ilorazu; a że iloczyn 274×7 jest 1918, zatém ostatnią resztą jest zero.

39. Dla przyśpieszenia roboty, mianowicie też kiedy dzielnik jest bardzo wielką liczbą, potrzeba, przed rozpoczęciem dzielenia, wypisać na boku wszystkie iloczyny z dzielnika przez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; dopiero oddzielając z dzielnéj stosowną liczbę znaków na cząstkowe dzielne, szukamy pomiędzy temi iloczynami najbliższego, lecz mniejszego od liczby wyrażonéj przez znaki oddzielone, a czynnik jego będzie znakiem do ilorazu należącym. Dla wzoru, niechaj będzie do podzielenia 190 338 120 przez 25 704.

25704....1	190338120	25704
51408....2	179928	7405
77112....3	104101	
102816....4	102816	
128520....5	128520	
154224....6	128520	
179928....7	0.	
205632....8		
231336....9.		

Oddzieliwszy z dzielnéj sześć znaków z prawéj strony, widzimy że najbliższy iloczyn liczby 190 338 jest liczba 179 928 obok 7 położona, więc to 7 jest pierwszym znakiem ilorazu; gotowy iloczyn obok 7 stojący piszemy pod dzielną, odejmujemy go od niéj, spuszczamy następujący znak z dzielnéj i otrzymamy dzielną cząstkową 104101; ponieważ najbliższy téj liczby, lecz mniejszy, iloczyn 102 816 stoi obok 4, więc ten znak należy do ilorazu. Daléj postąpiwszy zwyczajną drogą, znajdziemy następującą dzielną cząstkową 12852, mniejszą od dzielnika, więc na iloraz przypada zero; poczém spuszczamy ostatni znak, i postąpiwszy wskazanym sposobem, daléj odbywamy dzielenie, które w tym razie kończy się.

40. Wszystkie rozwiązane w tym rozdziale przykłady są tak dobrane, że ostatnie reszty, po odbyciu zupełném ostatniego cząstkowego dzielenia, były zerami. Taki wypadek zawsze otrzymamy, ile razy dzielna jest iloczynem z dwóch całkowitych liczb. Lecz bardzo często natrafiamy na takie dzielenie, że po spuszczeniu ostatniego znaku danéj dzielnéj do przedostatniéj reszty, powstaje taka cząstkowa dzielna, iż po wykonaném dzieleniu, otrzymujemy na ostatnią resztę nie zero, lecz jakąkolwiek liczbę.

Kiedy w dzieleniu ostatnia reszta jest zerem, wtedy dzielna jest przez swój dzielnik *podzielna;* czyli dzielnik mieści się w dzielnéj *zupełnie.* W razie przeciwnym, to jest, kiedy ostatnia reszta jest liczbą, wtedy dzielna nie jest przez swój dzielnik podzielna.

Niektóre własności liczb i ich podzielność.

41. Liczba będąca iloczynem z danych czynników, jest przez każdy z nich podzielna. Podzieliwszy więc daną liczbę przez inną, następnie iloraz otrzymany podzieliwszy przez inną liczbę i t. d. postępując, otrzymamy szereg dzielników, które wraz z ostatnim ilorazem, będą czynnikami danéj liczby. Tak np. 36 podzieliwszy przez 2, otrzymamy iloraz 18; tę liczbę podzieliwszy przez 2, otrzymany iloraz jest 9; to 9 podzieliwszy przez 3, iloraz będzie 3; więc $2 \times 2 \times 3 \times 3$ jest równe 36. Stąd widzimy: że dzielenie służy także do rozłożenia liczb na czynniki.

Liczba niedająca się zupełnie podzielić przez żadną inną prócz siebie saméj i jedności, nazywa się *liczbą piérwszą bezwzględną*, np. 2, 3, 5, 7 i t. p. Dwie liczby niemające wspólnego czynnika, nazywają się: *liczbami piérwszemi względem siebie*, np. 12 i 25.

42. *Kiedy jeden z dwóch czynników pomnożymy przez pewną liczbę, wtedy wartość iloczynu powiększy się tyle razy ile liczba mnożąca ów czynnik zawiéra jedności.* Przeciwnie, *podzieliwszy jeden z dwóch czynników przez pewną liczbę, wartość iloczynu pomniejszy się tyle razy ile liczba dzieląca czynnik zawiera jedności. Pomnożywszy zaś jeden czynnik przez pewną liczbę, a drugi przez inną liczbę, iloczyn tyle razy powiększonym będzie, ile jedności zawiera iloczyn z liczb mnożących oba czynniki.* Zobaczymy to jaśniéj na przykładzie. Niech będą dwa czynniki 12 i 7, ich iloczyn 84. Pomnożywszy 7 przez 2, otrzymamy 14 w miejsce 7; zatém iloczyn $12 \times 14 = 168$, bowiem w piérwszym razie iloczyn 84 jest od 12 większy 7 razy, gdy tymczasem iloczyn 168 jest 14 razy większy od 12, zatém powiększyliśmy dany iloczyn 2 razy. Gdybyśmy znów mieli dwa czynniki 12 i 14, podzieliwszy 14 przez dwa, będziemy mieli iloczyn 12×7; lecz ponieważ iloczyn 12×14 jest od 12 większy 14 razy, a iloczyn 12×7 jest większy od 12 tylko 7 razy, zatém w drugim razie, otrzymujemy iloczyn dwa razy mniejszy od danego. Dajmy $5 \times 7 = 35$; pomnożywszy 5 przez 3, a 7 przez 2, będziemy mieli $15 \times 14 = 210$, 2×3 czyli 6 razy większe od 35. Bowiem 15×7 jest iloczyn większy od 5×7 razy 3; zaś 15×14 jest większe od 15×7 razy 2.

Ta prawda doprowadza nas do tych twierdzeń:

1. *Pomnożywszy dzielną przez pewną liczbę, zostawiając ten sam dzielnik, iloraz będzie także przez tę samę liczbę*

pomnożony. Jakoż, dzielna jest iloczynem z dzielnika i ilorazu, zatém skoro dzielna jest powiększona pewną liczbę razy, to i jeden z jéj czynników tyleż razy jest powiększony: a że dzielnik ten sam pozostaje, zatém iloraz się powiększy.

2. *Podzieliwszy dzielną przez pewną liczbę, zostawiając ten sam dzielnik, iloraz będzie także przez tęż liczbę podzielony.* To twierdzenie podobnie jak powyższe usprawiedliwia się.

3. *Dzielnik pomnożywszy przez pewną liczbę, zostawiając tę samą dzielną, iloraz stanie się tyle razy mniejszy ile liczba mnożąca dzielnik zawiera jedności.* Bowiem, skoro wartość iloczynu (dzielnéj) nie zmienia się, a jeden z czynników staje się większym (dzielnik), to drugi czynnik (iloraz) tyle razy stać się musi mniejszy, ile razy piérwszy stał się większym.

4. *Podzieliwszy dzielnik przez pewną liczbę zostawiając tę samę dzielną, iloraz stanie się tyle razy większy, ile liczba dzieląca dzielnik zawiera w sobie jedności.* Dowodzenie tego twierdzenia jest zupełnie podobne do poprzedzającego.

5. *Pomnożywszy lub podzieliwszy przez tę samę liczbę i dzielną i dzielnik, iloraz pozostanie ten sam.* Albowiem, mnożąc lub dzieląc jeden tylko czynnik (dzielnik) przez pewną liczbę, tyleż razy powiększa się lub pomniejsza iloczyn (dzielna): zatém, gdy iloczyn (dzielna) i jeden z czynników (dzielnik) są pomnożone lub podzielone przez tę samę liczbę, drugi czynnik (iloraz) pozostaje niezmieniony, czyli, zachowuje tę samę wartość.

43. Z tego co dopiero poprzedziło widzimy jasno, że gdy dzielna i dzielnik zawierają jeden i ten sam, to jest, wspólny czynnik, opuściwszy go w obu tych liczbach, czyli, jak się pospolicie mówi, *wykreśliwszy wspólny czynnik z dzielnéj i z dzielnika, iloraz ten sam pozostaje.*

Ta prawda podaje nam sposobność wykonywania cząstkowego dzielenia, to jest, sprowadzenia dzielenia większych liczb do dzielenia mniejszych, bez zmienienia wartości wypadku (ilorazu); co częstokroć jest bardzo dogodną rzeczą.

Ażeby z takich ułatwień korzystać, potrzeba umieć poznać przez jaką liczbę dana liczba jest podzielna.

44. Powiedzieliśmy wyżéj, że wszelka liczba przez 2 pomnożona, daje iloczyn, w którym jedności są liczbą parzystą. Zatém, *wszelka liczba zakończona na znak parzysty, daje się zupełnie podzielić przez* 2.

45. Dzieląc jedność z zerami na końcu, np. 100, 1000 &c przez 3 lub przez 9, na ostatnią resztę otrzymujemy 1, o czém łatwo przekonać się można; zatém, dzieląc przez 3 lub 9 wszelką liczbę z zerami na końcu, np. 20, 200 &c. ostatnia reszta jest tąż samą liczbą. I w saméj rzeczy, ponieważ np. $100 = 99 + 1$, czyli $3 \times 33 + 1$, albo $9 \times 11 + 1$, więc $400 = 100 + 100 + 100 + 100$, albo $400 = 99 + 99 + 99 + 99 + 1 + 1 + 1 + 1$, czyli $400 = 4 \times 99 + 4$, gdzie 99, więc i 4×99 jest przez 3 i 9 podzielne: zatém 400 dzieląc przez 3 lub 9, otrzymujemy ostatnią resztę 4.

Na téj własności opierając się okażemy, że *wszelka liczba, któréj ogół znaków daje się podzielić przez 3, jest podzielna przez 3.* Jako téż: *wszelka liczba, któréj ogół znaków jest podzielny przez 9, jest przez 9 podzielna.*

Weźmy liczbę 1251, któréj ogół znaków jest 9, i okażmy, że się daje dzielić przez 3 i przez 9.

Na sam przód: $1251 = 1000 + 200 + 50 + 1$ czyli $1251 = (999 + 1) + (2 \times 99 + 2) + (5 \times 9 + 5) + 1$; ponieważ każda z liczb 999, 2×99 i 5×9, daje się dzielić przez 3 i 9, zatém i ich ogół jest przez też liczby podzielny: jeżeli więc ogół liczb pozostałych, to jest, $1 + 2 + 5 + 1$ jest podzielny przez 3 lub przez 9, wtedy ogół liczb na które rozłożyliśmy daną liczbę, tém samém i taż liczba daje się zupełnie podzielić przez 3 lub przez 9. W przytoczonym przykładzie mamy $1 + 2 + 5 + 1 = 9$, które jest przez 3 i przez 9 podzielne, zatém dana liczba 1251 jest podzielna zarówno przez 3 jak i przez 9.

Uwaga. Dowodzenie podzielności liczb przez 3 i przez 9, jest zupełnie to samo, dlatego też dobraliśmy przykład, w którym obie te podzielności wyjaśnić się mogły. Wszakże może być liczba podzielna przez 3, nie będąc podzielną przez 9; lecz gdy liczba jest podzielna przez 9, tém samém jest przez 3 podzielna.

46. Ponieważ $100 = 4 \times 25$, zatém wszelka liczba zakończona na dwa zera daje się zupełnie podzielić przez 4 i przez 25.

Z tego jeszcze wypływa, *że wszelka liczba zakończona na dwa znaki składające liczbę podzielną przez 4, jest podzielna przez 4.* Na przykład 2 348, jest przez 4 podzielne, bowiem 2 300 i 48 dają się podzielić zupełnie przez 4.

47. *Każda liczba zakończona na zero lub 5, jest przez 5 podzielna.* Widzieliśmy bowiem, że 5 pomnożone przez parzystą liczbę, daje liczbę na zero zakończoną; pomnożona zaś przez nieparzystą liczbę, daje liczbę na 5 zakończoną.

48. Liczba zakończona zerem, jest podzielna przez 10; zakończona dwoma zerami jest podzielną przez 100 i t. d. Wiemy bowiem, że jakąkolwiekbądź liczbę pomnożywszy przez 10, iloczyn kończy się na zero; pomnożywszy przez 100, iloczyn kończy się na dwa zera i t. d.

49. *Wszelka liczba z tych samych znaków złożona, lecz kiedy ich jest liczba parzysta, daje się dzielić przez 11:* np. 33, bowiem $33 = 3.11$; 3333, bo $3333 = 3300 + 33$, albo $3333 = 33 \times 1000 + 33$; gdzie 33 jest przez 11 podzielne.

Każda liczba poczynająca się od 1 i kończąca na 1, pomiędzy któremi jest liczba parzysta zer, daje się dzielić przez 11. Jakoż, ponieważ, np. $1001 = 990 + 11$, albo $1001 = 99 \times 100 + 11$, gdzie 99 i 11 są przez 11 podzielne; więc liczba 1001 jest przez 11 podzielna.

W ogólności, *odjąwszy od ogółu znaków położonych na nieparzystych miejscach, ogół ze znaków na parzystych miejscach znajdujących się, lub odwrotnie, jeżeli otrzymana reszta jest zerem albo też przez 11 podzielna, wtedy liczba dana jest podzielna przez 11.* Niechaj będzie liczba 8129, tę liczbę tak możemy rozebrać; $8000 + 100 + 20 + 9$, albo $8 \times 1001 - 8 + 99 + 1 + 2 \times 11 - 2 + 9$; ponieważ $8 \times 1001 + 99 + 11$ daje się dzielić zupełnie przez 11, zatém jeżeli $-8 + 1 - 2 + 9$ czyli $10 - 10$ daje się dzielić przez 11, to i dana liczba jest przez 11 podzielna.

50. Prawa podzielności liczb przez inne liczby piérwsze, jak przez 7, 13 &. są tém trudniejsze im są większe, tak dalece, że zastosowanie ich nie przyniosłoby żadnego ułatwienia.

Kiedy liczba podzielna jest przez dwie liczby; wtedy podzielną jest przez iloczyn z tychże liczb. Tak np. 366 daje się dzielić przez 2 i 3, zatém 366 podzielna jest przez $2 \times 3 = 6$.

51. Chcąc daną liczbę rozdzielić na czynniki będące piérwszemi liczbami, tak postąpić trzeba. Podzieliwszy liczbę przez jeden czynnik piérwszy, uważamy przez który nowy czynnik daje się dzielić iloraz otrzymany: podzieliwszy go przez ten nowy czynnik, uważamy znów przez jaki inny czynnik iloraz otrzymany dzielić się daje; i t. d. postępujemy, dopóki nie otrzymamy na iloraz liczby piérwszéj. Wszystkie dzielniki wraz z ostatnim ilorazem, są czynnikami danéj liczby. Na przykład 1155, daje się dzielić przez 3 (Nr. 44); uskuteczniwszy działanie, otrzymamy iloraz 385: ten iloraz daje się dzielić przez 5 (Nr. 46), wykonawszy więc dzielenie znajdziemy iloraz 77: ten znów iloraz jest podzielny przez 11; po wykonaniu dzielenia przez 11, będziemy mieli iloraz 7. Zatém liczba $1155 = 3 \times 5 \times 11 \times 7$.

Weźmiemy jeszcze za przykład 3660. Widzimy naprzód, że ta liczba podzielna jest przez 2; po wykonaniu dzielenia otrzymany iloraz 1 830 daje się jeszcze dzielić przez 2; więc następny iloraz jest 915, który jest podzielny przez 5: te 915 podzieliwszy przez 5, będzie iloraz 183: ten znów iloraz jest przez 3 podzielny, i z odbytego dzielenia mamy iloraz 61, niedający się dzielić przez żadną liczbę. Zatém $3660 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 61$.

Największy wspólny dzielnik.

52. Kiedy dwie liczby mają ten sam czynnik, wtedy obie dają się przez tenże czynnik podzielić. Liczba dzieląca bez reszty dwie dane liczby nazywa się *Wspólnym dzielnikiem* (общій дѣлитель). Tak np. dwóch liczb 25 i 15 wspólnym dzielnikiem jest 5.

Iloczyn ze wszystkich wspólnych czynników dwóch liczb, jest największym ich wspólnym czynnikiem, zatém *największym wspólnym dzielnikiem* (найбольшій общій дѣлитель). Rozebrawszy więc dwie liczby na czynniki, i wziąwszy iloczyn ze wszystkich wspólnych czynników, będziemy mieli największy wspólny dzielnik. Lecz ponieważ ta droga jest za długa, a nadto, trudno jest poznać podzielności liczb przez 7, 13, 17, i t. p., zatém podamy ogólny sposób wynajdowania największego wspólnego dzielnika.

Niech będą dwie liczby 3198 i 2925, których mamy wynaleźć największy wspólny dzielnik. Na sam przód uważamy, że największy wspólny dzielnik nie może być większym od liczby 2925 (mniejszéj z dwóch danych liczb), bowiem sama w sobie mieści się raz; potrzeba przeto tylko sprobować czy ta liczba mieści się w 3198. Podzieliwszy więc 3198 przez 2925; otrzymamy, iloraz 1 i resztę 273. Tu uważamy, że gdyby ta reszta mieściła się zupełnie w poprzedzającym dzielniku, to jest w 2925, toby się mieściła i w liczbie 3198; bowiem, ponieważ $3198 = 2925 + 273$, zatém gdyby 273 mieściło się w 2925, a mieści się w sobie samém, więc 273 dzieliłoby zupełnie ogół dwóch liczb, którym jest 3198. Podzieliwszy więc 2925 przez 273, otrzymamy iloraz 10 i resztę 195. Rozumując jak poprzednio, okaże się, że gdy 195 dzieli zupełnie 273, dzieli także 2925. Podzieliwszy przeto 273 przez 195, otrzymamy iloraz 1 i resztę 78. Tu znów podzieliwszy 195 przez 78, otrzymamy iloraz 2 i resztę 39. Ta reszta w poprzedzającym dzielniku 78 mieści się zupełnie 2 razy. Okażemy teraz, że ostatni dzielnik, to jest 39, jest największym wspólnym dzielnikiem liczb danych. Bowiem $78 = 2 \times 39$; $195 = 78 \times 2 + 39$; więc 39 dzieli 78 i 195. Daléj $273 = 195 + 78$; a że 195 i 78 są podzielne przez 39, więc i 273 jest przez tęż liczbę podzielne. Wracając się daléj, mamy $2925 = 273 \times 10 + 195$, gdzie 273, a więc i 273×10, jako téż 195 dają się dzielić przez 39, następnie ogół tych liczb 2925 jest przez 39 podzielne. Ostatecznie, mamy $3198 = 2925 + 273$, gdzie ponieważ obie liczby, 2925, i 273 są przez 39 podzielne, więc i ogół ich, to jest 3198 jest przez 39 podzielny. Zatém, ostatni dzielnik 39 w odbytych dzieleniach, jest największym wspólnym dzielnikiem danych dwóch liczb, bowiem ciągleśmy najwyższego wspólnego dzielnika szukali.

To cośmy w tym przykładzie czynili, nie jest przywiązaném do żadnych liczb szczególnych, jest zatém ogólném. Takie więc wyprowadzamy prawidło, dla wyszukania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb danych.

Liczbę większą dzielimy przez liczbę mniejszą, dopóki można, aż otrzymamy resztę mniejszą od dzielnika; potém dzielnik poprzedzającego dzielenia, to jest, liczbę mniejszą z danych, bierzemy za dzielną, a resztę za dzielnik; odbywamy dzielenie, dopóki nie otrzymamy reszty mniejszéj od poprzedniego dzielnika. Ten dzielnik bierzemy znów za dzielną, a resztę ostatnią za dzielnik i t. d. postępujemy, aż otrzymana reszta będzie zupełnie mieścić się w ostatnim dzielniku. Ta dopiéro reszta jest największym wspólnym dzielnikiem.

WZÓR DZIAŁANIA.

	3198	1 piérwszy iloraz				
	2925	2925	10 drugi iloraz			
Piérwsza reszta	273	2730	273	1 trzeci iloraz		
Druga reszta		195	195	195	2 czwarty iloraz	
Trzecia reszta			78	156	78	2 piąty iloraz
Czwarta reszta				39	78	39

Ostatnia reszta 0.

Odbywając wskazane dzielenia, kiedy przyjdziemy do reszty 1, to znakiem jest, że dane dwie liczby nie mają żadnego wspólnego dzielnika, czyli, że są piérwsze względem siebie.

Cztérech poprzedzających działań próby przez liczbę 9.

53. Widzieliśmy (num. 45), że wszelki znak z zerami na końcu, jest liczbą zawierającą w sobie raz lub kilka razy dziewiątkę i tenże sam znak, jako liczbę jedności. Np. 400 zawiera 44 dziewiątek i jeszcze 4 jedności. Przeto, jeżeli w danéj liczbie ogół znaków składających ją uczyni dziewięć lub kilka razy 9, wziąwszy z niego dziewiątki, wyłączymy z téj liczby wszystkie dziewiątki; czyli tę liczbę podzielimy przez dziewięć. Np. 27384 rozłożywszy na $20000 + 7000 + 300 + 80 + 4$; mamy:

$20000 = 2222$ dziewiątek $+ 2$
$7000 = 777$ dziewiątek $+ 7$
$300 = 33$ dziewiątek $+ 3$
$80 = 8$ dziewiątek $+ 8$
$4 =$ nic dziewiąt. $+ 4.$

Tu ogół znaków $2 + 7 + 3 + 8 + 4 = 24$ zawiera 2 dziewiątki i jeszcze 6 jedności; zatém dana liczba 27384 zawiera w sobie: $2222 + 777 + 33 + 8 + 2$ dziewiątek i nadto liczbę 6.

Z tego wypływa oczywisty wniosek, że *dodawszy do siebie znaki składające liczbę, i od otrzymanego ogółu odjąwszy wszystkie dziewiątki w nim zawarte, reszta otrzymana jest ta sama, jakąbyśmy otrzymali dzieląc daną liczbę przez 9.*

Na téjto zasadzie oprzemy próby cztérech działań, przez liczbę 9.

54. *Próba dodawania* opiera się na téj zasadzie, że *ilekolwiek liczb dodawszy do siebie, ogół otrzymany zawiera w sobie ogół dziewiątek zawartych we wszystkich danych liczbach, i ogół pozostałych jedności.* Przeto z każdéj liczby wytrąciwszy dziewiątki, a potém pozostałe reszty dodawszy do siebie i z tego ogółu wyrzuciwszy dziewiątki, ostateczna reszta będzie ta sama, jaką otrzymamy po wytrąceniu dziewiątek z ogółu liczb danych.

Objaśnimy to przykładem.

	27384	6
	8577	0
	11432	2
	4023	0
	58	4
Ogół	51474	3 ostateczna reszta.

Dodawszy do siebie liczby zwykłym sposobem, pociągniemy krésę po prawéj ręce tych liczb, z góry na dół; potém obok téj krésy piszemy reszty wynikłe po odtrąceniu dziewiątek z każdéj liczby; jak tu mamy reszty, z liczby piérwszéj 6, z drugiéj *zero*, z trzeciéj 2, z czwartéj *zero*, z ostatniéj 4. Z ogółu tych reszt wytrąciwszy 9, pozostanie 3; nakoniec, z ogółu znaków liczby 51474, to jest ogółu danych liczb, wytrąciwszy dziewiątki, otrzymujemy także 3, co jest znakiem dobrze wykonanego działania.

55. *Próba odejmowania* opiera się na podobnéj zasadzie, do powyższéj; to jest, *że od liczby większéj odejmując liczbę mniejszą, odejmujemy wszystkie dziewiątki drugiéj liczby od dziewiątek piérwszéj liczby; i pozostałe jedności drugiéj liczby od takichże jedności piérwszéj liczby.* Przeto ze zmniejszalnéj i odjemnéj wytrąciwszy dziewiątki, a potém wykonawszy odejmowanie na pozostałych jednościach, powinniśmy otrzymać tę samę resztę, jaka pozostaje po wytrąceniu dziewiątek z reszty dwóch liczb danych.

Przykład objaśni lepiéj to rozumowanie.

Zmniejszalna	2843	8
Odjemna . . .	1236	3
Reszta	1607	5

Ułożywszy działanie podobnie jak w dodawaniu, i wypisawszy reszty pozostałe po wytrąceniu dziewiątek, otrzymamy, obok zmniejszalnéj 8, obok odjemnéj 3, między któremi różnica jest 5; a że po wytrąceniu dziewiątek z reszty 1607 pozostaje 5, zatém działanie dobrze wykonaném było.

Kiedy tak wypadnie, że reszta po wyrugowaniu dziewiątek, pozostaje mniejsza obok zmniejszalnéj od reszty obok odjemnéj, wtedy potrzeba jednę dziewiątkę powrócić w reszcie obok zmniejszalnéj wypisanéj; daléj postępuje się jak zwykle. Np.

	10236	3	12
	2843	8	8
Reszta	7393		4

Ten przykład jak poprzedzający jest wykonany; tylko reszta 3, obok zmniejszalnéj stojąca, powiększoną została o 9. Kiedy ogół ze znaków odjemnéj jest większy od ogółu ze znaków zmniejszalnéj, wtedy ten ostatni potrzeba powiększyć o 9, tak właśnie jak we zwyczajném odejmowaniu bierzemy jeden dziesiątek i przyłączamy go do jedności, jedno sto do dziesiątków i t. d., skoro tego potrzeba.

56. *Próba mnożenia* polega na téj prawdzie, że *iloczyn z dziewiątek jest podzielny przez 9.* Jeżeli przeto z mnożnéj i mnożnika wytrącimy dziewiątki, i pozostałe reszty przez siebie pomnożywszy z iloczyuu tego odrzucimy dziewiątki, wtedy pozostała reszta jest ta sama, jaką otrzymamy po wyrzuceniu z iloczynu wszystkich dziewiątek. Np.

Mnożna	265	4
Mnożnik. . . .	78	6
Iloczyn cząstkowy	2120	5
Iloczyn cząstkowy	1855	1
Iloczyn	20670	6

Po wyrzuceniu dziewiątek pozostało: w mnożnéj 4 a w mnożniku 6, których iloczyn jest 24; po wyrugowaniu zaś dwóch dziewiątek z tych 24, pozostanie 6. Tyle téż pozostaje po wyrzuceniu dziewiątek z iloczynu. Więc dobrze jest wykonane mnożenie.

Postrzeżenie. Ponieważ ogół iloczynów cząstkowych jest iloczynem dwóch danych liczb, przeto postąpiwszy jak z próbą dodawania, sprawdzimy jeszcze raz iloczyn znaleziony.

57. *Próba dzielenia* odbywa się tak prawie jak próba mnożenia, zważając: że dzielna odpowiada iloczynowi, iloraz mnożnikowi, a dzielnik mnożnéj. Dajmy, dla przykładu, że liczbę 20670 podzielić mamy przez 265, skąd otrzymamy iloraz 78. Z dzielnika i ilorazu wytrąciwszy dziewiątki i reszty pomnożywszy przez siebie, znajdziemy iloczyn 24; zatém ostatnia reszta po wytrąceniu dziewiątek jest 6; a że po wytrąceniu dziewiątek z dzielnéj 20670 pozostaje także 6, więc dzielenie było dobrze wykonane.

Gdyby po skończoném dzieleniu pozostała ostatnia reszta nie była zerem, wtedy dla sprawdzenia odbytego działania postąpić potrzeba tak, jakeśmy dopiero powiedzieli, lecz do iloczynu z reszt pozostałych z dzielnika i ilorazu potrzeba dodać resztę otrzymaną w końcu dzielenia. Dla przykładu, podzielmy 20675 przez 265; otrzymamy iloraz 78 i resztę ostatnią 5. Po wytrąceniu dziewiątek z dzielnika i ilorazu a następnie po uskutecznioném mnożeniu reszt, będziemy mieli iloczyn 24, do którego dodawszy resztę końcową 5 znajdziemy 29; z których wytrąciwszy dziewiątki, pozostanie 2. A że po wytrąceniu dziewiątek z dzielnéj 20675 pozostaje także 2, więc dzielenie było dobrze wykonane.

Przestroga. Jak w każdém działaniu ludzkiém, tak téż i w samych próbach działań arytmetycznych można błędy popełnić; dla tego to, nie należy poprzestawać na jednéj i jednym tylko sposobem wykonanéj próbie, ale owszem, w różny sposób potrzeba sprawdzać dokładność otrzymanych wypadków.

Przykłady dzielenia, jako téż wszystkich łącznie działań.

I. Pomiędzy 5 synów podzielić równo majątek wynoszący 275315 Rub. sr., ile się każdemu z nich dostanie? (55063 Rsr.).

II. Kompania robotników złożona z 17 osób, za gorliwą pracę otrzymała w podarunku 255 kopiejek; ile się każdemu robotnikowi dostanie? (15 kop.).

III. Obliczono, że średnia odległość księżyca od ziemi wynosi 201 602 312 sążni; biorąc 4200 sążni na milę, pytanie jest, ile mil od ziemi do księżyca? (48000 mil i 2312 sążni).

IV. Pomiędzy trzy osoby podzielono 744 Rub. sr. w ten sposób: że druga dostaje 12 rubli więcéj jak piérwsza, trzecia zaś 12 rubli więcéj jak druga; pytanie, ile każda z osób otrzymała rubli (piérwsza 236 Rsr.).

V. Pewna osoba zakupiła 378 korcy pszenicy; po oczyszczeniu jéj otrzymała przedniego ziarna 291 korcy, i resztę pośledniéj pszenicy. Piérwszą sprzedała po 24 złote korzec, drugą po 13 zło. korzec; i na téj spekulacyi zarobiła 1000 złotych, po potrąceniu 311 złotych na koszta oczyszczenia i inne wydatki zapłaconych. Pytanie po wie-ie kupowała korzec pszenicy? (18 złotych).

VI. Towarzystwo złożone z 925 osób zarobiło na pewnéj spekulacyi 35262 Rub. sr., z których 600 osób dostało po pewnéj liczbie rubli; 269 osób po dwa razy tyle co poprzednie osoby; reszta zaś osób miały po trzy razy tyle ile piérwsze; pytanie po ile jedna osoba w każdym z tych oddziałów dostała? (z 1go oddziału po 27 Rsr.)

VII. Pewien podjemczyk (antrepryner) podjął się wykonać pewną robotę inżénierską, wynoszącą łokci sześciennych 174382 po 23 złote łokieć sześć. Na całéj robocie zyskał złot. 348764. Ile na każdym łokciu sześciennym zyskał? (2 złp.).

VIII. Za każdą włókę ornego pola zgodzono się zapłacić po 2325 złp., za włókę lasu po 7518 złp., za włókę łąki po 1112 złp. Ileż zapłacono za dobra obejmujące gruntu ornego 8250 morgów, lasu 2940 morgów, łąk 810 morgów? Wiadomo zaś, że 30 morgów idzie na jednę włókę. (1406163 złp.).

IX. Na wyklejenie ścian pokoju mającego długości 7 łokci i tyleż szérokości, wysokości zaś łokci 6, ile łokci potrzeba papieru szérokiego na 32 cali? i ile rubli ten papiér kosztować będzie, kiedy łokieć płacono po 6 kopiejek? (7 Rsr. i 56 kopiejek).

O UŁAMKACH.

58. W numerze 9 powiedzieliśmy, że *liczba mniejsza od jedności nazywa się* UŁAMKIEM (Дробь). Ułamek powstaje z podzielenia liczby na większą liczbę części równych niżeli ona zawiera jedności. Tak, gdybyśmy mieli 2 jabłka podzielić równo na 3 osoby, oczywiście że każda z tych osób dostałaby mniéj niż jedno jabłko, zatém część czyli ułamek jabłka.

Ułamki wyrażają się temi samemi znakami co liczby całe. Lecz ponieważ téj saméj liczby mogą być różnéj wielkości części, przeto ułamek oznaczający część pewnéj wielkości, powinien wskazać jak wielka jest część i jakiéj liczby. Ułamek więc wyraża się dwiema liczbami: jedna pokazuje wielkość części, druga zaś jak wielkiéj liczby. Tak gdy mamy 2 podzielone na 3 części, aby wyrazić trzecią część dwóch, piszemy $\frac{2}{3}$. Liczba pod kréską napisana nazywa się MIANOWNIKIEM (Знаменатель), liczba zaś nad kréską położona nazywa się LICZNIKIEM (Числитель). Licznik i mianownik razem uważane, nazywają się wyrazami ułamku. Powyższy ułamek wymawia się: *Dwie trzecie*, co jest skróceniem wyrażenia, *dwie trzecich części jedności.*

W ogólności, aby wymówić napisany ułamek, wymawia się naprzód liczba licznika, stosując ją do rzeczownika domyślnego *części*; potém wymawia się mianownik, jakoby był przymiotnikiem tychże części.

Tak np.

$\frac{1}{2}$, wymawia się *pół*, albo *jedna druga.*

$\frac{1}{3}$, — — *jedna trzecia.*

$\frac{2}{5}$, — — *dwie piąte.*

$\frac{13}{17}$, — — *trzynaście siedmnastych* i t. d.

59. Ułamki, jakeśmy to widzieli, powstają z dzielenia; porównawszy więc ułamek z dzieleniem, widzimy, że *licznik jest dzielną*, *mianownik dzielnikiem*, *sam zaś ułamek jest ilorazem.* Zatém mianownik ułamku wskazuje na ile części jedność jest podzielona, licznik zaś ile ten ułamek takich części zawiera: albo też, mianownik wskazuje na ile części liczba cała wskazana licznikiem jest podzielona. Tak ułamek $\frac{2}{3}$ wyraża, że *trzecich części jedności* jest *dwie*; albo że jest *jedna trzecia część dwóch.* To dwojakie pojmowanie ułamku nie zmienia wartości jego; jakoż, gdyby ułamek $\frac{2}{3}$ oznaczał złote, czyto więc uważamy trzecich części złotego dwie, czy trzecią część dwóch złotych, zawsze wartość jego jest 20 groszy.

60. Częstokroć, a nawet bardzo dogodnie, wskazujemy dzielenie dwóch liczb nie dwiema kropkami lecz w postaci ułamku. Tak, dla pokazania że np. 24 ma być podzielone przez 3, piszemy $\frac{24}{3}$ zamiast 24: 3. To $\frac{24}{3}$ co do postaci jest ułamkiem, chociaż wartość jego jest liczbą całkowitą; taki ułamek nazywa się *niewłaściwym*, bowiem właściwie, ułamek jest częścią, lub kilkoma częściami jedności, a zawsze mniejszą ma wartość od jedności. W ogólności nazywamy *ułamkiem właściwym* (правильная дробь) taki ułamek, którego licznik jest mniejszy od mianownika; *ułamkiem niewłaściwym* (неправильная дробь) zaś taki ułamek, którego licznik jest większy od mianownika; wtedy bowiem wartość jego jest większa od jedności.

Wartość niewłaściwego ułamku może być liczba całkowita, lub też liczba całkowita i ułamek. Wynalezienie liczby całkowitéj zawartéj w ułamku niewłaściwym, nazywają *wyciągnięciem całości z ułamku.*

61. Ponieważ licznik jest dzielną, mianownik dzielnikiem, zatém podzieliwszy licznik niewłaściwego ułamku, przez jego mianownik, na iloraz otrzymamy jego wartość w liczbie całkowitéj, jeżeli mianownik mieści się zupełnie w liczniku; jeżeli zaś w dzieleniu pozostaje końcowa reszta, wtedy ta jest licznikiem, a dzielnik mianownikiem ułamku należącego do otrzymanéj liczby całkowitéj. Dajmy np. $\frac{24}{3}$; podzieliwszy 24 przez 3, otrzymamy 8, wartość danego ułamku. Wziąwszy np. $\frac{26}{3}$; podzieliwszy 26 przez 3, otrzymamy na iloraz 8 i resztę 2, którą potrzeba podzielić także przez 3, skąd mamy $\frac{2}{3}$; zatém $\frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Liczba całkowita z ułamkiem do niéj należącym, zatém i ułamek niewłaściwy, powinny nazywać się *liczbami ułamkowemi*; bo, albo mają tylko postać ułamków nie będąc ułamkami, albo, jak $8\frac{2}{3}$, nie są ani liczbami całkowitemi, ani téż ułamkami.

62. *Aby liczbę całkowitą wyrazić w postaci ułamku z danym mianownikiem, potrzeba tę liczbę przez dany mianownik pomnożyć, a pod otrzymanym iloczynem podpisać tenże dany mianownik.* Gdyby np. potrzeba było liczbę 7 wyrazić w postaci ułamku, mającego za mianownik 5, będzie $\frac{7 \times 5}{5}$, czyli $\frac{35}{5}$. Albowiem ten ułamek oznacza piąte części całości, a takich części w 7 jest 5 razy więcéj, to jest 35.

Dla wyrażenia liczby całkowitéj z ułamkiem w postaci jednego ułamku, potrzeba przez mianownik ułamku pomnożyć liczbę całkowitą, do otrzymanego iloczynu dodać licznik ułamku, i pod tym ogółem podpisać mianownik tegoż ułamku. Mając np. $3\frac{4}{7}$ do wyrażenia jednym ułamkiem, będzie $\frac{3 \times 7 + 4}{7}$, czyli $\frac{25}{7}$; jakoż, 3 wyrażone w postaci ułamku z mianownikiem 7, jest $\frac{3 \times 7}{7}$, a że do téj liczby należy $\frac{4}{7}$, zatém 21 i 4 części siódmych, jest $\frac{25}{7}$. Takie działanie nazywają zwykle *złączeniem liczby całkowitéj z ułamkiem.*

63. Z własności ułamku, i z tego cośmy w Nrze. 42 powiedzieli, wypływa.

1° W szeregu ułamków mających ten sam mianownik, największą wartość ma ten, który ma największy licznik, np. z ułamków $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$, największą wartość ma $\frac{8}{9}$, bowiem najwięcéj takich samych części jak drugie, to jest, dziewiątych części zawiera. Z tych ułamków $\frac{3}{9}$ ma najmniejszą wartość.

2° W szeregu ułamków mających liczniki równe a różne mianowniki, największą wartość ma mający najmniejszy mianownik. Np. z ułamków $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{4}$, ma największą wartość $\frac{3}{4}$, bowiem wyraża 3 części czwartych, gdy tymczasem inne wyrażają po 3 części ale mniejszych od ćwiartki.

3° W danym ułamku pomnożywszy przez pewną całkowitą liczbę licznik, zostawiając mianownik ten sam, wartość tego ułamku powiększy się tyle razy, ile liczba mnożąca zawiera jedności. Np. wartość ułamku $\frac{2 \times 2}{5}$, czyli $\frac{4}{5}$, jest dwa razy większa od $\frac{2}{5}$.

4° W danym ułamku pomnożywszy przez pewną całkowitą liczbę mianownik, zostawiając ten sam licznik, wartość tego ułamku stanie się mniejsza tyle razy, ile jedności liczba mnożąca w sobie zawiera. Np. ułamek $\frac{3}{5 \times 2}$, czyli $\frac{3}{10}$ ma wartość 2 razy mniejszą od ułamku $\frac{3}{5}$; ten bowiem ostatni wyraża 3 części piątych, pierwszy zaś 3 części dziesiątych.

5° W danym ułamku podzieliwszy przez pewną całkowitą liczbę licznik, zostawiając ten sam mianownik, wartość tego ułamku pomniejszy się tyle razy, ile jedności zawiera dzieląca liczba. Np. w ułamku $\frac{2}{5}$, podzieliwszy licznik przez 2, otrzymamy ułamek $\frac{1}{5}$ dwa razy mniejszy od $\frac{2}{5}$; bowiem oba ułamki wyrażają piąte części, lecz w pierwszym jest ich dwa razy mniéj niż w drugim.

6° W danym ułamku podzieliwszy przez pewną całkowitą liczbę mianownik, zostawiając ten sam licznik, wartość tego ułamku powiększy się tyle razy, ile jedności zawiera liczba dzieląca. Np. w ułamku $\frac{3}{10}$ podzieliwszy mianownik przez 2, otrzymamy inny ułamek $\frac{3}{5}$, dwa razy większy od danego, bowiem oba wyrażają po 3 części, ale pierwszy dziesiąte, drugi zaś piąte.

7° W ułamku danym pomnożywszy, lub podzieliwszy przez tę samę liczbę licznik i mianownik, wartość tego ułamku nie odmieni się. Naprzykład $\frac{4}{8} = \frac{4 \times 3}{8 \times 3} = \frac{4:2}{8:2}$; czyli, $\frac{4}{8} = \frac{12}{24} = \frac{2}{4}$; bowiem, pierwszy, to jest dany ułamek wyraża ósmych części cztéry; drugi wyraża wprawdzie 3 razy drobniejsze części, lecz ich jest 3 razy więcéj; ostatni zaś wyraża dwa razy większe części niżeli pierwszy, lecz też dwa razy mniéj takich części.

Z tego co poprzedziło widzimy: że, aby powiększyć wartość ułamku pewną liczbę razy, można zarówno pomnożyć tylko licznik przez daną liczbę, lub podzielić tylko mianownik przez tęż samę liczbę. Np. $\frac{3 \times 2}{4} = \frac{3}{4:2}$, czyli $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Lecz ponieważ mianownik nie zawsze podzielny jest przez daną liczbę, dlatego chcąc powiększyć pewną liczbę razy wartość ułamku, zwykle mnoży się tylko jego licznik.

Podobnież, aby wartość ułamku pomniejszyć pewną liczbę razy, możemy zarówno podzielić tylko jego licznik lub pomnożyć tylko mianownik jego. Np. $\frac{4:2}{6} = \frac{4}{6 \times 2}$, czyli $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$. Tu także, dla powyższéj przyczyny, najczęściéj przez mnożenie mianownika pomniejszamy wartość ułamku.

64. Kiedy dwa lub więcéj ułamków mają mianowniki równe, wtedy, jako wyrażające liczby równie wielkich części, łatwiéj z sobą porównane być mogą; możemy bowiem ich liczniki uważać jakoby były całkowitemi liczbami. Bardzo często jest konieczną rzeczą, żeby w miejscu danych ułamków, podstawić inne mające jednaki mianownik lecz odpowiednio równoważne. Droga prowadząca do tego nazywa się: *sprowadzeniem ułamków do jednego*, *lub wspólnego mianownika*, (общій знаменатель) które się uskutecznia na téj zasadzie: że przez tę samę liczbę mnożąc oba wyrazy, to jest, licznik i mianownik ułamku, nie zmienia się wartość jego.

Niech będą dwa ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$: aby je do jednego sprowadzić mianownika, dosyć jest w $\frac{1}{2}$ pomnożyć oba wyrazy przez 2, skąd powstanie równoważny mu ułamek $\frac{2}{4}$.

Weźmy ułamki $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$: postrzegamy zaraz, że pomnożywszy oba wyrazy pierwszego przez 5, a drugiego przez 3, otrzymamy w miejsce danych, równoważne ułamki $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{15}$: tak bowiem działając, mianowniki obu ułamków jako iloczyny z tych samych czynników, to jest, 3 i 5, muszą być równe sobie. W ogólności, *aby dwa ułamki do jednego mianownika sprowadzić*, *potrzeba licznik pierwszego pomnożyć przez mianownik drugiego ułamku, a iloczyn otrzymany będzie licznikiem pierwszego: podobnież, licznik drugiego ułamku pomnożyć przez mianownik pierwszego, a iloczyn ten będzie licznikiem drugiego ułamku: iloczyn zaś z obu mianowników będzie wspólnym ich mianownikiem.*

Niech będą ułamki $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{11}$, do sprowadzenia do jednego mianownika. Pomnożywszy przez siebie wszystkie mianowniki, w otrzymanym iloczynie

$$2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$$

każdy z mianowników mieści się zupełnie: dla téj więc przyczyny ten iloczyn będzie wspólnym mianownikiem danych lecz przekształconych ułamków.

Dla otrzymania licznika odpowiadającego licznikowi pierwszego ułamka $\frac{1}{2}$, widzimy, że ponieważ wspólny mianownik $2 \times 3 \times 7 \times 11$ większy jest od mianownika tego ułamka razy $3 \times 7 \times 11$, przeto licznik jego 1 potrzeba tyleż razy powiększyć: będzie zatém $1 \times 3 \times 7 \times 11 = 231$.

Uważam daléj, że mianownik wspólny większy jest od mianownika ułamka $\frac{2}{3}$ razy $2 \times 7 \times 11$, więc i licznik jego potrzeba tyleż razy powiększyć; będzie więc $2 \times 2 \times 7 \times 11 = 308$. Dla téj saméj przyczyny mamy liczniki w miejsce 5 i 4, dwóch następnych ułamków: $5 \times 2 \times 3 \times 11 = 330$, $4 \times 2 \times 3 \times 7 = 168$. Ostatecznie więc mamy:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3 \times 7 \times 11}{2 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{231}{462}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 7 \times 11}{3 \times 2 \times 7 \times 11} = \frac{308}{462}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 11}{7 \times 2 \times 3 \times 11} = \frac{330}{462}$$

$$\frac{4}{11} = \frac{4 \times 2 \times 3 \times 7}{11 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{168}{462}$$

Z tego wywodu wyprowadzamy następujące prawidło na sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika. *Wspólny mianownik ułamków danych jest iloczynem ze wszystkich ich mianowników. Licznik zaś każdego z nich jest równy iloczynowi z licznika danego ułamku i wszystkich mianowników, prócz tego ułamku którego obliczamy licznik.*

65. Dajmy że ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ i $\frac{4}{15}$, mamy sprowadzić do wspólnego mianownika. Uważamy naprzód, że $8 = 4 \times 2$, $12 = 4 \times 3$, $15 = 3 \times 5$; zatém podług powyższego Nru mamy,

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}$$

$$\frac{4}{15} = \frac{4 \times 3 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3}{3 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}$$

Zuwagą przypatrzywszy się tym nowym wyrażeniom ułamków, zobaczymy, że w każdym z nich licznik i mianownik zawiera czynnik $4 \times 3 \times 3$; zatém można te ułamki jeszcze tak napisać:

$$\tfrac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 2 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 5} \times \frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 3 \times 3}$$

$$\tfrac{5}{8} = \frac{5 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 5} \times \frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 3 \times 3}$$

$$\tfrac{7}{12} = \frac{7 \times 2 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 5} \times \frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 3 \times 3}$$

$$\tfrac{4}{15} = \frac{4 \times 2 \times 4}{3 \times 4 \times 2 \times 5} \times \frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 3 \times 3}$$

a że $\frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 3 \times 3}$ jest jednością, bowiem licznik jest równy mianownikowi, która nie mnoży, przeto można ten ułamek opuścić, nie zmieniając wartości ułamków; więc ostatecznie będzie:

$$\tfrac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 2 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 5} = \frac{80}{120}$$

$$\tfrac{5}{8} = \frac{5 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 5} = \frac{75}{120}$$

$$\tfrac{7}{12} = \frac{7 \times 2 \times 5}{3 \times 4 \times 2 \times 5} = \frac{70}{120}$$

$$\tfrac{4}{15} = \frac{4 \times 2 \times 4}{3 \times 4 \times 2 \times 5} = \frac{32}{120}$$

Korzyść z takowego sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika jest ta, że otrzymujemy ułamki ze wspólnym mianownikiem, wyrażone w mniejszych liczbach, niżeli gdybyśmy postępowali ogólnym sposobem. Prawidło zaś, na ten przypadek, jest takie. *Mianowniki danych ułamków rozłożywszy na czynniki, wykreślamy z nich takie, które się w większym mianowniku znajdują, pozostałe zaś pomnożywszy przez siebie, otrzymamy wspólny mianownik. Następnie, każdy z liczników powiększamy tyle razy, ile razy otrzymany wspólny mianownik jest większy od każdego odpowiednio mianownika w danych ułamkach.*

Dla wskazania jak postępować potrzeba, weźmiemy powyższe ułamki: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{15}$, pod któremi wypisane są czynniki odpowiednich mianowników. Mianownik 3 piérwszego ułamku mieści się w mianowniku trzeciego ułamku, czynnik 4 mianownika drugiego ułamku mieści się w mianowniku trzeciego ułamku; na koniec, czynnik 3 trzeciego ułamku mieści się w mianowniku czwartego; zatém wykreśliwszy te czynniki, pozostałe 2, 4, 3, 5 pomnożywszy przez siebie, będziemy mieli wspólny mianownik, 120. Teraz dopiero porównywając z tym mianownikiem, mianowniki danych ułamków, widzimy, że 120 większe jest od 3 razy 40, od 8 razy 15, od 12 razy 10, a od 15 razy 8; przeto odpowiednie liczniki są: $2 \times 40 = 80$, $5 \times 15 = 75$, $7 \times 10 = 70$, $4 \times 8 = 32$.

Więc w miejscu danych ułamków mamy odpowiednio równe, $\frac{80}{120}$, $\frac{75}{120}$, $\frac{70}{120}$, $\frac{32}{120}$.

Sposób praktyczny wynajdowania wspólnego lecz najmniejszego mianownika jest następujący. Wypisawszy dane mianowniki w jednym wierszu, i po lewéj ręce tego wiersza spuściwszy linią, wzdłuż niéj wypisujemy pod sobą liczby piérwsze mieszczące się zupełnie w mianownikach; pod odpowiedniemi mianownikami piszemy ilorazy z podzielenia ich wypadłe i niepodzielne mianowniki; dzielenie dotąd odbywamy, dokąd nie otrzymamy wiersza z jedności złożonego; na koniec iloczyn ze wszystkich dzielników jest wspólnym najmniejszym mianownikiem. Wziąwszy powyższe ułamki, mamy taki wzór:

2	3	8	12	15
2	3	4	6	15
2	3	2	3	15
3	3	1	3	15
5	1	1	1	5
	1	1	1	1

więc $2\times2\times2\times3\times5$ jest wspólnym mianownikiem danych ułamków.

Jeżeli jeden z mianowników mieści w sobie, bez reszty, każdy z pozostałych, wtedy ten jest wspólnym mianownikiem. Np. ułamków $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{13}{72}$, wspólnym mianownikiem jest 72; bowiem każdy z mianowników 3, 12 i 36 mieści się w mianowniku 72. W miejsce powyższych ułamków, mamy:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times24}{3\times24} = \frac{48}{72}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5\times6}{12\times6} = \frac{30}{72}$$

$$\frac{11}{36} = \frac{11\times2}{36\times2} = \frac{22}{72}$$

$$\text{i} \;\ldots\ldots\ldots\; \frac{13}{72}$$

Wykonywając podług powyższego przepisu mamy:

2	3,	12,	36,	72
2	3,	6,	18,	36
2	3,	3,	9,	18
3	3,	3,	9,	9
3	1	1	3	3
	1	1	1	1

więc wspólny mianownik jest $2\times2\times2\times3\times3 = 72$.

66. Widzieliśmy, że przez tę samę liczbę podzieliwszy licznik i mianownik ułamku, wartość jego nie odmieni się. Skracanie ułamków na téj polega zasadzie. Podane w numerach od 44 do 50, sposoby poznania przez jaką liczbę dana liczba jest podzielna, jako też nauka o największym wspólnym dzielniku, ułatwiają skrócenie ułamków. Tak, np. w ułamku $\frac{108}{144}$, widzimy, że licznik i mianownik dają się dzielić przez 4 i 9, zatém podzieliwszy oba wyrazy przez 4×9; czyli 36, będziemy mieli skrócony ułamek $\frac{3}{4}$.

Ułamki, których licznik i mianownik są względem siebie piérwszemi, skrócone być nie mogą. Można wprawdzie i takie ułamki skrócić, lecz wartość ich cokolwiek się zmieni. Takie skracanie z przybliżoną wartością poznamy, gdy mówić będziemy o ułamkach ciągłych.

DODAWANIE UŁAMKÓW.

67. Dodawanie ułamków, podobnie jak liczb całkowitych, jest działaniem, przez które znajdujemy jeden ułamek, wartający tyle ile wszystkie razem. Ułamki wtedy tylko do siebie dodane być mogą, kiedy mają wspólny mianownik, bowiem wyrażają części jednakiéj wielkości. Jeżeli przeto ułamki, mające być dodane do siebie, mają różne mianowniki, potrzeba je naprzód do wspólnego mianownika sprowadzić. *W dodawaniu ułamków dodają się do siebie liczniki, a pod ogółem podpisuje się ich wspólny mianownik.* Bowiem, skoro ułamki mają mianownik ten sam, każdy z nich jest wyrażeniem liczby części téj saméj wielkości: a że te liczby części wskazują liczniki, więc je uważać można za liczby zwyczajne, byleśmy ostrzegli jak wielkie są te części. Ogół więc tych części, jest ogółem liczb będących licznikami, a dla pokazania wielkości tych części, potrzeba pod tym ogółem podpisać mianownik wspólny. Jakoż, dajmy że mamy ułamki do dodania takie: $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}$ i $\frac{1}{10}$; tu oczywiście widzimy, że zebrawszy w ogół 5, 2 i 1 będziemy mieli 8 części dziesiątych, zatem $\frac{8}{10}$.

Dla przykładu dodajmy do siebie ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{26}$. Sprowadziwszy je do wspólnego mianownika, będziemy mieli $\frac{52}{78} + \frac{42}{78} + \frac{65}{78} + \frac{33}{78}$, czyli $\frac{52+42+65+33}{78} = \frac{192}{78}$. Widzimy, że ogół ułamków jest 192 części siedmdziesiątych szóstych. To znaczy: gdybyśmy podzielili byli jedność na 78 części, piérwszy z danych ułamków zawierałby takowych 52, drugi 42, trzeci 65, a ostatni 33; których ogół jest 192. Ten ogół jest niewłaściwym ułamkiem; wyciągnąwszy zatém z niego całkowite, będzie $2\frac{36}{78}$, czyli po skróceniu, mamy ogół ułamków $2\frac{6}{13}$.

Uwaga. W razie kiedy ogół ułamków jest ułamkiem niewłaściwym, potrzeba z niego wyciągnąć całość, a ułamek pozostały przy téj całkowitéj skrócić, jeżeli można.

ODEJMOWANIE UŁAMKÓW.

68. Odejmowanie ułamków jest działanie, przez które wynajdujemy różnicę wartości danych dwóch ułamków. Dla téj samej przyczyny jak w dodawaniu, można odejmować od siebie tylko ułamki mające wspólny mianownik: gdyby go więc nie miały potrzeba sprowadzić je do wspólnego mianownika.

Odejmowanie ułamków odbywa się, *odejmując mniejszy od większego licznika, a pod resztą podpisuje się wspólny mianownik.*

Dajmy np. że od $\frac{5}{6}$ złotego odjęto $\frac{3}{6}$ złotego, reszta będzie $\frac{5-3}{6}=\frac{2}{6}$ złotego, czyli $\frac{1}{3}$ złotego.

Za przykład, dajmy że od $\frac{13}{30}$ złotego odjęto $\frac{2}{15}$ złot., będziemy mieli $\frac{13}{30}-\frac{2}{15}=\frac{13}{30}-\frac{4}{30}=\frac{9}{30}$ złot.; co znaczy 9 groszy; i tak być powinno; bo $\frac{13}{30}$ złot. $=$ 13 grosz. $\frac{2}{15}$ złot. $=$ 4 gr., zatem 13 — 4 gr. $=$ 9 gr.

Dajmy że z $3\frac{2}{5}$ złotego wydano $1\frac{5}{6}$ złotego. Żeby znaleźć resztę, potrzeba odjąć ułamek od ułamka, liczbę całą od liczby całéj; lecz po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika, widzimy, że $\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$, $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$, zatem nie można odjąć $\frac{25}{30}$ od $\frac{12}{30}$. W takim razie potrzeba do ułamku zmniejszalnéj, jak tu, do $\frac{12}{30}$ przydać 1 wzięte z całkowitéj liczby, złączyć go z tym ułamkiem i dopiéro wykonać odejmowanie ułamków oddzielnie i całkowitych oddzielnie. Co uskuteczniwszy, będzie: $2\frac{42}{30} - 1\frac{25}{30} = 1\frac{17}{30}$ reszta.

MNOŻENIE UŁAMKÓW.

69. Powiedzieliśmy wyżéj (n. 33), że *przez mnożenie wynajdujemy z danych dwóch liczb trzecią, która w ten sam sposób jest złożona z mnożnéj, w jaki mnożnik jest z jedności złożony.*

Na sam przód, dajmy że mamy $\frac{3}{5}$ pomnożyć przez 7. Ponieważ mnożnik 7 razy zawiera jedność, przeto iloczyn żądany powinien być złożony ze siedmiu ułamków $\frac{3}{5}$, czyli, iloczyn ma być 7 razy większy od mnożnéj $\frac{3}{5}$. Zatém podług tego cośmy powiedzieli (n. 53) wyżéj, będzie: $\frac{3}{5}\times 7 = \frac{3\times 7}{5} = \frac{21}{5}$; albo, wyciągnąwszy całość, otrzymamy $4\frac{1}{5}$, na iloczyn żądany.

Niechaj teraz będzie 7 do pomnożenia przez $\frac{1}{5}$. Widzimy tu, że mnożnik jest piątą częścią jedności, więc i iloczyn żądany powinien być piątą częścią siedmiu; zatém

$$7\times\frac{1}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Weźmy teraz 7 do pomnożenia przez $\frac{3}{5}$. Porównywając ten mnożnik $\frac{3}{5}$ z poprzedzającym $\frac{1}{5}$, widzimy że pierwszy jest 3 razy większy od drugiego; zatém iloczyn $7\times\frac{3}{5}$, jest także 3 razy większy od iloczynu $7\times\frac{1}{5}$ czyli od $\frac{7}{5}$; więc ostatecznie mamy:

$$7\times\frac{3}{5} = \frac{7}{5}\times 3 \text{ czyli } 7\times\frac{3}{5} = \frac{7\times 3}{5} = \frac{21}{5}.$$

Z tego co poprzedziło, wyprowadzimy takie prawidło. *Aby pomnożyć ułamek przez liczbę całą, lub liczbę całą przez ułamek, potrzeba liczbę całą pomnożyć przez licznik ułamku, a pod iloczynem podpisać mianownik tegoż ułamku.*

70. Szukajmy iloczynu dwóch ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{7}$. Mnożnik $\frac{1}{7}$ jest siódmą częścią jedności, więc i iloczyn szukany będzie siódmą częścią mnożnéj $\frac{2}{3}$; a że mnożąc mianownik pomniejszamy ułamek, zatém $\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2}{21}$.

Wziąwszy zaś do pomnożenia $\frac{2}{3}$ przez $\frac{4}{7}$, uważamy że $\frac{4}{7}$ jest 4 razy większe od $\frac{1}{7}$, zatém iloczyn $\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$ powinien być 4 razy większy od $\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}$, będzie zatém:

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{2\times4}{3\times7}=\frac{8}{21}.$$

Ztąd takie wyprowadzamy prawidło. *Mnożąc przez siebie dwa ułamki, mnoży się licznik przez licznik, mianownik przez mianownik; iloczyn z liczników jest licznikiem, iloczyn zaś z mianowników jest mianownikiem iloczynu danych dwóch ułamków.*

71. Aby pomnożyć przez siebie liczby całe z ułamkami, to jest, ułamkowe liczby, potrzeba naprzód liczby całe włączyć w ułamki; a potém wykonać mnożenie podług powyższych prawideł.

Np. $3\frac{1}{2}\times4=\frac{7}{2}\times4=\frac{28}{2}=14$

$$3\times2\frac{1}{5}=3\times\frac{11}{5}=\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}$$

$$4\frac{1}{2}\times5\frac{1}{3}=\frac{9}{2}\times\frac{16}{3}=\frac{144}{6}=24.$$

Kiedy jeden z czynników jest liczbą całkowitą z ułamkiem, drugi zaś liczbą całkowitą, wtedy przez tę całkowitą można pomnożyć osobno całkowitą, osobno ułamek drugiego czynnika, a ogół otrzymanych iloczynów będzie żądanym iloczynem. Tak np.

$$3\frac{1}{2}\times4=3\times4+\frac{1}{2}\times4=12+2,$$

jako też $3\times2\frac{1}{5}=3\times2+3\times\frac{1}{5}=6+\frac{3}{5}$.

Ten sposób jest częstokroć dogodny.

Postrzeżenie. Mnożąc liczbę całą lub ułamek przez ułamek, iloczyn jest mniejszy od mnożnéj. W rzeczy saméj, ponieważ wszelka liczba całkowita lub ułamek pomnożone przez 1, daje iloczyn równy mnożnéj, zatém mnożąc je przez mniéj niż 1, iloczyn musi być mniejszy od mnożnéj.

DZIELENIE UŁAMKÓW.

72. Widzieliśmy (n. 34), że dzielna jest równa iloczynowi z dzielnika przez iloraz; zatém (n. 59), dzielna złożona jest z ilorazu w ten sam sposób, w jaki dzielnik złożony jest z jedności.

Mając to na pamięci, dajmy że mamy podzielić $\frac{2}{3}$ przez 1; oczywistą jest rzeczą, że iloraz będzie $\frac{2}{3}$, bowiem 1 zawiera w sobie raz jedność, więc i dzielna zawiera w sobie raz jeden iloraz; zatém, ponieważ $\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=1$ więc iloraz żądany jest $\frac{2}{3}$.

Gdybyśmy mieli podzielić $\frac{2}{3}$ przez 5, zważając że ponieważ 5 zawiera 5 jedności, więc i dzielna zawierać ma 5 razy iloraz, czyli że dzielna jest pięć razy większa od ilorazu; zatém iloraz żądany, podług (n. 53) jest $\frac{2}{3\times5}=\frac{2}{15}$.

Stąd wyprowadzamy takie prawidło. *Aby ułamek podzielić przez liczbę całą, potrzeba przez tęż liczbę pomnożyć tylko mianownik ułamku, zostawiwszy mu licznik dany.*

73. Dajmy, że mamy podzielić 3 przez $\frac{1}{5}$. Uważamy tu, że dzielnik jest piątą częścią jedności, czyli że jedność jest pięć razy większa od dzielnika; zatém i iloraz musi być pięć razy większy od dzielnéj. Albo wyraźniéj, ponieważ $\frac{1}{5}$ mieści się w 1 pięć razy, zatém dzielna 3 mieści się 5 razy w ilorazie. Żądany więc iloraz jest $3\times5=15$.

Weźmy teraz 3 do podzielenia przez $\frac{2}{5}$. Ponieważ $\frac{1}{5}$ mieści się we 3 razy 3×5, więc $\frac{2}{5}$ jako 2 razy większe od $\frac{1}{5}$, mieści się 2 razy mniéj; czyli, iloraz będzie 2 razy mniejszy od 3×5; będzie więc $\frac{3\times5}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

Widzimy stąd, że *aby liczbę całą podzielić przez ułamek, potrzeba też liczbę pomnożyć przez mianownik dzielnika danego, i pod iloczynem za mianownik podpisać licznik tegoż dzielnika.*

74. Podzielmy teraz $\frac{3}{5}$ przez $\frac{1}{4}$. Dzielnik $\frac{1}{4}$ jest 4 razy mniejszy od jedności, czyli jedność jest 4 razy większa od dzielnika, zatém i iloraz musi być 4 razy większy od dzielnéj $\frac{3}{5}$, zatém żądany iloraz jest $\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}$.

Weźmy teraz $\frac{3}{5}$ do podzielenia przez $\frac{3}{4}$. Ponieważ ten dzielnik $\frac{3}{4}$ jest 3 razy większy od poprzedzającego dzielnika $\frac{1}{4}$, zatém iloraz szukany powinien być 3 razy mniejszy od $\frac{4\times3}{5}$; będzie więc $\frac{4\times3}{3\times5}$.

Przypatrzywszy się temu ilorazowi, widzimy że, *aby podzielić ułamek przez ułamek, potrzeba w dzielnéj pomnożyć licznik przez mianownik dzielnika, a pod tym iloczynem podpisać za mianownik iloczyn z mianownika dzielnéj przez licznik dzielnika.*

75. Mając do podzielenia liczbę całkowitą z ułamkiem przez liczbę całkowitą; albo liczbę całkowitą przez całkowitą z ułamkiem; lub téż liczbę całkowitą z ułamkiem przez liczbę całkowitą z ułamkiem, potrzeba w każdym razie liczbę całkowitą włączyć w ułamek, potém postąpić podług podanych prawideł.

Np. $2\frac{1}{2} : 3$, będzie, $\frac{5}{2} : 3 = \frac{5}{6}$,

$4 : 2\frac{1}{2}$, będzie, $4 : \frac{5}{2} = \frac{8}{5}$,

$3\frac{1}{2} : 8\frac{4}{5}$, będzie, $\frac{7}{2} : \frac{44}{5} = \frac{5\times7}{44\times2} = \frac{35}{88}$.

Uwaga. Zważając, że każda liczba całkowita uważaną być może za ułamek mający 1 za mianownik, wszystkie prawidła mnożenia i dzielenia ułamków zamknąć można w tych dwóch.

1. *Mnożenie ułamków wykonywa się, mnożąc licznik przez licznik, mianownik przez mianownik.*

Np. $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5}$, $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{1}$.

2. *Dzielenie ułamków odbywa się, mnożąc licznik dzielnéj przez mianownik dzielnika, a mianownik dzielnéj przez licznik dzielnika.*

Z tego prawidła jeszcze wypływa to, że, *aby podzielić ułamek przez ułamek, potrzeba dzielnik odwrócić, to jest, mianownik uczynić licznikiem, licznik zaś mianownikiem; po téj przemianie pomnożyć dzielną przez odwrócony dzielnik, a iloczyn otrzymany jest ilorazem szukanym.*

76. Otrzymujemy iloczyn z kilku ułamków na téj saméj zasadzie, jak iloczyn z kilku całkowitych czynników.

PRZYKŁADY DZIAŁAŃ Z UŁAMKAMI.

I. Pewna osoba swym dzieciom przeznacza $\frac{5}{7}$ całego swego majątku, $\frac{2}{9}$ na szpitale, resztę zaś na ubogich. Pytanie, jaka część na tych ostatnich przypada? ($\frac{4}{63}$).

II. Majątek pewnéj osoby składa się: w nieruchomościach $\frac{2}{3}$ całego majątku, w klejnotach $\frac{1}{12}$ część, w gotowych pieniądzach $\frac{2}{9}$, na pożyczkach resztę. Pytanie, jaka jest ta reszta? ($\frac{1}{36}$).

III. Syn złożył ojcu następujący rachunek. Za śniadania przez 1 miesiąc $5\frac{1}{6}$ złotego, szewcowi $15\frac{2}{3}$ złotego, krawcowi $48\frac{7}{30}$ złotego, papiér $3\frac{1}{3}$ złotego, ołówek $\frac{2}{5}$ złotego, książka $6\frac{4}{5}$ złotego; ubogim $2\frac{3}{10}$ złotego. Pytanie, ile złotych wydał ($81\frac{9}{10}$ złot.).

IV. Z $90\frac{1}{5}$ złot. wydano $63\frac{5}{6}$ złot. ile pozostało? ($26\frac{11}{30}$ złotego).

V. Łokieć sukna zgodzono $13\frac{2}{5}$, ile zapłacono za $3\frac{1}{2}$, łokcia? ($46\frac{9}{10}$ złot.).

VI. Za $46\frac{1}{5}$ złot. kupiono zboża korcy $3\frac{2}{3}$; po ile korzec zgodzonym był? (po $12\frac{3}{5}$ złot.).

VII. 15 złotych jaką jest częścią dukata ośmnastozłotowego? ($\frac{5}{6}$ duk.).

VIII. $\frac{11}{12}$ łokcia ile czyni cali, kiedy łokieć zawiera 24 cali? (22 cali).

IX. Handlujący zbożem zakupił pszenicy, raz $28\frac{2}{3}$ korca po $17\frac{1}{5}$ złotego, drugi raz $30\frac{2}{5}$ korca po $16\frac{5}{6}$ złotego; trzeci raz 100 kor. po $16\frac{1}{2}$ złot. Pomięszawszy zakupioną pszenicę, sprzedawał późniéj korzec po $19\frac{2}{3}$ złot. Pytanie ile zarobił? ($473\frac{23}{45}$ złot.).

X. Handlujący drzewem zakupił drzewa za 5610 RSr. Po rozgatunkowaniu, $\frac{1}{5}$ tego drzewa sprzedał za 845 rubli, $\frac{2}{3}$ tegoż drzewa za 1800 rubli; wiele wziął za resztę drzewa, kiedy na wszystkiém zarobił $\frac{2}{3}$ tego co go kosztowało? Które drzewo było najcelniejsze, które średnie, które najpodlejsze, czyli, wieleby był wziął za drzewo gdyby wszystko było najlepszego gatunku, wiele gdyby było gatunku średniego, a wiele gdyby było najpośledniejsze? (Odpowiedź: Resztę drzewa jest $\frac{2}{15}$ części wszystkiego i wziął za nie 6705 rubli. Za 1szy gat. wziąłby 4225 rub., za 2gi gat. 2700, a za 3ci gat. $50287\frac{1}{2}$ rubli).

XI. Zakupiono na pniu 400 sążni drzewa po $5\frac{2}{5}$ złotego sążeń. Wyrąbanie i ułożenie jednego sążnia kosztowała $2\frac{2}{3}$ złotego, zwózka sążnia w oznaczone miejsce kosztowała $8\frac{5}{6}$ złot.; dozór przy wyrąbaniu i przewózce kosztuje $\frac{1}{60}$ tego co drzewo, wyrąbanie i zwózka wynosi. Aby zarobić $\frac{2}{3}$ na wydanych pieniądzach, po ile sążeń z dowózką sprzedawać potrzeba? (po $28\frac{73}{100}$ złot.).

XII. Zgodzono się zapłacić za każde 3 konie 500 złotych, ile za 7 koni zapłacono? ($1166\frac{2}{3}$ złot.). Potrzeba naprzód obliczyć wartość jednego konia.

XIII. Dla 5 koni wyznaczona pasza wystarczyłaby na dni 3, taż sama pasza dla koni 8 na ile dni wystarczy? ($1\frac{7}{8}$ dnia). Potrzeba naprzód obliczyć na ile dni ta pasza wystarczy dla jednego konia.

XIV. Wypożyczono summę 3526 rubli srebr. na procent po 5 od sta na rok (co się tak znaczy, 5%), ile ta summa czyni dochodu rocznego w rublach, ile te ruble uczynią złotych, wiedząc że rubel czyni $6\frac{2}{3}$ złotego? ($176\frac{3}{10}$ RSr. albo $1175\frac{1}{3}$ złot.). Ile stów w danéj summie tyle jest piątek.

XV. Od wypożyczonéj summy po 5% wzięto na końcu roku 250 RSr., jaka summa wypożyczoną była? (5000 RSr.) W 250 tyle razy mieści się 5, ile jest stów w szukanéj summie.

XVI. Trzech kupców włożyli w handel: 1szy 3580 złp. 2gi 3150 złot., 3ci 4000 złot.; na całym handlu zarobili 3200 złot.; po ile z tego zarobku na każdego przypada? (Dla 1go $1067\frac{709}{4073}$ złot.; dla 2go $939\frac{553}{1073}$ złot.; dla 3go $1192\frac{984}{1073}$ złot.). Na 1 złotym zarobiono tyle razy mniéj niż na złożonym kapitale, ile jedności tenże kapitał zawiera w sobie.

XVII. Robotników 12 wykopali w pewnym czasie rów długi stóp 76, szeroki stóp $4\frac{1}{2}$. Innych robotników 14 równie silnych i czynnych, w tym samym czasie co poprzedni, wykopali inny rów w gruncie równéj spojności, długi stóp 100; pytanie jak był ten rów głęboki? (stóp $3\frac{90}{100}$).

Wskazanie działania. Dowiedzić się ile rowu wykopaliby 12 robotników, gdyby był na 1 stopę głęboki, następnie ileby takowego rowu wykopał jeden robotnik. Dowiedziawszy się potém ile jeden z 14 robotników wykopałby swego rowu niewiadoméj głębokości, uważamy, że ile razy ta ostatnia długość mieści się w długości rowu na stopę głębokiego, wykopanego przez jednego z 12 robotników, tyle razy głębokość jego, to jest 1 stopa, mieści się w głębokości drugiego rowu.

XVIII. Kupiec wiedeński winien kupcowi londyńskiemu 500 funtów sterlingów, ile za nie zapłaci złotych reńskich, wiedząc że 2 funty sterlingi warte są 21 złotych reńskich. Czyby nie było korzystniéj, gdyby kupiec wiedeński przesłał londyńskiemu należytość za pośrednictwem petersburskiego bankiera; wiedząc że wiedeński płaci petersburskiemu za $6\frac{1}{2}$ rubli 11 zł. reń., petersburski zaś płaci londyńskiemu 100 rubli za $16\frac{2}{3}$ funta sterlinga? (Wprost od siebie wiedeński zapłaci londyńskiemu 5 250 zł. reń.; przez Petersburg zapłaciłby tylko $5076\frac{12}{13}$ zł. reń.).

Wskazanie działania. Obliczenie przesłania wprost jest nie trudne. Co się tycze przesłania przez Petersburg, obliczy się naprzód ile za 500 funt. sterl. przypada rubli, a potém ile za te ruble przypadnie złotych reńskich.

XIX. Majątek zmarłego wynoszący rubli 24 500, podług testamentu podzielono w ten sposób: rodzeństwo jego dostało $\frac{7}{12}$ całego majątku, $\frac{4}{15}$ całego majątku rozdano między ubogich, resztę ofiarowano na kościoły; ile rubli otrzymało rodzeństwo, ile ubodzy, ile kościoły? (rodzeństwo $14\,291\frac{2}{3}$, ubodzy $6533\frac{1}{3}$. kościoły 3675 rubli.

XX. Pewien kupiec zapłacił 2134 złote za 160 funtów herbaty. Za $\frac{1}{5}$ część téj herbaty wziął 480 złot., za $\frac{3}{8}$ części 1080 złot.; wiele wziął za resztę herbaty, skoro na téj przedaży zarobił 15 na stu; po ile rachował funt herbaty przy piérwszéj przedaży, po ile przy drugiéj, a po ile przy sprzedaniu reszty? (Odp. $894\frac{1}{10}$ złot. wziął za resztę: piérwszą przedawał po 15 złot., drugą po 18, trzecią po $13\frac{101}{680}$ złot. czyli po 13 złot. i blisko 5 gro.)

Następujące przykłady napotykamy częstokroć dopiero w Algebrze. Podług naszego przekonania, będzie bardzo korzystną rzeczą rozwiązać je bez pomocy wyższych wiadomości matematycznych.

XXI. Zapytał jeden drugiego ile ma rubli w kieszeni, ten odpowiedział: żebym do połowy tego co mam dodał $\frac{2}{3}$ moich pieniędzy, tobym posiadał 70 rubli. Ile ten drugi ma rubli? (60 rub.).

Rozwiązanie. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$; co tak napisać można $7 \times \frac{1}{6}$. Tu oczywiście pokazuje się, że ponieważ 7 szóstych części jest 70, zatém $\frac{1}{6}$ majątku jest 10 rubli, a następnie drugi ma 60 RSr. Wzór rozwiązania tego rodzaju zagadnień jest $70 \times \frac{6}{7}$. Jestto bowiem dzielenie; jakoż, czém jest $\frac{7}{6}$ względem 1 uważanego za majątek, tém jest 70 względem szukanego majątku.

XXII. Jedna osoba ma trzecią część tego co druga, a przez to ma mniéj 18 rubli; ile każda z nich posiada?

Rozwiązanie. Druga osoba ma 1, piérwsza $\frac{1}{3}$, zatém odjąwszy od 1 majątek piérwszéj $\frac{1}{3}$, pozostanie $\frac{2}{3}$; ten ułamek tak wypisać można $2 \times \frac{1}{3}$, co pokazuje, że po odjęciu majątku piérwszéj od drugiéj osoby, pozostanie jeszcze 2 razy majątek osoby piérwszéj; a że po odjęciu majątku piérwszéj osoby od majątku drugiéj osoby pozostanie 18 rubli, więc te 18 rubli są podwójném majątkiem osoby piérwszéj; która tym sposobem ma 9 rubli.

XXIII. Dwie osoby mają razem 144 rubli, lecz piérwsza ma $\frac{1}{4}$ całéj summy więcéj niż druga. Po ile każda posiada?

Rozwiązanie. Jeżeli majątek obu jest 1, odjąwszy od niego $\frac{1}{4}$, pozostanie $\frac{3}{4}$; tą resztą podzieliwszy równo obie osoby, każda z nich dostałaby $\frac{3}{8}$; lecz że piérwsza ma więcéj niż druga o $\frac{1}{4}$ całéj summy, zatém, piérwsza ma $\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$, czyli $\frac{5}{8}$, druga zaś $\frac{3}{8}$ całéj summy; więc ostatecznie: piérwsza ma $144 \times \frac{5}{8} = 90$, druga zaś $144 \times \frac{3}{8} = 54$.

XXIV. Pewna osoba ma dochodu rocznego $\frac{1}{5}$ swego majątku, wydaje zaś rocznie $\frac{1}{4}$ tegoż majątku; za ile lat przyjdzie do zupełnego ubóstwa?

Rozwiązanie. Od rozchodu odjąwszy przychód roczny, reszta otrzymana pokaże o ile co rok ubywa majątku. Podzieliwszy więc przez tę resztę majątek, pokaże się, że za lat 20 ta osoba nierządna nic będzie nic posiadać.

XXV. Pewna osoba targuje dwie materye, jedna jest po złp. 18, druga po 15 złp. Jeżeli kupi po cenie drugiéj pozostanie jéj 24 złot. z posiadanych piénię dzy, jeżeli zaś po cenie piérwszéj kupi tęż samę liczbę łokci, pozostanie jéj 3 złot. Ileż łokci kupiła i ile miała pieniędzy?

Rozwiązanie. Cenę piérwszą, która jest 18, oznaczywszy przez 1, cena druga będzie $\frac{15}{18}$ czyli $\frac{5}{6}$; pozostałość po kupnie za drugą cenę $24 = 18 + 6$, to jest cena piérwsza i $\frac{1}{3}$ téj ceny, więc $1\frac{2}{6}$; pozostałość zaś za piérwszą cenę 3 czyli $\frac{1}{6}$ ceny piérwszéj, zatém $\frac{1}{6}$; więc różnica między pozostałościami jest $1\frac{1}{6}$, czyli $\frac{7}{6}$, albo $7 \times \frac{1}{6}$; a że różnica cen jest $\frac{1}{6}$, którą na każdym łokciu zyskuje, więc pomnożywszy tę różnicę cen przez liczbę łokci, otrzymamy różnicę pomiędzy zapłatą po piérwszéj i po drugiéj cenie; skoro więc ta różnica jest $7 \times \frac{1}{6}$, zatém ta osoba kupiła 7 łokci. Jakoż $7 \times 18 = 126$, a więc $126 + 3 = 129$; lecz $7 \times 15 = 105$, zatém $105 + 24 = 129$. Więc ta osoba miała przy sobie złp. 129.

XXVI. Po popełnionéj kradzieży postrzeżono ją w godzin 6, i zaraz w pogoń wysłano. Złodziéj uciekał z prędkością po 2 mile na godzinę, pogoń zaś biegła 5 mil w 2 godzinach. Ile godzin upłynęło od popełnionéj kradzieży nim złodziéj schwytanym został, i w jakiéj odległości od miejsca téjże kradzieży.

Rozwiązanie. Nim kradzież postrzeżono złodziéj ubiegł $6 \times 2 = 12$ mil. Złodziéj biegł 2 mil na godzinę, pogoń zaś biegła $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ na godzinę; więc co godzinę zbliżała się do złodzieja o $\frac{1}{2}$ mili. Zatém $12 : \frac{1}{2}$ czyli 24 godzin trwała pogoń; ponieważ postrzeżono 6 godzin przed pogonią, zatém złodziéj uciekał 30 godzin. A że $2\frac{1}{2}$ mili na godzinę biegła pogoń, więc złodziéj został doścignięty w odległości $24 \times 2\frac{1}{2} = 60$ mil, złodziéj także $30 \times 2 = 60$ mil ubiegł.

XXVII. Dziś Ojciec jest starszy od syna 4 razy, za 5 lat będzie starszy 3 razy; ile ma lat Ojciec?

Rozwiązanie. Oznaczywszy wiek dzisiejszy ojca przez 1, wiek syna będzie $\frac{1}{4}$; zaś za lat pięć wiek syna jest $\frac{1}{4}$ wieku ojca i lat 5; a że ojciec teraz jest 3 razy starszy od syna, więc pomnożywszy wiek syna po pięciu latach przez 3, będzie wiek ojca po pięciu latach, $\frac{3}{4}$ wieku ojca i 15 lat. Od 15 odjąwszy 5 znajdziemy dzisiejszy wiek ojca $\frac{3}{4}$ tego wieku i lat 10. Ztąd widzimy, że w $\frac{3}{4}$ dzisiejszego swego wieku ojciec był o 10 lat młodszy; a że $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ równa się jednemu, któryśmy wzięli za dzisiejszy wiek ojca, więc $\frac{1}{4}$ wieku ojca jest 10 lat; zatém ojciec ma dziś lat 40; syn lat 10, po 5 latach ojciec 45 a syn 15 lat.

Tym podobne przykłady, które téż można wprost na liczbach całych rozwiązać, bardzo kształcą pojęcie młodego; potrzeba przeto, aby nauczający na większéj liczbie przykładów zaprawiał wychowańców swoich do myślenia.

O UŁAMKACH DZIESIĘTNYCH.

77. Całość jednę, czyli jedność podzieliwszy na 10 części równych, otrzymamy dziesiąte części całości; każdą dziesiątą część podzieliwszy na 10 równych części, powstaną dziesiąte dziesiątych części, czyli setne części całości; setną część podzieliwszy na 10 równych części, każda z nich będzie dziesiątą częścią setnéj, zatém setną dziesiątéj, a tysiączną całości; tak daléj postępując, otrzymamy dziesięciotysiączne części całości, stotysięczne, milionowe i t. d., aż do najdrobniejszych. W taki sposób uważane części nazywają się *ułamkami dziesiętnemi* (Десятичная дробь).

78. Ponieważ całość jest 10 razy większa od swéj dziesiętnéj części, 100 razy od setnéj części, 1000 razy od tysiącznéj części i t. d.; zaś dziesiętna część jest 10 razy większa od setnéj, setna 10 razy większa od tysiącznéj, tysiączna 10 razy większa od dziesięciotysiącznéj i t. d.; przeto widzimy, że układ ułamków dziesiętnych zupełnie na tém samém prawie jest oparty co liczbowanie liczb całkowitych. Dlatego téż ułamki dziesiętne tak się piszą jak liczby całkowite; lecz aby je odróżnić od tych ostatnich, oddzielamy liczby całkowite od ułamków dziesiętnych przecinkiem. Tak zamiast $2\frac{1}{10}$, piszemy 2,1; zamiast $24\frac{35}{100}$, piszemy 24,35. Kiedy zaś nie ma liczby całkowitéj tylko sam ułamek, w miejsce liczby całkowitéj piszemy zero, np. $\frac{2358}{10000}$, pisze się 0,2358.

79. Powyższe liczby wymawiają tak: piérwsza, *dwie całkowite* i *jedna dziesiętna;* druga *24 całkowite i 35 se-*

tnych; trzeci, *zero całkowitych i 2358 dziesięciotysięcznych.* W ogólności, *ułamek dziesiętny wymawia się tak jak liczba całkowita, dodawszy nazwę części przez ostatni znak, czyli cyfrę, po prawéj ręce wskazanych; naprzód jednak wymawia się liczba całkowita, która może być zerem.*

Ten sposób pisania i wymawiania ułamków dziesiętnych usprawiedliwić potrzeba. Dajmy, że mamy ułamek $\frac{24}{100}$, piszemy go tak 0,24; jakoż, 20 setnych części czyni 2 dziesiętne, zatém 2 dziesiętne i 4 setne czyni 24 setne. Ponieważ zaś, podług prawa liczbowania, każdy znak po prawéj ręce położony ma wartość 10 razy mniejszą, niż gdyby był obok po lewéj ręce położony, przeto 2 obok jedności napisane po prawéj ręce znaczą dziesiąte części; zaś 4, dla téj saméj przyczyny, są dziesiętnemi częściami względem dziesiętnych, a następnie setnemi częściami względem jedności.

80. Z tego jasno widzimy, że dziesiętne części stoją ku prawéj ręce na piérwszém miejscu po przecinku, więc *na drugiém miejscu, uważając jedności na piérwszém*, setne części stoją na drugiém miejscu od przecinka, lub *na trzeciém od jedności;* tysiączne części są na trzeciém miejscu od przecinka, lub *na czwartém od jedności* i t. d.; zgoła, wypisanie ułamku dziesiętnego podlega prawu pisania liczb całkowitych, lecz w przeciwnym kierunku, to jest, ku prawéj ręce.

Jeżeli więc brakuje części dziesiętnych, piszemy na ich miejscu, to jest, zaraz po przecinku, zero; np. dwie setne, piszemy 0,02; kiedy brakuje setnych piszemy w ich miejscu, to jest, na drugiém od przecinka miejscu, zero; np. sto pięć tysięcznych, piszemy 0,105; jako téż, 7 tysięcznych, piszemy 0,007, bowiem dziesiętnych i setnych brakuje. Słowem, *znaki ułamku dziesiętnego tyle miejsc po przecinku zajmować powinny, ile wymówiony chociaż nie pisany mianownik, zawiera zer.* Potrzeba więc części nie znajdujące się w ułamku zastąpić zerami.

81. W danéj liczbie ułamkowéj np. 3,207, posunąwszy przecinek ku prawéj ręce o jedno miejsce, wartość jéj powiększymy razy dziesięć. Jakoż, liczbę 32,07, porównywając z daną, widzimy że tu 2 są jednościami, tam zaś dziesiętnemi częściami; tu 7 są setnemi częściami, w danéj liczbie są tysiącznemi. Posunąwszy przecinek ku prawéj ręce o dwa miejsca, wartość liczby powiększymy razy sto, czyli liczbę daną pomnożymy przez sto. Tak w danéj liczbie 3,207, posunąwszy o dwa miejsca przecinek, będzie 320,7, gdzie 7 są części dziesiętne, a że w danéj liczbie były częściami tysiącznemi, oczywiście w drugim razie są sto razy większe od części w danym ułamku: tamże 3 były jednościami, w liczbie zaś 320,7 są stami.

Aby więc ułamek dziesiętny pomnożyć przez 10, 100, 1000, 10 000 i t. d, potrzeba przecinek posunąć ku prawéj ręce o tyle miejsc, ile mnożąca liczba zawiera zer.

Na téj saméj zasadzie oparte prawidło na dzielenie ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000 &c., jest takie. *Aby ułamek dziesiętny podzielić przez 10, 100 &c., potrzeba przesunąć przecinek ku lewéj ręce o tyle miejsc, ile zer zawiera liczba dzieląca.*

Liczba 25 podzielona przez 10 daje iloraz 2, 5; podzielona przez 100 daje iloraz 0,25, podzielona przez 1000 daje iloraz 0,025 &c. Liczby 156; 15,6; 1,56; 0,156; 0,0156; są, druga względem piérwszéj dziesięć razy mniejsza; trzecia względem drugiéj także dziesięć razy mniejsza, a względem piérwszéj sto razy mniejsza; czwarta względem trzeciéj dziesięć razy mniejsza, względem drugiéj sto razy, względem piérwszéj tysiąc razy mniejsza; ostatnia względem przedostatniéj dziesięć razy, a względem piérwszéj dziesięć tysięcy razy mniejsza.

82. Ułamek dziesiętny różni się od zwyczajnego tylko swoją postacią, jakoż 0,4 to samo znaczy co $\frac{4}{10}$; *podpisawszy więc pod ułamkiem dziesiętnym mianownik oznaczający wielkość części ostatniego znaku, otrzymamy ułamek zwyczajny z ułamku dziesiętnego;* czyli *ułamek dziesiętny zamienimy na ułamek zwyczajny.* Tak np. $0{,}24 = \frac{24}{100}$, $0{,}05 = \frac{5}{100}$, $4{,}16 = 4\frac{16}{100}$, lub $\frac{416}{100}$ &c.

Po zamienieniu ułamków dziesiętnych na ułamki zwyczajne dopiero podanym sposobem, potrzeba je, jeżeli można, skrócić. Tak powyższe ułamki, po skróceniu, będą $0{,}24 = \frac{6}{25}$, $0{,}05 = \frac{1}{25}$, $4{,}16 = 4\frac{4}{25}$ albo $\frac{104}{25}$.

83. Ponieważ np. 2 części dziesiętne ważą 20 setnych, 200 tysięcznych części i t. d.; zatém $0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200$ &c. Z tego widzimy, że *dopisawszy po prawéj ręce ilekolwiek zer, wartość dziesiętnego ułamku nie zmieni się.* Co téż jeszcze tak okazać można, $0{,}2 = \frac{2}{10}$; $0{,}20 = \frac{20}{100}$ czyli $\frac{2}{10} \times \frac{10}{10}$; a że wartość zwyczajnego ułamku nie zmienia się po pomnożeniu przez tę samę liczbę licznika i mianownika, więc prawo wysłowione powyżéj jest prawdziwe.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH.

84. Liczbowanie ułamków dziesiętnych podlega tym samym prawom co liczbowanie liczb całkowitych; jakoż dziesiętna część zawiera 10 setnych, setna zawiera 10 tysiącznych &c., tak jak sto zawiera 10 dziesiątków, dziesiątek 10 jedności i t. d. Dlatego téż dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych, odbywa się tak jak liczb całkowitych.

W dodawaniu i odejmowaniu podpisują się pod sobą ułamki tak aby dziesiąte stały pod dziesiątemi, setne pod setnemi i t. d. Jeżeli w którym ułamku nie ma dalszych części, które w innych znajdują się, można dla wyrównania kolumn dopisać do niego po prawéj ręce tyle zer, ile potrzeba (83), lub tylko w myśli je zatrzymać.

WZÓR DODAWANIA.

3,13	0,5	albo	0,500000
208,07	12,078		12,078000
0,16	3,523		3,523000
18,09	128,100765		128,100765
23,81	90,2064		90,206400
253,26	234,408165		234,408165

Dajmy że od 7,531 mamy odjąć 3,98; będzie:

7,531
3,98

Reszta 3,551.

Mając od 3,5 odjąć 0,975, będzie:

3,500
0,975

Reszta 2,525.

Podobnież, odejmując od 12 liczbę 7,862, mamy:

12,000
7,862

Reszta 4,138.

MNOŻENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH.

85. *Mnożenie ułamków dziesiętnych odbywa się tak jakoby były całkowitemi liczbami, nie zważając na przecinek; dopiéro w otrzymanym iloczynie odcina się na ułamek dziesiętny tyle znaków, ile ich było razem w mnożnéj i w mnożniku; lub ile ich było we wszystkich czynnikach.*

Niech będą dwa czynniki 3,058 i 0,72. Pomnożywszy 3058 przez 72, otrzymamy iloczyn 220176; a że piérwszy czynnik pomnożyliśmy przez 1000, a drugi przez 100, zatém otrzymany iloczyn jest 1000×100, czyli 100000 razy większy od żądanego (42); potrzeba go więc 100000 razy zmniejszyć, co uczynimy odciąwszy pięć znaków na ułamek dziesiętny, to jest: od prawéj ku lewéj ręce (81); będzie więc $3,058 \times 0,72 = 2,20176$. Tu uważamy, że ponieważ 1000 tyle zawiera zer ile w 3,058 było znaków dziesiętnego ułamku, a 100 ma tyle zer ile było znaków ułamku dziesiętnego w drugim czynniku 0,72, iloczyn zaś 1000×100 zawiera tyle zer ile ich było w obu czynnikach; zatém w iloczynie 3058×72, odcięliśmy na ułamek dziesiętny tyle znaków, ile się znajdowało zer razem w obu liczbach mnożących dane czynniki, a następnie ile było znaków ułamka dziesiętnego razem w obu czynnikach. Widzimy więc, że podane prawidło jest ogólne.

Podług tego prawidła, mamy $5 \times 0,12 = 0,60$ czyli 0,6. Równie, $0,02 \times 0,16 = 0,0032$.

DZIELENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH.

86. *Dzielenie ułamków dziesiętnych odbywa się tak jak liczb całkowitych, uważając je za takowe, to jest, nie zwa-*

żając na przecinek; tylko, w ilorazie odcina się na ułamek dziesiętny tyle znaków, ile ich jest więcéj w dzielnéj niż w dzielniku. Gdyby zaś w dzielniku więcéj było znaków ułamku niż w dzielnéj, wtedy w téj ostatniéj dopisuje się na końcu tyle zer, ile tego potrzeba wymaga.

To prawidło wyjaśnimy na przykładach.

Dajmy, że przez 0,57 mamy podzielić 0,184851.

WZÓR DZIAŁANIA.

```
184851 57
171    ─────
────   3243 Iloraz.
 138
 114
 ───
  245
  228
  ───
   171
   171
   ───
     0.
```

W tém działaniu pomnożyliśmy dzielną przez 1000000, dzielnik zaś przez 100; zatém, podług 1º w num. 42, iloraz otrzymany jest 1000000 razy większy; a że podług 3º w tymże numerze, ten iloraz jest 100 razy mniejszy, zatém rzeczywiście większym jest $\frac{1000000}{100}$ razy, to jest, 10000 razy. Żeby więc był prawdziwym, potrzeba na ułamek dziesiętny odciąć cztéry znaki; będzie więc 0,3243 żądanym ilorazem. Zatém odcięliśmy w ilorazie na ułamek dziesiętny tyle znaków, ile ich było więcéj w dzielnéj niż w dzielniku.

To można jeszcze okazać następującym sposobem. Pomnożywszy dzielną i dzielnik przez 100, będziemy mieli 18,4851 do podzielenia przez 57, skąd otrzymany iloraz 0,3243 nie ulega żadnéj zmianie (zob. 42 — 5º). W ilorazzie otrzymaliśmy tyle znaków na dziesiętny ułamek, ile ich w dzielnéj 18,4851 było; a że względem danéj dzielnéj 0,184851 jest ich mniéj o dwa, to jest, o tyle ile ich było w dzielniku, zatém prawidło jest ogólne.

Podług tego prawidła postępując, *chcąc podzielić całkowitą liczbę przez ułamek dziesiętny, dopiszemy do całkowitéj tyle zer ile ułamek zawiera znaków, potém wykonamy, dzielenie jakoby liczb całkowitych. Jeżeli zaś tego potrzeba będzie, dla otrzymania wartości przybliżonéj ilorazu, dopisujemy w dzielnéj zera i daléj odbywamy dzielenie.*

Dajmy 15 : 0,3, będziemy mieli 150 : 3 = 50.

Niech będzie 0,1 : 0,13 będziemy mieli 10 : 13 czyli $\frac{10}{13}$ = 0,7692307.

Weźmy jeszcze przykład, 12,05 : 6,2731; będziemy mieli 120500 : 62731.

Wykonywając dzielenie tak jakeśmy wyżéj powiedzieli, będzie:

$$\begin{array}{r|l} 120500 & 62731 \\ \cline{2-2} 62731 & 1,92 \\ \hline 577690 & \\ 564579 & \\ \hline 131110 & \\ 125462 & \\ \hline 5648 \text{ i t. d.} & \end{array}$$

Podzielmy jeszcze 0,2 przez 2,5 będziemy mieli 2 : 25 czyli 2,00 : 25 = 0,08.

SKRÓCONE MNOŻENIE I DZIELENIE.

87. W zastosowaniach rachunku do rozmaitych potrzeb, często przypada mnożyć lub dzielić przez siebie, bardzo długie ułamki dziesiętne, ostateczny zaś wypadek tych działań może być dokładnym tylko do pewnego rzędu dziesiętnych; czyli, że w tych wypadkach poprzestać możemy na pewnéj liczbie znaków dziesiętnego ułamku. Żeby przeto uniknąć bezpotrzebnéj roboty, podamy sposoby mnożenia i dzielenia skróconego.

88. Dajmy, że pomnożyć mamy 5,057642 przez 3,7941. Postąpiwszy zwyczajnym sposobem, otrzymamy w iloczynie dziesięć znaków w ułamku dziesiętnym; jeżeli zaś zatrzymać chcemy tylko sześć znaków; wtedy próżnobyśmy odbywali mnożenie całéj mnożnéj przez wszystkie cztéry znaki mnożnika, czego unikniemy postępując następującym sposobem.

Pod mnożną, napisaną w właściwym porządku, podpisuje się mnożnik odwrotnie napisany, tak aby znak najwyższego porządku stał na miejscu najniższego, i odwrotnie; nadto, żeby znaki, począwszy od pierwszego miejsca po prawéj ręce, stały jedne pod drugiemi. Potém mnożymy piérwszym znakiem tak odwróconego mnożnika całą mnożną; następnie drugim znakiem mnożnika mnożymy mnożną poczynając od znaku odpowiedniego mu w mnożnéj, lecz znak piérwszy tego cząstkowego iloczynu podpisujemy pod piérwszym znakiem poprzedniego iloczynu; następnie, trzecim znakiem mnożnika mnożymy całą mnożną, poczynając od jéj trzeciego znaku, a piérwszy znak tego nowego iloczynu piszemy pod piérwszemi znakami poprzednich iloczynów i t. d., aż do końca. Lecz ponieważ iloczyny z poprzedzających znaków mnożnéj przez znak z porządku następujący mnożnika, zawierać mogą jedności tego rzędu, które zatrzymać mamy, przeto potrzeba zaczynać mnożenie od znaku mnożnéj poprzedzającego odpowiedni, a z tego iloczynu dziesiątki dodać do iloczynu ze znaków odpowiednich; a nawet, gdyby iloczyn ze znaku poprzedzającego odpowiedni nie zawierał dziesiątków, lecz równym był, a tém bardziéj większy od 5, wtedy do iloczynu z odpowiedniego znaku dodaje się 1.

To prawidło lepiéj wyjaśni się na przykładzie. Wziąwszy poprzedzające liczby, tak ułożymy działanie:

$$\begin{array}{r} 5{,}057642 \\ 14973 \\ \hline 15172926 \\ 3540349 \\ 455188 \\ 20230 \\ 506 \\ \hline 19{,}189199 \end{array}$$

Objaśnienie. Iloczyn piérwszy cząstkowy powstał z pomnożenia mnożnéj przez 3. Iloczyn drugi pochodzi z pomnożenia téjże mnożnéj przez 7 poczynając od znaku 4 w mnożnéj, lecz że iloczyn $7 \times 2 = 14$, dla tego iloczyn $7 \times 4 = 28$ powiększyliśmy o 1, i stąd to piérwszym znakiem iloczynu drugiego jest 9. Iloczyn trzeci otrzymany jest z pomnożenia mnożnéj przez 9, poczynając od znaku 6 mnożnéj, lecz ponieważ $9 \times 4 = 36$, blisko 40, przeto iloczyn 9×6 powiększyliśmy o 4, stąd więc znak piérwszy iloczynu trzeciego jest 8. Iloczyn czwarty pochodzi z pomnożenia mnożnéj przez 4, poczynając od znaku 7, ale że iloczyn $4 \times 6 = 24$, przeto iloczyn 4×7 powiększyliśmy o 2, i dla tego piérwszy znak czwartego iloczynu jest *zero.* Na koniec, ostatni iloczyn cząstkowy powstał z pomnożenia mnożnéj przez 1, poczynając od znaku 5 mnożnéj, a że $1 \times 7 = 7$, blisko 10, przeto iloczyn 1×5 powiększyliśmy o 1.

Gdybyśmy wykonali całkowite mnożenie, otrzymalibyśmy iloczyn 19,1891995122, który zgadza się zupełnie z poprzednio otrzymanym do sześciu znaków dziesiętnych.

To porównanie dowodzi tylko dokładności wypadku w danym przykładzie, potrzeba jeszcze wytłomaczyć ten sposób postępowania tak, abyśmy przekonali się, że jest najogólniejszy.

Na sam przód postrzegamy, że skoro mnożnika znaki są wypisane w odwróconym porządku, tedy mnożenie danych czynników odbywaliśmy poczynając od jedności najwyższego rzędu w mnożniku. Powtóre: mnożąc milionowe części przez jedności całkowite, otrzymujemy na iloczyn także milionowe części; zatém w piérwszym iloczynie cząstkowym każdy znak zajmuje swoje właściwe miejsce. Po trzecie: mnożąc przez 7 dziesiąte, 4 stotysięczne, otrzymujemy na iloczyn 28 milionowych części, zatém 8 powiększone jednością, z przyczyny już wytłomaczonej, słusznie podpisaliśmy pod częściami milionowemi; dalsze znaki ku lewéj ręce idąc, wszystkie są na właściwych miejscach wypisane. Tak daléj rozumując pokaże się, że trzecim znakiem mnożnika mnożąc trzeci znak mnożnéj; czwartym czwarty i t. d., zawsze otrzymujemy w iloczynach milionowe części.

89. Z tego pokazuje się, *że, aby w iloczynie zatrzymać części dziesiętne danego rzędu, trzeba mnożnik odwrócony tak podpisać, aby jego jedności całkowite stały pod częściami mnożnéj tego rzędu, które zatrzymać mamy.* Tak, gdy chcemy zatrzymać stotysiączne, całkowite jedności podpisać pod temi stotysiącznemi częściami.

Zatém, kiedy w mnożniku całkowite zawierają dziesiątki, sta &., te stać powinny obok siebie lecz w odwróconym porządku.

Dajmy, że w iloczynie z czynników 0,057642 i 0,7941, zatrzymać mamy pięć znaków, to jest, stotysięczne części. Odwróciwszy mnożnik tak go pod mnożną podpiszemy, jak wzór działania pokazuje, to jest, odwróconego mnożnika całkowite jedności, których tu jest zero, podpisuje się pod częściami stotysięcznemi mnożnéj, a następnie wypadną dziesiętne mnożnika pod dziesięciotysięcznemi mnożnéj i t. d.

WZÓR DZIAŁANIA.

	0,0576 42
	1497,0
	403 5
	51 8
	2 3
	1
Iloczyn	0,0457 7.

Tu uważać potrzeba, że w piérwszym iloczynie, chociaż $6 \times 7 = 42$, napisaliśmy nie 2 lecz 5, dla tego, że $4 \times 7 = 28$, blisko 30, więc te 3 stotysięczne dodaliśmy do sto tysięcznych. W ostatnim zaś iloczynie, chociaż $0 \times 1 = 0$, lecz że iloczyn z mnożnéj przez 1, daje iloczyn większy od 5, przeto ten iloczyn *zero* powiększyliśmy jednem.

Gdybyśmy wykonali mnożenie zwyczajnym sposobem, bylibyśmy otrzymali iloczyn, 0,0457735122, z którego zatrzymawszy stotysięczne, będziemy mieli powyższy wypadek.

Iloczyn z czynników 0,35104 i 0,7432, zawiérać będzie dziewięć znaków, czyli części stomilionowe. Jeżeli chcemy zatrzymać tylko dziesięciomilionowe czyli siedm znaków, potrzeba w mnożnéj dopisać dwa zera, i dopiero pod ostatnim podpisać zero całkowitych, z resztą postępuje się tak jak wzór pokazuje.

WZÓR DZIAŁANIA.

0,351040 0	albo	0,743200 0
2347,0		40153,0
245728 0		222960 0
14041 6		37160 0
1053 1		743 2
70 2		29 7
0,260892 9		0,260892 9

Uważać potrzeba, że w drugiém działaniu brakuje jednego cząstkowego iloczynu, dlatego iż zero w mnożniku znajdujące się, nie daje żadnego iloczynu.

Dajmy, że z czynników 2,2873546 i 33,6235, otrzymać mamy iloczyn z czterma znakami dziesiętnemi.

WZÓR DZIAŁANIA.

2,287 3546	albo	33,623 5
5 326,33		453 782,2
6 862 06		67 247 0
686 21		6 724 7
137 24		2 689 8
4 57		235 3
68		10 1
11		1 7
Iloczyn 7 6,90 87,		1
		Iloczyn 76,908 7.

W drugiém działaniu uważamy naprzód, iż w mnożniku odwróconym opuściliśmy znak piérwszy po lewéj ręce, dla tego, że w mnożnéj nie miał odpowiedniego znaku; jednakże zachowaliśmy znak drugi 4, chociaż w mnożnéj nie stoi nad nim znak, a to z téj przyczyny, iż to 4 pomnożone przez 3 piérwszy znak mnożnéj, dał 12 stotysięcznych, więc 1 dziesięciotysięczną część, która też stanowi ostatni iloczyn cząstkowy.

Weźmy jeszcze taki przykład. Z czynników 0,000153 i 247,25 mamy otrzymać iloczyn z trzema znakami dziesiętnemi. Ponieważ w mnożnéj znak tysięcznych części i wszystkie przed nim stojące są zerami, przeto w mnożniku moglibyśmy ułamek dziesiętny opuścić.

WZÓR DZIAŁANIA.

0,000153	albo	247,25 0
742		3510 00,0
31		25
6		12
1		Iloczyn 0,031.
Iloczyn 0,038		

90. Skrócenie dzielenia polega na tém, że za każdém odbytém dzieleniem cząstkowém odrzuca się w dzielniku jeden znak od prawéj ręki, który tym sposobem staje się coraz krótszym, aż do opuszczenia z niego przedostatniego znaku: nie dopisuje się zaś do reszt otrzymywanych ani znaków dalszych z dzielnéj, ani zer.

Przykład lepiéj to wyjaśni. Dajmy, że mamy podzielić 0,75432 przez 0,2518; pomnożywszy dzielną i dzielnik przez 10000, będziemy mieli 7543,2 do podzielenia przez 2518.

WZÓR DZIAŁANIA.

```
           ... .. .
     7543,2|2 518
     5036  |2,995
     ----
     2507
     2266
     ----
      241
      226
     ----
       15
       13
     ----
        2.
```

Objaśnienie działania. Przez cały dzielnik wykonawszy piérwsze cząstkowe dzielenie, na iloraz otrzymujemy 2 całkowite. Do reszty piérwszéj 2507 zamiast przypisać 2 dziesiąte, wykréślamy z dzielnika znak 8, i dlatego oznaczyliśmy go kropką; dzielimy więc tę resztę przez 251, i na iloraz otrzymujemy 9; mnożąc następnie dzielnik 251 przez 9, uważamy żeśmy w nim opuścili 8, które przez 9 pomnożone, daje iloczyn 72; z tegoto iloczynu dodajemy 7 do iloczynu 1×9. Następną resztę uważamy za dzielną, w dzielniku zaś opuszczamy znak 1, (znaczymy go dwiema kropkami), i przez 25 dzielimy resztę 241, skąd mamy iloraz 9; mnożąc przez niego dzielnik 25 uważamy znów, że 9×1 równe jest prawie 10, dla tego to do iloczynu 5×9 dodajemy 1. Wykréśliwszy 5, pozostanie dzielnik 2, przez który dzielimy resztę 15; lecz ponieważ z iloczynu opuszczonego 5 przez następny znaleźć się mający znak ilorazu, mamy dodać dziesiątki do iloczynu z dzielnika 2 przez ostatni znak tegoż ilorazu, przeto nie 6 lecz 5 bierzemy na ostatni znak ilorazu. Na tém kończy się tu działanie.

Można było przewidzieć, że tym sposobem powyższy przykład rozwięzując, otrzymamy na iloraz trzy znaki ułamku dziesiętnego; bowiem po piérwszém dzieleniu otrzymujemy część całkowitą ilorazu, następnie zaś było można trzy razy skrócić dzielnik, który zawierał tylko cztéry znaki dziesiętne; więc odbywamy raz całkowite dzielenie a trzy razy skrócone.

Gdyby było potrzeba otrzymać cztéry, pięć i t. d., znaków dziesiętnych w ilorazie, należy odbyć dzielenie przez cały dzielnik razy trzy, cztéry i t. d., zgoła więcéj raz jeden niż liczba znaków dziesiętnych w ilorazie, o którą liczba znaków tegoż ilorazu ma przewyższać liczbę wykreśleń w dzielniku.

Dajmy, że w poprzedzającym przykładzie mamy doprowadzić iloraz do pięciu znaków dziesiętnych; w tym razie trzy razy odbędziemy całkowite dzielenie.

WZÓR DZIAŁANIA.

```
         .. .. .
7543,2 |2 518
5036   |2,99571
-------
 25072
 22662
 -----
  24100
  22662
  -----
   1438
   1259
   ----
    179
    176
    ---
      3
      3
      -
      0
```

Mając do podzielenia 0,15 przez 28,57432, pomnożywszy dzielną i dzielnik przez 100, wypadnie dzielna 15, dzielnik 2857,432. Jeżeli w ilorazie potrzeba mieć sześć znaków dziesiętnych, uważamy, że do 15 dopisawszy dwa zera na dziesiętne, dzielnik jeszcze nie będzie mieścił się w dzielnéj, zatém w ilorazie otrzymamy piérwsze trzy zera, to jest, jedno na całkowite, dwa na dziesiętne; a żeśmy założyli mieć sześć znaków w ilorazie, zatém potrzeba w dzielniku zachować cztéry znaki, dla odbycia jednego całkowitego dzielenia i trzech skróconych. Zachowujemy zwykle o jeden znak więcéj, który cokolwiek odsuwamy, jako do dzielenia nie należący, lecz potrzebny do otrzymania piérwszego iloczynu dokładniejszego.

WZÓR DZIAŁANIA.

```
 15000|2 857 4
 14287|0,005249
 -----
   713
   571
   ---
   142
   114
   ---
    28
    25
   ---
     3.
```

Powyższe przykłady dostatecznie wykazują sposób postępowania przy dzieleniu skróconém. Wykonywając zaś dzielenie zwyczajnym sposobem, przekonywamy się, że znaki w ilorazie otrzymane skróconym sposobem zupełnie są te same, jakiebyśmy otrzymali byli odbywając całkowicie działanie. Przyczyna tego jest ta, że iloczyny z dalszych znaków dzielnika pomnożonych przez znaki otrzymywane w ilorazie, wcale nie wpływają na reszty, stające się kolejno dzielnemi cząstkowemi. I w saméj rzeczy, gdybyśmy odbywali całkowite dzielenie, znalazłszy w ilorazie znak 4 przedostatni, otrzymalibyśmy byli resztę 2705632, w któréj, po dodaniu zera, dzielnik mieści się 9 razy, tak jak 2 w 28 mieści się 9 razy; zważając, że do iloczynu 2×9 dodać potrzeba 7 powstałe z iloczynu 8×9.

Rozwiążemy jeczcze jeden przykład. Mamy podzielić 1234,569 przez 27,35894, i doprowadzić iloraz do trzech znaków dziesiętnych. W obu liczbach posunąwszy przecinek ku prawéj ręce o pięć znaków, w miejsce liczb poprzedzających mamy: 123456900 i 2735894. Tu naprzód widzimy, że możemy dwa razy odbyć dzielenie na tych liczbach, zatém otrzymamy dwa znaki na liczbę całkowitą, a że dziesiętnych ma być trzy w ilorazie, więc mamy otrzymać pięć znaków; wykonamy więc dzielenie raz przez cały dzielnik, a cztéry razy przez odcinanie znaków w dzielniku. Dosyć więc jest miéć pięć znakow w dzielniku, a że jest ich siedm, dwa więc ostatnie opuścimy, powiększywszy ostatni znak o 1, z powodu że opuszczony znak jest 9; skoro w dzielniku opuściliśmy dwa znaki, potrzeba opuścić ich tyleż w dzielnéj; ale wtedy potrzebaby wykonać dwa razy całkowite dzielenie, bowiem pozostałoby w dzielnéj siedm znaków; więc dla uniknienia tego, zostawiamy w niéj sześć znaków, ostatni 6 powiększywszy o 1.

DZIAŁANIE.

```
123457|27359
109436|45,124
------
 14021
 13679
 -----
   342
   274
   ---
    68
    55
    --
    13
    11
    --
     2.
```

Przewidzieliśmy że w ilorazie będzie dwa znaki całkowitéj liczby, dlatego też zaraz w działaniu odcinamy je. Postrzegamy nadto, że ostatnia reszta jest 2, równa znakowi ostatecznie w dzielniku pozostałemu po wykréśleniu innych; skąd domyśléć się możemy, że znak czwarty ilorazu byłby większy od 5; zatém ostatni zatrzymany znak ilorazu potrzeba powiększyć o 1; będzie więc szukany iloraz 45,125, większy wprawdzie od prawdziwego, lecz przybliżony do 0,001.

ZAMIANA UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH NA DZIESIĘTNE, UŁAMKI PERYODYCZNE CZYLI ZWROTKOWE, PRZYBLIŻONE WARTOŚCI ILORAZÓW.

91. Skoro z dziesiętnych ułamków otrzymujemy ułamki zwyczajne, łatwo domyślamy się, że również zwyczajne ułamki można na dziesiętne zamienić.

Zamieńmy ułamek $\frac{6}{25}$ na ułamek dziesiętny. Uważamy naprzód, że ponieważ ten ułamek jest właściwym, zatém na całkowite wypadnie zero; następnie widzimy, że 6 całkowitych równe jest 60 dziesiętnych, 600 setnych i t. d. części: zatém $\frac{6}{25}$ części z całkowitych równa się $\frac{600}{25}$ części z setnych; wyciągnąwszy całość, mamy:

$$
\begin{array}{r|l}
600 & 25 \\
\underline{50} & \overline{24} \\
100 & \\
\underline{100} & \\
0. &
\end{array}
$$

więc $\frac{6}{25}$ równe jest 24 setnych części, to jest $\frac{6}{25} = 0,24$

Weźmy jeszcze jeden przykład dla lepszego wyjaśnienia zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne. Niech więc będzie $\frac{17}{125}$ do zamienienia na ułamek dziesiętny.

WZÓR DZIAŁANIA.

$$
\begin{array}{r|l}
170 & 125 \\
\underline{125} & \overline{0,136} \\
450 & \\
\underline{375} & \\
750 & \\
\underline{750} & \\
0. &
\end{array}
$$

Ponieważ 125 nie mieści się w 17 całkowitych, więc piszemy na całkowite *zero;* dopisawszy zero, otrzymamy 170 dziesiątych części, w których 125 mieści się raz, piszemy więc na dziesiąte, obok zera 1. Reszta 45 pozostała wyraża części dziesiąte, dodawszy więc do nich zero, otrzymamy 450 części setnych, które przez 125 podzieliwszy, otrzymamy na iloraz 3 setne części, i te na właściwém miejscu, to jest, obok dziesiętnych piszemy; z tego dzielenia pozostała reszta 75 jest części setnych, do których zero dopisawszy, będzie 750 tysięcznych części; podzieliwszy je przez 125, otrzymamy na iloraz 6 tysiącznych części, które obok setnych piszemy. A że po wykonaniu tego dzielenia reszta wypadła zero, więc działanie ukończone, i $\frac{17}{125} = 0{,}136$.

Dajmy jeszcze $\frac{26}{125}$ do zamienienia na ułamek dziesiętny.

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\begin{array}{r|l} 260 & 125 \\ \cline{2-2} 250 & 0{,}208 \\ \hline 1000 & \\ 1000 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Tu spostrzegamy, że do piérwszéj reszty dopisawszy zero, otrzymamy 100 części setnych, w których się nie mieści dzielnik, zatém dopisawszy jeszcze zero, otrzymamy 1000 części tysięcznych, z których podzielenia otrzymaliśmy 8 tysiącznych.

Nakoniec, weźmy $\frac{203}{125}$ do zamienienia na ułamek dziesiętny.

WZÓR DZIAŁANIA.

```
203 | 1 25
125 |------
----| 1,624
 780
 750
 ---
  300
  250
  ---
   500
   500
   ---
    0.
```

W tym przykładzie postrzegamy tylko to szczególnego, że ponieważ dzielnik 125 w całkowitéj 203 mieści się raz, zatém ten iloraz piszemy na całkowitą; tak téż być powinno, bowiem dany ułamek $\frac{203}{125}$ jest niewłaściwy, zawiera zatém całkowite. Dalej postępowaliśmy wskazaną drogą.

Z tego co poprzedziło takie prawidło wyprowadzamy na zamienianie ułamków zwyczajnych na ułamki dziesiętne.

Licznik dzieli się przez mianownik, otrzymany iloraz jest liczbą całkowitą; jeżeli zaś mianownik nie mieści się w liczniku, (kiedy jest właściwy ułamek), wtedy na całkowitą piszemy zero. Do otrzymanéj reszty dopisawszy zero, daléj odbywamy dzielenie; do następnéj reszty znów dopisujemy zero, i. t. n., aż do końca; a za każdym razem otrzymany iloraz cząstkowy dopisujemy w tym porządku jak w dzieleniu liczb całkowitych. Jeżeli zaś po dopisaniu zera do reszty, jeszcze się w niéj mianownik nie mieści, na iloraz pisze się zero, do reszty zaś dopisuje się drugie zero; gdyby i teraz mianownik nie mieścił się w téj tak powiększonéj reszcie, pisze się drugie zero w ilorazie i do reszty dopisuje się jeszcze zero.

Można téż na sam przód dopisać do licznika tyle zer ile się podoba; potém wykonywać dzielenie jakby liczb całkowitych; po ukończeniu zaś dzielenia odcina się w ilorazie tyle znaków na ułamek dziesiętny, ileśmy zer dopisali do licznika. Tak, gdybyśmy w powyższym przykładzie dopisali byli trzy zera, mielibyśmy 203000 dzielną większą tysiąc razy, więc z całości uczyniliśmy tysiączne części, iloraz więc otrzymany 1624 wyraża tysiączne części; a że 1000 takich części warte są jednę całość, zatém odciąwszy ją przecinkiem, mamy rzeczywiście 1,624 na iloraz.

92. W dzieleniu liczb całkowitych najczęściéj zdarza się, że dzielnik nie zupełnie mieści się w dzielnéj, a wtedy iloraz jest liczbą całkowitą z ułamkiem. Jeżeli chcemy ten ułamek wyrazić w częściach dziesiętnych, wtedy postępuje się tak, jak w ostatnim przykładzie poprzedzającego paragrafu. Kiedy dzielenie za daleko się przeciąga, wtedy zazwyczaj poprzestajemy na pewnéj liczbie znaków w ułamku dziesiętnym, nie szukając dalszych. Liczba znaków w ułamku, którą otrzymać mamy, zależy od tego, z jaką dokładnością iloraz mieć chcemy; przekonamy się bowiem, że im większą liczbę znaków w ułamku dziesiętnym zatrzymamy, tém iloraz, albo wartość ułamku dziesiętnego dokładniejszą będzie, czyli bardziéj zbliżoną do prawdziwéj wartości swojéj. Takie, niedokończone ułamki dziesiętne, nazywamy *przybliżonemi wartościami.*

Tak, np. gdybyśmy mieli podzielić 617 przez 203, wykonywając dzielenie wskazaną drogą, otrzymalibyśmy na iloraz, opuściwszy dalsze znaki 3,0394088. W tym ilorazie zatrzymawszy dwa znaki ułamku, byłoby 3,03; tu widzimy, że ta wartość jest mniejsza od prawdziwéj więcéj jak o $\frac{9}{1000}$; wziąwszy zaś 3,039, ta wartość mniejsza jest od rzeczywistéj więcéj jak $\frac{4}{10000}$ i t. d. Z tego już widzimy, że im więcéj znaków zatrzymamy w ułamku, tém wartość jest bardziéj przybliżona do prawdziwéj.

Uważać tu potrzeba, że poprzestając na dwóch znakach, popełnilibyśmy błąd prawie na $\frac{1}{100}$; zatém, gdybyśmy byli wzięli 3,04 zamiast 3,03, bylibyśmy mniejszy błąd popełnili. W ogólności: *kiedy znak ułamku stojący za znakiem ostatnim zatrzymanym, jest większy od 5, wtedy ten ostatni zatrzymany znak powiększa się o jedność, w innym razie zatrzymuje się go taki jaki jest.* Np. z poprzedzającego ilorazu, zatrzymując dwa, trzy, cztéry, pięć &. znaków, mielibyśmy: 3,04; 3,039; 3,0394; 3,03941 &.

Z tego pokazuje się, że *wykonywając dzielenie, potrzeba w ilorazie otrzymać więcéj jednym znakiem w ułamku, niżeli zatrzymać zamierzamy, a to dla ocenienia, czy ostatni zatrzymany mamy o jedność powiększyć, czy nie.*

93. *Skróciwszy ułamek zwyczajny tak, że licznik i mianownik będą liczbami piérwszemi względem siebie, ułamek taki wtedy tylko daje się zamienić na ułamek dziesiętny skończony, kiedy mianownik jego jest iloczynem z samych czynników 2 i 5.*

Dajmy $\frac{3}{8}$; ponieważ zamieniając ten ułamek na dziesiętny, licznik jego mnożemy przez 10, następnie resztę z dzielenia wypadłą przez 10 i t. d., czyli przez 2×5, zatém, zważając że $8=2\times2\times2$, będziemy mieli:

$$\frac{3\times(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)}{2\times2\times2\times10\times10\times10},$$

czyli $\frac{3\times2\times2\times2\times5\times5\times5}{2\times2\times2\times10\times10\times10}=\frac{3\times5\times5\times5}{1000}=\frac{375}{1000}$ zatém $\frac{3}{8}=0{,}375$.

94. *Ułamki dające zamienić się na skończone ułamki dziesiętne, dają tyle znaków na dziesiętny ułamek, z ilu czynników 2 lub 5 składa się ich mianownik.*

Tak np. zamieniwszy $\frac{1}{125}$ na ułamek dziesiętny, ponieważ $125 = 5 \times 5 \times 5$ będziemy mieli ułamek 0,008, złożony z trzech znaków. W wyjaśnieniu bowiem poprzedzającego twierdzenia widzimy, że licznik potrzeba trzy razy mnożyć przez 10, czyli trzy razy przez 2×5.

Ułamek $\frac{23}{500}$ można tak wypisać: $\frac{23}{4 \times 125}$, czyli $\frac{23}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5}$, gdzie ponieważ czynnik 5 wchodzi trzy razy w skład mianownika, przeto ułamek dziesiętny będzie zawierał trzy znaki. Jakoż, $\frac{23}{500} = \frac{46}{1000} = 0{,}046$.

95. *Kiedy mianownik zwyczajnego ułamku, prócz czynników 2 i 5, lub bez nich, zawiera inne czynniki, wtedy ułamek dziesiętny powstały z niego, będzie nieskończonym.* Ponieważ mnożąc licznik przez 10, żadną miarą nie wprowadzimy w niego innych czynników, prócz 2 i 5.

Zważając, że reszty otrzymywane w ciągu działania są mniejsze od dzielnika, wnosimy że po pewnéj liczbie odbytych cząstkowych dzieleń, przyjdziemy do otrzymanéj już reszty, a następnie do tych samych cząstkowych dzielnych i tych samych ilorazów. Zatém, w téj saméj kolei następować będą po sobie znaki ilorazu. Np. $\frac{1}{3} = 0{,}333$ &.; $\frac{5}{6} = 0{,}8333$ &.; $\frac{4}{11} = 0{,}3636$ &.

Takie ułamki dziesiętne, w których te same znaki i w tym samym porządku powracają, nazywają się ułamkami *zwrotowemi* czyli *peryodycznemi*. Gromadka liczb powracających w tym samym porządku, nazywa się *zwrotem* lub *peryodem*.

Liczba dzieleń odbyć się mających nim dojdzie się do końca zwrotu czyli peryodu, jest mniejsza od liczby jedności zawartych w mianowniku danego ułamka.

Jakoż, ułamek np. $\frac{3}{7}$, zamieniając na dziesiętny, odbywamy dzielenie przez 7; zatém reszty otrzymywane mogą być tylko 1, 2, 3, 4, 5 i 6; więc najwięcéj sześć dzieleń odbyć potrzeba, nim się dojdzie do końca zwrotu.

UŁAMKI ZWROTOWE.

96. Wiemy już, że ułamki dziesiętne, w których te same znaki i w tym samym porządku powracają, nazywają się *ułamkami zwrotowemi;* że gromadki złożone z tych samych znaków i w tym samym porządku, nazywają się *zwrotami.*

Zwroty obejmować mogą jeden, dwa, zgoła ilekolwiek znaków. Np. 0,333...., 0,242424....

Ułamek dziesiętny, w którym zwrot zaraz od przecinka poczyna się, nazywamy *ułamkiem zwrotowym prostym* jak np. 0,010101...; 2,5151....

Ułamkami zwrotowemi mięszanemi nazywamy takie, w których zwroty nie poczynają się zaraz od przecinka; np. 0,5121212....; 3,0323232.....

Dla wskazania, że ułamek jest zwrotowym, pisze się najwięcéj trzy zwroty, po których piszemy kilka kropek, jak to widzimy w powyższych przykładach.

97. *Dla zamienienia ułamku zwrotowego prostego na ułamek zwyczajny, potrzeba pod zwrotem podpisać za mianownik tyle dziewiątek, ile jest znaków w zwrocie.*

Na okazanie tego, weźmy ułamek 0,333.... Pomnożywszy go przez 10, będzie 3,333...., od tak powiększonego ułamka odjąwszy dany, to jest, 0,333..., otrzymana reszta 3 jest 9 razy większa od ułamku danego; zatém $\frac{3}{9}$ jest jego prawdziwą wartością; więc 0,333.... $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Weźmy jeszcze ułamek, 0,2424....; 24,2424.... jest sto razy większy od niego; od tak powiększonego odjąwszy dany ułamek, będzie 24, większe 99 razy od danego ułamku; zatém prawdziwa jego wielkość jest $0{,}2424.. = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$.

Podług tego mamy: $3{,}273273.... = 3\frac{273}{999} = 3\frac{91}{333}$.

98. Zobaczmy teraz jak ułamki zwrotowe mięszane zamieniają się na ułamki zwyczajne.

Niech będzie ułamek 0,235454....; ten ułamek można tak rozłożyć, $0{,}23 + 0{,}005454$. Drugą część jego, to jest, 0,005454... pomnożywszy przez 100, będziemy mieli ułamek zwrotowy prosty 0,5454..., którego wartość jest $\frac{54}{99}$; lecz ta jest 100 razy większa od 0,005454... zatém prawdziwa jego wartość jest $\frac{54}{99 \times 100}$; a że $0{,}23 = \frac{23}{100}$, zatém $0{,}23 + 0{,}005454...$ czyli $0{,}235454... = \frac{23}{100} + \frac{54}{99 \times 100}$. Te dwa ułamki sprowadziwszy do jednego mianownika, będzie: $\frac{23 \times 99}{99 \times 100} + \frac{54}{99 \times 100}$; a że $23 \times 99 = 23 \times 100 - 23$, zatém mamy $\frac{23 \times 100}{9900} + \frac{54}{9900} - \frac{23}{9900}$ czyli $\frac{2354}{9900} - \frac{23}{9900}$ $= 0{,}235454...$

Z tego widzimy, że, *aby ułamek zwrotowy mięszany zamienić na ułamek zwyczajny, potrzeba od liczby wskazanéj częścią przed zwrotem położoną i całym zwrotem, odjąć część przed zwrotém stojącą, i pod tą resztą podpisać za mianownik tyle dziewiątek ile zwrot zawiera znaków, po tych zaś tyle zer, ile znaków poprzedziło zwrot piérwszy.*

Uprościwszy powyższy wypadek będzie:

$$0{,}235454... = \frac{259}{1100}.$$

Podług tego prawidła mamy:

$$0{,}004242.... = \frac{42}{9900} = \frac{7}{1650};$$

$$3{,}0713636 = 3\frac{70635}{990000} = 3\frac{157}{2200}.$$

Licznik ułamku powstałego ze zwrotowego mięszanego, przed skróceniem, a tém bardziéj po skróceniu nie może kończyć się zerem; bowiem ostatni znak części przedzwrotowéj musiałby być równy ostatniemu znakowi zwrotu, a wtedy poczęlibyśmy zwrot nie z właściwego miejsca. Z tego więc pokazuje się, że *ułamek zwyczajny wtedy wydaje dziesiętny zwrotowy mięszany, kiedy mianownik jego zawiera jeden z czynników 2 lub 5, albo oba razem.* Albowiem, ułamek zwyczajny wprost ze zwrotowego mięszanego powstały, ma mianownik zakończony jedném lub kilkoma zerami, a że licznik jego nie może miéć zera na końcu; więc obu wyrazów takiego ułamku nie można dzielić przez 2 i przez 5, czyli przez 10; zatém przynajmniéj jeden z tych czynników pozostaje w mianowniku.

99. *Zwrot rozpoczyna się zaraz od przecinka, kiedy mianownik zwyczajnego ułamku, z którego powstaje zwrotowy, nie zawiera czynnika 2 lub 5.*

Że z takiego ułamku powstaje zwrotowy, tośmy już wyżéj widzieli; idzie teraz o to, żeby okazać, iż zwrot zaraz od przecinka poczyna się. Gdyby bowiem w mianowniku ułamku znajdował się czynnik 2 lub 5, wtedy (98), otrzymalibyśmy zwrotowy mięszany.

100. *W ułamku zwrotowym mięszanym część przed zwrotem stojąca zawiera tyle znaków, ile czynników 2 lub 5 znajduje się w mianowniku ułamku zwyczajnego, z którego ów mięszany powstaje.*

Ile bowiem znaków stoi przed zwrotem, tyle zer, nie więcéj ani mniéj, znajduje się w mianowniku zwyczajnego ułamku powstałego z ułamku zwrotowego: a że $10 = 2 \times 5$, $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$, $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ &.; a nad to, ponieważ licznika i mianownika takiego ułamku nie można dzielić zarazem przez 2 i przez 5, zatém jeden z tych czynników, to jest, 2 lub 5, wcale usuniętym z mianownika być nie może.

Uwaga. Kiedy w przybliżonéj wartości ilorazu zatrzymać mamy znaków dziesiętnego ułamku tyle, iż obejmuje całą część przedzwrotową, lub cały zwrot, albo większą jego część, wtedy nie należy stosować się do tego cośmy w 92 numerze powiedzieli, ale wypisać piérwszy przynajmniéj zwrot i wskazać, że to jest ułamek zwrotowy; chyba że zwrot jest bardzo długi.

PRZYKŁADY.

I. Kiedy od 100 płaci się na rok procentu 6, ile dochodu rocznego będzie od 5861 rubli? ($58{,}61\times6 = 5861\times0{,}06$).

II. Pręt mierniczy zawiera 7 łokci i stopę jednę, 274 prętów ile zawierają łokci? (2055 łok.).

III. Trzech kupców złożyli do wspólnego handlu: 1szy 9000 rubli; 2gi 7894,75 rubli; 3ci 8012,08; zarobili na tym handlu 0,3 całéj summy, ile każdy zarobił? (1szy 2700 rubli, 2gi 2368,425 rub., 3ci 2403,624 rub.).

IV. Pewien robotnik zarabiał dziennie 5 złotych i gr. 4, wydawał zaś na dzienne potrzeby 3 złot. gr. 22; za ile dni oszczędził 511 złot. (NB. Rozwiązać ułamkami dziesiętnemi. Odpo. za dni 365).

V. Robotnik zarabiając dziennie 5 zł. i gr. 4, wydawał na potrzeby dzienne 3 złote i gr. 22; po skończonym miesiącu (rachuje się 30 dni w miesiącu) zadłużył się 9 złot. gr. 10; ileż dni próżnował?

Rozwiązanie. Obliczyć ile wydał przez 30 dni; ponieważ dług zaciągnął, więc o tyle mniéj zarobił od tego co przeżył. Dowiedziawszy się ile zarobił, ponieważ znamy zarobek dzienny, łatwo znaleźć, że pracował dni 20, więc próżnował dni 10. NB. Cały rachunek prowadzić w ułamkach dziesiętnych.

VI. Jeden robotnik zrobił pewnéj roboty 34,692 stóp w dniach 8,4; drugi 34,95 st. w dniach 7,5; trzeci 34,968 st. w dniach 7,05; czwarty 34,068 st. w dniach 6,8; robiąc wspólnie za ile dni wszyscy cztérech ukończą robotę wynoszącą 281,4 stóp? (15 dni). NB. Zważać potrzeba, że robotnicy nie z równym pośpiechem pracują.

VII. Handlarz zakupil 450 centnarów towaru po 12,65 Rsr., który sprowadził do domu odległego na 5,5 mil; od 12 cent. płacił za przewóz na milę po 0,48 rubli; kiedy na 100 wydanych pieniędzy za towar i sprowadzenie, chciał mieć zysku 15, po ile centnar powininien sprzedawać? (Po 14,8 rubli).

VIII. Biorąc procentu 6 od 100 na rok, ile przypadnie od 3518,27 rubli za lat 2 i miesięcy 5?

Rozwiązanie. Kiedy na rok 6 od sta, na jeden miesiąc przypada $\frac{6}{12} = 0{,}5$; teraz łatwo obliczyć za czas wskazany. (Odp. 510,149 rubli.) NB. Przypadające mnożenie wykonać skróconym sposobem, dla otrzymania trzech znaków ułamku dziesiętnego.

IX. Ugodziwszy się 5 od sta, po upływie dwóch lat i miesięcy 6 odebrano procentu 500 rubli; jaka summa wypożyczoną była? (Odp. 4000 rubli).

X. Z jakiego ułamku zwyczajnego powstał ułamek 0,05123123...?

XI. Ułamek $\frac{17}{18}$ zamienić na ułamek dziesiętny.

O UŁAMKACH CIĄGŁYCH.

101. Ułamek zwyczajny ostatecznie uproszczony, czyli ułamek którego licznik i mianownik są liczbami piérwszemi między sobą, nie daje nam jasnego pojęcia, na piérwsze wejrzenie, o wartości swojéj, jeżeli oba jego wyrazy są liczbami wielkiemi; np. $\frac{279}{655}$ złotego. Lecz podzieliwszy licznik i mianownik tego ułamku przez jego licznik 279, otrzymamy: $\frac{279}{655} = \frac{1}{\frac{655}{279}}$, czyli $\frac{1}{2+\frac{97}{279}}$. W mianowniku tego ułamku zaniechawszy części ułamkowéj $\frac{97}{279}$, otrzymalibyśmy ułamek $\frac{1}{2}$, większy od danego, bowiem mianownik 2 jest mniejszy od $2+\frac{97}{279}$. Gdybyśmy zaś w miejsce ułamku $\frac{97}{279}$ położyli 1, otrzymalibyśmy $\frac{1}{3}$, ułamek od danego mniejszy. Zatém wartość danego ułamku jest zawarta między $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$. Teraz dopiéro mamy pojęcie o wartości ułamku danego $\frac{279}{655}$.

Z ułamkiem $\frac{97}{279}$ postąpiwszy jakeśmy uczynili z danym, będzie: $\frac{97}{279} = \frac{1}{\frac{279}{97}} = \frac{1}{2+\frac{85}{97}}$; zatém

$$\frac{279}{655} = \frac{1}{2+\frac{97}{279}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{85}{97}}}.$$

Lecz w rozwinięciu $\frac{1}{2+\frac{85}{97}}$ opuściwszy $\frac{85}{97}$, pozostanie tylko $\frac{1}{2}$, oczywiście większe od $\frac{97}{279}$; zatém $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ mniejsze jest od $\frac{1}{2+\frac{97}{279}}$, to jest, od danego ułamku. Aże $\frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}}$ czyli $\frac{2}{5}$, zatém wartość danego ułamku zawarta jest między ułamkami $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{5}$. Te dwa ułamki odjąwszy od siebie, znajdziemy różnicę $\frac{1}{10}$; więc biorąc $\frac{2}{5}$ za wartość danego ułamku, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{10}$.

Z ułamkiem $\frac{85}{97}$ postąpiwszy jak wyżéj, znajdziemy $\frac{85}{97} = \frac{1}{1+\frac{12}{85}}$; więc będzie: $\frac{279}{655} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{12}{85}}}}$.

W rozwinięciu $\dfrac{1}{1+\frac{12}{85}}$ opuściwszy $\frac{12}{85}$, będzie $\frac{1}{1}$ czyli 1 większe od $\frac{85}{97}$, a następnie $\dfrac{1}{2+\frac{85}{97}}$ czyli $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{12}{85}}}$, ma większą wartość niż $\dfrac{1}{2+\frac{1}{1}}$ czyli $\frac{1}{3}$; więc $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}}}$, jest większe od $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{12}{85}}}}$, czyli od $\frac{279}{655}$. Ułamek $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}$; czyli $\dfrac{1}{2+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\frac{7}{3}}$ albo $\frac{3}{7}$, jest większy od danego, a że poprzednia jego przybliżona wartość $\frac{2}{5}$ jest mniejsza, zatém wartość danego ułamku $\frac{279}{655}$ zawarta jest między $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{7}$. Różnica między temi ułamkami jest $\frac{1}{35}$; więc za dany ułamek biorąc $\frac{3}{7}$, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{35}$.

Tak daléj postępując, znajdziemy:

$$\frac{279}{655}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12}}}}}$$

w którym odrzuciwszy $\frac{1}{12}$ pozostanie:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}}=\frac{23}{54},$$

mniejsze od danego ułamku. Wziąwszy zaś wszystkie części tego ułamku, i podobnym sposobem uczyniwszy z niego ułamek zwyczajny; powrócimy do danego $\frac{279}{655}$.

102. Takie rozwinięcie ułamku zwyczajnego nazywa się *ułamkiem ciągłym* (Непреривная дробь). Widzimy więc, że ułamek ciągły składa się z ułamków, wskazanym sposobem powiązanych z sobą, z których każdy ma 1 za licznik, mianowniki zaś mogą być wszelkie liczby, nawet 1.

Pojedyncze ułamki w skład ułamku ciągłego wchodzące, nazywają się *ułamkami cząstkowemi* (частная дробь), każdy zaś mianownik takowego ułamku zowie się *ilorazem niezupełnym* (неполное частное), dla tego, że na przykład w $\frac{1}{\frac{279}{97}} = \frac{1}{2+\frac{85}{97}}$, $2+\frac{85}{97}$ jest ilorazem zupełnym; zatém 2 jest ilorazem niezupełnym.

103. Kiedy ułamek zwyczajny niewłaściwy zamienimy, podług podanego sposobu w 101 num. na ułamek ciągły, otrzymamy liczbę całkowitą i ułamek ciągły. Tak, np. $\frac{565}{297} = 1 + \frac{268}{297}$; ułamek $\frac{268}{297}$ rozwinąwszy na ułamek ciągły będzie:

$$\frac{565}{297} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}$$

Nakształt dziesiętnego ułamku, w ułamku ciągłym pisze się zawsze liczba całkowita, chociażby była zerem. Tak w rozwinięciu ułamku $\frac{279}{655}$, piszemy:

$$0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12.}}}}}$$

104. Przypatrzywszy się bliżéj działaniom w numerze 101 odbywanym, postrzeżemy łatwo, że, dla otrzymania ilorazów niezupełnych, czyli mianowników w ułamkach cząstkowych, postępuje się tak, jak przy szukaniu największego wspólnego dzielnika dwóch liczb; za każdém zaś odbytém dzieleniem otrzymany iloraz jest ilorazem niezupełnym. Jak się zaś rachunek prowadzi, na następującym przykładzie pokażemy. Niech będzie ułamek zwyczajny $\frac{5021}{5403}$ do zamienienia na ułamek ciągły.

WZÓR DZIAŁAŃ.

		1	13	6	1	17	3	Ilorazy niezupełne.
Dzielne	5403	5021	382	55	52	3	1	Dzielniki.
	5021	4966	330	52	51	3		
Reszty	382	55	52	3	1	0		

Z tego mamy:

$$\frac{5021}{5403}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

Objaśnienie. W piérwszym wierszu umieszczone są ilorazy wypadłe z po sobie następujących dzieleń. W drugim wierszu są dzielne i dzielniki; bo każda z liczb znajdujących się w tym wierszu jest dzielną, prócz ostatniéj 1, która jest tylko dzielnikiem; a prócz piérwszéj 5403, wszystkie inne są dzielnikami. Te dzielniki dzielą liczby obok nich po lewéj ręce położone, a ztąd ilorazy wypadłe piszą się nad swemi dzielnikami. W wierszu czwartym są reszty otrzymane w dzieleniu, któreto reszty są dzielnikami poprzedzających dzielników, za dzielne kolejno uważanych.

Uwaga. Z poprzedzającego działania widzimy, że ostatni ułamek cząstkowy nie może miéć za mianownik jedności, zatém najmniéj 2.

105. Widzieliśmy w num. 101, że wartość ciągłego ułamku tém bardziéj przybliża się do prawdziwéj wartości, im więcéj bierzemy ułamków cząstkowych składających ciągły; stąd wypada, że ta wartość jest prawdziwa, kiedy całe rozwinięcie ułamku ciągłego uważać będziemy. Nad to, w tymże numerze pokazało się, iż wartości te są na przemian mniejsze i większe od prawdziwéj wartości; a mianowicie, *uważając i całkowitą wchodzącą w skład ułamku ciągłego, wszystkie wartości na miejscach nieparzystych są mniejsze, wszystkie zaś na miejscach parzystych są większe od wartości prawdziwéj ułamku zwyczajnego, którego ciągły jest rozwinięciem.* Tak w powyższym przykładzie mamy wartości:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \text{ mniejszą,} \\[2ex] 0+\dfrac{1}{1} \text{ większą,} \\[3ex] 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13}} \text{ mniejszą,} \\[5ex] 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{6}}} \text{ większą,} \end{array}\right\} \text{od } \frac{5021}{5405}$$

106. Wartości przybliżone ułamku ciągłego, wyrażone w ułamku zwyczajnym, nazywają się *przywróconemi wartościami*, albo krótko *przywróconemi* (reduktami).

Zobaczmy jak się te *przywrócone* otrzymują. Rozwinąwszy ułamek $\frac{371}{151}$ w ułamek ciągły, otrzymamy:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}$$

Piérwsza przywrócona jest 2; druga $2+\frac{1}{2}$, czyli $\frac{5}{2}$. Wziąwszy następnie $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}$ i włączywszy 2 w ułamek $\frac{1}{5}$, będzie $\frac{11}{5}$, zatém $2+\cfrac{1}{\frac{11}{5}}$, czyli $2+\frac{5}{11}$, albo $\frac{27}{11}$ jest trzecią przywróconą. Podobnie postępując daléj, mamy:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}}=2+\cfrac{1}{2+\frac{3}{16}}=2+\frac{16}{35}=\frac{86}{35};$$ nareszcie z całego rozwinięcia otrzymamy na ostatnią przywróconą ułamek dany $\frac{371}{151}$.

Ta droga otrzymywania przywróconych jest długa i mozolna, zwłaszcza kiedy ułamek ciągły jest długi; zobaczmy dogodniejszy sposób. Z poprzedzających działań mamy przywrócone po sobie idące, takie: $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{27}{11}$, $\frac{86}{35}$, $\frac{371}{151}$. Piérwszéj przywróconéj, która jest całkowitą, często zerem, podpisaliśmy za mianownik 1, czego powód zaraz zobaczymy.

Przywróconéj trzeciéj podzieliwszy licznik przez licznik przywróconéj drugiéj, zachowując resztę, będziemy mieli: $27:5=5$ z pozostałą resztą 2, zatém $27=5\times5+2$; skąd widzimy że, *aby otrzymać licznik 27 trzeciéj przywróconéj, potrzeba przez iloraz niezupełny 5, na którym zatrzymaliśmy się w ułamku ciągłym, pomnożyć licznik drugiéj przywróconéj, i do tego iloczynu dodać licznik piérwszéj przywróconéj.* Podobnież, mianownik przywróconéj trzeciéj podzieliwszy przez mianownik przywróconéj drugiéj, zachowując resztę, będzie: $11:2=5$ z pozostałą resztą 1; zatém, $11=2\times5+1$; skąd widzimy, że *dla otrzymania mianownika 11 przywróconéj trzeciej, potrzeba przez iloraz niezupełny 5, na którym zatrzymaliśmy się w ułamku ciągłym, pomnożyć mianownik przywróconéj drugiéj, a ten iloczyn powiększyć mianownikiem piérwszéj przywróconéj.*

Zatrzymawszy się na ilorazie niezupełnym 3 następującym po 5, otrzymaliśmy przywróconą z porządku czwartą $\frac{86}{35}$. Postępując tak jakeśmy to dopiéro robili, znajdziemy $86=27\times3+5$, i $35=11\times3+2$. Tu widzimy, że prawo podług którego tworzą się licznik i mianownik przywróconéj czwartéj z dwóch poprzedzających, jest zupełnie to samo, podług którego tworzą się oba wyrazy przywróconej trzeciéj z dwóch poprzedzających. To prawo, ogólne dla każdéj przywróconéj, jest takie. *Licznik któréjkolwiek przywróconéj tworzy się, mnożąc przez iloraz niezupełny odpowiadający jéj, licznik poprzedzający ją przywrócony i otrzymany iloczyn powiększając licznikiem przywróconéj tuż przed poprzedzającą położonéj. Mianownik takim samym sposobem tworzy się, wykonywając działania na mianownikach dwóch przywróconych przed otrzymać się mającą stojących.*

Podług tego prawa znajdziemy przywrócone następującego ułamku ciągłego:

$$\frac{71}{238}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4}}}}}$$

Dwie piérwsze przywrócone są $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$; następująca odpowiadająca ilorazowi niezupełnemu 2, będzie $\frac{1\times2+0}{3\times2+1}=\frac{2}{7}$. Czwarta przywrócona odpowiadająca ilorazowi niezupełnemu 1, jest $\frac{2\times1+1}{7\times1+3}=\frac{3}{10}$. Piąta odpowiadająca ilorazowi niezupełnemu 5, jest $\frac{3\times5+2}{10\times5+7}=\frac{17}{57}$. Nareszcie ostatnia odpowiadająca ilorazowi niezupełnemu 4, jest $\frac{17\times4+3}{57\times4+10}=\frac{71}{238}$, która jest danym ułamkiem.

107. Z ułamku ciągłego:

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

mamy przywrócone następujące $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{8}{47}$, $\frac{9}{53}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{111}{663}$ i $\frac{461}{2712}$. Różnice między niemi są:

$$\frac{1}{5}-\frac{0}{1}=\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{5\times6}-\frac{5}{5\times6}=\frac{1}{5\times6};$$

$$\frac{8}{47}-\frac{1}{6}=\frac{48-47}{47\times6}=\frac{1}{47\times6};\ \frac{8}{47}-\frac{9}{53}=\frac{424-423}{47\times53}=\frac{1}{47\times53};$$

i t. d.

Widzimy stąd, że *różnice zachodzące pomiędzy przywróconemi po sobie następującemi, są ułamkami, których licznikiem jest 1, mianownikiem zaś iloczyn z mianowników tychże przywróconych.*

Wnosimy więc, że *stopień przybliżenia wartości przywróconéj jest większy od ułamku mającego za licznik 1, a za mianownik iloczyn z mianownika téjże przywróconéj przez mianownik poprzedzającéj ją przywróconéj.*

A że iloczyn z mianowników przywróconych po sobie następujących jest większy od dwumnożnéj (numer 28) mianownika przywróconéj poprzód stojącéj; *zatém, témbardziéj, stopień przybliżenia wartości przywróconéj jest większy od ułamku mającego za licznik 1, a za mianownik dwumnożną przywróconéj poprzedniéj.*

Dajmy np. że chcemy mieć przywróconą z poprzedzającego przykładu, przybliżoną do $\frac{1}{1000}$. Ponieważ dwumnożna mianownika przywróconéj $\frac{1}{6}$ jest $6 \times 6 = 36$, zatém następującéj przywróconéj $\frac{8}{47}$ nie możemy wziąść za wartość żądaną. Lecz dwumnożna mianownika ułamku $\frac{8}{47}$, jest $47 \times 47 = 2209$, więc przywróconą $\frac{9}{53}$ bierzemy za wartość żądaną przybliżoną, bowiem ta zbliża się do wartości prawdziwéj bardziéj nawet niż o $\frac{1}{2209}$.

108. *Wartość ułamku ciągłego wyrażona jest ułamkiem zwyczajnym ostatecznie uproszczonym, to jest, niemogącym być skróconym.* Jakoż, z działań odbytych w num. 104 widzimy, że ilorazy otrzymywane są mianownikami cząstkowych ułamków; dzielnik zaś ostatni jednością; a gdyby był liczbą różną od jedności, ten nie wchodzi do składu ułamku ciągłego, który, podług num. 52, byłby największym wspólnym dzielnikiem licznika i mianownika danego zwyczajnego ułamku. Dajmy np. ułamek $\frac{1476}{2664}$, (który można skrócić, dzieląc jego wyrazy przez 36), do obrócenia na ułamek ciągły. Postępując podanym sposobem w num. 104 będzie:

	1	1	4	8
2664	1476	1188	288	36
1476	1188	1152	288	
1188	288	36	0	

Widzimy, że w tym przykładzie ostatni dzielnik jest 36. Rozwinięcie danego ułamku jest:

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8}}}}$$

przywrócone zaś $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{41}{74}$. Gdybyśmy dany ułamek $\frac{1476}{2664}$ skrócili, dzieląc oba jego wyrazy przez 36, bylibyśmy otrzymali taki sam ułamek jak ostatnia przywrócona. Pokazuje się więc, że częstokroć dogodniéj będzie skracać ułamki przez zamienienie ich na ciągłe, i wynalezienie ostatniéj przywróconéj.

O ułamkach ciągłych powiedzieliśmy tyle ile należy do zakresu Arytmetyki. Inne, bardzo ważne i wielce zajmujące własności i zastosowania ułamków ciągłych, mogą być poznane w wyższych częściach nauki rachunku. Tam przekonać się można, że są ciągłe ułamki nigdy nie kończące się; ale takich źródłem nie są zwyczajne ułamki.

PODNOSZENIE LICZB DO POTĘG
I WYCIĄGANIE Z NICH PIERWIASTKÓW.

109. Potęgą (Степень) nazywamy liczbę będącą iloczynem z innéj liczby wziętéj za czynnik dwa, trzy &. razy. Np. liczba 4 jest potęgą drugą (zob. numer 28) liczby 2, bowiem $2\times2=4$; liczba 16 jest potęgą czwartą liczby 2; ponieważ $2\times2\times2\times2=16$. Dla wskazania, że liczba ma być podniesiona do pewnéj potęgi, pisze się nad nią po prawéj stronie liczbę wyrażającą potęgę: tak np. $2^4=16$.

Liczba wskazująca potęgę, nazywa się *wykładnik potęgi* (Показатель). Tak np. w wyrażeniu 3^5, liczba 5 jest wykładnikiem potęgi piątéj liczby 3.

Liczba z któréj powstaje potęga nazywa się *pierwiastkiem* (Корень). Tak 2 jest pierwiastkiem kwadratowym ze 4; i znów 4 jest pierwiastkiem potęgi drugiéj ze 16.

Rachunek ogólny czyli Algebra zajmuje się nauką o wszelkich potęgach i pierwiastkach; Arytmetyka podaje sposoby podnoszenia liczb do potęgi drugiéj i trzeciéj, i wynajdowania pierwiastków tychże potęg.

PODNOSZENIE LICZB DO KWADRATU I WYCIĄGANIE Z LICZB PIERWIASTKÓW KWADRATOWYCH.

PODNOSZENIE DO KWADRATU.

110. Iloczyn z dwóch czynników równych nazywa się *kwadratem* lub *potęgą drugą* (Квадратъ); czynnik zaś z którego kwadrat powstaje, nazywa się *pierwiastkiem kwadratowym* (квадратный корень) lub *potęgi drugiéj*. Tak kwadrat jak i jego pierwiastek może być liczbą całkowitą, ułamkiem zwyczajnym lub ułamkiem dziesiętnym.

Dla wskazania, że liczba ma być podniesiona do kwadratu, kładzie się powyżéj z prawéj strony liczbę 2, np. 8^2 znaczy 8×8; $0{,}15^2$ znaczy $0{,}15\times0{,}15$. Dla oznaczenia, że ułamek zwyczajny ma być do kwadratu podniesiony, obejmuje się oba jego wyrazy nawiasem, i dopiéro zewnątrz niego pisze się 2, na przykład $(\frac{2}{3})^2$ co znaczy $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$; częstokroć bowiem tylko licznik, lub tylko mianownik podnosi się do kwadratu; dla tego też $\frac{2^2}{3}$ znaczy $\frac{2\times2}{3}$; zaś $\frac{2}{3^2}$ znaczy $\frac{2}{3\times3}$.

111. Kwadraty z dziesięciu piérwszych liczb jako też ich pierwiastki są łatwe do spamiętania; mamy bowiem:

Pierwiastki; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Kwadraty liczb większych od 10 otrzymać można przez zwyczajne mnożenie, lecz tą drogą otrzymane nie podają nam sposobu wyciągania z nich pierwiastku.

112. Dla wyprowadzenia prawidła podług którego wyciąga się pierwiastek kwadratowy z liczb większych od 10, potrzeba wskazać prawo tworzenia się kwadratów. Na sam przód uczynimy tę uwagę: że *kwadrat zawiera najwięcéj dwa razy tyle znaków ile jego pierwiastek*. Jakoż, $9^2=81$; $99^2=9801$; $999^2=998001$ i t. d. Daléj uważamy i to, że *wszelka liczba mająca zera na końcu, w kwadracie daje liczbę zakończoną na dwa razy tyle zer, ile ich miała w pierwiastku*. Przez zwykłe mnożenie przekonywamy się, że np. $20^2=400$; $500^2=250000$ &.

I ta prawda potrzebna nam będzie: *kwadrat z iloczynu pewnéj liczby czynników, jest iloczynem z kwadratów tychże czynników.* Jakoż, ponieważ $(2\times3)^2 = 2\times3\times2\times3$, czyli $2\times2\times3\times3$, zatém $(2\times3)^2 = 2^2\times3^2$; podobnież $50^2 = 5^2\times10^2 = 25\times100$. Więc odwrotnie: *pierwiastek z iloczynu danych czynników jest równy iloczynowi z pierwiastków, tychże czynników* jak np. $4\times9 = 36$, wróciwszy do pierwiastków, mamy $2\times3 = 6$; i pierwiastek ze 36 jest 6.

113. Wprzód nim przystąpimy do wskazania składu kwadratu, zobaczymy skład iloczynu z dwóch czynników rozłożonych na dwie liczby. Dajmy że mamy do pomnożenia 8 przez 7; rozłożywszy 7 na $3+4$, będziemy mieli $8\times7 = 8\times3 + 8\times4$; rozłożywszy znów 8 na $6+2$, będzie $8\times3 = 6\times3 + 2\times3$ i $8\times4 = 6\times4 + 2\times4$; więc ostatecznie $8\times7 = 6\times3 + 2\times3 + 6\times4 + 2\times4$. Ztąd takie mamy prawidło: *Iloczyn z dwóch czynników, z których każdy składa się z dwóch liczb, jest ogółem cztérech iloczynów takich, że dwa są iloczynami z jednéj części piérwszego czynnika przez obie części drugiego, dwa pozostałe są iloczynami z drugiéj części piérwszego czynnika przez obie części czynnika drugiego.*

Podług tego we 24^2 czyli 24×24, rozebrawszy czynniki na $20+4$, będzie $20\times20 + 20\times4 + 4\times20 + 4\times4$; a że $20\times20 = 20^2$, $4\times4 = 4^2$, zaś oba iloczyny 20×4 i 4×20 są sobie równe, więc ich ogół jest równy jednemu z nich podwojonemu; zatém ostatecznie mamy: $24^2 = 20^2 + 2\times20\times4 + 4^2$. Z tego wyprowadzamy takie prawo tworzenia się kwadratu. *Kwadrat ze wszelkiéj liczby dwuznakowéj, składa się ze trzech części, to jest, z kwadratu dziesiątków, podwójnego iloczynu z dziesiątków przez* *jedności, i z kwadratu jedności.* Stosownie do tego mamy: $86^2 = 80^2 + 2 \times 80 \times 6 + 6^2 = 6400 + 960 + 36 = 7396$.

114. To prawo jest ogólne i zasadnicze, tak dalece, że podług niego rozwijają się kwadraty z liczb ilekolwiekznakowych. Rozwińmy kwadrat z liczby 3749. Tę liczbę rozłożyć możemy na $3740 + 9$, to jest na 374 dziesiątków i 9 jedności. Podług prawa ogólnego mamy: $3749^2 = 3740^2 + 2 \times 3740 \times 9 + 9^2$. Liczbę 3740 rozłożywszy na 370 dziesiątków i 40 jedności, czyli na 3700 i 40, będzie: $3740^2 = 3700^2 + 2 \times 3700 \times 40 + 40^2$; tę wartość wstawiwszy w rozwinięcie piérwsze, będziemy mieli: $3749^2 = 3700^2 + 2 \times 3700 \times 40 + 40^2 + 2 \times 3740 \times 9 + 9^2$. Lecz liczbę 3700 możemy jeszcze rozłożyć na 300 dziesiątków i 700 jedności, czyli na 3000 i 700; więc znów mieć będziemy, $3700^2 = 3000^2 + 2 \times 3000 \times 700 + 700^2$; położywszy więc to rozwinięcie w powyższe, znajdziemy ostatecznie: $3749^2 = 3000^2 + 2 \times 3000 \times 700 + 700^2 + 2 \times 3700 \times 40 + 40^2 + 2 \times 3740 \times 9 + 9^2$.

Pamiętając na to cośmy w num. 112 powiedzieli, postrzegamy, że w piérwszéj części tego rozwinięcia, po wykonaniu wskazanego działania, będzie *sześć zer* na końcu, w drugiéj *pięć*, w trzeciéj *cztéry*, w czwartéj *trzy*, w piątéj *dwa*, w szóstéj *jedno*, w siódméj, to jest ostatniéj, żadnego nie ma zera. Po wykonaniu wskazanych działań, podpisując pod sobą tę części kwadratu dla zebrania ich w ogół, możemy zera opuścić; lecz wtedy niższe części występować będą o jeden znak naprzód względem poprzedzającéj, a to dla tego, żeby jedności stały pod jednościami i. t. d. Podług tego będziemy mieli:

$$\begin{array}{rcr}
3000^2 & = & 9 \\
2\times3000\times700 & = & 42 \\
700^2 & = & 49 \\
2\times3700\times40 & = & 296 \\
40^2 & = & 16 \\
2\times3740\times9 & = & 6732 \\
9^2 & = & 81 \\
\hline
3749^2 & = & 14055001
\end{array}$$

Zapatrzywszy się na ogołocone z zer liczby składające powyższy kwadrat, czyli nie zważając na zera, takie ogólne prawo wyprowadzamy na podnoszenie wszelkich liczb do kwadratu. *Kwadrat z liczby ilekolwiekznakowéj składa się: z kwadratu najwyższych jedności, podwójnego iloczynu z tychże jedności przez jedności bezpośrednio niższego rzędu, z kwadratu tychże jedności niższych; z podwójnego iloczynu liczby złożonéj ze znaków dwóch poprzednich jedności przez tuż następujące jedności, kwadratu tychże następnie niższych jedności i t. d.; aż nakoniec z kwadratu ostatniego znaku na prawéj stronie liczby danéj stojącego.*

Podług tego prawidła mamy: $24736^2=2^2+2\times2\times4+4^2+2\times24\times7+7^2+2\times247\times3+3^2+2\times2473\times6+6^2$; (pamiętając, że w tém rozwinięciu opuszczone są zera). Wykonawszy naznaczone działania, będzie:

$$\begin{array}{rcr}
2^2 & = & 4 \\
2\times2\times4 & = & 16 \\
4^2 & = & 16 \\
2\times24\times7 & = & 336 \\
7^2 & = & 49 \\
2\times247\times3 & = & 1482 \\
3^2 & = & 9 \\
2\times2473\times6 & = & 29676 \\
6^2 & = & 36 \\
\hline
24736^2 & = & 611869696
\end{array}$$

Uwaga I. Kiedy między znakami składającemi liczbę podnoszoną do kwadratu znajduje się 5, wtedy w częściach składowych tego kwadratu, prócz zer końcowych, któreśmy opuszczali, znajdują się zera wynikłe z pomnożenia 5 przez liczby parzyste. Wtedy podpisując pod sobą części kwadratu dla zebrania ich w ogół, zera powstałe z pomnożenia 5 zajmują miejsca właściwe, jakoby były znakami mającemi własną wartość. Tak np. układając kwadrat z liczby 254, mamy:

$$\begin{array}{rl} 2^2 & = 4 \\ 2\times2\times5 & = 20 \\ 5^2 & = 25 \\ 2\times25\times4 & = 200 \\ 4^2 & = 16 \\ \hline 254^2 & = 64516 \end{array}$$

Uwaga II. Z powyższych przykładów widzimy, że *liczba części, z których składa się kwadrat, jest o jeden mniejsza od podwojonéj liczby znaków wchodzących w daną liczbę do podniesienia do kwadratu.* Zatém, *liczba części składających kwadrat jest nieparzysta.*

115. Powiedzieliśmy w num. 110, że z ułamku zwyczajnego otrzymuje się kwadrat, podnosząc jego licznik i mianownik do kwadratu. Jeżeli więc te wyrazy ułamku są liczbami kilkoznakowemi, podnoszenie ich do kwadratu ulega powyższemu prawidłu.

Dla tego, że w iloczynie z dwóch dziesiętnych ułamków odcina się tyle znaków, ile ich jest razem w obu czynnikach: *w kwadracie z ułamku dziesiętnego jest dwa razy tyle znaków, ile ich pierwiastek zawiera.* Więc *w kwa-*

dracie z ułamku dziesiętnego jest parzysta liczba znaków. Zatém, *ułamek dziesiętny zawierający nieparzystą liczbę znaków, nie jest kwadratem z żadnego ułamku dziesiętnego.*

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO.

116. Jużeśmy powiedzieli, że pierwiastkiem kwadratowym pewnéj liczby jest liczba, z któréj powstał kwadrat. Wyciąganie więc pierwiastków kwadratowych z liczb, jest działanie przez które znajdujemy liczbę, która pomnożona przez siebie samą, daje na kwadrat liczbę daną.

Dla wskazania, że z danéj liczby ma być wyciągnięty pierwiastek kwadratowy, pisze się obok téj liczby z lewéj strony znak $\sqrt{}$; np. $\sqrt{16}$ znaczy, że ze 16 potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

117. Z liczb dwuznakowych, jeżeli są zupełnemi kwadratami, łatwo jest wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, pamiętając tylko z któréj liczby jednoznakowéj powstał dany kwadrat. Również nie trudno jest znaleźć pierwiastek z liczb 100, 10000, &c. w ogóle z liczb złożonych z jedności i parzystéj liczby zer, pamiętając że w kwadracie jest dwa razy więcéj zer jak w pierwiastku.

Ponieważ $400 = 4 \times 100$ czyli $400 = 2^2 \times 10^2$, zatém, (num. 112). $\sqrt{400} = 2 \times 10 = 20$; skąd pokazuje się, *że gdy liczba zakończona jest parzystą liczbą zer, nie zważając na nie, wyciągamy pierwiastek kwadratowy z liczby pozostałéj po opuszczeniu zer, a do otrzymanego pierwiastku dopisujemy połowę tych zer, które były w kwadracie.* Podług tego mamy $\sqrt{360000} = 600$.

118. Pamiętając części z których składa się kwadrat, nie trudno będzie pojąć sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego z liczb więcéj niż dwuznakowych.

Wyciągnijmy pierwiastek kwadratowy z liczby 676. Widzimy, że ten kwadrat powstał z liczby dwuznakowéj (num. 112), zatém składa się ze trzech części (num. 113). A że w kwadracie z dziesiątków na końcu są dwa zera:

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\sqrt{6.76} = 26} \\
4 & 4 \\
\hline
27.6 & 6 \\
\cline{2-2}
24 & 24 \\
\hline
36 & 62 \\
36 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

więc dwa ostatnie znaki odcinamy kropką, jako zajmujące miejsce zer; w pozostałéj więc liczbie 6 zawarty jest kwadrat z dziesiątków. Najbliższy kwadrat stojący przed 6, jest 4; pierwiastek jego 2, piszemy po znaku równości, pod nim zaś tenże podwojony pierwiastek, to jest 4. Kwadrat z dwóch odjąwszy od 6, i do reszty spuściwszy odcięte dwa znaki, znajdziemy 276, w któréjto liczbie zawiera się podwójny iloczyn z dziesiątków przez jedności i kwadrat z jedności. A że w iloczynie z dziesiątków przez jedności znajduje się na końcu zero, przeto w liczbie 276 oddzielamy kropką ostatni znak, i pozostałe 27 dzielimy przez 4, podwojone dziesiątki pierwiastku; iloraz 6 jest jednościami pierwiastku. Pomnożywszy więc 4 przez 6, ten podwójny iloczyn z dziesiątków przez jedności, to jest, 24 odjąwszy od 27, i do reszty spuściwszy oddzielone 6, pozostanie 36 kwadrat z jedności; więc 6 podniosłszy do kwadratu, co czyni 36, i odjąwszy od pozostałych 36, otrzymamy na ostatnią resztę zero; zatém 26 jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby 676.

Zamiast odejmować oddzielnie podwójny iloczyn z dziesiątków pierwiastku przez jego jedności, a potém kwadrat z jedności, można dopisać do podwójnych dziesiątków znalezione jedności, skąd będzie 46, i tę liczbę pomnożyć przez 6 jedności, a iloczyn 276 zawierać będzie dwie ostatnie części kwadratu. W tym razie, zwykle nawet, tak porządkuje się robota.

$$
\begin{array}{r|r}
\sqrt{6.76} = 26 & \\
\underline{4} & 46 \\
27.6 & \underline{6} \\
\underline{276} & 276 \\
0 &
\end{array}
$$

Mając wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 5635876, uważam naprzód, że ponieważ ten kwadrat złożony jest ze siedmiu znaków, powstać musiał z pierwiastku złożonego ze cztérech, (numer 112); nadto, zawiera siedm części (zob. Uwaga II w num. 114), między któremi cztéry kwadraty. Mianowicie, kwadrat z tysiąców ma na końcu sześć zer, więc sześć znaków miejsca ich zajmujące odciąć potrzeba; kwadrat ze stów, zawiera na końcu cztéry zera, więc cztéry znaki miejsca ich zajmujące odciąć potrzeba od tych sześciu; kwadrat z dziesiątków mający na końcu dwa zera, więc znów z tych cztérech potrzeba odciąć dwa znaki; w pozostałych dwóch zawarty jest kwadrat z jedności. Stąd widzimy, że przystępując do wyciągania pierwiastku kwadratowego z pewnéj liczby, *potrzeba ją przedewszystkiém rozdzielić na przedziałki po dwa znaki zawierające, poczynając od prawéj strony, tak więc ostatnia przedziałka po lewéj stronie może zawierać tylko jeden znak.*

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\sqrt{5.63.58.76} = 2\,374$$

```
 4
 16.3
 129
   345.8
   3269
     1897.6
     18976
         0.
```

4.3	46.7	474.4
3	7	4
129	3269	18976

W piérwszym wierszu tego wzoru mamy wypisany kwadrat, w którym przedziałki oznaczone są kropkami; po znaku równości piszą się znalezione znaki pierwiastek składające; pod pierwiastkiem są podwójne wynalezione kolejno pierwiastki, oddzielone kropkami od dołączonego do nich znalezionego pierwiastku; pod każdą taką liczbą jest wynaleziony pierwiastek jako mnożnik; a pod nimi odpowiednie iloczyny.

Postępuje się zaś w następujący sposób. Ponieważ 5 zajmuje miejsce kwadratu z tysiąców, zatém kiedy 4 jest kwadratem najbliżéj 5 stojącym, pierwiastkiem tysięcy jest 2; który obok równości napisawszy, podwojony piszemy pod spodem; kwadrat zaś z niego, to jest 4, podpisawszy pod 5 i uskuteczniwszy odejmowanie, do reszty 1 spuszczamy przedziałkę 63. Stąd powstała liczba 163 zawiera w sobie podwójny iloczyn z wynalezionego pierwiastku 2 przez szukany, po nim następujący, i kwadrat z szukanego pierwiastku; uważając przeto 2 jako dziesiątki a po nim następujący znak jako jedności, podwójny z nich iloczyn ma na końcu zero, dla tego téż oddzielamy kropką ostatni znak od prawéj ręki, jako niewchodzący w ten iloczyn. Dzieląc

16 przez 4 (podwójne dziesiątki pierwiastku), na iloraz bierzemy 3 nie 4, bowiem pozostałaby reszta 3, w którejby się nie mieścił kwadrat ze 4. Znalazłszy drugi znak 3 pierwiastku, piszemy go obok 2, jako też obok 4, i pod liczbą 43 podpisawszy toż 3, iloczyn z 43 przez 3, to jest 129, zawierający podwójny iloczyn z dziesiątków przez jedności i kwadrat z jedności, odejmujemy od 163. Do reszty otrzymanéj 34 spuszczamy następującą przedziałkę 58, skąd powstanie liczba 3458, zawierająca podwójny iloczyn z 23 przez następujący szukany znak pierwiastku, i kwadrat z tegoż szukanego znaku. Uważając 23 jako dziesiątki pierwiastku, a szukany znak jako jedności, na końcu podwójnego iloczynu będzie zero; dla tego w liczbie 345.8 znak ostatni 8 oddzielamy kropką; w pozostałéj więc liczbie 345 zawarty jest podwójny iloczyn z 23 przez szukany znak. Podwójną liczbę 23, to jest 46 napisawszy u spodu, i przez nią podzieliwszy 345, otrzymamy na iloraz 7, które będą trzecim znakiem pierwiastku. Napisawszy go obok 23, następnie obok 46 i pod tą liczbą podpisawszy iloczyn z 467 przez 7, który jest 3269, odejmujemy go od 3458; a do otrzymanéj reszty 189 spuściwszy ostatnią przedziałkę, będziemy mieli liczbę 18976, w któréj mieści się podwójny iloczyn z wynalezionego pierwiastku 237 przez następny, szukany znak tegoż pierwiastku; ostatni znak 6 oddzieliwszy kropką, pozostanie 1897, które podzieliwszy przez 474, to jest, podwójne 237, otrzymamy na ostatni znak pierwiastku 4; tę liczbę dopisawszy do 474, będzie 4744, co przez 4 pomnożone, daje 18976, którą to liczbę odjąwszy od przedostatniéj reszty, otrzymamy na resztę zero: co jest znakiem że dana liczba 5635876 jest zupełnym kwadratem z liczby 2374.

Wyciągnijmy jeszcze pierwiastek z liczby 94249.

WZÓR DZIAŁANIA.

$\sqrt{9.42.49} =$	307
9	607
4.24.9	7
4249	4249
0	

W tym przykładzie widzimy, że po spuszczeniu przedziałki 42 i oddzieleniu kropką 2, w pozostałéj liczbie 4 nie mieści się podwojony pierwiastek 3, to jest 6, co pokazuje, że następnym znakiem pierwiastku jest zero. Dopisawszy go do pierwiastku, spuszczamy następującą przedziałkę 49, daléj postępuje się tak jak się wyżéj wskazało.

Z tego co poprzedziło wyprowadzamy takie prawidło na wyciąganie z liczb pierwiastku kwadratowego. *Naprzód daną liczbę podzielimy na przedziałki po dwa znaki zawierające, idąc od prawéj ku lewéj ręce; ostatnia po lewéj ręce zawierać może jeden znak. Następnie bierzemy pierwiastek kwadratu mniejszego lecz najbliższego liczby złożonéj zpiérwszéj przedziałki z lewéj strony; ten kwadrat odciągamy od téjże piérwszéj przedziałki. Potém do reszty otrzymanéj spuszczamy przedziałkę obok piérwszéj stojącą, i od liczby stąd powstałéj odcinamy kropką ostatni znak: część téj liczby stojącą przed kropką podzieliwszy przez podwojony pierwiastek znaleziony, otrzymamy drugi znak pierwiastku który piszemy obok podwojonego pierwiastku; tę liczbę pomnożywszy przez drugi znak pierwiastku, iloczyn otrzymany odejmujemy od reszty piérwszéj z drugą razem przedziałką. Do téj drugiéj reszty spuszczamy trzecią przedziałkę, od któréj znak ostatni kropką oddzieliwszy, pozostałą część dzielimy przez podwojony pierwiastek znaleziony, już z dwóch* *znaków złożony, a na iloraz otrzymamy trzeci znak pierwiastku; który obok podwojonego pierwiastku wypisawszy, powstałą stąd liczbę mnożymy przez ten znak trzeci, a iloczyn powstały odejmujemy od drugiéj reszty wraz ze spuszczoną trzecią przedziałką. Tak samo postępujemy daléj aż nakoniec spuścimy ostatnią przedziałkę,*

Uwaga I. Jeżeli reszta ostatnia jest zero, wtedy dana liczba jest zupełnym kwadratem.

Uwaga II. Postępując wskazanym sposobem, częstokroć nie odrazu znajdujemy prawdziwy znak w pierwiastku, lecz albo za mały, albo za wielki. Tak np. gdybyśmy, wyciągając pierwiastek z liczby 5635876, wzięli byli za drugi znak pierwiastku nie 3 ale 2, mielibyśmy iloczyn $42 \times 2 = 84$, który od 163 odjęty, daje resztę 79, większą od 42; co pokazuje że 2 jest za mały pierwiastek. Gdybyśmy wzięli byli 4 nie 3 za drugi znak pierwiastku, bylibyśmy mieli $44 \times 4 = 176$, który to iloczyn nie daje się odjąć od 163; co jest oznaką że 4 jest za wielki pierwiastek.

119. Prawidło na podnoszenie liczb do kwadratu podane w num. 113, stosuje się do wszelkich liczb, nawet jednoznakowych, skoro je rozbierzemy na dwie do siebie dodane liczby. Tak np. 4^2 równa się kwadratowi, ze 3 powiększonych 1, i będzie $3^2 + 2 \times 3 \times 1 + 1^2$, czyli $3^2 + 2 \times 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$.

Ponieważ np. $6^2 = 5^2 + 2 \times 5 + 1$, wnosimy stąd, *że kwadraty z liczb po sobie idących, czyli większych kolejno o 1, są od poprzedzających większe o iloczyn z liczby mniejszéj pomnożonéj przez 2, powiększony jednością.* Tak np. 15^2 jest większy od 14^2 o $2 \times 14 + 1$ czyli o 29.

Z tego wynika, że biorąc liczby po sobie idące i podnosząc je do kwadratów, otrzymamy z nich szereg liczb nie następujących po sobie. Wszystkie więc liczby pośrednie między kwadratami po sobie idącemi, nie są kwadratami z żadnéj całkowitéj liczby.

120. Zobaczmy teraz poczém poznać że liczba nie jest zupełnym kwadratem.

1. Przypatrzywszy się kwadratom z liczb od 1 do 9, postrzeżemy, że te kończą się znakami 1, 4, 5, 6 i 9. Ponieważ kwadrat z jakiejkolwiek liczby kończy się kwadratem z jedności, przeto kiedy liczba dana nie kończy się na jeden z wymienionych znaków, nie jest zupełnym kwadratem.

2. Liczba zakończona na nieparzystą liczbę zer, nie może być zupełnym kwadratem; bowiem, kiedy pierwiastek ma na końcu zera, kwadrat jego ma ich parzystą liczbę.

3. Kiedy pierwiastek ma na końcu 5, wtedy kwadrat z tego pierwiastku kończy się na 25; bowiem podwójny iloczyn dziesiątków przez jedności, to jest, przez 5, kończy się zerem zajmującém miejsce dziesiątków, zatém kwadrat z jedności 5, to jest 25, w zebraniu w ogół części wchodzących w skład kwadratu, niezmieniony pozostaje. Ztąd wypada, że liczba zakończona na 5 wtedy tylko może być kwadratem zupełnym, kiedy przed 5 stoi 2.

Wszelako liczba zakończona na 25 nie koniecznie jest kwadratem zupełnym.

4. Kiedy pierwiastek kończy się na parzysty znak, wtedy kwadrat z tego pierwiastku jest podzielny przez 4, a że podwójny iloczyn z dziesiątków przez jedności jest również podzielny przez 4, jako iloczyn z 2 przez liczbę parzystą, to jest przez jedności; zatém kwadrat z liczby zakończonéj

na parzystą liczbę, kończy się dwiema znakami składającemi liczbę podzielną przez 4; więc ten kwadrat jest podzielny przez 4 (num. 46). Stąd wypada, że jeżeli liczba nie kończy się na dwa znaki składające liczbę podzielną przez 4, wtedy ta liczba nie jest zupełnym kwadratem.

5. Kwadraty z liczb 1, 3, 5, 7, 9, zmniejszywszy o 1, otrzymamy liczby 0, 8, 24, 48, 80, podzielne przez 4. A że, jakąkolwiek liczbę nieparzystą podnosimy do kwadratu, na dziesiątki kwadratu otrzymujemy liczbę parzystą, przeto zbierając w ogół części składające kwadrat, otrzymamy liczbę od któréj odjąwszy 1, pozostanie reszta mająca na końcu dwa znaki, składające liczbę podzielną przez 4, więc i cała reszta jest podzielna przez 4. Stąd wypada: że jeżeli liczbę zakończoną na znak nieparzysty zmniejszymy jednością, a pozostała reszta nie jest podzielna przez 4, wtedy ta liczba nie jest zupełnym kwadratem.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO Z UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH. PIERWIASTKI KWADRATOWE PRZYBLIŻONE.

121. Nie zważając na przecinek, oddzielający całkowite liczby od dziesiętnych, wyciąga się pierwiastek kwadratowy z ułamków dziesiętnych tak, jak z liczb całkowitych; dopiero po skończoném działaniu odcina się na ułamek dziesiętny dwa razy mniéj znaków, niż ich było w kwadracie (num. 115). Tak np. pierwiastek z 9,4864, nie zważając na przecinek, jest 308, a że w kwadracie jest cztéry znaki ułamku dziesiętnego, przeto w pierwiastku jest ich dwa; zatém $\sqrt{9{,}4864} = 3{,}08$. Podobnież $\sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$; bo nie zważając na przecinek, mamy

$\sqrt{25} = 5$, a że w pierwiastku ma być dwa znaki dziesiętnego ułamku, więc $\sqrt{0,0025} = 0,05$.

122. Z tego cośmy w num. 115 powiedzieli, widzimy że ułamek dziesiętny z nieparzystéj liczby znaków złożony, nie jest zupełnym kwadratem; czyli, nie ma żadnego ułamku dziesiętnego, któryby do kwadratu podniesiony, wydał ułamek o nieparzystéj liczbie znaków. Dopisawszy do takiego ułamku zero, co wartości jego nie zmienia, można go uważać za kwadrat, i podanym sposobem wyciągnąć z niego pierwiastek; lecz ostatnia reszta nie będzie zerem, jak to ma miejsce kiedy liczba jest zupełnym kwadratem. Dajmy np. że z ułamku 0,025 mamy wyciągnąć pierwiastek; dopisawszy zero i niezważając na przecinek, będziemy mieli:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & \sqrt{2.50} = & 15 \\
 & 1 & 25 \\
\cline{2-2}
 & 1\,50 & 5 \\
 & 1\,25 & 125 \\
\cline{2-2}
\text{reszta ostatnia} & 25 &
\end{array}
$$

zatém $\sqrt{0,0250} = 0,15$, jest pierwiastkiem tylko przybliżonym.

123. Zamiast jednego zera, dopisawszy ich trzy, pięć i t. d., otrzymamy liczby, których pierwiastki tém bardziéj będą przybliżone, im więcéj znajdziemy znaków; czyli im do danego ułamku dodamy więcéj zer. Tak w powyższym przykładzie, dopisawszy trzy zera do danego ułamku, będzie 0,025000; teraz wyciągając pierwiastek, mamy:

$$\sqrt{2.50.00} = 1\,58$$

1	2.5 308
1 50	5 8
1 25	12 5 2464
250.0	
246 4	
3 6	

więc $\sqrt{0{,}025} = 0{,}158$. A że kwadrat z 0,15 jest 0,0225, zaś kwadrat z 0,158 jest 0,024964: zatém różnica między 0,025 a 0,0225 jest 0,0025 to jest blisko $\frac{3}{1000}$, zaś różnica między 0,025 a 0,024964 jest 0,000036, blisko $\frac{4}{100000}$.

124. Kiedy liczba całkowita nie jest zupełnym kwadratem z innéj całkowitéj liczby, wtedy nie ma żadnéj liczby z przyłączonym jakimbądź ułamkiem, któraby do kwadratu podniesiona, wydała daną liczbę; czyli innemi słowy, taka liczba nie ma skończonego pierwiastku. Jakoż, dajmy że mamy podnieść do kwadratu $3\frac{1}{3}$, czyli $3 + \frac{1}{3}$; będziemy mieli $3^2 + 2\times3\times\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2$; zatém liczba całkowita z ułamkiem podniesiona do kwadratu, daje liczbę całą z ułamkiem. Oczywistą jest więc rzeczą, że pierwiastek z liczby całkowitéj, nie będącéj zupełnym kwadratem, nie może być liczbą całkowitą z ułamkiem skończonym.

125. Z liczby całkowitéj niebędącéj zupełnym kwadratem wyciągamy pierwiastek przybliżony w następujący sposób. *Do liczby dopisujemy na końcu tyle par zer, ile mieć chcemy w pierwiastku znaków dziesiętnego ułamku, poczém wyciągamy pierwiastek tak jak z liczby całkowitéj z ułamkiem dziesiętnym* (num. 122 i 123). Dajmy np. że z liczby 53, mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, przybliżony do dwóch znaków dziesiętnych; będzie:

```
√53.00.00 = 728
 49              | 142   1448
 ----            |   2      8
  40.0           | ----------
  284            | 284  11384
 ------
  1160.0
  11584
 ------
      16
```

zatém szukany pierwiastek jest 7,28. Jakoż dopisawszy do liczby 53 cztéry zera, pomnożyliśmy ją przez 10000, których pierwiastkiem jest 100, zatém pierwiastek z 530000 jest 100 razy większy od pierwiastku z 53; dla tego to na dziesiętny ułamek odcięliśmy w pierwiastku 728 dwa znaki.

Zamiast dopisywać do danéj liczby potrzebną liczbę zer, dopisuje się zwykle po dwa zera do reszt otrzymywanych kolejno, począwszy od ostatniéj reszty liczby danéj: skoro mamy dopisać pierwsze dwa zera, w pierwiastki kładziemy zaraz przecinek oddzielający całkowitą liczbę od dziesiętnego ułamku.

Weźmy jeszcze taki przykład: mamy wyciągnąć pierwiastek przybliżony do trzech znaków dziesiętnych, z liczby 20801.

```
√2.08.01 = 144,225
 1           |  24   284  2882  28842   288445
 ---         |   4     4     2      2        5
 10.8        | ------------------------------------
  96         |  96  1136  5764  57684  1442225
 ----
  120.1
  1136
  -----
    650.0
    5764
   ------
     7360.0
     57684
   --------
     159160.0
     1442225
   ----------
      149375
```

Orjaśnienie. Pierwiastek 144 wyciągnęliśmy z liczby całéj 20801: gdyśmy mieli dopisać do ostatniéj reszty 65 dwa zera, położyliśmy przecinek obok liczby 144; daléj postępowaliśmy zwyczajnym sposobem, nie zważając na przecinek. Do następnéj reszty 736 znów dopisaliśmy dwa zera &.

Uwaga. Stopień przybliżenia pierwiastku, to jest, liczba znaków ułamku dziesiętnego, zależy od potrzeby, a rzadko od upodobania. Kiedy żądamy pierwiastku ścisłego np. do $\frac{1}{1000}$, wtedy potrzeba go dociągnąć do cztérech znaków, to jest, do dziesięciotysięcznych, które jeżeli są 5, wtedy powiększa się znak tysiącznych o 1 i opuszcza się dziesięciotysięczne części. Tak w powyższym przykładzie, gdybyśmy chcieli zachować w pierwiastku dwa znaki dziesiętne, opuściwszy trzeci 5, drugi o 1 powiększamy; więcbyśmy mieli przybliżony pierwiastek, $\sqrt{20801} = 144{,}23$.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKÓW KWADRATOWYCH Z UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH.

126. Ponieważ podnosząc do kwadratu ułamek zwyczajny, robimy kwadrat z licznika i mianownika; więc téż *wyciągając pierwiastek kwadratowy z ułamku zwyczajnego, wyciąga się pierwiastek osobno z licznika osobno z mianownika.*

Lecz że mianownik wskazuje wielkość części ułamku, zatém ten mianownik musi być skończoną, czyli wymierną liczbą. Jeżeli przeto mianownik jest zupełnym kwadratem, wtedy możemy z ułamku wyciągnąć pierwiastek kwadra–

towy podług podanego prawidła. *W razie, kiedy mianownik nie jest zupełnym kwadratem, potrzeba naprzód pomnożyć oba wyrazy ułamku przez taką liczbę, iżby mianownik stał się zupełnym kwadratem.* Tak np. aby z $\frac{2}{3}$ wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, potrzeba oba jego wyrazy pomnożyć przez mianownik 3, skąd w miejsce danego ułamku mieć będziemy $\frac{6}{9}$, z którego pierwiastek jest $\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2{,}447}{3}$. Z licznika 6 wyciąga się pierwiastek przybliżony, podanym sposobem w numerze poprzedzającym.

Wyciągając pierwiastek kwadratowy z ułamku, np. $\frac{5}{12}$, uważamy, że mianownik 12 przez 3 pomnożony daje 36, które są zupełnym kwadratem z 6; zatém pomnożywszy oba wyrazy danego ułamku przez 3, będziemy mieli: $\sqrt{\frac{3\times5}{3\times12}} = \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{3{,}87}{6}$.

Uwaga. Jeżeli przybliżony pierwiastek z licznika zawiera dwa znaki dziesiętnego ułamku, wtedy można opuścić przecinek w liczniku, lecz zarazem dopisuje się w mianowniku dwa zera, tym bowiem sposobem pomnożymy oba wyrazy ułamku przez 100; jeżeli zaś w liczniku mamy trzy znaki dziesiętnego ułamku, wtedy opuściwszy przecinek w liczniku, w mianowniku dopisuje się trzy zera i t. d. Tak z powyższych przykładów mamy $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2447}{3000}$, $\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{387}{600}$.

127. Bardzo często wydarza się potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułamku zwyczajnego tak przybliżony, ażeby od prawdziwego różnił się o dany ułamek. Dajmy, że z ułamku $\frac{2}{3}$ mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy przybliżony, dokładny do $\frac{1}{100}$. Na ten koniec, uczyniwszy naprzód mianownik ułamku $\frac{2}{3}$ zupełnym kwadratem, mnożymy oba jego wyrazy przez 100^2, czyli przez 10000, skąd otrzymamy $\frac{60000}{90000}$; potém wyciągniemy pierwiastek z licznika, bez przybliżenia; z mianownika bowiem mamy pierwiastek 300.

WZÓR DZIAŁANIA.

```
√6.00.00 = 244
 4                 | 44   484
 ─────             |  4     4
 20.0              |───────────
 176               |176  1936
 ──────
  240.0
  1936
  ─────
   464
```

Zatém szukany pierwiastek, przybliżony do $\frac{1}{300}$, więc bardziéj niż do $\frac{1}{100}$, jest $\frac{244}{300}$. Jakoż prawdziwy pierwiastek jest zawarty między $\frac{244}{300}$ a $\frac{245}{300}$; bowiem kwadrat z $\frac{245}{300}$ jest $\frac{60025}{90000}$, zaś kwadrat z $\frac{244}{300}$ jest $\frac{59536}{90000}$, piérwszy większy, drugi mniejszy od $\frac{2}{3}$, czyli od $\frac{60000}{90000}$.

128. Tym samym sposobem wyciąga się pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitéj, przybliżony do pewnego naznaczonego ułamku. Dajmy np. że z liczby 12 mamy wyciągnąć pierwiastek przybliżony do $\frac{1}{15}$; na ten koniec pomnożymy 12 przez 15^2, czyli przez 225, i pod iloczynem podpiszemy za mianownik też 15^2; potém wyciągamy pierwiastek tak jak w poprzedzającym numerze. Uskuteczniwszy działanie, będziemy mieli $\sqrt{12} = \frac{51}{15} = 3\frac{6}{15}$, albo $3\frac{2}{5}$.

Zatém, *aby z liczby całkowitéj wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, przybliżony do danego ułamku, potrzeba ją pomnożyć przez kwadrat z mianownika tegoż ułamku; z te-*

go iloczynu wyciągnąć pierwiastek; nareszcie pod tym pierwiastkiem podpisać mianownik ułamku danego.

129. Z ułamku zwyczajnego wyciąga się zwykle pierwiastek przybliżony, zamieniwszy go na ułamek dziesiętny.

SKRÓCENIE WYCIĄGANIA PIERWIASTKU KWADRATOWEGO PRZYBLIŻONEGO.

130. Skrócenie wyciągania pierwiastku kwadratowego przybliżonego polega na tém, że *większą połowę znaków dziesiętnych pierwiastku wynajdujemy zwyczajnym sposobem; dalsze zaś znaki tegoż pierwiastku otrzymują się przez skrócone dzielenie* (num. 90). Dajmy że z liczby 2 mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, przybliżony do siedmiu znaków dziesiętnych.

WZÓR DZIAŁANIA.

SKRÓCONY SPOSÓB.

```
√2     = 1,4142135
  1      | 24  281   2824  28282
 10.0    |  4    1      4      2
  9 6    | 96  281  11296  56564
    40.0
    28 1
    11 90.0
    11 29 6
       60 40.0
       56 56 4     . . .
        3 83 6 |2828
        2 82 8 | 135
        1 00 8 |
          84 8 |
          16 0 |
          14 1 |
           1 9 |
```

ZWYCZAJNY SPOSÓB.

$\sqrt{2} = 1,4142135$

24	281	2824	28282	282841	2828423	28284265
4	1	4	2	1	3	5
96	281	11296	56564	282841	8485269	141421325

```
1
10.0
9 6
40.0
28 1
11 90.0
11 29 6
60 40.0
56 56 4
3 83 60.0
2 82 84 1
1 00 75 90.0
84 85 26 9
15 90 73 10.0
14 14 21 32 5
1 76 51 77 5
```

Po wynalezieniu czwartego znaku 2 ułamku dziesiętnego otrzymaliśmy, w 1ym sposobie, resztę 3836, którąśmy wzięli za dzielną, podwójny zaś iloczyn ze cztérech piérwszych znaków pierwiastku za dzielnik; poczém wykonywając dzielenie skróconym sposobem (num. 90) otrzymaliśmy na iloraz trzy następujące znaki pierwiastku, to jest 135.

Kiedy liczba znaków ułamku dziesiętnego w pierwiastku, ma być parzysta, wtedy połowa znaków wynajduje się zwykłym sposobem, druga zaś połowa przez skrócone dzielenie.

PODNOSZENIE LICZB DO SZEŚCIANU I WYCIĄGANIE Z LICZB PIERWIASTKU SZEŚCIENNEGO.

131. Iloczyn z liczby wziętéj trzy razy za czynnik, nazywa się *sześcianem* (Кубъ), albo *potęgą trzecią;* np. 8

jest sześcianem z 2, bowiem $2 \times 2 \times 2 = 8$. Dla naznaczenia, że dana liczba ma być podniesiona do sześcianu, pisze się u góry i z prawéj strony téj liczby liczbę 3; tak 4^3 znaczy że liczbę 4 potrzeba do sześcianu podnieść. Liczba 3 pokazująca że liczbę należy podnieść do sześcianu, nazywa się *wykładnikiem potęgi trzeciéj.*

Liczba z któréj powstał sześcian nazywa się *pierwiastkiem sześciennym*, albo *pierwiastkiem potęgi trzeciéj*, lub téż krótko *pierwiastkiem trzecim* (Кубическій корень):

Uwaga. Ponieważ, na przykład $3 \times 3 = 3^2$; zatém $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 3^2 \times 3$; skąd widzimy, że *sześcian z pewnéj liczby jest równy iloczynowi z kwadratu téjże liczby przez jego pierwiastek.*

132. Dla wykrycia prawa tworzenia się sześcianów z liczb, potrzeba przedewszystkiém znać i pamiętać sześciany z liczb od 1 do 10.

Pierwiastki	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Sześciany	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Uczynimy tu uwagę, *że sześcian zawiera najwięcéj trzy razy tyle znaków co jego pierwiastek.* Jakoż, przez zwykłe mnożenie mamy: $9^3 = 729$; $99^3 = 970299$ &. Nadto, *kiedy pierwiastek zakończony jest zerami, sześcian jego ma na końcu trzy razy więcéj zer.* Na koniec, ponieważ na przykład $6 = 2 \times 3$, więc $6^3 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$, czyli $6^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$; to jest, *iloczyn z dwóch sześcianów jest równy sześcianowi z iloczynu pierwiastków.* Więc podług tego mamy np. $40^3 = 4^3 \times 10^3$ czyli $64 \times 1000 = 64000$. Skąd znów widzimy, *że podnosząc do sześcianu liczbę zakończoną zerami, nie zważając na nie, samą liczbę podnosimy do sześcianu, do którego dopisujemy na końcu trzy razy tyle zer, ile ich było w danéj liczbie,*

133. Niechaj będzie do podniesienia do sześcianu liczba 73. Ponieważ $73^3 = 73^2 \times 73$; zatém $(70+3)^2$ czyli $70^2 + 2\times70\times3 + 3^2$ pomnożywszy przez $70+3$, otrzymamy:
z pomnożenia przez 70, $70^3+2\times70^2\times3+70\times3^2$
z pomnożenia przez 3, $70^2\times3+2\times70\times3^2+3^3$;
co zbierając w ogół widzimy, że $70^2\times3$ w piérwszym wiérszu jest 2 razy wzięty, w drugim raz, więc razem 3 razy wzięty, iloczyn zaś 70×3^2 w piérwszym wierszu jest wzięty raz, w drugim dwa razy, zatém razem jest 3 razy powtórzony: więc ostatecznie mamy:

$$73^3 = 70^3 + 3\times70^2\times3 + 3\times70\times3^2 + 3^3.$$

To wyrażenie pokazuje nam, że *sześcian z dwuznakowéj liczby składa się: 1. Z sześcianu dziesiątków. 2. Z potrojonego kwadratu z dziesiątków przez jedności. 3. Z potrojonego iloczynu dziesiątków przez kwadrat z jedności; i 4. Z sześcianu jedności.*

Podług tego prawidła mamy:

$$\begin{aligned} 70^3 &= 343000 \\ 3\times70^2\times3 &= 44100 \\ 3\times70\times3^2 &= 1890 \\ 3^3 &= 27 \\ \hline 73^3 &= 389017. \end{aligned}$$

Zważając na to, że idąc z góry na dół, części składające sześcian, mają na końcu zer mniéj o jedno od bezpośrednio poprzedzającéj części, możemy zera opuścić, byle naprzód o jeden znak występować opuszczając się na dół. Podług tego mamy:

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \\ 3\times7^2\times3 &= 441 \\ 3\times7\times3^2 &= 189 \\ 3^3 &= 27 \\ \hline 73^3 &= 389017. \end{aligned}$$

134. To prawo tworzenia się sześcianu jest ogólne i podług niego rozwija się sześcian z wszelkiéj ilukolwiekznakowéj liczby. Dajmy, że liczbę 2743 mamy do sześcianu podnieść. Rozłożywszy ją na 274 dziesiątków i 3 jedności, będzie: $2743^3 = 2740^3 + 3 \times 2740^2 \times 3 + 3 \times 2740 \times 3^2 + 3^3$; następnie 2740 rozłożywszy na 2700 dziesiątków i 40 jedności, mamy:

$$2740^3 = 2700^3 + 3 \times 2700^2 \times 40 + 3 \times 2700 \times 40^2 + 40^3;$$

nareszcie 2700 rozłożywszy na 2000 dziesiątków i 700 jedności, znajdziemy:

$$2700^3 = 2000^3 + 3 \times 2000^2 \times 700 + 3 \times 2000 \times 700^2 + 700^3.$$

Opuściwszy zera, i wstawiwszy wartość za 2740^3, a potém za 2700^3, znajdziemy:

$$2743^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times 7 + 3 \times 2 \times 7^2 + 7^3 + 3 \times 27^2 \times 4 + 3 \times 27 \times 4^2 + 4^3 + 3 \times 274^2 \times 3 + 3 \times 274 \times 3^2 + 3^3.$$

Z tego rozwinięcia takie prawidło wypada. *Sześcian z liczby ilukolwiekznakowéj składa się:* (idąc od lewéj ku prawéj ręce), *z sześcianu piérwszego znaku, potrojonego iloczynu z kwadratu znaku piérwszego przez drugi znak, z potrojonego iloczynu z piérwszego znaku przez kwadrat z drugiego znaku i z sześcianu drugiego znaku; daléj, z potrojonego iloczynu z kwadratu dwóch piérwszych znaków przez znak trzeci, z potrojonego iloczynu z dwóch piérwszych znaków przez kwadrat ze znaku trzeciego i z sześcianu trzeciego znaku; następnie z potrojonego iloczynu z kwadratu trzech piérwszych znaków przez znak czwarty* i t. d.

Podług tego prawidła, opuściwszy zera i zważając na to cośmy w poprzedzającym numerze powiedzieli, mamy:

$$7342^3 = 7^3 + 3 \times 7^2 \times 3 + 3^3 + 3 \times 73^2 \times 4 + 3 \times 73 \times 4^2 + 4^3 + 3 \times 734^2 \times 2 + 3 \times 734 \times 2^2 + 2^3.$$

Wykonywa się zaś działanie jak następuje:

$$
\begin{aligned}
7^3 &= 343\\
3\times7^2\times3 &= 441\\
3\times7\times3^2 &= 189\\
3^3 &= 27\\
3\times73^2\times4 &= 63948\\
3\times73\times4^2 &= 3504\\
4^3 &= 64\\
3\times734^2\times2 &= 3232536\\
3\times734\times2^2 &= 8808\\
2^3 &= 8\\
\hline
7342^3 &= 395770245688
\end{aligned}
$$

Uwaga. *W rozwinięciu sześcianu z liczby ilukolwiek-znakowéj tyle jest części, ile wynosi iloczyn z liczby znaków téjże liczby przez 3, zmniejszony o* 2. Jakoż, z każdego znaku jest sześcian, pomiędzy temi sześcianami są po dwa potrójne iloczyny; więc potrojonych iloczynów jest tyle ile wynosi iloczyn z liczby znaków zmniejszonéj o 1 a pomnożonéj przez 2, dołączywszy więc do nich liczbę sześcianów, znajdziemy powyższe nasze twierdzenie. Ta uwaga jest potrzebna do przekonania się, czyliśmy któréj części, przy rozwijaniu sześcianu, nie pominęli.

135. Podług tego samego prawidła podnosi się do sześcianu ułamek dziesiętny, nie uważając na przecinek; dopiéro po ukończeniu działania odcina się w sześcianie na dziesiętny ułamek trzy razy więcej znaków niż ich było w pierwiastku.

Ułamek zwyczajny podnosi się do sześcianu, podnosząc do sześcianu osobno licznik, osobno mianownik.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU SZEŚCIENNEGO Z LICZB.

136. Pierwiastkiem sześciennym nazywamy liczbę, z któréj powstał sześcian. Dla oznaczenia, że z danéj liczby ma być wyciągnięty pierwiastek sześcienny, piszemy obok téj liczby z lewéj strony, znak $\sqrt[3]{}$; tak np. $\sqrt[3]{64}$ znaczy, że z liczby 64 potrzeba wyciągnąć pierwiastek sześcienny.

137. Pamiętając sześciany z liczb od 1 do 9, mamy gotowe pierwiastki tychże sześcianów; znając nadto prawo tworzenia się sześcianów z liczb kilkoznakowych, i mając na pamięci uwagi w num. 132 znajdujące się, nietrudno będzie wykryć prawidło wyciągania pierwiastków sześciennych ze wszelkich liczb.

Dajmy, że z liczby 389017 mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny. Uważamy naprzód, że pierwiastek ten składa się z dwóch znaków, to jest z dziesiątków i jedności; zatém powyższy sześcian zawiéra w sobie cztéry części wymienione w num. 133. A że sześcian z dziesiątków ma na końcu trzy zera, zatém odciąwszy od prawéj ręki trzy znaki miejsce tych zer zajmujące, pozostanie liczba 389, zawierająca sześcian z dziesiątków.

$$
\begin{array}{r}
\sqrt[3]{389.0\,17} = 73 \\
343 \\
\hline
46\,0.17 \\
46\,0\,17 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|rcr|l}
\hline
3\times7^2 & = & 147 & 3 \\
3\times7\times3 & = & 63 & \\
3^2 & = & 9 & \\
\cline{3-3}
 & & 15339 & \\
 & & 3 & \\
\cline{3-3}
 & & 46017 &
\end{array}
$$

Najbliższy téj liczby sześcian jest 343, którego pierwiastkiem jest 7, ten napisawszy po równości, i od 389 odjąwszy 343, otrzymamy resztę 46, do któréj spuściwszy przedziałkę 017, znajdziemy liczbę 46017, zawierającą trzy pozostałe części sześcianu, a przedewszystkiem potrojony kwadrat z dziesiątków przez jedności. A że iloczyn ten zakończony jest dwiema zerami, więc z liczby 46017 odcinamy kropką ostatnie dwa znaki zajmujące miejsce tych zer; w liczbie więc 460 zawarty jest potrojony kwadrat z dziesiątków przez jedności; zatém, przez potrojony kwadrat z dziesiątków, to jest, przez 147 podzieliwszy 460, na iloraz otrzymamy 3, jedności szukanego pierwiastku. Mając dziesiątki i jedności, obliczymy z nich trzy pozostałe części sześcianu; lecz że w każdą z nich wchodzą jedności 3 jako czynnik, dla tego odłożywszy po za pionową kresę ten czynnik, obliczamy tylko iloczyny, 3×7^2, $3\times7\times2$, i 3^2, a dopiero ogół tych trzech iloczynów, to jest, 15339 mnożymy przez 3 i ztąd otrzymany iloczyn 46017 odjąwszy od reszty 46017, znajdziemy ostatnią resztę zero: co jest dowodem, że liczba 389017 jest zupełnym sześcianem z liczby 73.

138. Nim daléj postąpimy potrzeba nam okazać, że np. 3×73^2 jest równy ogółowi z raz wziętego iloczynu 3×70^2; dwa razy wziętego iloczynu $3\times70\times3$, to jest $2\times3\times70\times3$; i trzy razy wziętego 3^2. Jakoż, $73^2=70^2+2\times70\times3+3^2$ pomnożywszy przez 3, otrzymamy $3\times73^2=3\times70^2+2\times3\times70\times3+3\times3^2$. I w rzeczy saméj mamy:

$$\begin{aligned} 3\times7^2 &= 147 \\ 2\times3\times7\times3 &= 126 \\ 3\times3^2 &= 27 \\ \hline 3\times73^2 &= 15087 \end{aligned}$$

Aby więc wynaleźć potrojony kwadrat z wynalezionego już pierwiastku, dosyć jest liczby tym sposobem jak w powyższym przykładzie przygotowane, pod otrzymanym pier-

wiastkiem wypisane, pomnożyć: piérwszą przez 1, drugą przez 2, trzecią przez 3, a ogół ich będzie potrojonym kwadratem. To prawidlo jest ogólne, ilekolwiek znaków w pierwiastku mamy wynalezionych.

W następującym przykładzie pokaże się wielka dogodność powyższego prawidła w tém, że nie potrzeba wypisywać na boku liczb mających złożyć kwadrat potrojony, ani téż za każdym razem tworzyć ten potrójny kwadrat, co wiele czasu zajmuje, lub myli rachunek.

139. Dajmy, że z liczby 395770245688 mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny.

WZÓR DZIAŁANIA.

$\sqrt[3]{395.770.245.688} = 7342$						
343	$3\times7^2 = 147$	3	147			
527.70	$3\times7\times3 = 63$		126			
46017	$3^2 = 9$		27			
67532.45	15339		$3\times73^2 = 15987$	4	15987	
6429904	3					
3233416.88	46017		$3\times73\times4 = 876$		1752	
323341688			$4^2 = 16$		48	
0			1607476		$3\times734^2 = 1616268$	2
			4		$3\times734\times2 = 4404$	
			6429904		$2^2 = 4$	
					161670844	
					2	
					323341688	

Ponieważ dana liczba składa się z dwunastu znaków, zatém (num. 132) pierwiastek sześcienny téj liczby składa się ze cztérech znaków; a że tysiące do sześcianu podniesione mają na końcu dziewięć zer, więc dziewięć znaków zajmujących miejsce tych zer odciąwszy, pozostanie liczba 395, w któréj zawarty jest pierwiastek tysięcy. W odciętéj liczbie, prócz innych części, zawarte są sześciany, ze stów, z dziesiątków i z jedności: a że sześcian ze stów ma na końcu sześć zer, więc znów odciąć potrzeba od prawéj ręki sześć znaków; w pozostałéj liczbie zawiera się sześcian z dziesiątków, który jest zakończony trzema zerami, zatém odcinamy od prawéj ręki trzy znaki; w ostatnich pozostałych zawarty jest sześcian z jedności. Dla téj to przyczyny daną liczbę podzieliliśmy na przedziałki po trzy znaki zawierające, poczynając od prawéj ku lewéj ręce. Najbliższy niższy sześcian liczby 395 jest 343, którego pierwiastek 7 obok równości napisawszy, podkreślamy. Sześcian 343 odjąwszy od 395, pozostaje reszta 52, do któréj spuściwszy następującą przedziałkę, znajdziemy liczbę 52770, w któréj przedewszystkiem mieści się potrojony iloczyn z kwadratu 7 uważanych za dziesiątki, przez następny znak pierwiastku; a że w kwadracie z dziesiątków na końcu są dwa zera, więc dwa ostatnie znaki, miejsce tych zer zajmujące, odcinamy kropką. Potém przez potrojony kwadrat z 7, to jest przez 147 podzieliwszy liczbę 527, znajdziemy na iloraz 3, które są drugim znakiem pierwiastku. Z tych dwóch znaków tworzymy iloczyny tak, jakeśmy w poprzedzającym przykładzie widzieli, a które pod pierwiastkiem wypisują się. Zebrawszy w ogół te iloczyny i pomnożywszy przez drugi znak pierwiastku, to jest przez 3, i stąd otrzymany iloczyn 46017 odjąwszy od 52770, otrzymamy resztę 6753. Do téj reszty spuściwszy następującą przedziałkę 245, otrzymamy liczbę 6753245, w któréj zawarte są trzy części sześcianu, a przedewszystkiem potrojony kwadrat 73, uważanych za dziesiątki pierwiastku, przez następujący znak; zatém, dla wiadoméj już przyczyny, z owéj liczby oddzielamy kropką dwa ostatnie znaki, a w pozostałéj liczbie mieści się potrojony kwadrat z 73 przez następujący znak szukany. Wziąwszy raz 147, które w tym samym wierszu piszemy co

3×7^2, dwa razy 63, czyli 126 i trzy razy 9 czyli 27, ogół tych liczb 15987 jest potrojony kwadrat z 73. Dopiero przez 15987 podzieliwszy 67532, otrzymamy na iloraz 4, trzeci znak pierwiastku. Następnie obliczymy 3×73^2, $3 \times 73 \times 4$ i 4^2, te liczby dodamy do siebie i ogół pomnożywszy przez 4, znak trzeci wynaleziony, dopiero iloczyn 6429904 odjąwszy od 6753245, otrzymamy resztę 323341. Do téj reszty spuściwszy ostatnią przedziałkę, znajdziemy liczbę 323341688, od któréj odciąwszy kropką dwa ostatnie znaki, pozostanie liczba 3233416 zawierająca w sobie potrojony kwadrat wynalezionego pierwiastku 734. Aby ten potrojony kwadrat wynaleźć, bierzemy raz 15987; dwa razy 876, czyli 1752; i trzy razy 16, czyli 48; z resztą postąpiwszy tak jak przy szukaniu trzeciego znaku, znajdziemy ostatni znak pierwiastku 2. A że i reszta ostatnia jest zero, zatém 7342 jest zupełnym pierwiastkiem sześciennym liczby 395770245688.

Z tego co poprzedziło takie wyprowadzamy prawidło na wyciąganie pierwiastku sześciennego. *Daną liczbę, poczynając od prawéj ręki, dzielimy kropkami na przedziałki po trzy znaki zawierające; ostatnia po lewéj ręce może mniéj znaków zawierać. Wyszukawszy sześcian mniejszy lecz najwięcéj zbliżony do przedziałki piérwszéj po lewéj ręce, pierwiastek jego piszemy obok danéj liczby po równości i podkreślamy go; sześcian z tego pierwiastku odejmujemy od przedziałki piérwszéj, a do otrzymanéj reszty zaraz spuszczamy następującą przedziałkę, skąd otrzymamy liczbę z któréj dwa ostatnie znaki po prawéj ręce oddzielamy kropką. Potém potrojony kwadrat z wynalezionego pierwiastku podpisujemy pod tymże pierwiastkiem; przez tén potrojony kwadrat podzieliwszy liczbę powstałą z reszty i jednego znaku następującéj przedziałki do reszty przyłączonéj, otrzymamy drugi znak szukanego pierwiastku. Z tych dwóch znaków poczynimy:* 1. *potrojony* *kwadrat z piérwszego znaku: 2. potrojony iloczyn z piérwszego znaku przez drugi: 3. kwadrat z drugiego znaku. Dodawszy je do siebie, otrzymany ogół pomnożywszy przez drugi znak znalezionego pierwiastku, stąd iloczyn wypadły odejmujemy od liczby z piérwszéj reszty i drugiéj przedziałki złożonéj.* (W dodawaniu trzech dopiero wymienionych iloczynów potrzeba zważać żeśmy zera opuszczali, więc je stosownie pod sobą podpisywać potrzeba). *Do otrzymanéj drugiéj reszty spuszczamy trzecią przedziałkę, i z otrzymanéj tym sposobem liczby odcinamy kropką dwa ostatnie znaki od prawéj ręki. Dla otrzymania potrojonego kwadratu z pierwiastku wynalezionego, już dwuznakowego, bierzemy raz potrojony kwadrat z piérwszego znaku pierwiastku znalezionego; dwa razy potrojony iloczyn ze znaku piérwszego przez drugi tegoż pierwiastku, i trzy razy kwadrat z drugiego znaku, a ogół tych liczb jest potrojonym kwadratem z wynalezionego pierwiastku. Przez ten potrojony kwadrat, który piszemy tak jak pokazuje wzór działania, dzielimy liczbę złożoną z drugiéj reszty i jednego znaku przedziałki trzeciéj, a iloraz otrzymany będzie trzecim znakiem pierwiastku. Następnie tworzymy potrojony kwadrat z dwóch piérwszych znaków, potrojony iloczyn z dwóch piérwszych znaków przez trzeci, jako też kwadrat z trzeciego znaku; ogół tych liczb pomnożywszy przez znak trzeci pierwiastku, iloczyn otrzymany odejmujemy od liczby złożonéj z drugiéj reszty i trzeciéj przedziałki; a do reszty otrzymanéj spuszczamy następującą przedziałkę. Dalsze znaki takim samym sposobem wynajdują się jak znak trzeci.*

140. Kiedy ogół potrojonego kwadratu z wynalezionego pierwiastku przez następny znak, potrojonego iloczynu z wynalezionego pierwiastu przez kwadrat z następnego znaku i sześcianu z tegoż znaku, jest większy od odpowiedniéj liczby złożonéj z reszty i przedziałki odpowiedniéj, to jest znakiem żeśmy ten znak wzięli za wielki. Na przykład, w poprzedzającym przykładzie, gdybyśmy za trzeci znak wzięli byli 5 nie 4, bylibyśmy mieli:

$$
\begin{array}{rcr|l}
3\times 73^2 & = & 15987 & 5 \\
3\times 73\times 5 & = & 1095 & \\
5^2 & = & 25 & \\
\hline
 & & 1609675 & \\
 & & 5 & \\
\hline
 & \text{liczbę} & 8048375 &
\end{array}
$$

większą od 6753245.

Kiedy zaś po odjęciu ogółu iloczynów wyżéj wymienionych, pozostanie reszta, w któréj tenże ogół mieści się, to jest znakiem, żeśmy wzięli znak za mały. Tak w poprzedzającym przykładzie, gdybyśmy wzięli byli na znak trzeci 3 nie 4, bylibyśmy znaleźli:

$$
\begin{array}{rcr|l}
3\times 73^2 & = & 15987 & 3 \\
3\times 73\times 3 & = & 657 & \\
3^2 & = & 9 & \\
\hline
 & & 1505279 & \\
 & & 3 & \\
\hline
 & & 4515837 &
\end{array}
$$

a po odjęciu téj liczby od 6753245, resztę 2237408 w któréj się mieści 4515837.

141. Przedział pomiędzy sześcianami z liczb po sobie następujących jest daleko większy jak między kwadratami, *jest bowiem równy ogółowi z potrojonego kwadratu liczby mniejszéj, z potrojonéj téjże liczby i z jedności.*

142. Liczba nie będąca zupełnym sześcianem, nie może mieć skończonego pierwiastku, bowiem, wziąwszy całkowitą liczbę za jednę część, ułamek zaś za część drugą takiego pierwiastku; podniosłszy go do sześcianu, ostatnia część tego sześcianu będzie sześcianem z ułamku, zatém ułamkiem; więc ostatecznie liczba cała byłaby równa liczbie ułamkowéj, co być nie może.

Z liczb nie będących zupełnemi sześcianami wyciąga się pierwiastek przybliżony. To przybliżenie może być naznaczone lub dowolne.

Wyciągnijmy pierwiastek przybliżony do trzech znaków dziesiętnych z liczby 25. Ponieważ w sześcianie z ułamku dziesiętnego jest trzy razy więcéj znaków niżeli w tymże ułamku (num. 135), zatém, do liczby 25 potrzebaby dopisać trzy razy po trzy zera; z tak powiększonéj liczby wyciągnąć pierwiastek; nareszcie odciąć w nim na ułamek dziesiętny trzy znaki. Zwykle jednak, tak jak przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego dopisuje się po dwa zera (num. 125), tu w miarę postępu rachunku dopisuje się po trzy zera.

WZÓR DZIAŁANIA.

$\sqrt[3]{25} = 2,923$

8				
170.00	$2\times2^2=12$	9	12	
163 89	$3\times2\times9 = 54$		108	
	$9^2 = 81$		243	
6 110.00	1821	$3\times29^2=2523$	2	2523
5 080 88	9			
929 120.00	16389	$3\times29\times2 = 174$		348
768 164 67		$2^2 = 4$		12
60 955 33		254044	$3\times29^2=255792$	3
		2		
		508088	$3\times292\times3 = 2628$	
			$3^2 = 9$	
			25605489	
			3	
			76816467	

143. Z ułamku dziesiętnego wyciąga się pierwiastek sześcienny tak jak z liczby całkowitéj, nie zważając na przecinek, dopiero po ukończoném działaniu odcina się w pierwiastku na ułamek dziesiętny trzy razy mniéj znaków, niżeli ich było w sześcianie.

Kiedy ułamek dziesiętny złożony jest z liczby znaków niepodzielnéj przez 3, wtedy nie jest sześcianem zupełnym. Z wszelkiego ułamku dziesiętnego, niebędącego zupełnym sześcianem, wyciąga się pierwiastek sześcienny przybliżony. Jeżeli składa się z liczby znaków niepodzielnéj przez 3, wtedy dopełnia się ten brak zerami. Tak na przykład $\sqrt[3]{0,02} = \sqrt[3]{0,020}$, kiedy w pierwiastku mieć chcemy jeden znak ułamku dziesiętnego. Dopisuje się zaś w sześcianie, to jest, w danym ułamku, tyle razy po trzy zera, ile chcemy mieć w pierwiastku znaków ułamku dziesiętnego.

144. Z ułamku zwyczajnego wyciąga się pierwiastek sześcienny, wyciągając go oddzielnie z licznika, oddzielnie z mianownika. Tak np. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$.

Kiedy mianownik danego ułamku nie jest zupełnym sześcianem, wtedy naprzód mnoży się oba wyrazy tego ułamku przez taką liczbę, żeby mianownik stał się zupełnym sześcianem. Np. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2\times5^2}{5\times5^2}}$ czyli $\sqrt[3]{\frac{50}{5^3}}$; podobnież, $\sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\frac{4\times3}{9\times3}}$ czyli $\sqrt[3]{\frac{12}{3^3}}$.

145. *Chcąc z liczby całkowitéj wyciągnąć pierwiastek sześcienny przybliżony do pewnego ułamku zwyczajnego, mającego licznik 1, potrzeba tę liczbę pomnożyć przez sześcian z mianownika naznaczonego ułamku, potém z tego iloczynu wyciągnąć pierwiastek, bez przybliżenia go do dziesiętnych znaków, i pod tym pierwiastkiem podpisać mianownik ułamku naznaczonego.* Np. aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 15, przybliżony do $\frac{1}{12}$, otrzymamy $\sqrt[3]{\frac{15\times12^3}{12^3}}=\sqrt[3]{\frac{15\times1728}{12^3}}$; po wykonaniu działania, będziemy mieli żądany pierwiastek $\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$.

Żeby z ułamku zwyczajnego wyciągnąć pierwiastek przybliżony do danego ułamku mającego licznikiem 1, potrzeba naprzód mianownik piérwszego uczynić zupełnym sześcianem; potém oba jego wyrazy pomnożyć przez sześcian z mianownika ułamku drugiego. Dajmy np. że z $\frac{2}{3}$ mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny do $\frac{1}{15}$ przybliżony, będziemy mieli $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times3^2\times15^3}{3^3\times15^3}}$ czyli $\frac{\sqrt[3]{60750}}{3\times15}$.

Zwykle jednak wyciąga się pierwiastek sześcienny przybliżony ze zwyczajnego ułamku, zamieniwszy go wprzód na ułamek dziesiętny.

MIARY.

146. Wyraz *miara* ma dwojakie znaczenie; raz jako narzędzie służące do mierzenia; drugi raz jako jedność, z którą porównywając zbiór tego samego gatunku co jedność, oceniamy w liczbach wielkość tego zbioru.

Stosownie do natury rzeczy, miary są rozmaitego rodzaju. Miary podzielić można: 1. Na miary rozciągłości. 2. Miary ciężaru czyli wagi. 3. Miary wartości rzeczy, czyli piéniądze. 4. Miary czasu. Prócz tego, są miary naukowe, np. miary temperatury; prężenia powietrza; dynamiczne, czyli siły; miary w Jeometryi przyjęte; i t. p.

MIARY ROZCIĄGŁOŚCI.

147. Miary rozciągłości dzielą się: na *miary długości*, *miary powierzchni* czyli *kwadratowe*, i na *miary miąższości*, czyli *bryłowatości*, albo *sześcienne*, pospolicie *kubicznemi* zwane, od wyrazu łacińskiego *cubus* co znaczy *sześcian*, to jest kostka we wszystkich kierunkach równa.

Miary kwadratowe i sześcienne pochodzą z miar długości. Tak, kwadrat jest to figura jeometryczna, płaska, zamknięta czterma równemi liniami prostemi, pod kątem prostym spotykającemi się. Sześcian, albo kostka jest bryłą zamkniętą sześcioma kwadratami, pod kątem prostym do siebie pochylonemi; zatém wszystkie proste linie podług których kwadraty ograniczające sześcian spotykają się z sobą, są sobie równe.

Miary rozciągłości są różne w różnych krajach, tak pod względem ich zasady, czyli głównéj jedności, jako téż ich podziału. Lecz że w ostatnich czasach zgodzono się, aby miary wszystkich narodów porównywać z nowemi francuzkiemi, dla tego takowe iść będą na czele.

MIARY DŁUGOŚCI.

FRANCUZKIE.

148. Zasadniczą jednością nowych francuzkich miar długości jest *Metr*. Metr jest dziesięciomilionową częścią południka ziemskiego.

Metr dzieli się: na 10 *decymetrów*, decymetr na 10 *centymetrów*, centymetr na 10 *millimetrów*. Zatém metr zawiera 1000 millimetrów, albo 100 centymetrów, albo też 10 decymetrów.

Miary większe od metra są: *Dekametr* zawiera 10 metrów, *Hektometr* 100 metrów, *kilometr* 1000 metrów, i *Myryametr* 10000 metrów.

Miary francuzkie piszą się w kształcie ułamków dziesiętnych: tak np. $52348^{m},279$ czyta się: albo 52348 metrów i 279 tysiącznych metra; albo 5 myryametrów, 2 kilometry, 3 hektometry, 4 dekametry, 8 metrów, 2 decymetry, 7 centymetrów i 9 millimetrów. Zwykle jednak czyta się się pierwszym sposobem.

Długości drożne rachują teraz na kilometry, albo na mile nazwane Lieu; mila francuzka zawiera 5000 metrów.

Dawnych miar francuzkich zasadniczą jednością była *stopa królewska* (pied du roi). Sążeń (toise), dzieli się na 6 stóp. Stopa królewska zawiera $0^{m},3248394$.

Między pospólstwem jako też w handlach poszczególowych, używają Francuzi *Łokcia wielkiego i małego*. Łokieć wielki zawiera 12 decymetrów; łokieć mały, jest rzeczywiście pół łokcia wielkiego, bo zawiera 6 decymetrów. Łokieć wielki dzieli się na ćwiercie, cale, i linie.

Nowy sążeń zawiera 2 metry, który się dzieli na 6 stóp; stopa na 12 cali, cal na 12 linij.

POLSKIE I RUSKIE.

149. Zasadniczą jednością miar polskich jest *Łokieć*.

Łokieć w handlu łokciowym dzieli się na 4 ćwierci; ćwierć na 6 cali.

Łokieć w robotach inżenierskich dzieli się na 2 stopy, stopa na 12 cali, cal na 12 linij.

W każdym razie łokieć zawiera 24 cale, zatem 288 linij.

Sążeń zawiera 3 łokcie albo 6 stóp.

Mierniczowie uczynili z miar używanych w handlu miary dziesiętne w ten sposób. Łokci $7\frac{1}{2}$, czyli stóp 15 wzięli za główną jedność, i nazwali ją *prętem*. Pręt podzielony jest na 10 pręcików; pręcik na 10 ławek, czyli cali mierniczych. Tym sposobem miary miernicze wyrazić można ułamkami dziesiętnemi: np. 75,28 prętów, czytać można 75 prętów 2 pręciki i 8 cali.

Miary nowopolskie, w roku 1819 wprowadzone, mają za podstawę millimetr francuzki, tak że na 1 liniją polską idzie 2 millimetry. Więc *łokieć polski zawiera 576 millimetrów.*

150. Od dnia 19 Kwietnia (1 Maja) 1849 r. wprowadzone zostały miary i wagi w całém Cesarstwie Rossyjskim używane.

Zasadą miar długości jest *sążeń*, czyli *sażeń.*

Sażeń dzieli się w handlu na 3 arszyny; arszyn na 16 werszków.

Sażeń dzieli się w miernictwie na 7 stóp, stopa na 12 cali, cal na 10 linij.

Długość drogi mierzy się na *wersty.*

Wersta zawiera 500 sażeniów.

Werst 7 idzie na milę polską.

Mila pols. dzieli się na 2 pół mile, lub na 4 ćwiercie mili.

Staje milowe jest połową ćwierci mili.

Podstawą miar rossyjskich jest stopa angielska (foot), równająca się 0,30479451 metrom francuzkim. *Arszyn zawiera stóp angielskich* $2\frac{1}{3}$, *zatém zawiera* 0,71118719 *metr. franc.*

Z tego wypada, że Sażeń zawiera łokci polskich 3,704099946.

ANGIELSKIE.

151. Zasadniczą jednością miar angielskich jest *Yard*. Yard dzieli się na 3 stopy (feet), stopa na 12 cali.

Yard zawiera 0,91438348 *metrów francuzkich.*

Podstawą miar angielskich jest długość wahadła, dającego sekundy w próżni, blisko Londynu przy powierzchni morza. Ta długość wynosi 39,1393 cali angielskich.

Mila angielska zawiera 5280 stóp angielskich, albo 1,50857 wiorst.

Pręt angielski zawiera 5,5 yardów.

152. Wszelkie miary rozciągłości, jako téż i wagi nowe francuzkie, bez żadnéj zmiany, prócz nazwisk, zaprowadzono w Hollandyi, Belgii, Lombardyi, Piemoncie, Parmie i Modenie. W tych krajach nazwali metr łokciem, lecz podział jego dziesiętny zachowano.

153. W Saxonii, w Wielkiém Księstwie Badeńskiém i w Hessen-Darmstad, łokieć, dzielący się na 2 stopy, lub na 24 cali, zawiera 0,6 metra francuzkiego.

PRUSKIE.

154. Stopa dawniéj reńską, teraz *pruską* nazwana, jest zasadniczą jednością miar tego państwa. Stopa pruska dzieli się na 12 cali i *zawiera* 0,3138528 *metrów fran.*; cal zawiera 12 linij. Pręt pruski zawiera 12 stóp pruskich; *łokieć zaś pruski zawiera* 0,66694 *metrów francuzkich:* zatém jest dłuższy od dwóch stóp pruskich.

Podstawą miar pruskich jest długość wahadła bijącego sekundy, w Berlinie. Ta długość wynosi 456,1626 linij pruskich.

Mila pruska zawiera 12000 łokci pruskich.

AUSTRYACKIE.

155. Zasadą miar w cesarstwie austryackiém jest łokieć wiedeński, dzielący się na 24 cale. Cal zawiera 12 linij.

Pręt zawiera 12 stóp wiedeńskich.

Łokieć wiedeński równa się 0,779163 *metrom francuzkim. Stopa wiedeńska zawiera* 0,316132 *metrów francuzk.* Z tego widzimy, że rachunek na łokcie nie odpowiada rachunkowi na stopy.

Mila pocztowa austryacka zawiera 12000 łokci wiedeńskich.

156. Ponieważ po największéj części podział sążnia, łokcia &c, jest taki sam w obcych krajach, jak u nas, przeto następujących krajów podamy tylko długość zasadniczych jedności wyrażoną w metrach francuzkich.

Łokieć	Bawarski . . . . . zawiera	0,833 metrów
	Duński	0,628 m.
	Frankfurtski nad Menem . . .	0,547 m.
	Hamburski	0,576 m.
	Hannowerski.	0,584 m.
	Hiszpański (Vara)	0,848 m.
	Neapolitański (Canna). . . .	2,109 m.
	Portugalski	1,100 m.
	Rzymski	2,002 m.
	Szwedzki.	0,594 m.

MIARY POWIERZCHNI.

FRANCUZKIE.

157. Zasadą miar powierzchni we Francyi jest *metr kwadratowy*. Podnosząc do kwadratu podziały metra, znajdziemy, że metr kwadratowy zawiera 100 decymetrów kwadratowych; albo 10000 centymetrów; albo 1000000 millimetrów kwadratowych.

W miernictwie dawny morg (arpent) zastąpiony został przez *are*, różny w rozległości od poprzedzającego. Are zawiera 100 metrów kwadratowych: 10 metrów kwadratowych nazywa się *decyar*, metr zaś kwadratowy przezwano *centiarem*.

Większe od ara miary są: *dekar* zawierający 10 arów; *hectar* zawierający 100 arów, odpowiadający włóce. Wyższe miary powierzchni, jako to, kilar, Myriar, nie używają się w mowie.

Mila kwadratowa francuzka zawiera 5000^2 metrów kwadratowych czyli 25000000 centiarów, albo 2500 hektarów.

POLSKIE I ROSSYJSKIE.

188. Zasadą miar kwadratowych polskich jest łokieć kwadratowy; który zawiera 2^2 czyli 4 stopy kwadratowe, 24^2 czyli 576 cali kwadratowych. Sążeń kwadratowy zawiera, 3^2 czyli 9 łokci kwadratowych, albo $6^2 = 36$ stóp kwadratowych.

W miernictwie jednością miar powierzchni jest pręt kwadratowy. *Mórg* zawiera 300 prętów kwadratowych.

Włóka zawiera 30 morgów, albo 9000 prętów kwadratowych.

Dawniéj rachowano także powierzchnią gruntu na łany, lecz dotąd nie wyjaśniono dokładnie jaka to była miara; podług jednych zawierała 2 włóki, podług drugich 3 włóki.

Mila kwadratowa polska zawiera $7^2 = 49$ Werst kwadratowych, albo 331 włók, 29 morgów i prętów kwadratowych 293,311. Zatem o 7 prawie prętów kwadratowych mniéj niż 332 włók; więc w mniéj ścisłych rachunkach można uważać, że mila kwadratowa zawiera 332 włók

Pręt kwadratowy polski zawiera 18,6624 *metrów kwadratowych*,

159. Zasadniczą jednością miar kwadratowych rossyjskich jest *Sażeń kwadratowy*, który zawiera $7^2 = 49$ stóp kwadratowych; *stopa kwadratowa* zawiera cali kwadratowych $12^2 = 144$; *cal kwadratowy* zawiera linij kwadratowych $10^2 = 100$.

Zasadniczą jednością miar kwadratowych mierniczych jest *Dziesiatyna*, zawierająca 2400 sażeni kwadratowych.

Wersta kwadratowa zawiera sażeni kwadratowych $500^2 = 250000$.

Sażeń kwadratowy zawiera metrów kwadratowych 4,55208495.

160. Podnosząc do kwadratu miary długości, znajdujemy podziały miar kwadratowych. Dla téj przyczyny opuściwszy zwyczajne miary kwadratowe obcych krajów, wspomniemy tylko o miarach gruntowych używanych w niektórych krajach.

161. W Anglii mórg nazywa się *Akr*, który zawiera 4840 Yardów kwadratowych, albo 160 prętów kwadratowych. Akr angielski zawiera metrów kwadratowych 4046,70982848.

Pruski mórg, dawniéj Magdeburskim zwany, zawiera prętów kwadrat. pruskich 180; zatém *metrów kwadratowych* 2552,0518304.

Austryacki mórg (Joch) zawiera sążni kwadratowych wiedeńskich 1600; zatém *metrów kwadr.* 5756,50944.

Uwaga. Dla wskazania, że wypisane liczby są miarami kwadratowemi, pisze się obok nich po prawéj stronie u góry kwadracik; np. 5 □ ł. lub 5 □ łok. znaczy 5 łokci kwadratowych.

MIARY MIĄSZOŚCI.

162. Miary miąszości dzielą się: na właściwe *miary bryłowatości*, na *miary objętości do ciał sypkich* i na *miary objętości do ciał ciekłych.*

Ponieważ miary bryłowatości są sześcianami z miar długości; przeto w ogólności o tych mówić będziemy.

Bryłowatości.

163. Miary bryłowatości używają się w obliczaniu mas kamieni, murów, ziemi przy robotach górniczych i grabarskich, w obliczaniu massy wody potrzebnéj do celów inżenierskich, drzewa budulcowego i opałowego, i t. p.

We Francyi mierzą na metry sześcienne, które przy mierzeniu drzewa nazywają *sterem*; ster zawiera 10 *decysterów.* Decaster zawiera 10 sterów.

U nas mury obliczają się na łokcie sześcienne, roboty grabarskie na sążnie sześcienne; roboty kamieniarskie na stopy sześcienne; które czasem *kubikami* nazywają. Sążeń sześcienny zawiera łokci sześciennych $3^3 = 27$, albo stóp sześciennych $6^3 = 216$. Sążeń drzewa nazywają pospolicie *sągiem*. Pomniejsze roboty oceniają się na cale sześcienne: stopa sześcienna zawiera cali sześciennych $12^3 = 1728$. *Łokieć sześcienny jest* 0,191 102 976 *metra sześciennego*.

Sażeń rossyjski zawiera stóp sześciennych $7^3 = 343$; stopa sześcienna cali sześciennych 1 728.

Sażeń sześcienny zawiera metrów sześciennych 9,71 215 347.

Objętości do ciał sypkich i ciekłych.

164. Podstawą miar objętości, tak do ciał sypkich jako i ciekłych, powinny być miary sześcienne; lecz nie we wszystkich krajach, przy ustanowieniu miar, miano wzgląd na to.

Miary do ciał sypkich i ciekłych różnią się tylko podziałami, jako to zaraz zobaczymy.

165. We Francyi zasadniczą jednością miar, tak do ciał ciekłych, jako i sypkich jest *litr*, którego bryłowatością jest *decymetr sześcienny*, zastępuje on dawną kwartę nazywaną *pinte*, lecz jest od niéj większy.

Litr dzieli się na 10 decylitrów, albo na 100 centylitrów.

Dekalitr zawiera 10 litrów. Hektolitr zawiera 100 litrów, albo 10 dekalitrów.

Rzeczy ciekłe i droższe ziarna mierzą na litry i decylitry. Zboże, wapno, węgle, i t. p. mierzą na hektolitry i dekalitry.

166. Jednością zasadniczą miar objętości do ciał sypkich i ciekłych, w Polsce, jest *kwarta*, *równa litrowi francuzkiemu.*

Kwarta dzieli się na na 4 *kwaterki*; kwaterka na dwa *półkwaterki.*

Garniec zawiera 4 kwarty.

Korzec obejmuje 32 garnce; dzieli się na 2 *półkorce*, albo na 4 *ćwiercie.*

Beczka zawiera 25 garncy.

Łaszt ma w sobie 30 korcy.

Rzeczy sypkie mierzą się na korce, ćwiercie, garnce. Rzeczy ciekłe na beczki, garnce, kwarty, i t. d. Łaszt jest miara handlowa do zboża wyłącznie.

167. W państwie rossyjskim i u nas jednością zasadniczą miar objętości do ciał sypkich jest *czetwiert*, zaś do ciał ciekłych *wiadro.*

Czetwiert zawiera *czetwieryków* 8, a czetwieryk garncy 8. *Wiadro* zawiera *krużków* 10; krużek zaś 10 *czarek.*

Czetwiert zawiera cali sześciennych rossyjskich 12809,76; lub 209,743 kwart polskich. Wiadro obejmuje cali sześciennych rossyjskich 750,57.

168. W innych krajach ważniejsze miary do ciał sypkich i ciekłych są:

W Anglii: do ciał sypkich *Imperial quarter* dzielący się na 8 *buszlów;* buszel na 8 *gallonów.* Quarter zawiera 290,689 kwart polskich. Do ciał ciekłych *Imperial gallon* zawierający 4,543 kwart polskich.

W Prusiech; *do ciał sypkich: Szefel* dzieli się na 6 *metzen;* metzen zawiera 192 cali sześciennych pruskich. Szefel zawiera 54,9615 kwart polskich. *Do ciał ciekłych:* Ejmer dzieli się na 60 kwart, i wyrównywa 68,7 kwartom polskim.

W Austryi; do ciał sypkich: *Muth* dzieli się na 30 *metzen;* metzen zawiera 61,5 kwart polskich. Do ciał ciekłych jest *Mass* dzielący się na 4 *sejdel.* Sejdel zawiera 2 *pfiff.* Większe miary do płynów są: *Ejmer*, *Fass*, *Drajling.* Ejmer zawiera 4 Mass, Fass zawiera 10 Ejmerów, a Drajling 3 Fass.

Hamburski Szefel zawiera 2 Fass i obejmuje 105,37 kwart polskich.

WAGI.

169. We Francyi zasadniczą jednością wag jest *gram.* Jest to ciężar centymetra sześciennego wody dystylowanéj, ważonéj w temperaturze 4 stopni stustopniowego termometru.

Gram dzieli się na 10 decygramów: decygram na 10 centygramów; centygram na 10 milligramów. Większe od grama wagi są: Dekagram obejmuje 10 gramów; hektogram 10 decagramów; kilogram 10 hektogramów; Myryagram 10 kilogramów.

170. W Polsce rachują na funty, kamienie i centnary. Funt dzieli się na 32 łóty, łót na 288 granów, gran na 5,5 graników, granik zawiera 8 milligramów. Funt w aptekarstwie dzieli się na 16 uncyj, uncya na 8 drachm, drachma na 3 skrupuły, skrupuł 24 granów.

Funt równa się 405,504 gramom francuzkim.

Centnar zawiera 100 funtów, albo 4 kamienie, kamień 25 funtów.

171. Jednością zasadniczą wag w Państwie rossyjskiém jest *funt,* który się dzieli na 96 *zołotników*, a zołotnik na 96 *doli:* 40 funtów nazywa się *pudem. Berkowiec* zawiera 10 pudów.

Funt aptekarski dzieli się na 12 uncyi, uncya na 8 drachm, drachma na 3 skrupuły, skrupuł na 20 granów.

Funt handlowy rossyjski zawiera funtów polskich 1,009882916, albo 408,6125501 *gramów francuzkich.*

Funt zaś aptekarski zawiera 358,511 *gramów francuz.*, albo 28,29158776 łutów polskich.

172. W Anglii zasadniczą jednością wag jest funt handlowy *avoir du poid*, który dzieli się na 16 uncyj. *Centnar (hundretweight)* zawiera 112 funtów. *Beczka (ton)* waży 20 centnarów. Okrętowa beczka zawiera 2000 funtów. *Funt hand. (av. du poid), zawiera gramów* 453,598. Funt używany w aptekarstwie, jako też w mennicach, nazywa się *troy pound* (troi paund); dzieli się na 12 uncyj, albo na 5700 troigranow. *Troipaund zawiera* 373,202 *gramów francuzkich.*

173. W Saxonii, Baden i Hessen-Darmstadt, za funt wzięto pół kilograma francuzkiego.

W Austryi i Bawaryi funt zawiera 560 gramów.

W Hamburgu . . . . . funt waży	484,302 gramów
W Frankfurcie nad Menem . . .	505,347 gr.
Leichtgewicht	467,914 gr.
W Prusiech, Hanowerze i Brunświku	467,743 gr.
W Danii	499,322 gr.
W Hiszpanii	460,866 gr.
W Rzymie.	339,073 gr.
W Neapolu	891.gr.

W Szwecyi funt handlowy zawiera 425,12 gramów; funt górniczy 375,116 gramów; funt rolniczy 350,0988 gramów; funt w rybołówstwie 325,0917.

Uwaga. W wielu krajach, mianowicie też niemieckich, wagi w tém samém miejscu różne są, stosownie do przedmiotów sprzedawanych na wagę; przykład tego widzieliśmy w Szwecyi, gdzie jest aż cztéry rodzaje wag. Różne téż bywają wagi używane w poszczególowych sprzedażach, od wag w handlach hurtowych.

PIENIĄDZE.

174. Pieniądze, tak jak wszelkie wyroby ludzkie, są towarem, za pośrednictwem którego ułatwiają się zamiany rzeczy zbywających od potrzeb na rzeczy potrzebne. Tak sprzedając zboże, zamieniamy je na pieniądze; kupując sukno zamieniamy je na pieniądze. Pomimo tego, nie można powiedzieć że pieniądze są bezwarunkowo miarą wartości rzeczy; wartość bowiem rzeczy zależy od trzech nierozłącznych przymiotów, któremi są: użyteczność, trwałość i rzadkość rzeczy. Np. chléb, im jest rzadszy, tém jest droższy przy równéj pożyteczności i trwałości. Złoto droższe jest od żelaza, bo jest rzadsze i trwalsze.

Pieniądze więc, jako środek ułatwiający zamianę rzeczy, powinny miéć odpowiednie przymioty, które są: *podział* taki, żeby każdą wartość najmniejszą i największą, pieniędzmi oznaczyć można; *trwałość*, iżby się przez używanie, przechodząc z rąk do rąk, nieprędko psówały; i nareszcie, *mała objętość*, ażeby wielkie wartości z łatwością przenosić można z miejsca na miejsce.

Drogie metale, złoto i srebro, jako dwa ostatnie przymioty posiadające, są materyałem, z którego powszechnie wyrabiają pieniądze. Lecz ponieważ te metale, zupełnie czyste, są za miękkie, i dla tego prędko się wycierają, przeto aby trwadszemi je uczynić, domięszuje się do nich cokolwiek innego, tańszego metalu, zwykle miedzi. W pieniądzach więc, jako też we wszelkich złotniczych wyrobach, złoto i srebro nie jest czyste.

175. Ilość czystego metalu na danéj wadze stanowi jego *próbę*.

Dla wszelkich wyrobów przyjęto w wielu krajach, że grzywna czyli pół funta czystego złota podzielona jest na 24 części *karatami* zwane, a każdy karat na 12 granów. Jeżeli np. do 21 części złota domięsza się 4 miedzi, wtedy to mięszane złoto jest 21 karatowe, czyli 21 próby.

Grzywnę czystego srebra dzielono na 16 łótów, a każdy łot na 18 granów. Jeżeli np. do 12 łótów czystego srebra domięszano 4 łóty miedzi, wtedy srebro jest 12 próby.

Złoto więc liczono do 24, a srebro do 16. Mówiąc, że złoto jest 20 karatowe, oznacza, że na 24 wagi jest 20 części czystego złota, a 4 miedzi; srebro 13 próby zawiera na 16 wagi, czystego srebra części 13 a miedzi 3.

Grzywna kolońska, podług któréj u nas rachowano próby złota i srebra, zawierała 233,8123 gramów.

W Państwie rossyjskiem próba drogich metalów rachuje się do 96 zołotników, które znów dzielą się na 96 doli; tak np. próba $80\frac{1}{4}$, znaczy że na 96 częściach mięszaniny jest $80\frac{1}{4}$ czystego metalu, a reszta, to jest, $15\frac{3}{4}$ części miedzi.

We Francyi próba srebra i złota rachuje się do 1000; tak np. próba 990, znaczy, że 1000 części czystego metalu jest 990, a 10 miedzi.

W Anglii próba wyrobów złotych i srebrnych odnosi się nie do czystego, lecz do używanego na pieniędze, metalu. Wskazują zaś o ile złoto lub srebro jest gorsze albo lepsze, od użytego na pieniądze. Litera **W**. oznacza gorsze *(worse)*, a litera **B**. lub **M**. oznacza lepsze *(better, more)* np. próba

W 0.2 oznacza, że złoło lub srebro jest o 2 grany gorsze od złota lub srobra mennicznego.

176. *Stopa menniczna* oznacza ile z jedności wagi mennicznéj czystego metalu, wybija się sztuk monety, Tak np. widzieć można na dawniejszych złotówkach polskich napis „86$\frac{36}{125}$ z grzywny kolońskiéj," co znaczy, że z grzywny kolońskiéj czystego srebra bito złotówek 86 i jeszcze pozostało $\frac{86}{125}$ *złotego*.

177. Stopę menniczną i próbę stanowi rząd. Próba pieniędzy i stopa menniczna stanowi ich wewnętrzną wartość. Wartość pieniędzy jest albo rzeczywista czyli wewnętrzna, albo nominalna. Wartość nominalną ustanawia rząd, i ręczy za nią.

Pieniądze złote i srebrne mają wartość wewnętrzną, miedziane i bilony, mają wartość nominalną. Pieniądze papierowe, jakoby piśmienne przekazy sum na nich wyrażonych, są zabezpieczone przez rząd.

178. Tak jak w całém Państwie Rossyjskiém, u nas jednością zasadniczą pieniędzy jest *rubel*, zawierający 100 *kopiejek*. Dawniéj i teraz w prywatnych czynnościach handlowych zasadniczą jednością pieniędzy jest *złoty*, dzielący się na 30 groszy.

Z grzywny kolońskiéj czystego srebra wybija się rubli 13,0032. Próba srebra monetnego jest 250 granów na 288 granach mięszaniny.

Pieniądze w obiegu będące są:

Złote, półimperjały zawierające po 5 rubli.

Srebrne: ruble, półruble, sztuki po 25 kopiejek, sztuki po 20 kopiejek, sztuki po 10 i po 5 kopiejek. Jako też dziesięciozłotówki, pięciozłotówki, dwuzłotówki, czyli sztuki po 30 kopiejek, i złotówki.

Papierowe: bilety bankowe po 10 rubli, po 3 ruble i rublowe.

Bilony: dziesięciogroszówki i pięciogroszówki.

Miedziane: trojaki, grosze i 5, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ kopiejki.

Rubel zawiera złotych $6\frac{2}{3}$.

Dotąd jest jeszcze we zwyczaju rachować na dukaty złote i srebrne: obie te monety nigdy bite nie były, są tylko rachunkowe. Dukat złotem rachuje się po 20 złotych; dukat zaś srebrem po 18 złotych.

W niektórych okolicach rachują na talary po 6 złotych.

Lubo rzadko, można jeszcze widzieć w obiegu złote sztuki po 50 i po 25 złotych; jako też talary po 6 złotych.

Dawnemi czasy były talary ośmiozłotowe, które nazywały się *talarami bitemi;* pospólstwo rachuje jeszcze czasami na *bite*, co znaczy talary bite.

W Państwie Rossyjskiém pieniądze będące w obiegu są, *Złote:* Imperyał zawiera 10 rubli sreb., pół imperyał zawiera 5 rub. sr.

Srebrne: rubel zawiera 2 połtyniki; połtynik 2 czetwertaki, czyli 25 kopiejek. Dwugriwienniki po 20 kop. Griwiennik 10 kop. i Piataczek 5 kop.

Papierowe: Bilety 100 rublowe, 50 rublowe, 25 rublowe, 10 rublowe, 5 rublowe, 3 rublowe, i rublowe.

Miedziane: Trzy, dwu, pół i ćwierć kopijkowe.

Poprzednio i teraz niekiedy rachują na ruble assygnacyjne. Rubel srebrem wart był 3,50 rubli Assygnacyjnych.

Ta różnica między srebrnemi i assygnacyjnemi rublami, jest powodem do pisania *rubli srebrem* tyle a tyle.

179. W następującym wykazie pieniędzy obcych krajów, próba podana jest w granach, rachując czysty metal za 288 granów; wartość zaś zasadniczych jedności monet jest w rublach srebrnych wyrażona.

Pieniądze jednego kraju względem drugiego są, ściśle mówiąc, towarem, który tańszy jest kiedy go wiele do zbycia, droższy kiedy jest rzadszy. Tak nazwane *ceduły kursu pieniedzy*, są to ogłoszenia jawne wartości pieniędzy zagranicznych, wyrażonych w pieniądzach krajowych. W następujących numerach wartości wyrażone w rublach są wartościami wewnętrznemi, od których wszelako wartości w kursach wyrażane nie wiele się różnić mogą.

W ANGLII, jednością pieniędzy jest *funt sterling* (pound), zawierający 20 szylingów; szyling dzieli się na 12 pensów.

Funt sterling jest próby 260,00, *wartość jego* 6,220 *rubli.*

Szylinga próba jest 266,40, *wart* 0,291 *rubli.*

W AUSTRYI zasadniczą jednością jest złoty konwencyjny, zawierający 60 krajcarów. Talar konwencyjny zawiera 2 złote konwencyjne.

Próba złotego jest 240,0; *wartość* 0,65 *rubli.*

Prócz tego w Austryi mają monetę nazwaną *Wiennerwährung*, której 5 złotych idzie na 2 złote konwencyjne.

W BAWARYI i wszystkich krajach niemieckiego związku celnego rachują na złote; złoty zawiera 60 krajcarów.

Próba złotego jest 259,20; *złoty wart* 0,531 *rubli.*

W DANII jednością zasadniczą jest Reichs-taler, zawierający 6 marek; marka zawiera 16 szylingów. Reichs taler wart jest 2 banktalary.

Próba reichstalera jest 252,00; *wart jest* 1,405 *rubli.*

We FRANCYI i BELGII, frank zawiera 100 centymów. Luidor zawiera 20 franków.

Próba franka jest 259,20; *wart jest* 0,25 *rubli; próba luidora jest* 259,20; *wart jest* 5,047 *rubli.*

W GRECYI rachują na drachmy. Drachma zawiera 100 Lepta. Drachma warta jest $\frac{1}{6}$ piastra hiszpańskiego próby $\frac{9}{10}$.

W HAMBURGU rachują na marki kurant, zawierające po 16 szylingów. Monetą rachunkową jest marka banko zawierająca 16 szylingów banko.

Marka kurant jest próby 216,00 *i warta* 0,382 *rubli. Marka banko warta* 0,47 *rubli.*

W HISZPANII, rachują na piastry. Piastr zawiera 20 realów de vellon, albo 10$\frac{5}{8}$ realów de Plata antigua. Real dzieli się na 34 maravedis.

W wekslowych rachunkach używane monety są: Pistol zawierający 1088 dukatos de Cambio. Dukat Cambio zawiera 375 Maravedis de Plata. Piastr Cambio dzieli się na 272 Maravedis de Plata.

Próba piastra jest 258,00; *wartość* 1,344 *rubli.*

W HOLLANDYI, złoty hollenderski zawiera 100 cents-Talar wart jest 2$\frac{1}{2}$ złot. hollenderskiego.

Próba złotego jest 257,14; *wartość* 0,526 *rubla.*

W LOMBARDYI, Lira austryacka zawiera 100 centessimów.

Próba liry jest 259,20; *wartości* 0,217 *rubli.*

Skud nowy zawiera 6 lir.

W NEAPOLU, dukat di regno zawiera 10 karlinów; karlin 10 granów. Są także dukaty nazwane Onczety po 30, po 15 i po 3,6 dukati di regno.

Próba ducati di rego jest 240,00; *wartość* 1,06 *rubli.*

PAPIEZKIE PAŃSTWO ma skudy rzymskie, po 10 paoli; paol po 10 bajoki. Złote pieniądze nazwane cekinami, są po 10, po 5 i po $2\frac{1}{2}$ skudy.

Próba skudów jest 259,20; *wartość* 1,345 *rubli.*

W PORTUGALII, rachują na Korony srebrne po 100 reis. Korona złota zawiera 5000 reis; nowe krusady po 480 reis.

Rachunki utrzymują na Reis; Milreis zawiera 1000 reis.

Próba korony srebrnéj jest 264,00; *wartość* 1,509 *rubli.*

PRUSSY i Państwa północnego związku niemieckiego celnego, jako też HANOWER, rachują na talary po 30 srebrnych groszy; grosz srebrny zawiera 12 fenigów.

W Saxonii zaś srebrny grosz zawiera 10 fenigów.

Frydrychsdor w złocie wart 5 talarów.

Próba talara jest 216,00; *wartość* 0,928 *rubli. Próba frydrychsdora jest* 260,00, *wartość* 5,20 *rubli.*

SARDYNIA, ma stopę menniczną jak we Francyi. Frank nazywają lirą; 5 lir stanowi Skud.

W SZWECYI, Species Reichs taler zawiera 48 szylingów: *jest próby* 216,00; *wart* 1,419 *rubli.*

W SZWAJCARYI, Neutaler, czyli sztuka 4 frankowa zawiera 40 baców. Sztuka 5 frankowa francuzka rachuje się za 35 baców; a kronentaler niemiecki za 40 baców.

Próba Neutalara jest 259,20; *wartość* 1,503 *rubli.*

W TOSKANII, Fiorino zawiera 100 Quatrini. Francescone zawiera 4 fiorini lub 10 paoli. Lira zawiera 1,5 paoli. Cekin złoty wart 8 fiorini; Ruspone zaś 24 fiorini.

Próba fiorina jest 264,00; *wartość* 0,350 *rubli.*

W TURCYI, Piastr zawiera 40 Para; para 3 aspry.

W skarbie Sułtana rachują na kiesy; Kiesa zawiera 500 piastrów. Juk zawiara 12 kies. Kiesa złota zawiera 30000 piastrów.

Próba i stopa menniczna nie są prawem ustanowione przeto są zmienne.

W STANACH PÓŁNOCNÉJ AMERYKI, rachują na Dolary czyli Piastry. Dolar zawiera 100 Centsów. Orzeł złoty (Goldeagle) zawiera 10 dolarów.

Próba Dolara jest 257,00; *wartość* 1,334 *rubli.*

BRAZYLIA, ma monety jak Portugalia, inne kraje południowéj Ameryki jak Hiszpania.

EGIPT, ma system monetny taki jak Turcya. Czynności handlowe odbywają się na hiszpańskie piastry.

Uwaga. Obszerniejszy wykład systematów i rachunków menniczných znajdzie czytelnik w dziele professora Zubelewicza, pod tytułem: *Rachunkowość kupiecka* &c.

C Z A S.

180. Ziemia ma dwojaki ruch; jeden około słońca drugi toczący się czyli wirowy. Te dwa ruchy wymierzają czas.

Przeciąg czasu w którym ziemia odbywa cały jeden ruch wirowy, czyli od północy do północy, nazywa się *dobą*, pospolicie *dniem*, lubo właściwie *dzień* jest wtedy, kiedy mamy widno pochodzące od światła słońca. Dobę podzielono na 24 godzin; godzina dzieli się na 60 minut, minuta na 60 sekund. Minuty oznaczają się kréską z prawéj strony u góry liczby położonéj, sekundy zaś dwiema kréskami: tak np. 10^{go} 16′ 17″, czyta się, 10 godzin, 16 minut, 17 sekund.

Przeciąg czasu przez który ziemia obiega całą drogę około słońca, nazywa się *rokiem słonecznym*. Rok słoneczny zawiera prawie 365¼ dni. *Rok zaś cywilny zwyczajny* od jednego nowego roku do drugiego, zawiera dni 365; więc co cztery lata cywilne przybywa jeden dzień, i wtedy rok cywilny zawiera 366 dni; dla tego że przybywa dzień jeden, nazywa się *rokiem przybyszowym*.

Każdy więc rok podzielny przez 4, jest przybyszowy, to jest, zawiera dni 366; tak np. lata 1824, 1832, 1840 &c. sąprzybyszowemi.

Rok słoneczny zawiera właściwie 365 dni 5 godzin, 48 minut i 45 sekund; zatém mniéj o 11′ 15″ od 365¼ dni. Stąd więc wypada że na 400 lat popełnia się błąd prawie o 3 dni. Dla poprawienia błędu, lata przybyszowe czynią się zwykłemi, przez cztéry wieki po sobie idące. Pierwszą poprawkę uczyniono przy końcu szesnastego wieku; więc lata 1700, 1800 były zwyczajnemi, rok 1900 również będzie rokiem zwyczajnym, rok 2000 będzie przybyszowym, następne 4 lata wiekowe będą zwyczajne i t. d.

Tę poprawkę winni jesteśmy Papieżowi Grzegorzowi XIII, który rozkazał w r. 1582, ażeby, ponieważ wtedy rok opóźnił się o dni 10, dodano te dni 10. Ten rozkaz zapadł dnia 4 Października, więc nazajutrz zamiast datować 5, datowano 15 Października. Datę téj poprawki pamiętać powinniśmy przez wzgląd na chronologią w Historyi.

Chrześcjanie obrządku greckiego téj poprawki nie przyjęli, i trzymają się ciągle kalendarza Juliańskiego, wprowadzonego przez Juliusza Cesarza. Dla téj to przyczyny miesiące w kalendarzu Juliańskim poczynają się 12 dni później niż w kalendarzu Gregoryańskim.

Rok dzieli się na 12 miesięcy, a te są: *Styczeń* zawiera 31 dni, *Luty* 28 lub 29 dni, *Marzec* 31 dni, *Kwiecień* 30 dni, *Maj* 31 dni, *Czerwiec* 30 dni, *Lipiec* 31 dni, *Sierpień* 31 dni, *Wrzesień* 30 dni, *Październik* 31 dni, *Listopad* 30 dni, *Grudzień* 31 dni.

Tydzień, nie zależnie od miesiąca, roku i wieku, zawiera dni 7, które są: *Niedziela*, *Poniedziałek*, *Wtorek*, *Środa*, *Czwartek*, *Piątek*, *Sobota*.

Słowiańskie narody mają swoje właściwe nazwy dni tygodnia; inne zaś pożyczyli nazw od starożytnych Rzymian, którzy każdy dzień innemu ofiarowali bożkowi. Tak u nich nazywano Niedzielę dniem Słońca, Poniedziałek dniem Księżyca, Wtorek dniem Marsa, Środę dniem Merkurego, Czwartek dniem Jowisza, Piątek dniem Wenery, Sobotę dniem Saturna.

Wiek zawiera lat 100.

Chrześcijanie rachują lata od narodzenia Chrystusa; Żydzi od stworzenia świata, zatém 3761 lat przed erą chrześcijańską: Machometanie od ucieczki Machometa z Meki do Medyny, więc 530 lat późniéj od Chrześcian. Tak u Chrześcian jest teraz rok 1851, u Żydów r. 5611, który poczyna się zwykle we Wrześniu, u Machometan r. 1320, który poczyna się zwykle przy końcu Czerwca lub w Lipcu.

ZAMIANY MIAR JEDNEGO KRAJU NA MIARY INNEGO KRAJU.

1. Sażeniów 173 i werszków 13, ile czyni łokci polskich?

Rozwiązanie. Foot (fut) angielski zawiera 0,30479 metrów; zatém arszyn zawiera $0{,}30479 \times 2\frac{1}{3}$ metrów, czyli

$\frac{0,30479\times 7}{3}$ metr.; więc sażeń zawiera $0,30479\times 7$ metrów, werszek $\frac{0,30479\times 7}{68}$. Podług tego znajdziemy że 173 sażeni czyni 369,10069 metr., zaś 13 wersz. czyni 0,57784; co razem wynosi 369,67853 metr.; a że łokieć polski równa się 0,576 metrów, zatem $\frac{369,67853}{0,576} = 641,8$ łokci polskich, czyli 641 łok. pol. i 19,2 cali.

II. Polskich włók 38, morgów 17 i prętów kwadratowych 243, ile zawiera rossyjskich Dziesiatyn i Sażeni kwadratowych?

Włók 38, morgów 17 i prętów kwadratow. 243 czyni $38\times 9000+17\times 300+243$ prętów kwadr.; co wynosi po obliczeniu 347343 prętów kwadr. A że pręt kwad. czyni 18,6624 metrów kwadr., zatém 38 włók 17 morgów i 243 prętów kwadr. równe są $347343\times 18,6624 = 6\,482\,254$ metr. kwadrat.; ponieważ zaś sażeń kwadratowy zawiera metr. kwadr. 4,5521, zatem $\frac{6482254}{4,5521} = 1424014,10$ sażeni kwadr., a następnie $\frac{1424014,10}{2400} = 593$ dziesiatyn i 814 sażeni kwadr.

III. Czetwierti 2135 ile czyni korcy &c., polskich?

Czetwiert zawiera polskich kwart 209,743; zatem: $2135\times 209,743 = 447801,305$ kwart pols.; a że korzec zawiera kwart 128, więc $\frac{447801,305}{128} = 3498$ kor. 14 garn. i 1,3 kwart pol.

IV. Czetwierti 2134 ile czyni pruskich Szeflów? &c.

Czetwierti 2135 zawiera kwart pol. $2135\times 209,743 = 447801,305$; a że na 1 Szefel idzie kwart polsk. 54,9615, więc 2135 Czetw. $= \frac{447801,305}{54,962} = 8147,47$ Szeflów, czyli 8147 Szeflów i 2,62 Metzen.

V. 78 tons (beczek), 16 hondretweit (centnarów) i 72 funtów av. du p., ile czyni na wagę rossyjską.

Tons $78 \times 20 = 1560$ hondretweit; $1560 \times 112 = 174720$ funtów (av. dup. poid); $174720 \times 453{,}598 = 79252642{,}56$ gramów; a że pud rossyjski równa się $40 \times 408{,}61255 = 16344{,}502$ gramom, więc $\frac{79252642{,}560}{16344{,}502} = 4855$ pudów.

ZAMIANA RUBLI NA ZŁOTE POLSKIE I ODWROTNIE.

Mozolna jest zamiana miar i wag dla tego, że ich stosunki, czyli wzajemne wartości, są wyrażone w ułamkach, nie dających się, po największéj części, uprościć. Lecz ponieważ wyrażenie rubli przez złote i odwrotnie jest bardzo proste, przeto wskażemy tu najważniejsze uproszczenia przy zamienianiu jednych na drugie.

Pamiętając, że 1 rubel wart jest złp. 6 i gr. 20; 2 ruble czynią złp. 13 i gr. 10; wreście 3 ruble równe złp. 20, łatwo potrafimy zamienić wszelką liczbę rubli na złote polskie podług następujących uwag.

I. Liczba rubli wyrażona jednością i po niéj stojącemi zerami, równa się liczbie złotych polskich wyrażonéj szóstkami, których jest więcéj o jednę niżeli zer w rublach; lecz do tych złotych dodaje się 20 groszy; tak np. 100 rubli = 666 złp. i 20 gr.; czyli, ile zer obok rubla napiszemy, tyle szóstek obok 6 złotych, dopisać potrzeba (20 groszy pozostają).

II. Ile zer obok 2 ruble napiszemy, tyle trójek obok 13 złotych dopisać potrzeba; groszy 10 pozostaje. Tak np. 200 rubli warte są 1333 złp. i 10 gr.

III. Ile jest trójek w danéj liczbie rubli, tyle razy jest po 20 złp. Tak mamy:

$6 = 2 \times 3$ rubli $= 2 \times 20 =$ 40 złp.
$9 = 3 \times 3$ rubli $= 3 \times 20 =$ 60 złp.
$12 = 4 \times 3$ rubli $= 4 \times 20 =$ 80 złp.
$15 = 5 \times 3$ rubli $= 6 \times 20 = 100$ złp.

IV. Od 3 do 6, od 6 do 9, od 9 do 12 i od 12 do 15 rubli, liczb pośrednich łatwo jest obliczyć wartość wyrażoną w polskiéj monecie; bowiem np. $4 = 3 + 1$ rubel, więc 4 rub. $= 20 + 6$ złotych 20 gr. : $5 = 3 + 2$ ruble $= 20 + 13$ zł. 10 gr. Tak samo $7 = 6+1$ ruble $= 40+6$ zł. 20 gr. : $8 = 6 + 2$ ruble $= 40 + 13$ zł. 10 gr. i t. d.

V. Na przypadek zapomnienia, obliczywszy podług powyższéj uwagi tabliczkę następującą:

1 rubel =	6 zł.	20 gr.
2	13	10
3	20	—
4	26	20
5	33	10
6	40	—
7	46	20
8	53	10
9	60	—
10	66	20
11	73	10
12	80	—
13	86	20
14	93	10
15	100	—,

do liczb rubli dopisawszy ilekolwiek zer, dosyć jest do liczb odpowiednich złotych dopisać znak ostatni tyle razy ileśmy do rubli zer dopisali. Tak np. 800 rubli $= 5333$ zł. 10 gr.; rubli $13000 = 86666$ zł. 20 gr.

VI. Podług powyższéj uwagi postępując, potrafimy największą liczbę rubli zamienić na monetę polską przez proste dodawanie. Dla przykładu dajmy, że mamy 75842 ruble zamienić na złote pols., będzie:

70000 =	466666	zł.	20 gr.
5000 =	33333		10
800 =	5333		10
40 =	266		20
2 =	13		10
	505613	zł.	10 gr.

Nabywszy wprawy nie będzie potrzeba wypisywać rubli obok wartości ich, jakośmy to wprzykładzie pokazali.

Możnaby powyższą liczbę rubli tak jeszcze na monetę polską obrócić: 75842 = 60000 + 15000 + 900 — 58; zatem mamy:

400000			do odjęcia 333 zł.	10 gr.
100000			53	10
6000			386	20
506000				
386	20			
505613 zł.	10 gr.			

Uwaga. Ponieważ 1 kopiejka warta jest 2 grosze polskie, przeto nic łatwiejszego jak doliczyć liczbę złotych i groszy wypadłych z kopiejek, jeżeli znajdują się przy rublach.

VII. Zdaje się, że następujący sposób zamieniania złotych polskich na ruble, jest najkrótszy i najpewniejszy, to jest, najmniéj podległy błędom.

Ponieważ 1 złoty polski wart jest 15 kopiejek, które tak rozłożyć możemy $10 + \frac{10}{2}$, zatem daną liczbę złotych powiększywszy 10 razy, i do tak powiększonéj liczby dodawszy połowę, téjże powiększonéj liczby, w otrzymanéj liczbie odciąwszy dwa ostatnie znaki na kopiejki, otrzymamy wartość złotych w rublach i kopiejkach.

Gdyby były grosze, połowa ich będzie kopiejkami. Tak np. zamienić 576942 złp. i 24 gr. na monetę rossyjską. Mamy natychmiast:

	57694 20	téj liczby
połowa	28847 10	
	76541,30	
24 gr. =	12	
	86541,	Rubli i 42 Kopiejek.

ZAMIANA OBCYCH MONET NA RUBLE I ODWROTNIE JAKOTÉŻ OBCYCH NA OBCE.

VIII. Ponieważ 100 funtów Sterlingów czyni 622 rubli, zatem rubel 1 wart jest $\frac{100}{622}$ funt. sterlin. Ztąd wypada, że np. 2574 rubli czynią $\frac{2574\times100}{622}$ funt. sterlingów albo $\frac{2574\times50}{311}$; rachunek zaś tak wykonać można: $\frac{257400}{2} = 128700$, co podzieliwszy przez 311, będzie 413,83 funt. stert., albo 413 funt. ster., 16 szylingów i 7,2 pensów.

Żeby powyższą liczbę monety angielskiéj zamienić na ruble, potrzeba naprzód drobniejszą monetę zamienić na ułamek dziesiętny funta sterlinga. Na ten koniec zamieniamy naprzód szylingi na pensy, do których dołączywszy dane pensy, otrzymamy 199,2 pensy; te podzielimy przez liczbę pensów w funcie sterlingu zawartych, to jest przez 240, otrzymamy 0,83; zatem funt. sterl. 413, szyling 16 i pensów 7,2, czyni funt. Sterl. 413,83. Tę liczbę pomnożywszy przez 6,22, otrzymamy liczbę rubli 2574,0226. Uważać tu potrzeba, że ta summa różni się od summy rubli, z których powstały funty sterlingi o 2 kopiejki; lecz gdy zważamy żeśmy przy obliczaniu funt. sterlin. opuszczając dalsze znaki ułamku, pozostawioną powiększyli o jedność, możemy te 2 kopiejki opuścić.

W ogóle, przy obliczaniu wielkich wartości, można zawsze opuścić bardzo małe ułamki, zwłaszcza kiedy ich dokładność podlega wątpliwości.

IX. Austryackich czyli złotych reńskich 100 czyni 65 rubli, zatem $\frac{100}{65}$ złotych reńskich idzie na 1 rubel, zaś 1 złot. reń. czyni $\frac{65}{100}$ rubla. Dajmy 517 rubli do zamienienia na zł. reń. Będziemy mieli $\frac{517\times100}{65}$, czyli $\frac{517\times20}{13}=\frac{10340}{13}=$ 795,3846 zł. reń. czyli 755 zł. reń. i 23,08 krajcarów.

Tę liczbę monety austryackiéj zamieniając na ruble, potrzeba krajcary zamienić na ułamek zł. reń. Będziemy mieli 795,3846 zł. reń.; a że 1 zł. reńsk. wart $\frac{13}{20}$ rubla, przeto mamy $\frac{795,3846\times13}{20}=516,9999$ &. więc 517 rubli.

X. Rubli 3183 zamienić na talary.

Podług powyższego wykazu, 1000 talarów wyrównywa 928 rublom; zamiana więc jednéj na drugą monetę, wykonywa się podobnym do powyższego sposobem. Przyjąwszy jednak, tak jak u nas zwykle się uważa, że talar zawiera złp. 6, wypadłoby, iż 10 talarów czyni 9 rubli, mielibyśmy $\frac{10}{9}=1,1111$ &. talara czyni 1 rubel; zatem powyższą summę talarów takby można zamienić na ruble. Podpisuje się daną summę talarów pod sobą, wysuwając po jednym znaku na prawą rękę, a ogół tak wypisanych summ, jest wartością rubli wyrażoną w talarach:

$$
\begin{array}{r}
3183, \\
318,3 \\
31,83 \\
3,183 \\
318 \\
31 \\
\hline
3536,663
\end{array}
$$

talarów.

Uważać tu potrzeba, że ponieważ 9 nie zawiera czynnika 5 ani 2, iloraz powstały z podzielenia wszelkiéj liczby przez też 9, zawiera ułamek dziesiętny zwrotowy, w którym zwrot poczyna się zaraz od przecinku. Dla téj przyczyny, dosyć będzie tak urządzić powyższe działanie:

$$\begin{array}{r} 3183, \\ 318{,}3 \\ 31{,}83 \\ 3{,}183 \\ 318 \\ \hline 3536{,}631 \end{array}$$

zatem rubli 3183 czyni talarów 3536,666... albo $3536\frac{6}{9}$, lub $3536\frac{2}{3}$, nakoniec 3536 tal. i 20 gr. srebrnych.

XI. Funtów sterlingów 37, szylingów 9 i pensów 9; ile wynoszą na monetę austryacką?

Ponieważ $37 \times 20 = 740$ szylingów, a 9 pensów $= \frac{9}{12} = 0{,}75$ szylin., więc dana summa $= 749{,}75$ szyl., które czynią rubli $749{,}75 \times 0{,}291 = 218{,}17725$ rubli; których na złot. reń. idzie 0,65, zatem dana ilość monety angielskiéj równa się $\frac{218{,}17725}{0{,}65} = 335{,}6573$ złot. reń., albo i 39,44 krajcarów.

LICZBY WIELORAKIE.

181. Liczby wyrażające pewien rodzaj ilości z jéj podziałami, nazywają się *wielorakiemi* (Составныя числа); np. $18^{tal.}\ 4^{zł.}\ 25^{gr.}$ albo $2^{saż.}\ 1^{łok.}\ 15^{cal.}$ Możnaby uniknąć działań z liczbami wielorakiemi sprowadzając je albo do najniższego podziału, np. talary i złote na grosze; albo do najwyższego podziału, np. grosze i złote wyrażając w ułamku talara. Lecz ponieważ liczby wielorakie niekiedy ułatwiają otrzymanie żądanych wypadków, dla tego jeszcze dotąd utrzymuje się nauka o *liczbach wielorakich*.

DODAWANIE.

182. *Liczby wielorakie dane do dodania podpisują się pod sobą tak, aby odpowiednie podziały pod sobą położone były. Dodawanie rozpoczyna się od najniższego podziału, i ogół otrzymany podpisuje się pod tymże podziałem. Lecz gdy ogół jest równy lub większy od liczby podziału mniejszego, składającéj jedność podziału następnie większego, wtedy zamieniwszy podział mniejszy na większy, resztę pozostałych podziałów mniejszych podpisuje się pod kolumną tychże podziałów, a z nich otrzymane większe podziały dodają się do następnéj kolumny.*

Weźmy na przykład:

72 sąż.	2 łok.	17 cali	7 lin.
8	1	23	10
47	0	15	9
15	1	0	0
144 sąż.	0 łok.	9 cali	2 lin.

Ogół linij jest 26, co czyni 2 cale i 2 linje: linje podpisaliśmy pod liniami, a 2 cale dodawszy do cali, otrzymaliśmy ogół 57 cali, które czynią 2 łokcie i 9 cali; cale pod calami podpisawszy, a 2 łokcie dodawszy do łokci, znaleźliśmy 6 łokci, które czynią 2 sążnie równo, więc pod łokciami podpisaliśmy zero, a 2 sążnie dodaliśmy do sążni, których ogół jest 144.

PRZYKŁAD DRUGI.

13 berkówców	7 pud.	24 funt.	72 zł.	21 dol
0	4	35	23	84
48	0	17	5	15
4	8	11	0	93
67 berkowców	1 pud.	8 funt.	6 zł.	21 dol.

ODEJMOWANIE.

183. *W odejmowaniu podpisują się liczby tak jak w dodawaniu. Odejmowanie rozpoczyna się od najniższego podziału. Kiedy odjemna jest większa od zmniejszalnéj, wtedy w téj ostatniéj bierze się jedność wyższego podziału, zamienia się ją na podział niższy, liczbę stąd otrzymaną dołącza się do tegoż niższego podziału, stąd otrzyma się liczbę od któréj można odjąć odjemną.*

PRZYKŁAD.

94 czetwierti	3 czetwieryk.	5 garncy
48	7	6
45 czetwierti	3 czetwieryki	7 garncy

Wziąwszy 1 czetwieryk ze 3, zamieniwszy go na 8 garncy, i złączywszy je z 5, otrzymamy 13 garncy, od których odjąwszy 6, pozostaje 7 garncy. Z 94 czetwierti wziąwszy jednę, zamieniwszy ją na 8 czetwieryków, i złączywszy je z pozostałemi dwiema, będzie 10 czetwieryków, od których odjąwszy 7, pozostanie 3 czetwieryki. Nakoniec odejmujemy 48 od 93 czetwierti.

MNOŻENIE.

184. W mnożeniu liczb wielorakich natrafiamy na trzy przypadki: 1. Kiedy mnożna jest wieloraką, mnożnik pojedynczą liczbą. 2. Kiedy mnożna jest pojedynczą, a mnożnik wieloraką liczbą. 3. Kiedy mnożna i mnożnik są wielorakiemi liczbami.

Co do 1$^{\text{go}}$, kiedy mnożna jest złożona, a mnożnik pojedynczy.

Dajmy, że zgodzono sążeń drzewa po 3 talary, 4 złote i 23 grosze, ile potrzebaby zapłacić za 357 sążni drzewa?

WZÓR DZIAŁANIA.

	3$^{\text{tal.}}$	4$^{\text{zł.}}$	23$^{\text{gr.}}$	
	357$^{\text{sąż.}}$			
	1071$^{\text{tal.}}$			po 3 talary
	178	3$^{\text{zł.}}$		po 3 złote czyli pół talara
	59	3		po 1 złotemu
	29	4	15$^{\text{gr.}}$	po 15 groszy
	9	5	15	po 5 groszy
	5	5	21	po 3 grosze
Ogół	1354$^{\text{tal.}}$	3$^{\text{zł.}}$	21$^{\text{gr.}}$	

Objaśnienie działania. Uważając że sążeń płacono po 3 talary, znaleźliśmy 1071 talarów za 357 sążni. Następnie obliczyliśmy przypadającą summę za téż sążnie, rachując je po 4 zł. w ten sposób; 4 zł. rozłożyliśmy na 3 zł. czyli pół tal., i na 1 złoty: rachując po pół tal. przypada za 357 sążni połowa téj summy, więc 178 tal. i 3 zł.; a trzecia część téj ostatniéj summy, to jest 59 tal. i 3 zł, jest wartością danych sążni po złotemu je rachując. Uważamy następnie że sążeń płacono po 23 gr.; te 23 gr. rozkładamy na 15, 5 i 3; rachując po 15 gr., czyli po pół złot., wypadnie połowa tego cośmy otrzymali rachując po złotemu; to jest, połowa 59 tal. i 3 złote, zatem 29 tal., 4 złote, i 15 groszy; a że 5 jest trzecią częścią 15, więc wziąwszy trzecią część 29 tal., 4 zł. i 15 gr., otrzymaliśmy 9 talar., 5 zł. i 15 gr., wartość sążni po 5 groszy. Pozostało jeszcze obliczyć wartość tychże sążni, rachując je po 3 gr.

czyli po trojaku; wiedząc że 10 trojaków idzie na 1 złoty, a że tyle jest trojaków ile sążni, więc za nie wypada 35 złot. i 7 trojaków, co czyni 5 tal., 5 złot. i 21 gro. Te cząstkowe wartości podpisaliśmy pod sobą, tak jak we wzorze widzimy, dodaliśmy je do siebie, i otrzymaliśmy odpowiedź na zadanie, to jest 1354 tal., 3 złot. i 21 gr., za 357 sążni drzewa.

Unikając liczb wielorakich, można zamienić talary i złote na grosze, i otrzymalibyśmy, 683 grosze, wartość sążnia. Z pomnożenia 357 sążni, przez 683 gr. znaleźlibyśmy 243831 groszy; co czyni 1354 talarów, 3 złot. i 21 groszy.

Uwaga. Objaśnienie powyższego działania dostatecznie nas uczy, jak tego rodzaju mnożenie wykonywać mamy. Wynajdowanie częściowych wartości zależy od gatunku wielkości i podziału liczb danych.

Co do 2^{go}, gdy mnożna pojedyncza a mnożnik złożony.

Dajmy, że centnar mydła zgodzono po 60 złotych, ile wypadnie zapłacić za 12 centnarów, 3 kamienie, 18 funtów i 24 łóty?

WZÓR DZIAŁANIA.

	60 zł.		
	12 cent. 3 kam. 18 funt. 24 łót.		
za 12 cent.	720 zł.		
za 2 kam.	30		
za 1 kam.	15		
za 5 funt.			3 zł.
za 15 funt.	9		
za 1 funt.			18 gr.
za 3 funt.	1	24 gr.	
za 16 łót.		9	
za 8 łót.		$4\frac{1}{2}$	
Ogół	776 zł.	$7\frac{1}{2}$ gr.	

Objaśnienie działania. Naprzód obliczyliśmy 720 złotych za 12 centnarów. Następnie 3 kamienie rozłożyliśmy na 2 kam. czyli na pół centnara, i na 1 kamień: za 2 kamienie jest więc połowa tego co za centnar, to jest, 30 złot., a za kamień połowa 30, to jest 15 złot. Dla obliczenia ile przypada za 18 funtów, rozłożyliśmy je na 15 i 3 funt.; ale że 15 jest równe 3×5, więc obliczyliśmy za 5 funtów czyli piątą część kamienia, 3 złote, zatém za 15 funt. przypadło 9 złotych. Ponieważ za funtów 5 przypadło 3 złote, czyli 90 gr., więc za funt mamy 18 gr., zatém za 3 funty znaleźliśmy 1 złoty, 24 gr. Aby obliczyć ile przypada za 24 łóty, rozłożyliśmy je na 16 i 8; za 16 łótów, czyli pół funta przypada 9 groszy, a za 8 łótów, czyli połowę 16stu, jest 4 i pół grosza. Zebrawszy te częściowe wartości, okazało się że za 12 cent., 3 kam., 18 funt. i 24 łóty, płacąc centnar po 60 złotych, zapłacić potrzeba 776 złot. $7\frac{1}{2}$ groszy.

Uwaga. Wartości za 5 funtów i za 1 funt, jako nienależące do częściowych wartości lecz tylko pomocnicze, na boku wypisaliśmy.

Co do 3go kiedy mnożna i mnożnik są liczbami wielorakiemi.

Dajmy że kopówkę płótna, to jest sztukę o 60 łokciach, zgodzono po 6 dukatów, 2 talary i 4 złote, ile potrzeba zapłacić za takich sztuk 12 i łokci 47?

WZÓR DZIAŁANIA.

		$6^{\text{duk.}}$	$2^{\text{tal.}}$	$4^{\text{zł.}}$	
		12^{sztuk}	$47^{\text{łok.}}$		
za 12 sztuk	po 6 duk.	$72^{\text{duk.}}$			
	po 2 tal.	8			
	po 3 złot.	2			
	po 1 złot.		$2^{\text{tal.}}$		
za 30 łok.		3	1	$2^{\text{zł.}}$	
za 15 łok.		1	2	1	
za 1 łok.				$2^{\text{zł.}}$	$2^{\text{gr.}}$
za 2 łok.				4	$4^{\text{gr.}}$
		$88^{\text{duk.}}$	$0^{\text{tal.}}$	$1^{\text{zł.}}$	$4^{\text{gr.}}$

Objaśnienie działania. Uważamy naprzód jakoby kupiono tylko 12 sztuk po danéj cenie. Rachując po 6 duk. sztukę, wypadło 72 dukaty; po 2 tal. co czyni 8 dukatów; potem 4 złote rozłożyliśmy na 3 i 1, a że 3 złote jest pół talara, więc za 12 sztuk jest 6 tal. czyli 2 dukaty; po złotemu, więc trzecia część sześciu talarów, zatem 2 talary. Następnie, rozłożyliśmy 47 łokci na 30 łok., 15 łok. i 2 łokcie. Za 30 łok. czyli pół sztuki wypada połowę tego co za sztukę, więc 3 duk. 1 tal. 2 złote; za 15 łok. czyli połowę połowy, mamy 1 duk. 2 tal. 1 złoty. Dla obliczenia ile za 2 łokcie przypadnie, obróciliśmy 1 duk. 2 tal. i 1 złoty, na złote, których znaleźliśmy 31, wzięliśmy tego piętnastą część, co uczyniło 2 złote i 2 gr. za łokieć, więc za 2 łokcie znaleźliśmy 4 złote i 4 gr. Zebrawszy te częściowe wartości, znaleźliśmy na odpowiedź 88 dukatów, talarów nic, złoty 1 i groszy 4.

DZIELENIE.

185. W dzieleniu liczb wielorakich, równie jak w mnożeniu, natrafiamy na trzy przypadki: 1. Kiedy dzielna złożona a dzielnik pojedynczy. 2. Kiedy dzielna pojedyncza a dzielnik złożony. 3. Kiedy dzielna i dzielnik są złożone.

Co do 1go, kiedy dzielna złożona a dzielnik pojedynczy. Dajmy że za 375 sążni drzewa zapłacono 1354 talary, 3 złote i 21 groszy, po ile jeden sążeń zgodzono?

WZÓR DZIAŁANIA.

$1354^{\text{tal.}}\ 3^{\text{zł.}}\ 21^{\text{gr.}}$	357
1071	$3^{\text{tal.}}\ 4^{\text{zł.}}\ 23^{\text{gr.}}$
reszta 283 tal.	
6	
1701 złote	
1428	
reszta 273 złote	
30	
8211 grosze	
714	
1071	
1071	
0.	

Objaśnienie działania. Uważając jakoby 357 sążni kosztowały 1354 talarów, z dzielenia otrzymaliśmy 3 talary i resztę 283; którą pomnożyliśmy przez 6, dla zamienienia talarów na złote i do iloczynu dodawszy 3 złote, znaleźliśmy 1701 złotych. Tę liczbę podzieliwszy przez 357, otrzymaliśmy iloraz 4 złote i resztę 273; którą pomnożyliśmy przez 30, dodając do iloczynu 21 groszy, skąd otrzymaliśmy 8211 groszy. Nakoniec tę liczbę podzieliśmy przez 357 i otrzymaliśmy na iloraz 23 grosze. Znaleźliśmy więc, że 1 sążeń zgodzono za 3 talary, 4 złote, i 23 grosze.

Z tego takie wyprowadzamy prawidło. *Najwyższy gatunek dzielnéj dzielimy przez dzielnik, dopóki nie przyjdziemy do reszty mniejszéj od dzielnika. Tę resztę zamieniamy na gatunek niższy, i do otrzymanéj liczby dodajemy liczbę niższego gatunku znajdującą się w dzielnéj; poczem otrzymaną liczbę dzielimy przez dzielnik, dopóki nie przyjdziemy do reszty mniejszéj od dzielnika i t. d., postępuje się aż do najniższego gatunku. Liczby odpowiednich gatunków otrzymane w ilorazach częściowych, składają żądany iloraz złożony.*

Co do 2go, kiedy dzielna jest pojedyncza, a dzielnik złożony.

Dajmy, że 7 centnarów, 2 kamienie i 12 funtów, kosztowały 635 złotych, po ile centnar zgodzono?

W tym przypadku, ponieważ dzielnik 7 centnarów, 2 kamienie i 12 funtów, nie może być liczbą złożoną z różnych części, bowiem dzielnik, jako liczba wskazująca ile razy iloraz mniejszy jest od dzielnéj, musi być jedną, oderwaną liczbą, przeto aby wykonać działanie, zwykle zamienia się dzielnik na liczbę jednę, wyrażającą najniższe gatunki ilości. W danym przykładzie mamy:

7 cent. waży 700 funt.
2 kamienie 50
i 12

$7^{\text{cent.}}\ 2^{\text{kam.}}\ 12^{\text{funt.}} = 762$ funt.

To uczyniwszy, dane zadanie tak teraz wystawić potrzeba: *za funtów 762 zapłacono złotych 635, po ile funt przypada?*

Aby 635 złotych podzielić przez 762, potrzeba je naprzód zamienić na grosze, co czyni 19050 groszy. Wykonawszy dzielenie, otrzymamy 25 groszy za funt. Więc za centnar 100 razy więcéj, to jest, 2500 groszy, co czyni 83 złote i 10 groszy.

Z tego cośmy powiedzieli, następujące wyprowadzamy prawidło, na dzielenie liczb wielorakich, kiedy dzielnik jest złożony. *Gatunki wyższe dzielnika zamieniamy na najniższe; poczem wykonawszy dzielenie zwyczajne, otrzymany iloraz pokazuje wartość za jedność najniższego gatunku; dopiero pomnożywszy ten iloraz przez liczbę najniższych części zawartych w jedności żądanego gatunku, otrzymamy wypadek szukany. Jeżeli pokaże się*, jak w powyższym przykładzie, *że dzielna jest mniejsza od dzielnika na najniższe obróconego gatunki, wtedy i dzielną zamieniamy na gatunki niższe.*

Co do 3go, kiedy dzielna i dzielnik są liczbami wielorakiemi.

Dajmy że za łokci 76 i cali 13 zapłacono 367 złotych i groszy 12, po ile zgodzono łokieć jeden?

W tym przypadku jak w poprzedzającym, potrzeba dzielnik sprowadzić do najniższego gatunku; jak tu, mamy 76 łokci i 13 cali, czyni 1 837 cali. A że ta liczba w 367 złotych nie mieści się, więc je na grosze zamieniamy: znajdziemy więc że 367 złot. i 12 groszy czyni 11022 groszy. Tym sposobem powyższe zadanie zamieniło się na takie: *Za* 11 022 *groszy kupiono* 1 837 *cali, po ile wypcdnie cal?* Wykonawszy dzielenie zwyczajne, znajdziemy że cal kosztował 6 groszy: a następnie, za 1 łokieć, czyli 24 cale, płacono 4 złote i 24 groszy.

Ten przypadek zupełnie podobny jest do przypadku drugiego dzielenia liczb wielorakich.

PRZYKŁADY DO LICZB WIELORAKICH.

I. Ojciec urodził się dnia 5 Kwietnia, 1801 roku; syn zaś urodził się dnia 23 Marca 1836 roku: pytanie jest, o ile lat, miesięcy, dni, ojciec starszy od syna? (NB. W takich rachunkach rachują się miesiące po 30 dni, lata po 365 dni).

Rozwiązanie. Od narodzenia Jezusa Chrystusa upłynęło: do urodzenia ojca 1800 lat, 3 miesiące i 5 dni; do urodzenia syna 1835 lat, 2 miesiące i 23 dni. Więc ojciec jest od syna starszy o 34 lat, 11 miesięcy i 18 dni.

II. Ojciec urodził się 1793 roku, 26 Lutego; syn zaś 1836 roku, 23 Marca: pytanie jest, w roku 1850, dnia 2 Sierpnia, ile razy Ojciec starszy od syna? (Odp. 4 razy).

III. Wiedząc, że funt srebra wart jest 25 rubli, pytanie ile potrzeba zapłacić za sztabę srebra ważącą 8 pudów, 17 funtów i 60 zołotników? (Odpowiedź 8440 rubli, $62\frac{1}{2}$ kopiejek).

IV. Ojciec urodził się roku 1792 dnia 25 Marca, syn zaś w r. 1821 dnia 13 Listopada; pytanie jest, kiedy Ojciec będzie dwa razy starszy od syna? (Odpow. w r. 1850 dnia 1 Lipca).

V. Za 27 Arszynów i 12 werszków, zapłacono rubli 68 i kopiejek 6; pytanie, ile arszyn kosztował? (Odpow. 2 ruble, $16\frac{1}{2}$ kop.).

VI. Cukru centnarów 7 i funtów 54 kosztowały 180 rubli i 96 kopiejek: pytanie jest, za 3 centnary i 40 funtów ile zapłacić potrzeba? (Odp. 81 rubli i 60 kop.).

VII. Za beczkę oliwy ważącą funtów 4586, zapłacono 10560 złotych. Z téj beczki sprzedano raz 93 garnce po 25 złotych garniec, poczem beczka ważyła 3795 funt. i 8 uncyj. Następnie sprzedano czwartą część pozostałéj oliwy, po 24 złote garniec, a potém beczka ważyła 2846 funtów i 2 uncye. Nareszcie pozostałą oliwę sprzedano po 24 złote i gr. 24, garniec. Pytanie: ile zarobiono? ile garncy oliwy zawierała beczka? ile beczka próżna ważyła? (Odp. Zarobiono 2466 złot.; beczka zawierała 528 garn.; beczka próżna ważyła 98 funtów).

STOSUNKI I RÓWNOMIANY.

---

186. Tylko tego samego gatunku rzeczy przyrównanemi do siebie, czyli zestosowanemi z sobą być mogą. Tak np. rubel jest większy lub mniejszy od pół imperyała: większy, jeżeli zważamy na ich objętość; mniejszy, jeżeli zważamy na ich względną wartość. W piérwszym razie przyrównywamy do siebie objętości, w drugim wartości.

Przyrównanie do siebie liczb, nazywamy stosuakiem (Отношенie).

Wielkości dwojakim sposobem przyrównywamy do siebie; albo uważamy o ile jedna od drugiéj jest większa lub mniejsza, i takie przyrównanie daje *stosunek różnicowy* albo *arytmetyczny* (Ариометическое отношенie); albo téż ile razy jedna jest większa lub mniejsza od drugiéj, i takie *przyrównanie* daje *stosunek ilorazowy* albo *jeometryczny* (Геометрическое отношенie). Tak np. uważając o ile 6 jest większe od 2, będziemy mieli stosunek różnicowy albo arytmetyczny; uważając zaś ile razy 6 jest większe od 2, albo, co na jedno wychodzi, ile razy 2 mieści się w 6, będziemy mieli stosunek ilorazowy, albo jeometryczny.

187. Dwie liczby składające stosunek nazywają się *wyrazami stosunku* (члены отношенія).

Pomiędzy wyrazami stosunku różnicowego kładzie się jedna kropka, albo téż znak odejmowania: np. 4.2, lub 4—2. Między wyrazami stosunku ilorazowego kładzie się dwie kropki; np. 6:3; albo téż, ponieważ dwie kropki oznaczają dzielenie, stosunek wyraża się w kształcie ułamku zwyczajnego; powyższy stosunek tak można wskazać $\frac{6}{3}$.

W obu stosunkach, wyraz stojący po lewéj stronie, nazywa się *poprzednikiem* (предъидущее), stojący obok niego po prawéj ręce nazywa się *następnikiem* (наслѣдующее). Wyrażając stosunek ilorazowy w kształcie ułamku, *licznik jest poprzednikiem*, *mianownik następnikiem.*

W stosunku różnicowym różnica pomiędzy poprzednikiem i następnikiem, nazywa się *wykładnikiem stosunku arytmetycznego*, albo *różnicowego*. W stosunku ilorazowym iloraz powstały z podzielenia poprzednika przez następnik, nazywa się *wykładnikiem stosunku jeometrycznego*, albo *ilorazowego*. Tak w stosunku 4.2 różnica 2 jest wykładnikiem stosunku arytmetycznego; podobnież w stosunku 6:2; iloraz 3 jest wykładnikiem stosunku jeometrycznego.

188 W stosunku różnicowym, poprzednik jeśli jest większy od następnika, równa się następnikowi powiększonemu wykładnikiem stosunku; następnik zaś jest równy poprzednikowi pomniejszonemu wykładnikiem. Kiedy zaś następnik jest większy od poprzednika, wtedy jest równy następnikowi zmniejszonemu wykładnikiem, a następnik równa się poprzednikowi powiększonemu wykładnikiem. Tak np. w stosunku 5.3, mamy $3+2=5$, zaś $3=5-2$; w stosunku 2.3, jest $3-1=2$; a $2=3-1$.

W stosunku ilorazowym poprzednik jest równy następnikowi pomnożonemu przez wykładnik. Tak np. w stosunku $6:3$, gdzie wykładnik 2, jest $6 = 3 \times 2$, podobnież w stosunku $2:4$; gdzie wykładnik $\frac{2}{4}$ czyli $\frac{1}{2}$, mamy: $2 = 4 \times \frac{1}{2}$.

189. *Oba wyrazy stosunku różnicowego powiększywszy lub pomniejszywszy o tę samę liczbę, wykładnik stosunku nie zmieni się.* Tak np. w stosunku 5.3 powiększy oba wyrazy o 2, będzie 7.5, a w obu tych stosuukach wykładnikiem jest 2.

Oba wyrazy stosunku ilorazowego pomnożywszy, lub podzieliwszy przez tę samę liczbę, wykładnik stosunku nie zmieni się. Tak np. w stosunku 6:4, pomnożywszy oba wyrazy przez 3, będzie 18:12; podzieliwszy znów przez 2, będzie 3:2; tych trzech stosunków wykładniki są: $\frac{6}{4}$, $\frac{18}{12}$ i $\frac{3}{2}$; lecz dwa piérwsze skróciwszy, okaże się że są równe trzeciemu.

Ta własność stosunku ilorazowego daje nam sposobność zamieniać wyrazy ułamkowe na wyrazy całkowite; i tak, np. wyrazy stosunku $3\frac{2}{3}:1\frac{3}{4}$, zamieniwszy na ułamki i sprowadziwszy je do jednakowego mianownika, będziemy mieli $\frac{44}{12}:\frac{21}{12}$; lecz pomnożywszy te ułamki przez 12, czyli opuściwszy mianowniki będziemy mieli stosunek $44:21$ w miejsce stosunku $3\frac{2}{3}:1\frac{3}{4}$.

RÓWNOMIANY.

190. Dwa stosunki równe, to jest, mające równe wykładniki, złączone znakiem równości, dają *proporcyą* czyli *równomian* (Пропорція).

Równomian jest *różnicowy* (Ариѳметическая пропорція), kiedy się składa ze stosunków równych; kiedy zaś złożona jest ze stosunków ilorazowych, nazywa się *równomianem ilorazowym* albo *jeometrycznym* (Геометрическая пропорція). Tak np. 5.2 = 9.9 jest różnicowym równomianem; a zaś 8:4 = 6:3 jest równomianem ilorazowym. Równomian różnicowy pisze się zwykle tak, 5.2:9.6; ilorazowy zaś tak, 8:4::6:3.

Stosunek po lewéj ręce równości stojący nazywa się *stosunkiem piérwszym*, stojący zaś po prawéj ręce równości nazywa się *stosunkiem drugim*. Wyrazy przy znaku równości położone nazywają się *wyrazami średniemi* (Средніе члены); stojące na krajach równomianu, to jest piérwszy i ostatni, zowią się *skrajnemi wyrazami* (Крайніе члены). Wyraz czwarty równomianu ilorazowego nazywamy *czwartym jeometrycznie równomiennym* albo *proporcyonalnym*.

Równomiany tak różnicowe jako i ilorazowe wymawiają się tak: w równomianie różnicowym 5.2::9.6, tak się *ma* 5 *do* 2, *jak się ma* 9 *do* 6.

ROWNOMIANY RÓŻNICOWE.

191. Główną własnością równomianu różnicowego jest to, że *ogół wyrazów skrajnych jest równy ogółowi wyrazów średnich*. Jakoż, równomian np. 5.3:9.7 wypisawszy tak, $5-3=9-7$, będą oczywiście dwie równe różnice; dodawszy więc do nich liczbę $3+7$, otrzymamy ogóły równe $5-3+3+7=9-7+3+7$, na téj zasadzie, że *do liczb równych dodawszy równe powstaną ogóły równe*. W powyższych ogólach ponieważ $3-3=0$, jako téż $7-7=0$, mamy $5+7=9+3$, co było do okazania.

Powyższe twierdzenie tak jeszcze możemy dowieść. W równomianie 5.3::9.7, za poprzedniki położywszy ich wartości (num. 188), będzie: $3+2.3:7+2.7$; wziąwszy teraz ogóły skrajnych i średnich wyrazów będzie: $3+2+7=3+7+2$, które jako składające się z tych samych liczb, są oczywiście równe.

Ostatnie dowodzenie pokazuje nam, że *w równomianie różnicowym tak ogół wyrazów skrajnych jak i ogół wyrazów średnich, równa się ogółowi z następników powiększonemu wykładnikiem stosunku.*

Kiedy następniki są większe od poprzedników, wtedy poprzedzające twierdzenie, na zasadzie num. 188, tak się odwróci. *W równomianie różnicowym ogół wyrazów skrajnych jako też średnich, równa się ogółowi z poprzedników powiększonemu wykładnikiem stosunku.*

192. Z tego co poprzedziło wypada, że *w równomianie różnicowym którykolwiek z wyrazów skrajnych równa się ogółowi wyrazów średnich, zmniejszonemu wyrazem pozostałym skrajnym.* Tak w równomianie $3.2:5.4$ ponieważ $3+4=2+5$, więc od obu tych liczb równych odjąwszy 4, pozostanie $3=2+5-4$; odjąwszy zaś od obu równości 3, znajdziemy $4=2+5-3$.

Podobnym sposobem okazać można, że *którykolwiek z wyrazów średnich, równomianu różnicowego jest równy ogółowi wyrazów skrajnych zmniejszonemu pozostałym wyrazem średnim.* Z powyższego równomianu mamy, $2=3+4-5$, jako też $5=3+4-2$.

Podług powyższych prawideł znajduje się z trzech danych i wiadomych wyrazów równomianu różnicowego, czwarty niewiadomy, który zwykle oznacza się głoską x. Tak np. z równomianu $6.4:9.x$ mamy $x=4+9-6$ czyli 7. Gdybyśmy zaś mieli $x.4:9.7$ otrzymalibyśmy $x=4+9-7$, czyli 6. Albo z równomianu $6.x:9.7$, byłoby $x=6+7-9$, czyli 4 &.

193. Równomian w którym wyrazy średnie są sobie równe, to jest, są tą samą liczbą, nazywa się *równomianem ciągłym* (Непрерывная пропорція), który zamiast, np. 6.4:4.2 pisze się zwykle tak $\div 6.4.2 \div$. Wyraz średni w równomianie różnicowym ciągłym, nazywa się *wyrazem średnio-arytmetycznie równomiennym*, albo krócéj *równomienną średnio-arytmetycznie* (Средне-ариѳметически пропорціональное), domyślając się *liczbą*.

Średnia-arytmetycznie równomienna, równa się połowie ogółu z wyrazów skrajnych. Jakoż z równomianu $\div 5.3.1 \div$, który tak napisać możemy $5.3=3.1$, mamy (num. 191), $3+3=5+1$, czyli $2\times3=5+1$; zatém obie te wartości równe podzieliwszy przez 2, będziemy mieli $3=\frac{5+1}{2}$.

W równomianie ciągłym którykolwiek z wyrazów skrajnych jest równy podwójnemu średniemu zmniejszonemu pozostałym skrajnym. Tak w powyższym równomianie $\div 5.3.1 \div$, mamy $5=2\times3-1$, jako téż $1=2\times3-5$.

Podług tych twierdzeń łatwo znajdziemy niewiadomy wyraz równomianu ciągłego. Tak np. mając $\div 5.x.11 \div$, znajdziemy $x=\frac{5+11}{2}$, czyli 8. Gdyby zaś było $\div 5.8.x \div$ znaleźlibyśmy $x=2\times8-5$, czyli 11.

194. *Cztéry liczby składające dwa ogóły równe, mogą złożyć równomian różnicowy, biorąc liczby jednego ogółu za wyrazy średnie; liczby zaś drugiego ogółu za wyrazy skrajne.* Dajmy, że mamy $11+7=10+9$; od tych równych ogółów odjąwszy liczbę z piérwszego ogółu, np. 7, znajdziemy, $12+7-7=10+9-7$; od tego znów odjąwszy liczbę z drugiego ogółu, na przykład 9, otrzymamy $12+7-7-9=10+9-7-9$; a że $7-7=0$, i $9-9=0$, więc ostatecznie mamy $12-9=10-7$, co tak wypisać możemy 12.9:10.7.

195. Z powyższego twierdzenia wypływa to, że *z cztérech liczb mogących złożyć równomian arytmetyczny można ułożyć ośm takichże równomianów;* albo, *wyrazy danego równomianu różnicowego ośm razy przełożyć można.* Jakoż, z równomianu 7.5:11.9, będzie $7+9=5+11$. Biorąc liczby piérwszego ogólu za wyrazy skrajne, będzie: 1º, 7.5:11.9; 2º, 9.5:11.7; 3º, 7.11:5.9; 4º, 9.11:5.7. Biorąc zaś liczby drugiego ogólu za wyrazy skrajne mamy: 5º, 5.7:9.11; 6º, 11.7:9.5; 7º, 5.9:7.11; 8º, 11.9:7.5.

Stąd widzimy, że mając równomian różnicowy można: 1º, *zmienić położenie wyrazów skrajnych;* 2º; *zmienić położenie wyrazów średnich;* 3º, *równomian na wspak czytać;* 4º, *stosunki na wspak czytać;* 5º, *z poprzedników uczynić stosunek piérwszy, a z następników uczynić stosunek drugi;* 6º, *z następników uczynić stosunek piérwszy, a z poprzedników uczynić stosunek drugi;* nakoniec 7º, *stosunek drugi uczynić piérwszym, a piérwszy drugim.*

RÓWNOMIANY ILORAZOWE.

196. Główną własnością równomianu ilorazowego jest to, że *iloczyn z wyrazów skrajnynh jest równy iloczynowi z wyrazów średnich.* Jakoż, równomian na przykład 15:5::12:4, wypisawszy tak, $\frac{15}{5}=\frac{12}{4}$; potém obie te równe liczby pomnożywszy przez 5×4, znajdziemy $\frac{15\times5\times4}{5}=\frac{9\times5\times4}{4}$, czyli ostatecznie $15\times4=9\times5$.

W tém wyrażeniu położywszy za poprzedniki 15 i 12 ich wartości (num. 188), 3×5 i 3×4, będziemy mieli $3\times5\times4=4\times3\times5$; skąd widzimy, że *tak iloczyn wyrazów skrajnych, jako téż iloczyn wyrazów średnich, jest równy iloczynowi z następników, pomnożonemu przez wykładnik stosunku.*

197. Z poprzedzającego twierdzenia wypływa, że, 1º *którykolwiek wyraz skrajny równomianu ilorazowego, jest równy iloczynowi z wyrazów średnich, podzielonemu przez pozostały skrajny*. Jakoż, z równomianu 5:4::15:12, mamy $5 \times 12 = 4 \times 15$; obie te równe liczby podzieliwszy raz przez 5, drugi raz przez 12, otrzymamy, $12 = \frac{4 \times 15}{5}$, i $5 = \frac{4 \times 15}{12}$.

2º *Którykolwiek wyraz średni jest równy iloczynowi z wyrazów skrajnych, podzielonemu przez pozostały średni*. Z powyższego bowiem równomianu mamy $4 \times 15 = 5 \times 12$; te dwie równe liczby podzieliwszy raz przez 4, drugi raz przez 15, otrzymamy $15 = \frac{5 \times 12}{4}$, i $4 = \frac{5 \times 12}{15}$.

Kiedy jeden ze czterech wyrazów równomianu ilorazowego jest niewiadomy, łatwo go znajdziemy podług powyższych twierdzeń. Dajmy np. że mamy $5:8::10:x$, znajdziemy, $x = \frac{8 \times 10}{5} = 16$. Gdyby zaś było, $x:8::10:16$, znaleźlibyśmy $x = \frac{8 \times 10}{16} = 5$. Podobnież, mając na przykład $5:x::10:16$, znajdziemy $x = \frac{5 \times 16}{10} = 8$. Mając zaś $5:8::x:16$, otrzymamy $x = \frac{5 \times 16}{8} = 10$.

198. Równomian ilorazowy, w którym oba wyrazy średnie są tą samą liczbą, nazywa się *równomianem ilorazowym ciągłym;* na przykład, 8:4::4:2, który tak się pisze: ∺ 8:4:2 ∺.

Wyraz średni nazywa się *średnio-jeometrycznie równomiennym* (Средне геометрически пропорціональное). Wyraz trzeci nazywa się *trzecim jeometrycznie ciągłym*.

199. *W równomianie ilorazowym ciągłym, iloczyn wyrazów skrajnych, jest równy kwadratowi z wyrazu średniego*. Równomian na przykład ∺ 8:12:18 ∺, wypisawszy tak, $8:12::12:18$, mamy podług n. 196, $8\times18=12\times12$, czyli $8\times18=12^2$.

Ztąd wypada, 1º że *wyraz średnio-jeometrycznie równomienny jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu wyrazów skrajnych.* Jeżeli bowiem liczby są równe, to ich pierwiastki są równe: z powyższéj więc równości $12^2=8\times18$, mamy $12=\sqrt{8\times18}$.

2º *W równomianie ciągłym ktòrykolwiek z wyrazów skrajnych, równa się kwadratowi z wyrazu średniego, podzielonemu przez pozostały skrajny.* W powyższéj równości $8\times18=12^2$, podzieliwszy obie równe liczby raz przez 8, drugi raz przez 18, znajdziemy $18=\frac{12^2}{8}$, i $8=\frac{12^2}{18}$.

Gdyby więc wyraz średni w równomianie ciągłym był niewiadomy, znajdziemy go, wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z iloczynu wyrazów skrajnych. Dajmy np. że w powyższym równomianie jest $\div 8:x:18 \div$, otrzymamy $x=\sqrt{8\times18}=12$.

Jeżeli zaś wyraz skrajny w równomianie ciągłym jest niewiadomy, znajdziemy go, dzieląc kwadrat z wyrazu średniego przez wiadomy skrajny: na przykład gdyby było $\div 8:12:x \div$, mielibyśmy $x=\frac{12^2}{8}=18$.

200. *Kiedy iloczyn z dwóch czynników równy jest iloczynowi z dwóch innych czynników, wtedy te cztéry czynniki mogą złożyć równomian ilorazowy, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, czynniki zaś drugiego iloczynu za wyrazy średnie.* Mając np. $7\times8=4\times14$, podzieliwszy obie równości przez 8×4, będzie $\frac{7\times8}{8\times4}=\frac{4\times14}{8\times4}$ czyli $\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$, albo $7:4::14:8$ (num. 187).

201. Ze cztérech wyrazów składających równomian ilorazowy można ułożyć ośm rówmianów. Dajmy $7:4::14:8$;

z tego mamy $7\times8=4\times14$. Biorąc czynniki piérwszego iloczynu za wyrazy skrajne, otrzymamy: 1º, 7:4::14:8; 2º, 7:14::4:8; 3º, 8:4::14:7; 4º, 8:14::4:7. Biorąc zaś czynniki drugiego iloczynu za wyrazy skrajne, mamy; 5º, 4:7::8:14; 6º, 4:8::7:14; 7º, 14:7::8:4; i nakoniec 8º, 14:8::7:4.

Stąd widzimy, że mając dany równomian ilorazowy można:

1º *Zmienić położenie wyrazów średnich.*

2º *Zmienić położenie wyrazów skrajnych.*

3º *Przeczytać równomian na wspak*; czyli *zmienić położenie wyrazów skrajnych i średnich.*

4º *Wziąść poprzedniki za następniki, a następniki za poprzedniki.*

5º *Z poprzedników uczynić stosunek piérwszy, a z następników stosunek drugi.*

6º *Z poprzedników uczynić stosunek drugi, a z następników stosunek piérwszy.*

7º *Stosunek drugi wziąść za piérwszy, a piérwszy za stosunek drugi.*

202. *Dwa lub więcéj równomianów ilorazowych podpisawszy pod sobą, i pomnożywszy przez siebie odpowiednie wyrazy, otrzymane iloczyny złożą nowy równomian ilorazowy. Wykładnikiem tego równomianu będzie iloczyn z wykładników danych równomianów.* Dajmy dwa równomiany: 4:2::10:5, i 9:3::21:7; okażemy, że $4\times9:2\times3::10\times21:5\times7$. Wypisawszy bowiem oba równomiany w kształcie ułamków, będzie: $\frac{4}{2}=\frac{10}{5}$, i $\frac{9}{3}=\frac{21}{7}$; pomnożywszy teraz piérwsze stosuunki i drugie stosunki przez siebie, znajdziemy, $\frac{4\times9}{2\times3}=\frac{10\times21}{5\times7}$, czyli $4\times9:2\times3::10\times21:5\times7$.

Wykładnik stosunku tego równomianu, jest, jak wiadomo $\frac{4\times9}{2\times3}$ = lub $\frac{10\times21}{5\times7}$; lecz że mamy $\frac{4\times9}{2\times3}=\frac{4}{2}\times\frac{9}{3}$, czyli 2×3, gdzie 2 jest wykładnikiem stosunku piérwszego równomianu, a 3 jest wykładnikiem stosunku w drugim równomianie, zatém i druga część naszego twierdzenia jest dowiedziona.

Odwrotne poprzedzającemu twierdzeniu jest. *Dwóch danych równomianów ilorazowych podzieliwszy przez siebie odpowiednie wyrazy, otrzymane ilorazy złożą równomian ilorazowy.* Jakoż dane równomiany 36:6::210:35; i 9:3::21:7, wypisawszy w kształcie ułamków będzie, $\frac{36}{6}=\frac{210}{35}$ i $\frac{9}{3}=\frac{21}{7}$; teraz odpowiednie stosunki podzieliwszy przez siebie, (dzieląc licznik przez licznik, mianownik przez mianownik), znajdziemy $\frac{\frac{36}{9}}{\frac{6}{3}}=\frac{\frac{210}{21}}{\frac{35}{7}}$, czyli $\frac{36}{9}:\frac{6}{3}::\frac{210}{21}:\frac{35}{7}$. *Wykładnik tym sposobem powstałego równomianu, jest ilorazem z wykładników danych równomianów.* Tak, powyższego równomianu wykładnikiem jest $\frac{\frac{36}{9}}{\frac{6}{3}}=2=\frac{6}{3}$, gdzie 6 jest wykładnikiem piérwszego z danych równomianów, 3 wykładnikiem drugiego.

Równomian na przykład 6:4::15:10, napisawszy dwa razy, i pomnożywszy przez siebie odpowiednie wyrazy, znajdziemy:

$6\times6:4\times4::15\times15:10\times10$, czyli, $6^2:4^2::15^2:10^2$; skąd widzimy, że *danego równomianu ilorazowego wyrazy podniosłszy do kwadratów*, *te złożą dobry równomian. Wykładnik równomianu złożonego z kwadratów*, *jest kwadratem z wykładnika stosunku danego równomianu.* Tym samym sposobem przekonać się można, że *danego równomia-*

nu ilorazowego, wyrazy podniosłszy do sześcianów, te złożą dobry równomian.

203. *Kiedy dwa równomiany ilorazowe mają wspólny stosunek, wtedy dwa pozostałe stosunki złożą dobry równomian.* Mając np. równomiany 3:6::4:2 i 3:6::10:5, podzieliwszy przez siebie odpowiednie wyrazy, znajdziemy $\frac{3}{3}:\frac{6}{6}::\frac{4}{10}:\frac{2}{5}$, czyli $1:1::\frac{4}{10}:\frac{2}{5}$; a że wyrazy piérwszego stosunku są sobie równe; więc i wyrazy stosunku drugiego także są sobie równe; mamy więc $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, czyli 4:10::2:5. (n. 187).

204. *Kiedy w dwóch równomianach ilorazowych poprzedniki są równe, wtedy ich następniki złożą dobry równomian. Kiedy zaś następniki są równe, wtedy poprzedniki złożą równomian dobry.* Dajmy dwa równomiany, 4:5::8:10, i 4:6::8:12; podzieliwszy przez siebie odpowiednie wyrazy, znajdziemy $\frac{4}{4}:\frac{5}{6}::\frac{8}{8}:\frac{10}{12}$, czyli $1:\frac{5}{6}::1:\frac{10}{12}$; a że tu poprzedniki są równe, więc i następniki są także równe; mamy więc $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$, czyli 5:6::10:12.

205. Równomian np. 2:3::6:9, wyraziwszy przez ułamki, mamy $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, do tych równych ułamków dodawszy po 1, albo, do piérwszego $\frac{3}{3}$, do drugiego $\frac{9}{9}$, otrzymamy $\frac{2+3}{3}=\frac{6+9}{9}$, czyli 2+3:3::6+9:9. Ztąd widzimy, że *w równomianie ilorazowym tak się ma ogół poprzednika i następnika piérwszego stosunku do jego następnika, jak się ma ogół poprzednika i następnika drugiego stosunku do jego następnika.*

W danym równomianie zmieniwszy położenie wyrazów średnich, będzie, 2:6::3:9. Powyższy wypadek 2 + 3: 3::6 + 9:9, stosując do równomianu 2:6::3:9, widzimy, że *w danym równomianie ilorazowym, ma się ogół poprzedników do poprzednika któregokolwiek stosunku, jak ogół następników do następnika tego samego stosunku.* Bowiem podług num. 201, możemy przełożyć porządek stosunków.

W równomianie $2+3:3::6+9:9$, odmieniwszy położenie wyrazów średnich, będzie $2+3:6+9::3:9$; ten równomian stosując do równomianu $2:6::3:9$, lub do $3:9::2:6$, widzimy, że *ma się ogół poprzedników do ogółu następników, jak poprzednik któregokolwiek stosunku do swego następnika.*

W danym równomianie, ułamkowo wyrażonym, $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, odjąwszy od obu ułamków po 1, czyli od piérwszego $\frac{3}{3}$, od drugiego $\frac{9}{9}$, i rozumując tak jakeśmy to dopiero uczynili, otrzymamy odpowiednie poprzedzającym prawdy, które są

W równomianie ilorazowym tak się ma różnica poprzednika i następnika piérwszego stosunku do jego następnika, jak się ma różnica poprzednika i następnika drugiego stosunku do jego następnika.

Tak się ma różnica poprzednika i następnika piérwszego stosunku do swego poprzednika, jak się ma różnica poprzednika i następnika drugiego stosunku do swego poprzednika.

Tak się ma różnica poprzedników do różnicy następników, jak się ma poprzednik któregokolwiek stosunku do swego następnika.

Z równomianu $3:2::9:6$, mamy podług powyższych twierdzeń: $9+3:6+2::3:2$, i $9-3:6-2::3:2$; a że w tych dwóch równomianach stosunki drugie są te same, więc podług num. 203, mamy $9+3:6+2::9-3:6-2$. Stosując ten równomian do danego widzimy, że *ogół po-*

przedników tak się ma do ogółu następników, jak się ma różnica poprzedników do różnicy następników.

206. Własność stosunku ilorazowego, w num. 189 okazana, podaje nam sposobność zamienienia wyrazów ułamkowych równomianu ilorazowego na liczby całkowite. Tak w równomianie $\frac{2}{3}:\frac{1}{4}::\frac{4}{6}:\frac{2}{8}$, mamy $\frac{8}{12}:\frac{3}{12}::\frac{16}{24}:\frac{6}{24}$, zatém $8:3::16:6$. Podobnież w równomianie $2\frac{1}{2}:1\frac{2}{3}::3\frac{1}{3}:2\frac{2}{9}$, wypada $\frac{5}{2}:\frac{5}{3}::\frac{10}{3}:\frac{20}{9}$, a stąd $\frac{15}{6}:\frac{10}{6}:\frac{30}{9}:\frac{20}{9}$; więc ostatecznie $15:10::30:20$.

ZASTOSOWANIA RÓWNOMIANÓW ILORAZOWYCH.

207. Wszelakie zastosowanie w potoczném życiu własności równomianów ilorazowych, nazywa się *prawidłem trzech*, dlatego, że z wiadomych wyrazów trzech, wynajduje się czwarty niewiadomy, zwykle głoską x oznaczony. Są wprawdzie zagadnienia takie, w których dla znalezienia jednéj niewiadoméj, potrzeba miéć wiadomych danych cztéry, pięć i więcéj; lecz pomiędzy temi są główne trzy, inne zaś pomocnicze, czyli warunkowe.

PRAWIDŁO TRZECH.

208. Zwyczajnie nazywają *Prawidłem trzech*, (Тройное правило) sposób rozwiązania zagadnień za pomocą równomianu, w którym jeden stosunek składa się z liczb jeden gatunek rzeczy oznaczających; drugi zaś stosunek przedstawia rzeczy wcale od piérwszych różne. Tak n. p. gdyby zapytano się: ile przypada zapłacić rubli za 13 łokci sukna, kiedy takiego samego gatunku łokci 7 kosztowały 22 ruble? Zastanowiwszy się nieco, postrzegamy że, ile razy 13 łokci jest większe od 7 łokci, tyle razy więcéj przypadnie rubli od rubli 22; mamy więc równomian ilorazowy w którym stosunek jeden złożony jest z łokci, drugi z rubli.

Podług wysłowienia zadania, tak byśmy ułożyć mogli równomian; $13^{\text{łok.}} : 7^{\text{łok.}} :: x^{\text{r.}} : 22^{\text{r.}}$. Zwykle jednak układają równomian z danego zagadnienia tak, żeby niewiadomy wyraz przypadał na końcu. Aby to uczynić takby należało rozumować: ile razy 7 łokci są mniejsze od 13 łokci, tyle razy 22 ruble są mniejsze od szukanych rubli; więc mielibyśmy równomian, $7^{\text{łok.}} : 13^{\text{łok.}} :: 22^{\text{r.}} : x.^{\text{r.}}$.

Z któregokolwiek z tych dwóch równomianów znajdziemy $x = \frac{13 \times 22}{7} = 40\frac{6}{7}$ rubli.

Równomian $7^{\text{łok.}} : 13^{\text{łok.}} :: 22^{\text{r.}} : x^{\text{r.}}$, uczy nas, że *aby z danego zagadnienia ułożyć równomian, potrzeba niewiadomą x położyć na czwartém miejscu; na trzeciém miejscu, liczbę tego samego gatunku co niewiadoma; na drugiém liczbę drugiego gatunku, odpowiadającą niewiadoméj; nareszcie na piérwszém liczbę tego samego gatunku co wyraz drugi, odpowiadającą wyrazowi trzeciemu.*

209. Z powyższego roztrząśnienia, widzimy, iż w tego rodzaju zagadnieniach:

Ma się mniejsza liczba jednego gatunku, do większéj tego samego gatunku;

Jak się ma liczba mniejsza drugiego gatunku, do większéj tegoż gatunku.

Albo:

Ma się liczba większa jednego gatunku, do mniejszéj tego samego gatunku;

Jak się ma liczba większa drugiego gatunku, do mniejszéj tegoż gatunku.

Kiedy liczby w zagadnieniu dane, wraz z szukaną niewiadomą są, tak jakeśmy dopiéro widzieli, od siebie zależne, wtedy mamy *Prawidło trzech proste* (Прямое тройное правило).

Kiedy jeden z wyrazów jednego stosunku jest częścią tego gatunku, który drugi wyraz tego samego stosunku przedstawia, wtedy oba potrzeba przywieść do tych samych części. Dla objaśnienia weźmy taki przykład. Za garncy 15 grochu zapłacono 12 złotych i 24 gr., za 7 korcy grochu, po téj saméj cenie, ile zapłacić potrzeba?

W tém zadaniu widzimy naprzód że 15 garncy są częściami korca; potrzeba więc, albo korcy 7 zamienić na garnce, albo 15 garncy wyrazić w częściach korca. Powtóre, wyraz odpowiedni niewiadomemu, jest liczbą wieloraką; potrzeba ją więc zamienić albo na niższe gatunki, lub téż części niższe, jak tu grosze, wyrazić w częściach większych, to jest, w złotych.

Zważając, że korcy 7 czyni 224 garncy, albo że 15 garncy są $\frac{15}{32}$ częścią korca; nad to, że 12 złot. i 24 gr. czynią 384 groszy, albo $12\frac{4}{5}$ złotego, będziemy mogli rozwiązać powyższe zadanie, przez następujące równomiany.

1. $15^{gar.} : 224^{gar.} :: 384^{gr.} : x^{gr.}$ skąd $x = \frac{224 \times 384}{15} =$ $5734\frac{2}{5}$ groszy czyli 191 złot. i $4\frac{2}{5}$ groszy: albo,

2. $15^{gar.}\ 224^{gar.} :: 12\frac{4}{5}^{złot.}\ x^{złot.}$; czyli (num. 206). $75^{gar.} : 224^{gar.} :: 64^{zł.} : x^{złot.}$; zkąd $x = \frac{224 \times 64}{75} = 191\frac{11}{75}$ złot., czyli 191 złot. $4\frac{2}{5}$ grosza: albo,

3. $\frac{15}{32}^{kor.} : 7^{kor.} :: 384^{gr.} : x^{gr.}$; czyli, (num. 206). $15^{kor.} : 224^{kor.} :: 284^{gr.} : x^{gr.}$ który to równomian jest zupełnie do piérwszego podobny. Nakoniec mamy:

4. $\frac{15}{32}^{kor.} : 7^{kor.} :: 12\frac{4}{5}^{zł.} : x^{zł.}$; czyli, (num. 206) $75^{kor.} : 224^{kor.} :: 64^{zł.} : x^{zł.}$; ten znów równomian jest ten sam co równomian drugi.

Uwaga. Otrzymany trzeci równomian składa się z tych samych liczb co równomian piérwszy, nazwiska tylko liczb są różne; toż samo postrzegamy w równomianach drugim i czwartym: powiedzieliśmy przeto, że odpowiednie równomiany są sobie równe. Rzeczywiście tak jest, bowiem skoro z liczb mianowanych do zadania wchodzących ułożymy równomian, wtedy te liczby uważać można za liczby oderwane, byle tylko pamiętać, że niewiadoma jest tego samego gatunku co wyraz trzeci równomianu.

210. Jeżeli ułożywszy wyrazy danego zadania podług podanego prawidła w num. 208, pokaże się, że;

Tak się ma większa *liczba jednego gatunku*, do mniejszéj *tego samego gatunku.*

Jak się ma liczba mniejsza *drugiego gatunku*, do większéj *tegoż gatunku:*

albo:

Tak się ma liczba mniejsza *jednego gatunku*, do większéj *tegoż samego gatunku.*

Jak się ma liczba większa *drugiego gatunku*, do mniejszéj *tegoż gatunku:* wtedy *cztéry wyrazy zadania są odwrotnie równomienne.* W tym razie prawidło trzech nazywa się: *Prawidłem trzech odwrotném* (Обратное тройное правило).

Zobaczmy na przykładzie jak się znajduje wyraz niewiadomy w prawidle trzech odwrotném.

Przykład. Na wyklejenie pokoju wyszło papieru łokci 208, szerokiego na 1 łokieć; na wyklejenie tego samego pokoju ile potrzeba łokci papiéru szerokiego na $1\frac{1}{3}$ łokci?

Tu niewiadomą jest długość papiéru szérokiego na $1\frac{1}{8}$ łokcia, czyli liczba łokci téj długości; więc $x^{\text{łok. dług.}}$ kładziemy na czwartém miejscu; na trzeciém miejscu będzie ten sam gatunek, więc $208^{\text{łok. dług.}}$; na miejscu drugiém szerokość odpowiadająca długości x, zatém $1\frac{1}{8}^{\text{łok. szer.}}$; nareszcie na piérwszém miejscu szerokość odpowiadająca długości $208^{\text{łok. dług.}}$, zatém $1^{\text{łok. szer.}}$ (zobacz num. 208), będzie więc: $1^{\text{łok. szer.}} : 1\frac{1}{8}^{\text{łok. szer.}} :: 208^{\text{łok. dług.}} : x^{\text{łok. dług.}}$ Lecz zaraz postrzegamy, że im papiér jest szerszy, tém go mniéj potrzeba; zatém x jest mniejsze od 208 łokci; a że $1\frac{1}{8}$ łokci jest większe od 1 łokcia, zatém mamy równomian odwrotny. Nadto widzimy, że powyższy równomian jest fałszywie ułożony; bowiem, poprzednik stosunku piérwszego jest mniejszy od swego następnika, gdy tymczasem poprzednik stosunku drugiego jest większy od swego następnika. Lecz przełożywszy wyrazy stosunku piérwszego, otrzymamy dobry równomian: bowiem ile razy jest szerszy papiér użyć się mający od papieru już poprzednio użytego, tyle razy więcéj wyszło papiéru użytego od papieru użyć się mającego. Po przełożeniu więc wyrazów piérwszego stosunku mieć będziemy:

$1\frac{1}{8}^{\text{łok. szer.}} : 1^{\text{łok. szer.}} :: 208^{\text{łok. dług.}} : x^{\text{łok. dług.}}$

a stąd: $x = \dfrac{208 \times 1}{1\frac{1}{8}} = \dfrac{208 \times 8}{9} = 184\frac{8}{9}^{\text{łok. dług.}}$.

Ażeby lepiéj poznać prawidło trzech odwrotne, rozwiążmy dwa zadania podobieństwém zbliżone do siebie.

1. Dla pewnéj liczby osób wyznaczona żywność wystarczyła na dni 8, kiedy taż sama żywność wystarczyć ma na dni 11 dla téj saméj liczby osób, pytanie, jaką część żywności poprzednio wyznaczonéj pobierać będzie dziennie każda z osób?

Ponieważ ta sama żywność, dla téj saméj liczby osób ma wystarczyć na dłużéj, to jest na dni 11, niż początkowo zamierzono, przeto oznaczywszy przeznaczoną żywność dzienną dla jednéj osoby, mającą wystarczyć na dni 8, przez 1, żywność dzienna wystarczyć mająca na dni 11 będzie ułamkiem, który, jako niewiadomy przez x oznaczamy. Ułożywszy teraz wyrazy, podanym sposobem w num. 208, będzie: $8^{dni} : 11^{dni} :: 1 : x$; tu mamy równomian odwrotny, bowiem x jest mniejsze od 1, gdy tym czasem 11 dni jest większe od 8 dni; zatém mamy: $11^{dni} : 8^{dni} :: 1 : x$, skąd $x = \frac{8}{11}$ część żywności początkowo wyznaczonéj.

2. Na dany czas wystarczyła żywność dla 8 osób, na ten sam przeciąg czasu ile żywności potrzeba będzie dla 11 osób.

Dla 11 osób będzie potrzeba więcéj żywności niżeli dla osób 8; ułożywszy wyrazy, będzie: $8^{osób} : 11^{osób} :: 1 : x$; a że x ma być większe od 1, i 11 jest większe od 8, zatém tu mamy prawidło trzech proste.

Z powyższego równomianu mamy: $x = \frac{11\times1}{8} = 1\frac{3}{8}$, téj żywności którą dla 8 osób przysposobiono.

211. *Prawidło trzech* nazywamy ***składaném*** (Сложное тройное правило), w ten czas, kiedy w zadanie wchodzi więcéj niż dwa stosunki; czyli, kiedy szukamy wartości niewiadomego wyrazu, za pośrednictwem więcéj niż trzech wiadomych. Rozwiążmy np. takie zadanie: Rów długi 40 łokci wykopali 5 grabarzy, za dni 4; do wykopania rowu téj saméj szerokości i głębokości, lecz długiego łokci 72, ilu robotników użyć potrzeba, żeby tę robotę ukończyli w 9 dni?

Jakkolwiek mamy tu pięć liczb wiadomych, dla wynalezienia wartości niewiadoméj, wszakże bliżéj badając zadanie, pokaże się, że należy do prawidła trzech. Jakoż, kiedy w 4 dniach wykopano rowu łokci 40, więc za 1 dzień wykopano $\frac{40}{4}$ łokci; tak samo, kiedy w 9 dniach ma być wykopany rów długości 72 łokci, więc w 1 dniu wykopią $\frac{72}{9}$ łokci. Teraz powyższe zagadnienie tak wysłowić możemy: W pewnym przeciągu czasu, (w 1 dniu) 5 robotników wykopali rów długi $\frac{40}{4}$ łokci; w tym samym czasie chcąc mieć wykony rów długi łokci $\frac{72}{9}$, ilu do téj roboty potrzeba użyć ludzi? To zadanie doprowadza do prawidła trzech prostego; będzie więc $\frac{40}{4}^{\text{łok.}} : \frac{72}{9}^{\text{łok.}} :: 5^{\text{rob.}} : x^{\text{rob.}}$, skąd otrzymamy $x = \frac{5\times72\times4}{9\times40} = 4^{\text{robot.}}$.

Mogliśmy jeszcze przyjść do tego samego wypadku, tak rozumując. Robotników 5 w dniach cztérech wykopali rów długi 40 łokci; zatem robotników 5×4 wykopią tenże sam rów w 1 dniu. Podobnież, robotników x w dniach 9 mają wykopać rów długi 72 łokcie, więc 9 razy więcéj robotników, to jest $x\times9$ wykopią tenże rów w 1 dniu; uważając więc $x\times9$ za niewiadomą, ułożymy taki równomian: $40^{\text{łok.}} : 72^{\text{łok.}} :: 5\times4^{\text{rob.}} : x\times9^{\text{rob.}}$; zkąd $x\times9 = \frac{72\times5\times4}{40}$: więc 9 razy mniéj niż $x\times9$, to jest $x = \frac{72\times5\times4}{40\times9} = 4$.

Ten przykład możemy jeszcze rozwiązać w następujący sposób. Opuściwszy dnie w ciągu których robota jest lub ma być dokonana, zadanie nasze tak wysłowione będzie: Grabarzy 5 wykopali 40 łokci rowu, aby w tym samym czasie wykopać takiż sam rów długi na 72 łokcie, ilu potrzeba użyć grabarzy?

Podług tego mamy: $40^{\text{łok.}} : 72^{\text{łok.}} :: 5^{\text{lud.}} : x^{\text{lud.}}$ skąd wypada $x = \frac{5\times72}{40}$.

Teraz przypuszczamy, że są dwa rowy równéj długości, to jest, po 72 łokcie, lecz jeden ma być skończony w dniach 4, drugi w dniach 9. Z tego wypadłoby takie zadanie: Rów pewnéj długości ludzi x, czyli $\frac{5\times72}{40}$, wykopali w 4 dniach, aby ten rów wykopać w dniach 9, ilu potrzeba użyć robotników? Tu oczywiście jest prawidło trzech odwrotne, bowiem, im dni więcéj przeznaczono na wykopanie rowu, tém ludzi potrzeba mniéj. Będziemy więc mieli:

$$9^{\text{dł.}} : 4 :: \frac{5\times72}{40} : x', \text{ skąd znajdziemy } x' = \frac{4\times5\times72}{9\times40} = 4^{\text{rob.}}$$

Ostrzeżenie. Ostateczny wypadek oznaczyliśmy przez x', ponieważ wartość jego jest różna od $x = \frac{5\times72}{40}$.

Zwykle jednak, nie obliczywszy wartości x, oba powyższe równomiany podpisują się pod sobą, z których, na mocy num. 202, przychodzimy do jednego równomianu. Tak będziemy mieli:

$$40^{\text{ł.}} : 72^{\text{ł.}} :: 5^{\text{ł.}} : x^{\text{ł.}}$$
$$9^{\text{d.}} : 4^{\text{d.}} :: x^{\text{ł.}} : x';$$

pomnożywszy wyrazy odpowiednie przez siebie, znajdziemy:

$$40\times9 : 72\times4 :: 5\times x : x\times x';$$

albo, drugiego stosunku oba wyrazy podzieliwszy przez x, znajdziemy ostatecznie,

$$40\times9 : 72\times4 :: 5 : x', \text{ skąd } x' = \frac{72\times4\times5}{40\times9} = 4.$$

W powyżéj otrzymanym równomianie: $40\times9 : 72\times4 :: 5\times x : x\times x'$, możemy skrócić wyrazy nie samego tylko stosunku drugiego; widzimy bowiem, że oba wyrazy piérwszego stosunku podzielne są przez 4 i przez 9;

podzieliwszy je przez 4, mielibyśmy $10 \times 9 : 72 \times 1$; ten znów stosunek podzieliwszy przez 9, znajdziemy:

$$10 : 8 :: 5 : x'.$$

Takiego skrócenia zaniedbywać nie potrzeba, ile razy da się uskutecznić; wykonywamy je zaś wprzód, nim przez pomnożenie odpowiednich wyrazów tych równomianów przyjdziemy do jednego równomianu. Tak w dwóch powyższych równomianach:

$$40 : 72 :: 5 : x$$
$$9 : \ 4 :: x : x',$$

podzieliwszy 40 i 4 przez 4, 9 i 72 przez 9, nareszcie x i x przez x, znajdziemy:

$$10 : 8 :: 5 : 1$$
$$1 : 1 :: 1 : x',$$

a po pomnożeniu odpowiednich wyrazów będzie:

$$10 : 8 :: 5 : x'.$$

Przestroga. Po skróceniu w ten sposób wyrazów wchodzących do równomianów mających wydać jeden równomian, wyrazy każdego z nich nie stanowią równomianu oddzielnego, dopiero po pomnożeniu przez siebie odpowiednich wyrazów, iloczyny uczynią równomian.

Rozwiązywanie zagadnień za pośrednictwem prawidła trzech składanego, wykonywa się praktycznie w następujący sposób: *Stosunek w który niewiadoma wchodzi, pisze się u góry i podkreśla; inne stosunki podpisują się pod sobą; jeżeli który z nich jest odwrotny, potrzeba zaraz przełożyć jego wyrazy; potém wyraz obok x stojący przenosi się na spód kolumny pod x stojącej; następnie wyrazy stosunków skracają się, jeżeli można; to uczyniwszy zrobimy iloczyn z wyrazów pod sobą stojących; na koniec iloczyn z wyrazów stojących pod niewiadomą, dzielimy przez ilo-*

czyn czynników téj kolumny w któréj nie znajduje się niewiadoma, a iloraz otrzymany jest wartością niewiadoméj x.

Za wzór takiego postępowania, weźmy następujący przykład.

Robotników 25, w 7 dniach, pracując dziennie po godzin 10, wykopali rów długi na łokci 32, szeroki łokci 4, głęboki 2 łokcie: zgodzono potém 32 robotników, mających wykopać rów szeroki $4\frac{1}{2}$ łokci, głęboki $1\frac{1}{2}$ łokcia, w dniach 5, pracując dziennie po godzin 11; pytanie jak długi będzie ten drugi rów. (Pamiętajmy na to, że w takich zadaniach przypuszcza się jednaka siła i usilność robotników, i grunta na których rowy są kopane, zupełnie téj saméj spojności).

Podług tego cośmy powiedzieli, ponieważ długość drugiego rowu jest niewiadoma, piérwszym stosunkiem będzie $32:x$; aby inne stosunki, ocenić czy są proste czy odwrotne, porównywamy je z tym piérwszym; jedne po drugich, nie zważając na inne, czyli, jakoby ich nie było. Tak mówimy: *Ma się 32 łokcie długości do x łokci długości; jak się ma 25 ludzi do 32 ludzi;* skąd widzimy, że tu jest prawidło trzech proste; więc piszemy $25:32$. Następnie mówimy; *Ma się 32 ło. długości do* x *długości, jak się ma 7 dni do 5 dni;* tu także jest prawidło trzech proste, więc piszemy $7:5$ i t. d. Lecz uważamy że mówiąc: *jak się ma 32 łokcie długości do* x *łokci długości, tak się ma 4 łok. szerokości do* $4\frac{1}{2}$ *łok. szer.*, jest prawidło odwrotne; bowiem im rów szerszy; tém przy równych innych okolicznościach, to jest, gdy czas, głębokość jest równa, jako też liczba robotników, musi być krótszy; zatem stosunek nie $4:4\frac{1}{2}$, lecz $4\frac{1}{2}:4$ napisać potrzeba. Toż samo się rozumie o głębokości.

WZÓR DZIAŁANIA.

32 : *x* łokci długości
25 : 32
7 : 5
10 : 11
$4\frac{1}{2}$: 4
$1\frac{1}{2}$: 2
x : 32;

albo, sprowadziwszy dwa przed ostatnie stosunki do jednego mianownika i potem opuściwszy go,

32 : *x* ło. dł.
25 : 32
7 : 5
10 : 11
9 : 8
3 : 4
x : 22;

tu, po obu stronach podzieliwszy 25 i 5 przez 5; 10 i 8 przez 2, będzie:

32 : *x* ło. dł.
5 : 32
7 : 1
5 : 11
9 : 4
3 : 4
x : 32;

a wykonawszy przepisane mnożenie, będzie:

$$x \times 5 \times 7 \times 5 \times 9 \times 3 = 32 \times 1 \times 11 \times 4 \times 4 \times 32,$$

skąd $x = \frac{32 \times 11 \times 4 \times 4 \times 32}{5 \times 7 \times 5 \times 9 \times 3} = 38\frac{674}{4725}$ łokci długości.

Dla ułatwienia, a raczéj aby się nie pomylić, wyrazy zadania tak się na tablicy lub na papierze wypisują.

Robot.	dni	godzin	dług. łok.	szer. łok.	głęb. łok.
25,	7,	10,	32,	4,	2,
32,	5,	11,	x,	$4\frac{1}{2}$,	$1\frac{1}{2}$.

PRAWIDŁO TRZECH ŁAŃCUCHOWE.

212. Prawidło trzech łańcuchowe, które właściwiéj nazwaćby należało *Prawidło trzech wiązane*, (Цѣпное правило) jest to prawidło trzech składane, zastosowane do obliczania miar, wag, monet, różnych na raz krajów, na miary, wagi, lub monety jednego kraju. Nazywa się zaś prawidłem łańcuchowém dla tego, że w niém układają się stosunki tak, iż ten sam gatunek liczb wchodzi do dwóch po sobie następujących stosunków, czyli że te stosunki są między sobą powiązane, niby łańcuch, wyrazami to samo nazwisko mającemi.

Stosunki, do tego prawidła wchodzące, układają się tak samo jak w prawidle trzech składaném. Dla lepszego objaśnienia rzeczy rozwiążemy następujący przykład.

Kupiec petersburski winien kupcowi w Marsyli 15820 franków i 73 centymów. Tę summę wypłaca za pośrednictwem bankiera berlińskiego, ten zaś wypłaca ją przez negocyanta londyńskiego. Wiedząc teraz, że 100 rubli czyni 107 talarów pruskich i 22 groszy srebrnych; zaś 1 funt sterling czyni 6 talarów prus. i 21 gr. srebr.; nareszcie 1 funt ster. wart jest 24 franki i 88 centymów; pytanie jest, ile rubli kupiec petersburski ma przesłać do Berlina, na zaspokojenie długu w Marsylii?

Pamiętając, że talar pruski zawiera 30 groszy srebrnych, będziemy mieli $107^{\text{tal.}}\ 22^{\text{gr. s.}} = 107\frac{22}{30}^{\text{tal.}}$ albo $\frac{3232}{30}^{\text{tal.}}$ i $6^{\text{tal.}}\ 21^{\text{gr. s.}} = 6\frac{21}{30}^{\text{tal.}}$, czyli $\frac{201}{80}^{\text{tal.}}$ Podane zaś franki i centymy, które są setnemi franka, wypiszemy $15820{,}73^{\text{fran.}}$ i $24{,}88^{\text{frank.}}$

Teraz przekonajmy się, że to zadanie rozwiązuje się przez prawidło trzech składane. Jakoż, ponieważ londyński negocyant ma wręczyć należytość francuzkiemu, więc potrzeba dowiedzieć się, ile funtów sterlingów zapłaci za 15820,73 franki; mamy zatém równomian:

$24{,}88^{\text{fr.}} : 15820{,}73^{\text{fr.}} :: 1^{\text{f. ster.}} : x^{\text{f. st.}}$; zatem $x = \frac{15820{,}73}{24{,}88}$.

Oznaczywszy liczbę talarów przez x za x' funtów sterlingów przypadających, mamy znów równomian:

$$1^{\text{f. ster.}} : x^{\text{f. st.}} :: \tfrac{201}{30}^{\text{tal.}} : x'^{\text{tal.}}$$

albo, przemieniwszy porządek wyrazów średnich,

$$1^{\text{f. st.}} : \tfrac{201}{30}^{\text{tal.}} :: x^{\text{f. st.}} : x'^{\text{tal.}}$$

Z tego równomianu mamy wiadomą liczbę x' talarów, zapłacić się mających kupcowi londyńskiemu za należytość w Marsylii. Teraz wypada obliczyć ilość rubli x'' za x' talarów przypadającą, co otrzymamy z równomianu,

$$107\tfrac{22}{30}^{\text{tal.}} : x'^{\text{tal.}} :: 100^{\text{rub.}} : x''^{\text{rub.}}$$

czyli:

$$\tfrac{3232}{30}^{\text{tal.}} : x'^{\text{tal.}} :: 100^{\text{rub.}} : x''^{\text{rub.}}$$

albo, przemieniwszy porządek wyrazów średnich,

$$\tfrac{3232}{30}^{\text{tal.}} : 100^{\text{rub.}} :: x'^{\text{tal.}} : x''^{\text{rub.}}$$

Wypisawszy pod sobą te równomiany, mamy:

$$\begin{array}{lcl} 24{,}88 : 15820{,}73 & :: & 1 : x \\ 1 : \tfrac{201}{80} & :: & x : x' \\ \tfrac{3232}{30} : 100 & :: & x' : x''; \end{array}$$

tych trzech równomianów pomnożywszy przez siebie odpowiednie wyrazy, otrzymamy:

$$24{,}88 \times 1 \times \tfrac{3232}{36} : 15820{,}73 \times \tfrac{201}{30} \times 100 :: 1 \times x \times x' : x \times x' \times x'';$$

albo, po podzieleniu drugiego stosunku przez $x \times x'$,

$$24{,}88 \times 1 \times \tfrac{3232}{30} : 15820{,}73 \times \tfrac{201}{30} \times 100 :: 1 : x'';$$

lub, piérwszy stosunek, pomnożywszy przez 30,

$$24{,}88 \times 1 \times 3232 : 15820{,}73 \times 201 \times 100 :: 1 : x'';$$

skąd na koniec $x'' = \frac{15820{,}73 \times 201 \times 100}{24{,}88 \times 1 \times 3232}$

Widzimy więc że trzy powyższe równomiany tak pod sobą podpisać możemy:

$$15820{,}73^{\text{fr.}} : x''^{\text{rub.}}$$
$$100^{\text{rub.}} : \tfrac{3232}{30}^{\text{tal.}}$$
$$\tfrac{201}{30}^{\text{tal.}} : 1^{\text{f. ster.}}$$
$$1^{\text{f. st.}} : 24{,}88^{\text{fr.}};$$

pomnożywszy teraz kolumny przez siebie, będzie:

$$15820{,}73 \times 100 \times \tfrac{201}{30} \times 24{,}88,$$

skąd $x'' = \frac{15820{,}73 \times 100 \times 201}{3232 \times 24{,}88}$.

Z powyższego ułożenia stosunków wyprowadzamy takie prawo na rozwiązanie prawidła trzech łańcuchowego. *Wyraz odpowiedni niewiadomemu kładziemy naprzód; obok niego niewiadomą; w drugim wierszu na piérwszém miejscu piszemy liczbę tego nazwiska co wyraz drugi poprzedniego wiersza, obok niego odpowiednią wartość; piérwszym wyrazem trzeciego wiérsza jest liczba tego samego nazwiska co wyraz drugi powyższego wiérsza i t. d. Tym sposobem wypisawszy wszystkie stosunki, mnożą się przez siebie wyrazy piérwszéj kolumny, skąd iloczyn otrzymany podzieliwszy przez iloczyn z wyrazów drugiéj kolumny, znajdziemy wartość niewiadoméj.*

Podług tego ułożywszy wyrazy powyższego zadania, będzie jak wyżéj:

1582073	$15820{,}73^{\text{fr.}}$	$: x^{\text{r.}}$	x'
100	$100^{\text{r.}}$	$: \tfrac{3232}{30}^{\text{tal.}}$	3232
201	$\tfrac{201}{30}^{\text{tal.}}$	$: 1^{\text{f. ster.}}$	1
	$1^{\text{f. st.}}$	$: 24{,}28^{\text{fr.}};$	2488

skracając wyrazy, piszemy je obok, jak wzór pokazuje. Iloczyn z piérwszéj kolumny jest 31799667300; iloczyn z drugiéj kolumny jest, 8041216; podzieliwszy piérwszy iloczyn przez drugi, otrzymamy $x' = 3954^{\text{rub.}}\ 58^{\text{kop.}}$. Mały ułamek kopiejki, w tego rodzaju rachunkach opuszcza się.

213. W powyższym przykładzie wziętym dla wyprowadzenia prawidła, podług którego rozwiązują się zadania przez *prawidło trzech łańcuchowe*, wprowadzone liczby są podług średniego kursu, który wszakże, stosownie do okoliczności czasowych zmienia się ustawicznie. Nadto, nie uważaliśmy na to, że kupcy, negocyanci, i bankierowie, rachują sobie zwykle po 2 od sta, za ułatwienie interesu, które to wynagrodzenie *kommissowém* nazywają.

Do powyższego przykładu wprowadzając kommissowe po 2 od sta, ponieważ ten interes, przechodzi przez dwie pośrednie ręce, przeto petersburski kupiec zapłaciłby kommissowego 4 od sta, to jest za 100 rubli zapłaciłby 104 rubli. Podług tego, mielibyśmy:

1582073	$1582073^{\text{fr.}}$	$: x''^{\text{rub.}}$	x''
13	$104^{\text{r.}}$	$: 100^{\text{r.}}$	1
1	$100^{\text{r.}}$	$: 3232^{\text{tal.}}$	404
201	$201^{\text{tal.}}$	$: 1^{\text{f. ster.}}$	1
1	1	$: 2488^{\text{fr.}}$	2488

Po obliczeniu znajdziemy:

$$x'' = \frac{1582073 \times 13 \times 201}{404 \times 2488} = 4112^{\text{rub.}}\ \text{i}\ 77^{\text{kop.}}$$

Wypada wprawdzie 76 kopiejek i ułamek $\frac{780948}{1005152}$, lecz ten ułamek jako większy od połowy bierze się za 1.

W układaniu wyrazów tych kolumn, tak się uważa: x'' rubli jest już z kommissowém, więc w drugim wierszu piszemy 104 na piérwszém miejscu, na drugiém 100 rubli bez kommissowego; potém 100 rubli, obok ich wartość w talarach, lecz w powyższéj kolumnie wzięliśmy liczbę 3232 zamiast $\frac{3232}{30}$, ponieważ i w piérwszym wyrazie trzeciego wiérsza opuściliśmy także mianownik 30. Obok 201 talarów, napisaliśmy 1 funt sterling. Piérwszym więc wyrazem ostatniego wiersza, czyli stosunku jest 1 funt sterling, a obok niego wartość jego w frankach, ale tu opuściliśmy przecinek, ponieważ i w piérwszym wierszu piérwszéj kolumny toż samośmy uczynili.

Uwaga. Układając wyrazy w prawidle trzech łańcuchowém sposobem dopiero podanym, wyraz piérwszy w piérwszéj kolumnie i ostatni w drugiéj są zawsze tego samego nazwiska.

PRAWIDŁO TRZECH SPÓŁKI.

214. Celem prawidła trzech spółki (Правило товарищества) jest podzielenie liczb na części równomienne z danemi liczbami. Na przykład, gdybyśmy mieli podzielić liczbę 288 na trzy części tak; żeby część piérwsza miała się do drugiéj, a druga do trzeciéj, jak się ma $4:3:2$. Oznaczywszy te części, jako niewiadome, przez x, x', x'', będziemy mieli; $4:3::x:x'$, stąd, (zob. num. 205).

(1) . . . $4+3:x+x'::3:x'$,

a że mamy: $3:2::x':x''$, czyli

(2) . . . $3:x'::2:x''$,

zatém ponieważ drugi stosunek równomianu (1), jest równy piérwszemu stosunkowi równomianu (2), więc (podług num. 205), będzie:

$$4+3:x+x'::2:x''$$

czyli, $4+3:2::x+x':x''$,

zatém, (num. 205), $4+3+2:x+x'+x''::2:x''$.

Ten równomian uczy nas, że *tak się ma ogół liczb w stosunku których podział ma być uskuteczniony, do ogółu części danéj liczby, a zatém do liczby danéj do podzielenia, jak się ma jedna z liczb wskazujących stosunek jednéj części do téjże części.*

Podług tego mamy:

$$9:288::4:x,$$

$$x=\frac{288\times4}{9}=128$$

$$9:288::3:x',$$

$$x'=\frac{288\times3}{9}=96$$

$$9:288::2:x'',$$

$$x''=\frac{288\times2}{9}=64.$$

Weźmy dla wprawy takie zadanie. Trzy osoby założyły wspólny handel; jedna z nich włożyła w niego 8000 rubli, druga 9200 rubli, trzecia 7990 rubli. Przy rozwiązaniu współki pokazało się z rachunku, że na tym handlu zarobiły 4578 rubli i 82 kopiejek; pytanie jest, ile z tego wspólnego zarobku przypadnie na każdą osobę?

Summy 8000, 9200, 7990, są liczbami, w stosunku których zarobek wspólny ma być podzielony. Dodawszy je do siebie, będziemy mieli:

$$25190:4578{,}82:8000:x$$

$$\text{stąd}\quad x=\frac{4578{,}82\times8000}{25190}=1454{,}171;$$

$$25190:4578{,}82::9200:x'$$

$$\text{więc}\quad x'=\frac{4578{,}82\times9200}{25190}=1672{,}296;$$

na koniec:

$$25190:4578{,}82::7990:x''$$

$$\text{zatém}\quad x''=\frac{4578{,}82\times7900}{25190}=1452{,}353.$$

Ogół części . . . . 4578,820.

Piérwsza więc osoba dostaje w zysku, 1454 rubli i 17,1 kopiejek; druga, 1672 r. i 29,6 kopiejek; trzecia 1452 r. i 35,3 kopiejek; a że po dodaniu tych części otrzymaliśmy summę na handlu zyskaną, przeto działanie bez błędu wykonane jest.

Z tego przykładu wyprowadzamy to prawidło.

1. *Potrzeba dodać do siebie summy włożone w handel.*

2. *Ułożyć równomian tak, że piérwszym wyrazem stosunku piérwszego jest ogół summ włożonych w handel, drugim zysk ogólny, trzecim summa włożoną w handel przez jednego spólnika, na koniec czwartym wyrazem jest zysk tegoż spólnika.*

215. Do spółki mogą być przyjęte osoby w różnych odstępach czasu od rozpoczęcia działań handlowych lub bankierskich, jako téż z różnemi kapitałami. W takim razie, dla podzielenia zysku ogólnego pomiędzy osoby do spółki należące, potrzeba różne przeciągi czasu sprowadzić do jednego, a to na téj zasadzie, że np. 5 złotych w 4 miesiące taki sam zysk przynoszą, jak 5×4 złotych w $\frac{4}{4}$ czyli w 1 miesiącu.

Przykład. Po założeniu handlu przez *Piotra*, z summą 15000 rubli, w 8 miesięcy przystępuje *Jan* z summą 17300 rubli; po Janie we 4 miesiące przyłącza się do tegoż handlu *Adam* z summą 16000 rubli. Po upływie lat 2 i miesięcy 5 od założenia tego handlu, rozwiązuje się spółka. W tym zaś przeciągu czasu zarobiła spółka 2990 rubli i 90 kopiejek; ile z tego zysku przypadnie na każdą osobę?

Od założenia handlu do rozwiązania spółki upłynęło 29 miesięcy; zatém kapitał Piotra 15000 rubli, zostawał 29 miesięcy w tym handlu; kapitał Jana 17300 rubli zostawał 8 miesięcy mniéj niż kapitał Piotra, przeto miesięcy 21; nareszcie kapitał Adama 16000 rubli zostawał 4 miesiące krócéj niż kapitał Jana, zatém przez miesięcy 17, Kapitały powyższe sprowadzając do jednego miesiąca, będziemy mieli:

Piotra $15000 \times 29 = 435000$ rubli przez 1 miesiąc
Jana $17300 \times 27 = 363300$ rubli przez 1 miesiąc
Adama $16000 \times 17 = 272000$ rubli przez 1 miesiąc

Ogół 1070300.

Powyższe więc zadanie, możnaby teraz tak wysłowić. Piotr włożył w handel 435000 rubli, Jan 363300 rubli, Adam 272000 rubli; na handlu zarobili 2990 rubli i 90 kopiejek, ile z tego zysku przypada na każdą z powyższych osób? Tym sposobem sprowadziliśmy to na pozór zawikłane zadanie, do przypadku piérwszego, to jest, kiedy czasy trwania spółki są równe dla wszystkich wspólników. Więc podług danego prawidła mamy:

$$1070300 : 2990,90 :: 435000 : x$$

$$x = \frac{2990,90 \times 435000}{1070300} = 1215,586$$

$$1070300 : 2990,90 :: 363300 : x'$$

$$x' = \frac{2990,90 \times 363300}{1070300} = 1015,224$$

$$1070300 : 2990,90 :: 272000 : x''$$

$$x'' = \frac{2990,90 \times 272000}{1070300} = 760,090$$

Ogół 2990,900.

Zatém Piotr otrzyma 1215 rubli kopiejek 58,6; Jan 1015 rubli kop. 22,4; Adam zaś 760 rubli kop. 9.

PRAWIDŁO TRZECH MIĘSZANINY.

216. Rzeczy mające różną wartość w równych lub różnych ilościach, albo téż równéj wartości w różnych stosunkach z sobą pomięszane, dają to, co my w ogólności mięszaniną nazywamy; zatém taka mięszanina ma wartość różną od wartości rzeczy w nią wchodzących. Nie wszystkie rzeczy mięszać się dają, np. metal z drzewem, wino z oliwą. Nie wszystkie także mięszaniny są użyteczne.

Mięszanina metalów nazywa się *spiżem*, czasem z francuzka *alliażem*.

W mięszaniu pożytecznych rzeczy są dwa cele: 1. albo znając wartość czystych rzeczy i ich części do mięszaniny wziętych, szukamy wartości lub dobroci téjże mięszaniny; 2. albo też dochodzimy w jakich stosunkach czyste rzeczy zmięszać potrzeba dla otrzymania mięszaniny mającéj naznaczoną cenę. Działanie przez które rozwiązujemy tego rodzaju zadania, nazywa się *prawidłem trzech mięszaniny* (правило смѣшенія).

217. *Co do* 1go. Dajmy że 20 garncy wina po 1 rub. i kopiejek 80, zmięszano z 8 garncami lepszego wina, po 2 ruble i 20 kopiejek, pytanie zachodzi, po wiele sprzedawać należy tę mięszaninę, bez zysku i straty?

Oczywistą jest rzeczą, że mięszaniny będzie $20+8$ garncy, że za te 28 garncy potrzeba tyle wybrać rubli, ile wino do mięszaniny wzięte jest warte. Za piérwsze wino przypada . . . . $20 \times 1{,}80 = 36{,}00$ rubli,
za drugie zaś . . . . $8 \times 2{,}20 = 17{,}60$ rubli,

więc za wino w mięszaninie 53,60 rubli;

zatém, za 28 garncy mięszaniny wybrać należy 53,60 rubli; a następnie za 1 garniec mięszaniny $\frac{53{,}60}{28} = 1{,}914$ rubli.

Z tego przykładu widzimy, że *aby dojść wartości mięszaniny, potrzeba obliczyć całą wartość rzeczy do mięszaniny wchodzących, którą podzieliwszy przez ogół miar tychże* *rzeczy pomięszanych z sobą, otrzymamy na iloraz wartość jednéj miary mięszaniny.*

Uwaga. Wartość rzeczy tego samego gatunku, jest miarą ich dobroci lub czystości; zatém gdybyśmy nie cenę rzeczy lecz ich stopnie dobroci lub czystości podane mieli, działanie zupełnie będzie takie same, jak gdyby podana była ich wartość.

Weźmy taki przykład. Okowity próby $10\frac{1}{2}$ garncy 100 zmięszano z 80 garncami wódki próby $5\frac{1}{2}$; pytanie, jakiéj próby będzie ta mięszanina?

Każdy garniec okowity ma 10,5 prób, więc 100 garncy zawiera prób . . . . . $10{,}5\times100=1050$;
dla téj saméj przyczyny jest . . . $5{,}5\times\ 80=\ 440$

Razem prób . . 1490;

w garncach 180; więc na jeden garniec wypada $\frac{1490}{180}=8\frac{5}{18}$: zatém otrzymana mięszanina jest próby $8\frac{5}{18}$.

218. W drugim przypadku, to jest, kiedy szukamy ile części z danych rzeczy potrzeba wziąść dla otrzymania z nich mięszaniny mającéj daną cenę lub dobroć, pośrednią pomiędzy cenami lub dobrociami rzeczy w mięszaninę wchodzących, uważamy naprzód; że *kiedy różnice między ceną pośrednią a cenami danych do mięszania rzeczy, są równe, wtedy te rzeczy mięszać potrzeba w równéj ilości.* Tak np. gdybyśmy chcieli mieć wino po cenie 60 kopiejek kwartę, powstałe z pomięszania dwóch gatunków win, jednego po 80 kopiejek, drugiego po 40 kopiejek, widzimy że tych win wziąwszy po kwarcie, otrzymamy 2 kwarty mięszaniny wartujące $80+40$ czyli 120 kopiejek: więc za jednę kwartę przypada 60 kopiejek.

Gdybyśmy mieli jeden gatunek wina, np. po 8 złotych kwarta, a żądali otrzymać wino po 6 złotych kwartę, oczywistą jest rzeczą, że do wina potrzeba dolać płynu, nie mającego żadnéj wartości, więc np. wody. Uważamy teraz, że 6 kwart po 8 złotych tyle są warte ile 8 kwart po 6 złotych; zatem z danego wina potrzeba wziąść kwart 6 i do nich dolać 2 kwarty wody, stąd otrzymamy mięszaninę 8 kwart po złotych 6. W téj mięszaninie na 2 kwarty wody, tyle kwart wina przypada, ile złotych kosztować ma wino mięszane; więc na każdy złoty przypada jedna kwarta wina. Gdybyśmy w miejscu wody domięszali wina po 1 zł. kwarta, wtedy potrzeba wziąść droższego, to jest, na 8 złotych, mniéj niż gdybyśmy go z wodą mięszali; a że w powyższéj mięszaninie 1 kwarta lepszego wina odpowiada 1 złotemu ceny, więc skoro przybywa 1 złoty z wina podlejszego, potrzeba lepszego wziąść o jednę kwartę mniéj niż przedtem, zatém 5 kwart lepszego, a gorszego 2, Jakoż 5 po 8 złotych czyni 40; 2 po 1 złotemu czyni 2 złote, razem 42 złote; i 5+2 kwarty, czyli 7 kwart mięszaniny po 6 złot. czyni 42 złote. Dajmy jeszcze, że do wina na 8 złotych kwarta, mamy domięszać wina na 2 złote kwarta, dla otrzymania mięszaniny na 6 złotych kwarta: w tym razie z podlejszego wina przybywa 1 złoty więcéj niż w poprzedzającym razie, zatém wina lepszego potrzeba o 1 kwartę mniéj niż 5, to jest, 4 kwarty; podlejszego zawsze 2 kwarty. I takież być powinno, bo 4 kwarty po 8 złotych, warte są 32 złote, a 2 kwarty po 2 złote warte są 4 złote; razem więc 36 złotych; i mięszaniny 4+2 czyli 6 kwart po 6 złotych warte są 36 złotych.

W powyższém rozumowanin cena lepszego wina jest zmienna, cena zaś podlejszéj domieszki pozostała ta sama, i okazało się, że liczba kwart podlejszego pozostała zawsze 2 kwarty, które są różnicą między ceną wyższą a żądaną, to jest, 8 — 6 = 2. Co się zaś tycze liczby kwart lepszego wina, mieliśmy: gdy domieszka podlejszéj wartości była zero, lepszego potrzeba było 6, czyli różnicę między ceną żądaną a ceną niższą, bowiem 6 — 0 jest 6; gdy domieszka podlejsza warta była 1 złoty, potrzeba było wziąść 5 kwart lepszéj, to jest 6—1, co jest różnicą między ceną żądaną a ceną mniejszą od niéj: podobnież, gdy podlejszéj domieszki cena była 2, lepszego gatunku potrzeba było 4 kwarty, to jest 6 — 2 i t. d. Z tego rozumowania wyprowadzamy takie prawidło. *Mając dwa gatunki rzeczy do zmięszania w ten sposób, żeby otrzymać się mający gatunek pośredni, miał cenę niższą od ceny lepszego gatunku, lecz wyższą od ceny podlejszego gatunku, potrzeba cenę pośrednią odjąć od ceny wyższéj, a różnica pokaże liczbę miar podlejszego gatunku w mięszaninę wchodzić mających; odjąwszy zaś cenę niższą od pośredniéj, różnica pokaże liczbę miar lepszego gatunku, które z poprzedzającemi zmięszane, dają mięszaninę po cenie żądanéj.*

To samo prawidło wyprowadzićby można z rozumowania, gdybyśmy cenę podlejszego gatunku pozostawili stałą, cenę zaś lepszego gatunku powiększali lub zmniejszali.

Przykład. Mając oliwę na 24 złote i na 18 złot. garniec, w jakim stosunku pomięszać te dwa gatunki, dla otrzymania pośredniego gatunku po 22 złote garniec?

WZÓR DZIAŁANIA.

Cena mięszaniny	Ceny dane	Liczba garncy	Wartość
22	24	4	96 złot.
	18	2	36 złot.
Wartość mięszaniny		6 garn.	132 złot.

jakoż $22 \times 6 = 132$ złot.

219. Z poprzedzającego rozumowania, a jeszcze jaśniéj z powyższego przykładu, pokazuje się, że ogół różnic pomiędzy średnią, czyli żądaną ceną a cenami danemi, jest równy różnicy między danemi cenami. Nadto postrzegamy, że kiedy na 6 garncy mięszaniny potrzeba 4 garnce lepszego, a 2 garnce podlejszego gatunku, więc na jeden garniec mięszaniny żądanéj potrzeba piérwszego gatunku $\frac{4}{6}$ garnca, drugiego zaś $\frac{2}{6}$ garnca. Więc mamy jeszcze takie prawidło. *Dla złożenia jedności miary mięszaniny, potrzeba różnicę między średnią a niższą ceną podzielić przez różnicę między wyższą a niższą ceną, stąd otrzymamy część lepszego gatunku; różnicę między wyższą a średnią ceną podzieliwszy przez różnicę między najwyższą i najniższą ceną, otrzymamy część podlejszego gatunku.*

Gdybyśmy do poprzedzającego zadania dodali pytanie: ile garncy potrzeba wziąść każdego z danych gatunków oliwy, dla otrzymania 18 garncy po 22 złote, takbyśmy daléj prowadzili rozwiązanie: ponieważ na 1 garniec z lepszego wziąść potrzeba $\frac{4}{6}$, więc na 18 garncy, wypadnie $\frac{4}{6}\times 18 = 12$ garncy; z podlejszego zaś $\frac{2}{6}\times 18 = 6$ garn.

Garncy 12 po 24 złote czyni 288 złotych,
garncy 6 po 18 złotych 108 złotych,

garncy 18 po 22 złote czyni 397 złotych.

Żeby więc otrzymać daną liczbę miar mięszaniny po naznaczonéj cenie, potrzeba znaleźć części z lepszego i gorszego gatunku potrzebne do złożenia jedności miary mięszaniny, i te części pomnożyć przez żądaną liczbę miar mięszaniny.

220. Dajmy, że mamy trzy gatunki wina; 1sze po 9 rubli garniec, 2gie po 3 ruble, trzecie po 2 ruble; po ile potrzeba wziąść z każdego gatunku, żeby garniec téj mięszaniny sprzedawać po 4 ruble i 48 kopiejek?

To zadanie można na dwa rozłożyć. Pierwsze, chcemy z dwóch gatunków wina, po 9 rubli jedno, po 3 ruble drugie, złożyć wino po cenie 4,48 rubli. Drugie, kiedy wartości dane są, po 9 rubli i po 2 ruble. Postępując podług prawidła danego, mamy:

Cena żądana	Ceny dane	Liczba garncy
4,48	9	1,48
	3	4,52;

jako też,

4,48	9	2,48
	2	4,52;

Te dwa rozwiązania składając w jedno, postrzegamy, że ponieważ po piérwszém i po drugiém zmięszaniu otrzymujemy wino téj saméj ceny, to jest, po 4,48 rubli; zatém w jakimkolwiek stosunku zmięszamy te mięszaniny, zawsze powstanie taż sama mięszanina. Daléj widzimy, że cenę wina droższego potrzeba dwa razy porównać z ceną żądanego, a różnicę pisać obok odpowiednich cen niższych: Ogół zaś różnic między ceną żądaną a cenami niższemi wypiszemy obok najwyższéj ceny.

Mamy więc:

Cena żądana	Ceny dane	Liczba garncy	Wartość
	9	1,48+2,48 czyli 3,96	35,64 rubli
4,48	3	4,52	13,56
	2	4,52	9,04
	Za mięszaniny garncy	13,00	przypada 59,24 rubli.

Podobnie postępuje się, kiedy są dwie lub więcéj cen wyższych, a jedna niższa od żądanéj ceny.

Kiedy zaś mamy dwie wyższe i dwie niższe od żądanéj ceny, na ten czas można, albo oddzielnie mieszać jednę wyższą z którąkolwiek niższą ceną, i drugą wyższą z pozostałą niższą: albo te działania wten sam sposób jak wyżéj, razem wykonać.

PRAWIDŁO TRZECH PROCENTU.

221. Surowe materyały rozumem i siłą przetworzone, nabierają wyższéj wartości. Na wykształcenie rozumu, nabycie surowéj materyi, siły i narzędzi, potrzeba pieniędzy. Jeżeli przeto zamiast sami na te rzeczy użyć własnych pieniędzy, komu innemu pozwalamy je używać przez pewien przeciąg czasu, słusznie mamy prawo wymagać od niego cząstkę jego zysków, za pomocą naszych pieniędzy otrzymanych.

Ilość pożyczonych pieniędzy nazywamy *kapitałem*, lub *pożyczką* (капиталъ), zapłatę za pożyczkę *procentem* (процентъ), z łacińskiego *percentum*, co znaczy od sta. Albowiem wypożyczając pieniądze, umawiamy się, że tyle a tyle od każdego sta pobierać będziemy. To co od sta bierzemy, nazywa się *stopą procentu.* Dajmy, że od sta pobierać mamy 5, wtedy 5 jest stopą procentu, i tak się wyraża 5%, co wymawia się *5 od sta.*

Procent właściwie nazywa się po polsku *lichwą;* lecz po wprowadzeniu wyrazu łacińskiego *percentum* czyli *procentu*, przywiązano do wyrazu *lichwa* znaczenie występnego procentu, to jest zbyt wielkiego, przez który dłużnicy niebaczni lub gwałtowną przyciśnięci potrzebą, gotują sobie zniszczenie. W handlu rząd pozwala na stopę procentu 6%, w prywatnych czynnościach 5%; rządy dają zwykle 4, 3, nawet $2\frac{1}{2}$ %. W potocznych pomiędzy ludźmi czynnościach, stopa procentu zależy po największéj części, od obfitości lub braku krążącéj gotówki; ale głównie od wiary publicznéj i pewności odebrania pożyczki, bez kłopotu i na umówiony *czas* (срокъ уплаты); to jest, na dzień umówiony.

222. Umowy o pożyczki na procent są albo ustne, albo na piśmie. Umowy piśmienne są trojakie; 1. zupełnie prywatne, bez lub z podpisem świadków; 2. urzędowne, to jest, przed Regentem czyli Notaryuszem; 3. Weksle.

Weksle są to zobowiązania piśmienne, podług form przez rząd przepisanych. W każdéj umowie piśmiennéj powinno być wyrażone: 1. wielkość pożyczki, 2. przez kogo i komu, 3. na czém jest zabezpieczona, 4. podpis dłużnika, wierzyciela, i urzędnika lub świadków. 5. Data zobowiązania się. 6. *Czas wypłaty*, czyli zwrotu pożyczonéj summy. 7. Gdzie zaszła umowa; to jest w którém mieście, lub wsi. 8. Umówiony procent, czego na wekslu nie pisze się.

223. Prawidło trzech procentu (Правило процентовъ) jest prawidłem trzech prostém, w którém *tak się ma 100 do kapitału pożyczonego, jak się ma stopa procentu do procentu przypadającego od pożyczki.*

Przykład I. Od pożyczki 16819,50 rubli po 6%, ile przypada procentu?

Rozwiązanie. $100:16819{,}50::6:x$,
skąd $x = 1009{,}17$ rubli.

Przykład II. Od pożyczki 3542 złotych i 24 groszy, za 2 lata i miesięcy 5, po 5%, ile przypada procentu?

Rozwiązanie. Ponieważ od sta na rok przypada 5, więc za lat 2 i miesięcy 5 jest stopa procentu $12\frac{1}{12}$. Mamy więc: $100:3542\frac{24}{30}::12\frac{1}{12}:x$,
albo po uproszczeniu: $6:88{,}57::29:x$,
skąd $x = 428{,}09$ złot. czyli 428 złot. i blisko 3 grosze.

Przykład III. Od pewnéj pożyczki biorąc po 6%, odebrano rocznego procentu 2700 rubli; pytanie jak wielka była pożyczka?

Rozwiązanie. Tu summa wypożyczona jest niewiadoma, zatém mamy:

$$6 : 2700 :: 100 : x,$$

stąd $x = \frac{2700 \times 100}{6} = 45000$ rubli.

Przykład IV. Od pożyczki 12500 rubli, odebrano procentu rocznego 625 rubli: pytanie, o jaką stopę procentu umówiono się?

Rozwiązanie. Stopa procentu niewiadoma, więc:

$$12500 : 100 :: 625 : x,$$

stąd $x = \frac{625 \times 100}{12500} = 5\%$.

Przykład V. Za wiele lat kapitał 7000 rubli, wypożyczony po 6%, uczyni procentu 1540 rubli.

Rozwiązanie. $100 : 6 :: 7000 : x$,

skąd $x = \frac{6 \times 7000}{100} = 420$ rubli rocznego procentu:

zatém $\frac{1540}{420} = 3\frac{28}{40}$ lat, czyli 3 lata, 8 miesięcy.

Przykład VI. Przez 4 lata i 7 miesięcy 9600 rubli po 5% nie pobierano procentu; ile dziś wart jest ten kapitał?

Rozwiązanie. Za lat 4 i miesięcy 7 stopa procentu jest $4\frac{7}{12} \times 5$, zatém 100 po tym przeciągu czasu warte są $100 + 4\frac{8}{12} \times 5$; mamy więc równomian:

$$100 : 100 + 4\tfrac{7}{12} \times 5 :: 9600 : x,$$

skąd $x = 11800$ rubli.

Uwaga. Te sześć przykładów obejmują wszystkie przypadki mogące się zdarzyć w rachunkach dotyczących się procentów.

POTRĄCZKA czyli ESKONTY (escompte).

224. Gdyby wierzyciel wypożyczoną na pewien procent summę żądał odebrać przed terminem umówionym, i na to dłużnik zezwolił, wtedy ten ostatni nie ma prawa do żadnego wynagrodzenia za wcześniejszą wypłatę; owszem powinien zapłacić procent przypadający za czas upłyniony od wypożyczenia aż do wypłaty długu. Lecz kiedy dłużnik winien pewną summę wypłacić w oznaczonym terminie, bez obowiązku płacenia od niéj procentu, wtedy płacąc ją na żądanie wierzyciela przed tym terminem, ma prawo żądać wynagrodzenia za cały czas od wypłaty aż do naznaczonego terminu. To wynagrodzenie, to jest, potrącenie z długu pewnéj ilości pieniędzy podług obopólnéj umowy, lub podług przez prawo przepisanéj stopy procentu, nazywa się *eskontem*, *potrąceniem procentu*, albo krócéj *potrączka* (Учетъ векселей).

Potrącenie procentu słusznie należy się dłużnikowi wypłacającemu dług przed umówionym terminem; bowiem, gdyby on w dniu przedwczesnéj wypłaty wypożyczył na procent summę wypłaconą, toby ten procent urosł, przez czas od wcześniejszéj wypłaty do terminu upłynąć mający, tak, iż dołączony do dziś wypłaconéj summy, otrzymałby summę równą długowi w oznaczonym terminie wypłacić się mającemu.

Z tego objaśnienia widzimy, że dług, który w oznaczonym terminie wypłacić należy, bez żadnego procentu, uważać potrzeba jako kapitał wypożyczony dziś z procentem za czas upłyniony od dziś dnia do terminu wypłaty.

225. Niech będzie takie zadanie. Od summy 5175 rubli, płatnéj za 7 miesięcy, dziś ile procentu wytrącić należy, po stopie 6%?

Rozwiązanie. Kiedy od 100 na rok przypada 6, więc za 7 miesięcy należy się $3\frac{1}{2}$, czyli 3,5; ten procent dołączywszy do 100, będzie 103,5 kapitał z procentem. Zatém procent odtrącić się mający otrzymamy z równomianu,

$$105{,}5 : 3{,}5 :: 5175 : x,$$

więc:

$$x = \frac{5175 \times 3{,}5}{103{,}5} = 175 \text{ rubli}$$

Ten procent od danéj summy 5175 odtrąciwszy, wypadnie 5000 rubli, dziś wypłacić się mające za 5175 rubli płatne po 7 miesiącach.

To samo zadanie ułożywszy tak: Summa 5175 rubli, płatna za 7 miesięcy, ile dziś jest warta, po potrąceniu procentu po 6%? mielibyśmy równomian:

$$103{,}5 : 100 :: 5165 : x,$$

stąd,

$$x = \frac{5175 \times 100}{103{,}5} = 5000 \text{ rubli.}$$

Każdy z dwóch powyższych równomianów zawiera pięć następujących rzeczy; 1. dług, czyli summę należną po pewnym przeciągu czasu; 2. czas, czyli przeciąg czasu od wcześniejszéj wypłaty do terminu wypłaty; 3. kapitał 100 z dołączeniem stopy procentu za tenże czas; 4. stopę procentu za ten sam czas przypadającą, lub też kapitał 100; 5. procent odtrącić się mający, lub kapitał po potrąceniu procentu. Stąd téż możemy miéć takie zadania.

1. Z summy 5175 rubli, potrącono procentu 175 rubli po stopie procentu 6%; albo, za summę 5175 rubli odebrano 5000 rubli po potrąceniu procentu po 6%; pytanie w jakim czasie po odebraniu téj summy przypadał czas wypłaty?

Z summy 2175 odtrąciwszy 175 pozostanie 5000 rubli, dziś odebrać się mające. Teraz obliczywszy procent miesięczny i przez niego podzieliwszy 175, znajdziemy 7 miesięcy. Jakoż mamy:

$$100 : \tfrac{1}{2} :: 5000 : x,$$

więc,

$$x = 25, \text{ a następnie } \frac{175}{25} = 7 \text{ miesięcy.}$$

II. Z summy 5175 rubli wytrącono 175 rubli za czas 7 miesięcy; pytanie, po jakiéj stopie procentu?

Oznaczywszy stopę procentu za 7 miesięcy przez x, ponieważ dziś kapitał wart 5000 rubli będziemy mieli równomian:

$$5000 : 175 :: 100 : x,$$

skąd $x = \frac{175}{50} = 3{,}5\%$ za 7 miesięcy, zatém stopa procentu roczna jest $\frac{3{,}5 \times 12}{7} = 6$.

III. Jak wielki jest dług za 7 miesięcy płatny, kiedy dziś po potrąceniu procentu po 6%, wart jest 5000 rubli?

Stopa procentu za 7 miesięcy jest 3,5; mamy więc równomian:

$$100 : 103{,}5 :: 5000 : x,$$

stąd $x = 103{,}5 \times 50 = 5175$ rubli.

226. Bankierowie, obliczają procenta do odtrącenia za wcześniejszą wypłatę, uważając summę należącą się jako kapitał bez procentu. Tak np. zadanie na początku poprzedzającego numeru podane, podług zwyczaju bankierskiego, rozwiązuje się, podług równomianu,

$$100 : 3{,}5 :: 5175 : x,$$

więc $x = 181{,}125$.

Porównywając z sobą oba wypadki, to jest, otrzymany sposobem piérwszym, który jest matematycznie usprawiedliwiony, z otrzymanym podług zwyczaju bankierskiego, widzimy, że bankier zyskuje 6,125 rubli. Ten zysk uświęcony zwyczajem, lecz zupełnie niesprawiedliwy, pochodzi stąd, że rachując procent od summy 5175 rubli, jakoby teraz umieszczonéj na procencie, dolicza bankier do słusznego procentu, procent od procentu w danéj summie zawartego; jakoż, obliczyliśmy w numerze poprzedzającym, 175 rubli do potrącenia, procent od téj summy za 7 miesięcy mamy z równomianu:

$$100 : 175 :: 3,5 : x,$$

skąd,

$$x = \frac{3,5 \times 175}{100} = 6,125.$$

Sposób przez bankierów używany nazywają francuzi *en dehors*, niemcy *in Hundert*, u nas niektórzy *od sta;* sposób zaś matematyczny, słuszny, nazywają *en dedent*, *auf Hundert*, *na sto.* Nie wchodząc w to, czy francuzkie i niemieckie nazwania są szczęśliwie wynalezione, powiadamy tylko, że polskie nie tłomaczą rzeczy; zdaje nam się że sposób matematyczny należałoby nazwać *z nad sta*, a bankierski *ze stu.*

227. Wspólnym terminem wypłaty nazywają bankierowie pewną datę, w któréj wypłacając dwa lub kilka wekslów z różnemi terminami wypłaty, posiadacz ich odbiera całkowite, na nich wyrażone summy; co pochodzi ztąd, że procent przypadający za wcześniejszą wypłatę jednych sum, równy jest procentowi przypadającemu za późniejszą wypłatę innych. Tu natrafiamy na dwa ważniejsze przypadki; 1szy. stopy procentu są równe, 2gi. stopy procentu są różne.

Co do 1go. Dajmy trzy następujące summy: 2500 rubli płatne we 4 miesiące, 3000 rubli płatne w 2 miesiące, 5200 rubli płatne w 6 miesięcy. Te wypłaty sprowadzadzamy do terminu jednego miesiąca na téj zasadzie, że np. 2500 rubli tyle uczynią procentu czteromiesięcznego, ile 4 razy większa summa w jednym miesiącu. *Pomnoży-*

wszy więc summy przez odpowiednie im terminy, *otrzymamy summy płatne po miesiącu. Ogół tych sum podzieliwszy przez ogół sum danych, iloraz otrzymany jest wspólnym terminem wypłaty.* Bowiem, ile razy ogół danych sum jest mniejszy od ogółu sum płatnych w jednym miesiącu, tyle razy dłuższy jest termin wypłaty od 1 miesiąca.

Podług tego mamy:

$$\begin{array}{rcr} 2500\times 4 & = & 10000 \\ 3000\times 2 & = & 6000 \\ 5200\times 6 & = & 31200 \\ \hline \text{Ogół } 10700 & & \text{Ogół } 47200. \end{array}$$

więc $\frac{47200}{10700} = 4\frac{44}{107}$, czyli 4 miesiące i $12\frac{36}{107}$ dni, wspólny termin wypłaty; o czem łatwo można się przekonać.

W tego rodzaju rachunkach każdy ułamek dnia rachuje się za 1 dzień.

Co do 2go. Niech będą summy: 1500 rubli, płatne we 4 miesiącach, ze stopą procentu 6%; 2400 rubli, płatne w 5 miesięcy po 5%; 3000 rubli płatne w 3 miesiące po 4%. Aby te summy sprowadzić do terminu jednomiesięcznego i do stopy procentu 1, uważamy, że ile razy stopa procentu jest mniejsza, tyle razy kapitał musi być większy, dla uczynienia tego samego procentu; pomnożywszy przeto dane summy przez stopy procentu, sprowadzimy je do sum umieścić się mających po 1%; dopiero te iloczyny pomnożywszy przez terminy wypłaty, obecny przypadek sprowadzimy do przypadku pierwszego. Summy sprowadzone do stopy procentu 1%, przedstawiają dane summy w przypadku pierwszym. Więc mamy takie prawidło. *Dane summy mnożą się przez iloczyny z odpowiednich im terminów i stop procentowych, a ogół otrzymanych iloczynów dzieli się przez ogół iloczynów danych sum przez odpowiednie im stopy procentowe.*

Podług tego mamy.

$$\begin{aligned} 1500\times6 &= 9000\times4 = 36000 \\ 2400\times5 &= 12000\times5 = 60000 \\ 3000\times4 &= 12000\times3 = 36000 \end{aligned}$$

Ogół 33000; Ogół 132000:

więc $\frac{132000}{33000} = 4$ miesiące, jest wspólnym terminem wypłaty.

Wskazanie. Obszerny wykład rachunków kupieckich i bankierskich, znajdzie czytelnik w Arytmetyce handlowéj P. Zubelewicza.

PRZYKŁADY.

I. Za 100 złotych groszy 25 kupiono 75 łokci materyi, pytanie, za 302 złote i 15 groszy, ile będzie łokci téjże materyi? (Odpowiedź 225 łokci).

II. Robotników 20 ukończyli pewną robotę w jednym tygodniu, pracując dziennie po 10 godzin, robotników 25 po ile godzin dziennie pracować mają, żeby tę samę robotę w tygodniu ukończyli? (Odp. godzin 8).

III. Robotników 20 pracując po 9 godzin dziennie, za dni 20 zarobili 800 złotych; 18 robotników, pracując po 10 godzin, przez 24 dni ile zarobią? (Odp. 960 złotych).

IV. Na ubranie 100 ludzi potrzeba było 500 łokci sukna szerokiego na $2\frac{1}{2}$ łokci; chcąc ubrać 205 ludzi 950 łokciami sukna, jak toż sukno powinno być szerokie? (Odpowiedź $2\frac{53}{76}$, łok. szer.).

V. Ludzi 350, pracując dziennie po 11 godzin, w 40 dniach wykopać mogą miejsce na sadzawkę długą 120 łokci, szeroką 77 łokci, głęboką 5 łokci, i ziemię wykopaną odprowadzić do odległości 70 łokci; ludzi 300, pracując po 12 godzin dziennie, przez dni 48, około wykopania sadzawki długiéj na 108 łokci, szerokiéj na 84 łokcie z odwózką ziemi do odległości 65 łokci; pytanie jak głęboka ta sadzawka będzie? (Odp. $6\frac{2}{13}$).

VI. Kiedy za łokci 9 i $\frac{3}{4}$ pewnéj materyi zapłacono 20 rubli, kopiejek 8 i $\frac{1}{2}$; za 27 rubli i kopiejek 81 ile łokci téj saméj materyi można kupić? (Odp. $13\frac{1}{2}$ łok.).

VII. Robotników 14 pracując 25 dni po 9 godzin dziennie, otrzymali płacy 105 rubli; robotników 22 za tego samego rodzaju robotę wykonaną w 12 dniach, otrzymali 88 rubli; po ile godzin dziennie zgodzili się robić? (Odp. po 10 godzin).

VIII. Rubli 150 i kopiejek 45 ile uczyni funtów sterlingów, wiedząc że 100 mark hamburskich banko czyni 47 rubli, a na 1 funt sterling idzie 13,234 mark hamburskich banko? (Odp. 24 funt. ster., 3 szyling i 5,6 pensów. Zob. Monety).

IX. Petersburgski kupiec winien w Grecyi 317 rubli i kopiejek 75: ile zarobi lub straci, przesyłając tę należytość przez Hamburg i Neapol, zamiast wprost; wiedząc, że 100 mark hamburskich banko czyni 47 rubli, prócz trzech kommisowych wynoszących 6%, że 10 piastrów neapolitańskich czyni 27,64 mark hamburskich banko, zaś 25 piastrów neapolitańskich czyni 142 drachm greckich; nakoniec 500 drachm greckich czyni 112 rubli? (Odp. Straciłby drachm 54,16).

X. Zakupiono w Londynie 128 gallonów rumu, za który zapłacono przez Gdańsk 21 funt. sterlingów, 6 szylingów i 8 pensów; po wiele rubli garniec polski sprzedawać wypadnie, żeby zarobić 10%, odebrać koszta przewozu wynoszące 15%, jako też kommisowe w Gdańsku zapłacone $2\frac{8}{0}$; wiedząc nadto, że 1000 gallonów czynią 1135 garncy polskich i 3 kwarty; nadto, 6 talarów pruskich i 21 groszy srebrnych czyni 1 funt sterling, a 928 rubli czyni 1000 talarów pruskich? (Zobacz podziały monet). (Odp. po 1 rublu i 14 kopiejek).

XI. Spółka zawiązana 1 Stycznia 1846 r., rozwiązaną została dnia 10 Czerwca 1849 roku. Początkowo do téj spółki przystąpiło cztéry osoby: 1sza wniosła 3500 rubli, 2ga 2990 rubli, 3cia 4100 rubli, 4ta 5000 rubli. Lecz ta ostatnia wystąpiła ze spółki dnia 15 Sierpnia 1848 r.; zaś dnia 10 Maja tegoż roku 5ta osoba przystąpiła do spółki z summą 6570 rubli. Przy wystąpieniu ze spółki osoby czwartéj, wypłacono jéj, podług rachunku 7030 rubli i 25 kopiejek. Przy rozwiązaniu spółki pokazało się zysku 6570 rub. Pytanie ile było zarobku przy wyjściu czwartéj osoby ze spółki; ile każda z pozostałych osób zyskała? (Odp. Zarobek przy wyjściu czwartéj osoby ze spółki był 6598 rubli i 50 kop. Zarobiły zaś, osoba 1sza 1817 rubli i 78 kop. 2ga 1551 rubli i 82 kop. 3cia 2127 rubli i 98 kop. 5ta 1072 ruble i 44 kop.).

XII. Z każdéj ze trzech sztab srebra, których próby są: 13, $13\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, po ile funtów wziąść potrzeba, żeby ulana z nich czwarta sztaba ważyła 15 funtów i była próby $11\frac{1}{2}$? (Odpow. Z piérwszéj i drugiéj po 4 funty, z trzeciéj zaś 7 funtów).

XIII. Kupiono 517 garncy okowity próby 10, po 48 kopiejek garniec, i 1180 garncy wódki próby $6\frac{1}{2}$ po 27 kopiejek garniec: zmięszawszy je razem i dobrawszy wodą tak, żeby wódka trzymała grόbę 6ta, po ile garniec téj wódki sprzedawać potrzeba, dla zyskania na niéj $7\frac{1}{2}$ $\frac{0}{0}$? (Odpowiedź. Blisko po $28\frac{1}{2}$ kopiejek garniec. NB. Ułamek jest wzięty za pół kopiejki).

XIV. Od summy 5000 rubli po 6% za jaki czas przypadnie procentu 487 rubli i 50 kopiejek? (Odp. za 1 rok, 7 miesięcy i 15 dni).

XV. Za lat 3, miesięcy 9, dni 24, od wypożyczenia pewnéj summy, odebrano kapitału wraz z procentem 8574 rubli, rachując po 5%; jaką summę wypożyczono? (Odp. 7200 rubli).

XVI. Za dwa weksle, jeden wystawiony na 3575 rubli, płatny za 5 miesięcy; drugi na 7050 rubli płatny za 11 miesięcy, kiedy odebrać należytość, żeby ani bankier nic niedopłacił do wartości tychże weksłów, ani téż nic z téj wartości nie potrącił? (Odp. Wspólny termin wypłaty jest 8,98 miesięcy).

XVII. Wyszukać wspólny termin wypłaty trzech sum: jednéj 7540 rubli, płatnéj za 8 miesięcy, z procentem po 5%; drugiéj 10500 rubli, płatnéj za 13 miesięcy, z procentem 4%; trzeciéj 9000 rubli, płatnéj za 3 miesiące, z procentem 6%. (Wspólny termin wypłaty jest, 7 miesięcy, 16,54 dni).

POTĘGI.

---

228. Widzieliśmy w numerze 109, że *potęga* jest iloczynem z pewnéj liczby, wziętéj kilka razy za czynnik; że wykładnik potęgi pokazuje, ile razy liczba ma być wziętą za czynnik; teraz poznamy niektóre główniejsze własności wykładników potęg.

Każda liczba jest potęgą piérwszą saméj siebie: bowiem biorąc ją raz za czynnik, wypadnie nie co innego jak ta sama liczba; możemy więc uważać, że nad każdą liczbą jest wykładnik 1.

Każda liczba jest pierwiastkiem piérwszym saméj siebie.

229. *Wykładnik iloczynu z potęg téj saméj liczby, jest ogółem wykładników tychże potęg.*

Mamy bowiem, na przykład $3^5 = \overline{3\times3}\times\overline{3\times3\times3}$; lecz $3\times3 = 3^2$, i $3\times3\times3 = 3^3$, zatém zamiast czynników kréskami poziomemi złączonych, wziąwszy wskazane potęgi, będziemy mieli $3^5 = 3^2\times3^3$. Tu oczywiście $5 = 2+3$.

Tym samym sposobem okażemy, że $4^3\times4^5 = 4^8$, $2^2\times2^5 = 2^7$ i t. d.

Zatém nasze twierdzenie jest prawdziwe; które też tak można wysłowić. *W mnożeniu liczb, wykładniki téj saméj liczby dodają się do siebie.*

Podług tego będzie: np. $7^2\times7^4\times7^3 = 7^{2+4+3}$.

230. *Wykładnik ilorazu dwóch przez siebie podzielonych potęg téj saméj liczby, jest różnicą wypadłą z odjęcia wykładnika dzielnika od wykładnika dzielnéj.* Czyli: *W dzieleniu wykładniki téj saméj liczby odejmują się od siebie, odejmując wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnéj.*

Jakoż, ponieważ np. $5^5\times5^2 = 5^7$, zatém, podzieliwszy obie równe liczby przez 5^2, będzie $5^5 = \frac{5^7}{5^2}$, a że $5 = 7 - 2$, zatém $\frac{5^7}{5^2} = 5^5 = 5^{7-2}$.

231. *Wszelka liczba do potęgi zero podniesiona, jest równa jedności.* Bowiem, podług powyższego twierdzenia, mamy np. $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3}$, czyli 5^0; a że kiedy dzielnik równy jest dzielnéj, wtedy iloraz jest jednością, więc mamy $\frac{5^3}{5^3} = 1$, i $\frac{5^3}{5^3} = 5^0$, zatém $5^0 = 1$.

232. *Podnosząc liczbę z wykładnikiem do pewnéj potęgi, mnoży się jéj wykładnik przez tęż potęgę.* Dajmy, że np. 7^2 mamy podnieść do potęgi *trzeciéj;* w tym razie mamy $7^2 \times 7^2 \times 7^2$, czyli 7^{2+2+2}, zatém $7^{2\times 3}$; co było do okazania.

233. *Wykładnik liczby, z któréj mamy wyciągnąć pierwiastek pewnéj potęgi, dzieli się przez wskazanie pierwiastku.* Dajmy, że z liczby 5^6 wyciągnąć mamy pierwiastek *trzeci.* Ponieważ $5^6 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$, więc oczywiście 5^2 jest pierwiastkiem trzecim liczby 5^6; a że $2 = \frac{6}{3}$, więc $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}}$.

Z tego pokazuje się, że *kiedy wykładnik jest ułamkiem, wtedy licznik tego ułamku oznacza potęgę, a mianownik wskazuje pierwiastek z téj potęgi.* Tak np. $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$, czyli $\sqrt[3]{32}$. Podobnież $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4}$.

234. Aby wskazać, że liczba z wykładnikiem ma być podniesiona do pewnéj potęgi, obejmujemy tę liczbę nawiasem, i zewnątrz niego u góry, po prawéj ręce, piszemy liczbę wyrażającą potęgę. Tak np. $(3^2)^3$ znaczy, że 3^2 ma być podniesione do potęgi *trzeciéj;* zatém podług powyższego $(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6$.

235. Kiedy liczba położona jest pod kilkoma znakami pierwiastkowemi, to oznacza, że potrzeba wyciągać z niéj naprzód pierwiastek najbliżéj wskazany, potém z tego pierwiastku pierwiastek następnie wskazany i t. d. Np. wyrażenie $\sqrt{\sqrt{16}}$, znaczy, że z 16 potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, który jest 4, a z tego pierwiastku wyciągnąć jeszcze pierwiastek kwadratowy, który jest 2; zatém $\sqrt[2]{\sqrt{16}} = 2$. Podobnież $\sqrt[2]{\sqrt[3]{32}}$, znaczy że 32 potrzeba wyciągnąć pierwiastek trzeciéj potęgi, potém z tego pierwiastku pierwiastek kwadratowy.

236. Podług numeru 233, powyższe wyrażenie tak można napisać, $\sqrt{32^{\frac{1}{3}}} = 32^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = 32^{\frac{1}{6}}$, (zobacz numer 232) a więc $32^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{32} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{32}}$.
Stąd widzimy, że *kiedy liczba jest pod kilkoma znakami pierwiastkowemi, można ją pod jednym umieścić, położywszy wskazanie pierwiastku równe iloczynowi ze wskazań nad każdym znakiem znajdujących się.*

Jeżeli wskazanie pierwiastku daje się rozłożyć na czynniki, możemy liczbę pod jednym znakiem pierwiastkowym będącą umieścić pod tylu znakami, na ile czynników wskazanie rozłożone było, nad każdym znakiem położywszy jeden z czynników. Np. $\sqrt[15]{125} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{125}}$.

POSTĘPY.

237. Szereg liczb po sobie następujących, w ten sposób, że trzy którekolwiek przy sobie leżące, stanowią równomian ciągły, nazywa się *postępem* (Прогрессія); a jako równomiany są *arytmetyczne* czyli *różnicowe* i *jeometryczne* czyli *ilorazowe*, tak téż i postępy są dwojakie; *różnicowe* czyli *arytmetyczne* i *ilorazowe* czyli *jeometryczne*. Możnaby więc powiedzieć, że Postęp, czy to różnicowy czyli ilorazowy, jest ciągiem równomianów ciągłych. Każdy wyraz, prócz piérwszego i ostatniego, jest zarazem poprzednikiem i następnikiem: piérwszy wyraz jest tylko poprzednikiem, a ostatni tylko następnikiem.

238. W postępie różnicowym różnica pomiędzy któremikolwiek dwiema przy sobie położonemi liczbami jest stała; podobnie, w postępie ilorazowym, iloraz powstały z podzielenia jednéj liczby przez drugą obok niéj stojącą, jest stały. Liczby składające postęp nazywają się *wyrazami postępu* (Членъ прогрессіи); różnica stała *wykładnikiem postępu* (знаменатель прогрессіи) *arytmetycznego*; iloraz stały *wykładnikiem postępu jeometrycznego*. Dla pokazania, że liczby obok siebie napisane składają postęp różnicowy, piszemy na początku i na końcu postępu znak $\div$, a pomiędzy wyrazami kropkę tak właśnie jak w równomianie różnicowym: np. $\div 7.5.3.1 \div$. Na początku i na końcu postępu ilorazowego kładzie się znak $\dot{\overset{..}{\div}}$, a pomiędzy wyrazami dwie kropki, np. $\dot{\overset{..}{\div}} 18:6:3:1 \dot{\overset{..}{\div}}$.

Kiedy wyrazy postępu, idąc od lewéj ku prawéj ręce, są coraz mniejsze, wtedy postęp jest malejący: np. postęp różnicowy $\div$ 10.8.6.4.2 $\div$, jest malejący; postęp ilorazowy $\div\div$ 8:4:2:1 $\div\div$ jest także malejący.

Kiedy wyrazy postępu, idąc od lewéj ku prawéj ręce, są coraz większe, wtedy postęp jest rosnący; np. postęp różnicowy $\div$ 3.6.9.12 $\div$, jako téż postęp ilorazowy, $\div\div$ $\frac{1}{3}$:1:3:9:27 $\div\div$ jest rosnący.

Uwaga. Postęp rosnący czytając w odwrotnym kierunku jest postępem malejącym. Postęp malejący czytając odwrotnie jest postępem rosnącym.

POSTĘPY RÓŻNICOWE.

239. *W postępie różnicowym rosnącym, którykolwiek wyraz jest równy wyrazowi piérwszemu, powiększonemu wykładnikiem postępu, wziętym tyle razy, ile wyrazów poprzedza szukany wyraz; w postępie zaś różnicowym malejącym, którykolwiek wyraz równa się wyrazowi piérwszemu, pomniejszonemu wykładnikiem postępu tyle razy wziętym, ile wyrazów poprzedza szukany wyraz.* Dla okazania téj prawdy weźmy postęp $\div$ 5.7.9.11.13. & $\div$, którego wykładnik jest 2. Mamy wyraz *drugi* $7=5+2$; wyraz *trzeci* $9=7+2$, a że $7=5+2$, więc $9=5+2+2$, czyli $9=5+2\times2$; wyraz *czwarty* $11=9+2$, czyli $11=5+2\times2+2$, albo $11=5+3\times2$; wyraz *piąty* $13=11+2$, czyli $13=3+4\times2$; i t. d. Z tego widzimy, że wyraz *drugi* jest równy piérwszemu powiększonemu *raz* wziętym wykładnikiem, wyraz *trzeci* równa się wyrazowi piérwszemu powiększonemu *dwa razy* wziętym wykładnikiem; wyraz *czwarty* równa się wyrazowi piérwszemu powiększonemu *trzy razy* wziętym wykładnikiem; z tego wnosimy, że wyraz np. dwódziesty, równa się wyrazowi piérwszemu powiększonemu wykładnikiem wziętym *dziewiętnaście razy*, a zatém, *tyle razy* *wziętym wykładnikiem, ile go wyrazów poprzedza.* Takim samym sposobem okazać można prawdziwość powyższego twierdzenia, na postępie malejącym.

Z tego co poprzedziło wypływa, że dla znalezienia wyrazu postępu na naznaczoném miejscu położonego, dosyć jest znać wyraz pierwszy, wykładnik i miejsce szukanego wyrazu.

240. Ze cztérech rzeczy, to jest, pierwszego wyrazu, wykładnika, liczby wyrazów i miejsca wyrazu któregokolwiek, mając wiadome trzy, znajdziemy pozostały czwarty.

Mając wiadomy n. p. piąty wyraz 13 i wykładnik 2; wyraz pierwszy w postępie rosnącym jest równy piątemu 13, pomniejszonemu wykładnikiem cztéry razy wziętym; jakoż $13-4\times2$, czyli $13-8=5$. W ogóle, *wyraz piérwszy równa się wyrazowi któremukolwiek, pomniejszonemu wykładnikiem postępu tyle razy wziętym, ile wyrazów poprzedza dany wyraz.*

Znając wyraz pierwszy, n. p. 5 i wyraz piąty 13, znajdziemy wykładnik postępu, dzieląc różnicę danych wyrazów $13-5=8$, przez liczbę wyrazów poprzedzających piąty wyraz, zatem przez 4. Jakoż, ponieważ było $5+4\times2=13$, zatém jest $4\times2=13-5$; te dwie równe liczby podzieliwszy przez 4, otrzymamy ilorazy równe, więc $2=\frac{13-5}{4}$. Zatém, *wykładnik postępu jest równy różnicy między którymkolwiek wyrazem i piérwszym, podzielonéj przez liczbę wyrazów poprzedzających wyraz dany.*

Tym samym sposobem okazać można, że *liczba wyrazów, od piérwszego do danego wyrazu, jest równa ilorazowi wypadłemu z podzielenia różnicy między danym i piérwszym* *wyrazem, przez wykładnik postępu, powiększonemu jednością.* Tak n. p. mając wyraz pierwszy 5, wykładnik 2 i dany wyraz 13, będzie $\frac{13-5}{2}=4$, liczba wyrazów poprzedzających wyraz 13, więc ten wyraz stoi na 5 miejscu.

241. *W postępie różnicowym ogół dwóch wyrazów, równo od końców jego oddalonych, jest stały i równy ogółowi wyrazów skrajnych.*

Weźmy postęp $\div 2.5.8.11.14.17.20 \div$; ponieważ drugi wyraz od początku $5=2+3$, zaś drugi wyraz od końca $17=20-3$, zatem $5+17=2+3+20-3$; a że 3 dodane i odjęte od jakiéjkolwiek liczby, nie powiększa jéj ani zmniejsza, zatem $5+17=2+20$. Takim samym sposobem okażemy, że ogół wyrazów trzecich od końca postępu, jest równy ogółowi drugich wyrazów, to jest, $8+14=5+17$; a że $5+17=2+20$, zatém ogół wyrazów trzecich od końca postępu jest równy ogółowi wyrazów skrajnych; i t. d.

242. *Ogół wszystkich wyrazów postępu różnicowego, równa się ogółowi wyrazów skrajnych, pomnożonemu przez liczbę wyrazów, podzielonemu przez* 2. Niech będzie postęp $\div 2.5.8.11.14.17.20.23 \div$; oznaczywszy ogół wyrazów przez s, mamy:

$$s=2+5+8+11+14+17+20+23;$$

albo, biorąc ogóły wyrazów równo od końców postępu oddalonych, będzie:

$$s=(2+23)+(5+20)+(8+17)+(11+14),$$

a podług poprzedzającego numeru,

$$s=(2+23)+(2+23)+(2+23)+(2+23);$$

a że par jest dwa razy mniéj niż pojedynczych liczb, zatem ogółów $2+23$, jest dwa razy mniéj niż wszystkich wyrazów postępu: lecz w danym postępie jest ośm wyrazów, zatem mamy:

$$s = \frac{(2+23)\times 8}{2} = 100.$$

Powyższe twierdzenie jest ogólne, to jest, stosuje się do postępów różnicowych rosnących, malejących, mających parzystą lub nieparzystą liczbę wyrazów.

243. Wiedząc, że wykładnik postępu różnicowego jest równy różnicy między którymkolwiek wyrazem a pierwszym, podzielonéj przez liczbę wyrazów poprzedzających dany; możemy wstawić pomiędzy dwie liczby dane, tyle wyrazów postępu ile się spodoba: dosyć bowiem jest, wyszukać wykładnik postępu. Dajmy n. p. że pomiędzy 2 i 14 mamy wstawić trzy wyrazy, składające wraz z temi liczbami postęp różnicowy. Ponieważ liczba wszystkich wyrazów postępu wraz z danemi jest 5, zatém mamy wykładnik,

$$\frac{14-2}{4} = 3:$$

więc mamy postęp,

$$\div 2.5.8.11.14 \div$$

244. Pomiędzy każde dwa wyrazy postępu różnicowego wstawiwszy tę samę liczbę wyrazów, otrzymamy nowy postęp. Dajmy n. p. że pomiędzy każde dwa wyrazy postępu $\div$ 2.5.8.11.14.17 $\div$, mamy wstawić po dwa wyrazy; ponieważ różnica między wyrazami postępu jest stała, liczba wyrazów umieścić się mających pomiędzy każde dwa jest ta sama, zatem iloraz wypadły z podzielenia różnicy wyrazów przez liczbę poprzedzających wyrazów jest ten sam, więc i wykładnik jest stały. Podług tego będzie $\div$ 2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17 $\div$ nowy postęp, którego wykładnikiem jest 1.

ZASTOSOWANIA.

I. Wyraz piérwszy 7, wykładnik 2, jaki jest ósmy wyraz?

$$7+2\times7=21.$$

II. Wyraz piérwszy 7, wyraz ósmy 21, jaki jest wykładnik?

$$\frac{21-7}{7}=2.$$

III. Wyraz piérwszy 7, ósmy 21, jaki jest ogół ośmiu wyrazów?

$$\frac{(7+21)\times8}{2}=112.$$

IV. Mając drzewek 12 posadzonych rzędem w odległości jedno od drugiego na 10 kroków, podlewający ogrodnik ile uczyni kroków nim wszystkie podleje, czerpiąc ze studni, odległéj od pierwszego drzewka na 5 kroków, tyle tylko wody, ile potrzeba do podlania jednego drzewka? Odległości drzewek od wody są w postępie różnicowym, którego wykładnikiem jest 10; przeto ogół kroków, rachując zawsze od wody, jest równy podwójonemu ogółowi wyrazów postępu, bowiem podlewający dwa razy każdą drogę przebywa. (Odp. 1440 kroków).

POSTĘPY ILORAZOWE.

245. *W postępie ilorazowym tak rosnącym jako też malejącym, którykolwiek wyraz jest równy pierwszemu pomnożonemu przez wykładnik, podniesiony do takiéj potęgi, ile poprzedza wyrazów szukany wyraz.*

Niech będzie postęp rosnący, $\div\!\div$ 3:6:12:24:48:: &c. $\div\!\div$, którego wykładnikiem jest 2. Widzimy, że wyraz drugi $6=3\times2$; *wyraz trzeci* $12=6\times2$, lecz za 6 położywszy poprzedzającą wartość, mamy $12=3\times2\times2$, czyli $12=3\times2^2$; *wyraz czwarty* $24=12\times2$, czyli $24=3\times2^3$ i t. d.; z czego widzimy, że wyraz na przykład ósmy, równa się $3\times2^7=384$. Zatém twierdzenie podane jest prawdziwe dla postępu rosnącego.

Weźmy teraz postęp malejący, $\div\div$ $32:8:2:\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$ & $\div\div$. W tym postępie wykładnikiem jest $\frac{1}{4}$. Podług twierdzenia, mamy wyraz piąty, $32\times(\frac{1}{4})^4=32\times\frac{1}{256}=\frac{1}{8}$.

246. *Mając dany wyraz na wiadomém miejscu położony i wykładnik, znajdziemy piérwszy wyraz postępu ilorazowego, dzieląc wyraz dany przez wykładnik podniesiony do takiéj potęgi, ile wyrazów poprzedza dany wyraz.* Na przykład, mając wyraz ósmy 384 i wykładnik 2, będziemy mieli wyraz piérwszy $\frac{384}{2^7}=\frac{384}{128}=3$.

Uwaga. Wyraz piérwszy można także wynaleźć podług num. 245. Jakoż, odwróćmy postęp w ten sposób, żeby wyraz dany stał się piérwszym, a wyraz szukany (piérwszy) zajął miejsce przeznaczone dla danego. Wtedy, jeżeli dany postęp jest rosnącym, a jego wykładnik liczbą całkowitą, po odwróceniu będzie malejącym, a wykładnik ułamkiem, którego licznikiem będzie jedność, a mianownikiem wykładnik postępu. Tak w poprzedzającym przykładzie weźmiemy 384 za wyraz piérwszy, wyraz szukany (piérwszy) będzie stał na ósmém miejscu, wykładnik zaś będzie $\frac{1}{2}$.

Kiedy zaś postęp jest malejący, a jego wykładnik ma 1 w liczniku, odwrócony stanie się rosnącym, a wykładnikiem będzie mianownik wykładnika danego postępu. Tak, np. gdyby wykładnikiem postępu było $\frac{1}{3}$, odwróconego postępu wykładnikiem będzie 3.

Ostrzeżenie. Wykładnikiem postępu rosnącego może być ułamek niewłaściwy, malejącego zaś wszelki ułamek właściwy; ale ponieważ Arytmetyka nie obejmuje prawideł podnoszenia liczb do ułamkowych potęg, o takich wykładnikach mówić tu nie możemy.

247. *Mając wyraz piérwszy, wyraz na naznaczonéem miejscu położony, znajdziemy wykładnik postępu, wyciągnąwszy z ilorazu powstałego z podzielenia danego wyrazu przez wyraz piérwszy, pierwiastek potęgi mniéj o 1, od miejsca na którém stoi wyraz dany.*

Ponieważ dotąd nie umiemy wyciągać pierwiastków wyższéj nad trzecią potęgę, przeto dla okazania prawdziwości powyższego twierdzenia, szukać będziemy wykładnika, mając wyraz piérwszy 3 i wyraz czwarty 375. Oznaczywszy wykładnik przez x, (podług num. 245), mamy wyraz czwarty $3 \times x^3 = 375$; więc trzecia część iloczynu $3 \times x^3$, to jest x^3 jest równa trzeciéj części wyrazu 375; zatém $x^3 = \frac{375}{3}$: a następnie, kiedy sześciany są sobie równe, to i ich pierwiastki są sobie równe; więc ostatecznie $x = \sqrt[3]{\frac{375}{3}} = 5$.

248. Podług powyższego twierdzenia postępując, potrafimy wsunąć pomiędzy dwie dane liczby tyle wyrazów, czyniących z danemi liczbami postęp ilorazowy, ile się nam spodoba. Dajmy, że pomiędzy dwie liczby 3 i 375, mamy wsunąć dwie inne, stanowiące z danemi postęp ilorazowy. W tym postępie wyraz 375 stać będzie na czwartém miejscu, więc podług twierdzenia powyższego, mamy wykładnik $\sqrt[3]{\frac{375}{3}} = 5$; zatém żądany postęp, będzie: $\div\!\div$ 3:15:75:375 $\div\!\div$.

249. Pomiędzy każde dwa przy sobie stojące wyrazy postępu ilorazowego, wsunąwszy tę samę liczbę wyrazów, otrzymamy nowy postęp ilorazowy, którego wykładnik znajdziemy dopiero podanym sposobem. Że zaś biorąc którekolwiek dwa przy sobie stojące wyrazy, i wsuwając daną liczbę pośrodkowych wyrazów, znajdziemy ten sam wykładnik, to łatwo postrzegamy, bowiem każdy wyraz następny postępu podzieliwszy przez wyraz stojący przed nim, otrzymamy wykładnik danego postępu, zatém zawsze tę samę liczbę, z któréj ten sam pierwiastek wyciągać wypada. Dajmy, że pomiędzy każde dwa wyrazy postępu ∺1:8:64:512∺, mamy wsunąć po dwa wyrazy. Wykładnik szukanego postępu będzie

$\sqrt[3]{\frac{8}{1}} = \sqrt[3]{\frac{64}{8}}$, & $= 2$; zatem postęp szukany będzie:

$$∺1:2:4:8:16:32:64:128:256:512∺$$

250. *Mając wiadome; wyraz piérwszy, wyraz na niewiadomém miejscu położony, i wykładnik postępu ilorazowego, oznaczyć miejsce danego wyrazu?*

Ogólne rozwiązanie tego zagadnienia, należy w prawdzie do téj części Matematyki, którąśmy Algebrą nazwali, lecz je w ciągu dalszym tego dzieła wskażemy. Zatém podamy rozwiązanie tego zagadnienia tylko na ten przypadek, kiedy postęp jest rosnący, a wykładnik jego liczbą całkowitą.

Dajmy, że wyraz pierwszy postępu jest 1, dany wyraz na niewiadomém miejscu 32, wykładnik postępu 2. Mnożąc wyraz pierwszy przez wykładnik 2, otrzymamy wyraz drugi 2; ten wyraz mnożąc przez 2, otrzymamy wyraz trzeci 4, i tak daléj postępując, okaże się że wyraz 32 jest wyrazem piątym postępu.

251. Pozostaje nam jeszcze do rozwiązania takie zagadnienie.

Mając wyraz piérwszy, wyraz ostatni i wykładnik postępu ilorazowego, obliczyć ogół wszystkich wyrazów tegoż postępu.

Weźmy naprzód postęp rosnący, np.

$$\div\!\div 2:6:18:54:162:486 \div\!\div,$$

którego, jak widzimy, pierwszym wyrazem jest 2, ostatnim 486, a wykładnik 3. Oznaczywszy ogół wyrazów tego postępu przez x, będziemy mieli:

$$x = 2+6+18+54+162+486;$$

ten ogół wziąwszy razy 3, to jest, pomnożywszy go przez wykładnik postępu, otrzymamy:

$$3\times x = 2\times 3+6\times 3+18\times 3+54\times 3+162\times 3+486\times 3;$$

we wszystkich wyrazach wykonawszy naznaczone mnożenia, prócz ostatniego, znajdziemy:

$$3\times x = 6+18+54+162+486+486\times 3.$$

Widzimy, że ten ogół składa się z wyrazów danego postępu, nad to z ostatniego wyrazu pomnożonego przez wykładnik; brakuje tylko wyrazu pierwszego: a że, ogół wyrazów danego postępu oznaczyliśmy przez x, przeto poprzedzający ogół jest $x+486\times 3-2$; że zaś tenże sam ogół jest równy $3\times x$; przeto mamy, 3 razy wzięty ogół wyrazów danego postępu jest równy raz wziętemu temuż ogółowi, powiększonemu iloczynem 486×3, a pomniejszonemu wyrazem pierwszym 2: następnie, dwa razy wzięty ogół wyrazów postępu równa się różnicy $486\times 3-2$; więc ostatecznie, raz wzięty ogół wyrazów postępu, jest równy połowie różnicy $486\times 3-2$, czyli $x = \frac{486\times 3-2}{2}$, albo za 2 położywszy $3-1$,

$$x = \frac{486\times 3-2}{3-1}.$$

Z tego wyrażenia widzimy, że *ogół wyrazów postępu ilorazowego rosnącego, jest równy wyrazowi ostatniemu pomnożonemu przez wykładnik postępu, pomniejszonemu wyrazem piérwszym, a podzielonemu przez wykładnik postępu zmniejszony jednością.*

Tak więc wykonawszy naznaczone działanie, znajdziemy ogół wyrazów powyżéj danego postępu, $x = 728$.

Weźmy teraz postęp malejący $\div\!\div\, 12:4:\frac{4}{3}:\frac{4}{9}:\frac{4}{27}\, \div\!\div$, którego wykładnikiem jest $\frac{1}{3}$. Odwróciwszy porządek wyrazów, będziemy mieli postęp rosnący $\div\!\div\, \frac{4}{27}:\frac{4}{9}:\frac{4}{3}:4:12 \div\!\div$ którego wydładnik jest 3 (Uwaga w num. 246).

Podług powyższego twierdzenia mamy ogół wyrazów tego postępu:

$$x = \frac{12 \times 3 - \frac{4}{27}}{3-1} = 17\tfrac{25}{27}.$$

Lecz żeby bez odwracania porządku wyrazów postępu, wyprowadzić prawidło na wynalezienie ogółu wyrazów postępu malejącego, w wyrażeniu poprzedzającém pomnóżmy oba wyrazy ułamku przez wykładnik danego postępu, to jest, przez $\frac{1}{3}$, znajdziemy:

$$x = \frac{12 \times 3 \times \frac{1}{3} - \frac{4}{27} \times \frac{1}{3}}{3 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{1}{3}},$$

czyli,

$$x = \frac{12 - \frac{4}{27} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 17\tfrac{25}{27}.$$

Stąd takie wyprowadzamy prawidło. *Ogół wyrazów postępu ilorazowego malejącego, równa się wyrazowi piérwszemu, zmniejszonemu wyrazem ostatnim pomnożonym przez wykładnik, podzielonemu przez jedność zmniejszoną wykładnikiem postępu.*

252. *Iloczyny z dwóch wyrazów równo od końców postępu ilorazowego oddalonych, są sobie równe; zatém równe iloczynowi z wyrazów skrajnych.*

Niech będzie postęp:

$$\div\!\div 2:4:8:16:32:64:128 \therefore,$$

okazać mamy, że $2\times128=4\times64=8\times32=16\times16$. Jakoż, ponieważ $4=2\times2$, zaś $64=\frac{128}{2}$, zatém $4\times64=2\times2\times\frac{128}{2}$, czyli 2×128; podobnie, $8=2\times4$, a $32=\frac{64}{2}$, więc $8\times32=2\times4\times\frac{64}{2}=4\times64$, a że $4\times64=2\times128$, więc $8\times32=2\times128$ i t. d.

253. *Iloczyn z wszystkich wyrazów postępu ilorazowego, jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu wyrazów skrajnych, podniesionego do potęgi równéj liczbie wyrazów postępu.*

Wziąwszy powyższy postęp, oznaczywszy iloczyn z jego wyrazów przez x, będziemy mieli,

$$x = 2\times4\times8\times16\times32\times64\times128;$$

albo, kładąc obok siebie wyrazy równo od końców położone, będzie:

$$x = (2\times128)\times(4\times64)\times(8\times32)\times(16\times16);$$

zważając, że każdy iloczyn między nawiasami zawarty, równa się iloczynowi z wyrazów skrajnych, będziemy mieli,

$$x = (2\times128)\times(2\times128)\times(2\times128)\times(2\times128);$$

że zaś z dwóch wyrazów postępu otrzymujemy jeden iloczyn z wyrazów równooddalonych od końców postępu, więc takich iloczynów jest dwa razy mniéj niżeli wszystkich wyrazów postępu; następnie, czynników 2×128, jest dwa razy mniéj niżeli wyrazów postępu; zatém, stosując do danego postępu, mamy czynników 2×128 połowę siedmiu, to jest $\frac{7}{2}$, więc $x=(2\times128)^{\frac{7}{2}}$, czyli

$$x = \sqrt{(2\times128)^7},$$ (zob. num. 233).

LOGARYTMY.

254. Zbliżywszy do siebie własności postępów, różnicowego i ilorazowego, postrzegamy: że wyraz na naznaczoném miejscu położony, równa się; w postępie różnicowym, wyrazowi pierwszemu *powiększonemu* wykładnikiem *tyle razy wziętym* ile go wyrazów poprzedza; w postępie ilorazowym, wyrazowi pierwszemu *pomnożonemu* przez wykładnik, *podniesiony* do takiéj potęgi, ile go wyrazów poprzedza. Skąd widzimy, że dodawanie w postępie różnicowym odpowiada mnożeniu w postępie ilorazowym; mnożenie zaś w pierwszym odpowiada podnoszeniu do potęgi w drugim.

Wyraz piérwszy postępu różnicowego równa się wyrazow położonemu na naznaczoném miejscu, *pomniejszonemu* wykładnikiem, rozmnożonym przez liczbę wyrazów poprzedzających dany: wyraz pierwszy postępu ilorazowego równa się wyrazowi na naznaczoném miejscu, *podzielonemu* przez wykładnik, podniesiony do potęgi równéj liczbie wyrazów poprzedzających wyraz dany. Widzimy więc, że odejmowanie w postępie różnicowym odpowiada dzieleniu w postępie ilorazowym.

Skoro dodawanie w postępie różnicowym odpowiada mnożeniu w postępie ilorazowym, porównajmy więc wyrażenie ogółu wyrazów postępu różnicowego, z iloczynem wyrazów postępu ilorazowego. Ogół wyrazów postępu różnicowego jest równy *ogółowi* wyrazów skrajnych, *pomnożonemu* przez liczbę wyrazów postępu, *podzielonemu przez* 2: iloczyn zaś z wyrażów postępu ilorazowego jest równy *iloczynowi* z wyrazów skrajnych, *podniesionemu* do potęgi równéj liczbie wyrazów postępu, z któréj to potęgi *wyciąga się pierwiastek potęgi drugiéj*. Stąd pokazuje się, że mnożenie w postępie różnicowym odpowiada podnoszeniu do potęgi w postępie ilorazowym; dzielenie zaś w pierwszym odpowiada wyciąganiu pierwiastku w drugim.

Dla tém lepszego przekonania się o prawdziwości powyższych postrzeżeń, uważajmy dwa jakiekolwiek postępy, jeden różnicowy, drugi ilorazowy:

$$\div\div 2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024: \&\div\div$$

$$\div 3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.\&\div.$$

Weźmy dwa którekolwiek wyrazy postępu ilorazowego, n. p. 8 i 64; uważając je jako równo od końców postępu oddalone, będziemy mieli, (num. 252), $2:8::64:x$, skąd $x=8\times64=256$. Uważając zaś odpowiednie wyrazy postępu różnicowego, to jest 7 i 13, jako równo od końców postępu oddalone, podług num. 241, mamy $3.7:13.x$; stąd $x=7+13-3=17$. Te dwa wypadki przekonywają nas, że dodawanie wyrazów postępu różnicowego, odpowiada mnożeniu wyrazów postępu ilorazowego; odejmowanie zaś w pierwszym odpowiada dzieleniu w drugim. Nad to, że biorąc wyrazy odpowiadające sobie w obu postępach, i wykonawszy stosowne działania, otrzymujemy wyrazy obu postępów odpowiadające sobie.

Dajmy że wyraz postępu ilorazowego n. p. 16, jest równo od końców postępu oddalony; w tym razie, będziemy mieli, $\div\div 2:16:1\ x\div\div$, skąd $x=\frac{16^2}{2}=128$. Wziąwszy odpowiadający mu wyraz 9 w postępie różnicowym, i uważając go za wyraz równo od końców postępu oddalony, mamy $\div 3.9.x\div$, skąd $x=2\times9-3=15$. Tu znów porównywając oba wypadki, widzimy, że mnożenie wyrazów postępu różnicowego przez pewną liczbę, odpowiada podnoszeniu do potęg wyrazów postępu ilorazowego.

Nakoniec, weźmy dwa skrajne wyrazy, i szukajmy wyrazu równo od końców postępu oddalonego. W postępie ilorazowym, biorąc wyrazy 2 i 512, mamy równomian $\div\!\div 2 : x : 512 \div\!\div$, skąd $x = \sqrt{2 \times 512} = 32$; w postępie różnicowym, biorąc wyrazy odpowiednie, będzie $\div 3.x.19 \div$ skąd $x = \frac{19+3}{2} = 11$; z tego pokazuje się, że dzielenie wyrazów postępu ilorazowego przez pewną liczbę, odpowiada wyciąganiu pierwiastków w postępie ilorazowym.

255. Weźmy teraz liczbę jakąkolwiek, np. 3, i podnośmy ją do wszystkich potęg, począwszy od zera, będziemy mieli:

$$
\begin{aligned}
3^0 &= 1,\\
3^1 &= 3,\\
3^2 &= 9,\\
3^3 &= 27,\\
3^4 &= 81,\\
3^5 &= 243,\\
3^6 &= 729,\\
3^7 &= 2187,\\
3^8 &= 6561, \ \&.
\end{aligned}
$$

Tu postrzegamy, że potęgi liczby stałéj 3 idą w postępie ilorazowym, którego pierwszym wyrazem jest 1, a wykładnikiem taż sama liczba stała 3; wykładniki zaś téj liczby stałéj idą w postępie różnicowym, którego pierwszym wyrazem jest *zero*, a wykładnikiem 1. Pamiętając więc liczbę stałą, i wypisawszy obok siebie potęgi i wykładniki, otrzymalibyśmy dwa szeregi liczb, odpowiadających sobie w ten sposób, że wynalezienie któregokolwiek wyrazu w jednym, daje odpowiadający mu wyraz w drugim szeregu.

Jakoż wziąwszy dwa takie postępy:

$\div\div 1:3:9:27:81:243:729:2187:6561 \ \& \div\div$

$\div 0.2.4.6.8.10.12.14.16 \ \& \div$

Na wyrazach tych dwóch postępów odbywając działania takie same jakeśmy powyżéj czynili, okaże się; że ponieważ w działaniach odbywanych na wyrazach postępu ilorazowego, wypadki potrzebaby dzielić przez 1, to jest przez wyraz piérwszy, w działaniach zaś odbywanych na wyrazach postępu różnicowego, od wypadków potrzebaby odejmować wyraz pierwszy, który tu jest zerem; zatem wyprowadzimy stąd takie prawidła.

Mając dwa postępy; ilorazowy poczynający się od 1, a różnicowy poczynający się od zera, i uważając je tak z sobą złączone, że ich wyrazy odpowiadają sobie, będzie:

1º *Mnożenie dwóch którychkolwiek wyrazów postępu ilorazowego, odpowiadać dodawaniu wyrazów odpowiednich postępu różnicowego:* n. p. $9\times81=729$, i $4+8=12$.

2º *Dzielenie wyrazów piérwszego postępu, odpowiada odejmowaniu odpowiednich wyrazów drugiego postępu:* np. $\frac{6561}{243}=27$, i $16-10=6$.

3º *Podnoszenie wyrazów piérwszego, odpowiada mnożeniu odpowiednich wyrazów drugiego postępu, przez wykładnik potęgi:* np. $9^3=729$, i $4\times3=12$.

4º *Wyciąganie pierwiastków z wyrazów piérwszego, odpowiada dzieleniu odpowiednich wyrazów drugiego postępu, przez liczbę wyrażającą stopień pierwiastku:* np. $\sqrt[3]{729}=9$, i $12:3=4$.

256. Wykładniki pewnéj stałéj liczby, składające postęp różnicowy, poczynający się od zera, nazywają się *logarytmami* (логариөмы) odpowiednich potęg, składających postęp ilorazowy, poczynający się od jedności: zaś liczba podnoszona do potęg nazywa się *zasadą* logarytmów.

W powyższym szeregu *o*, jest logarytmem *jedności;* 2 jest logarytmem 3, 16 jest logarytmem 6561 i t. d.; co się tak zwykle pisze: $0 = \log. 1$, $2 = \log. 3$, $16 = \log. 6561$; albo też, $0 = L. 1$, $2 = L. 3$, $16 = L. 6561$ &.

257. Z tego cośmy powiedzieli w num. 255, wypada:

1º *Logarytm jedności jest zawsze zerem.*

2º *Logarytm zasady jest zawsze jednością.*

3º *Logarytm iloczynu z liczb postępu ilorazowego, jest równy ogółowi logarytmów czynników,* np. $\log. 9 \times 81 = \log. 9 + \log. 81$; jako też $\log. 3 \times 27 \times 9 = \log. 3 + \log. 27 + \log. 9$ &.

4º *Logarytm ilorazu z liczb należących do postępu ilorazowego, jest równy różnicy między logarytmem dzielnéj a logarytmem dzielnika:* np. $\log. \frac{729}{27} = \log. 729 - \log. 27$.

5º *Logarytm potęgi liczby postępu ilorazowego, równa się logarytmowi téjże liczby, pomnożonemu przez wykładnik potęgi:* np. $\log. 9^3 = 3 \times \log. 9$.

6º *Logarytm pierwiastku liczby postępu ilorazowego, jest równy logarytmowi téjże liczby, podzielonemu przez wykładnik pierwiastku:* np, $\log. \sqrt[4]{6561} = \frac{\log. 6561}{4}$.

258. Każda liczba większa od jedności, może być zasadą logarytmów. Wynalazek logarytmów jesteśmy winni Janowi Neper, szkodzkiemu baronowi. Lecz, że logarytmy Neperowskie, które także naturalnemi, lub hiperbolicznemi nazywają, jako mające za zasadę liczbę 2,7182818..., nie są do zwyczajnych rachunków wygodne, przeto współczesny Nepera Henryk Briggs obliczył logarytmy liczb, wziąwszy za zasadę liczbę 10, która też jest podstawą naszego systemu liczenia.

Liczbę 10 podnosząc do coraz wyższych potęg, począwszy od zera, potęgi te złożoną postęp ilorazowy, zaś wykładniki postęp różnicowy; te dwa postępy odpowiadające sobie będą:

∺ 1:10:100:1000:10000:100000:1000000: & ∺

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . & ÷

Uważając wyrazy postępu różnicowego za logarytmy wyrazów odpowiednich postępu ilorazowego, postrzegamy że jeszcze brakuje nam logarytmów liczb zawartych między 1 a 10, między 10 a 100 &.

Dla dopełnienia tego braku, potrzeba uważać 1 i 10 jako wyrazy skrajne, postępu ilorazowego, między któremi umieściwszy wielką liczbę wyrazów, pomiędzy temi wyrazami natrafimy na 1,999999.. lub 2,000001...; 2,999999... lub 3,000001.... &, z których dwa piérwsze można wziąść za 2, dwa drugie za 3 &. Wstawiwszy tyle wyrazów między 0 i 1 w postępie różnicowym, ile w postępie ilorazowym, wyrazy odpowiednie wyrazom postępu ilorazowego wziętym za 2, 3 &. będą logarytmami tychże liczb. Lecz aby to wykonać, potrzebaby umieścić między 1 i 10 około dziesięć milionów wyrazów, zatém dla znalezienia wykładnika postępu (247), wypadłoby nam wyciągnąć pierwiastek z liczby 10, stopnia o jeden niższego niż jest liczba wszystkich wyrazów postępu, na co w Arytmetyce nie mamy sposobu. Postępowanie wskazaną drogą byłoby jeszcze trudniejsze i mniej do wykonania podobne, przy szukaniu logarytmów liczb zawartych między 10 i 100, między 100 i 1000 i t. d., bowiem wyrazów pośrednich jest tu daleko więcéj niż między 1 i 10.

Dla znalezienia logarytmów liczb 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, możnaby jeszcze tak postąpić. Dajmy że chcemy mieć logarytm liczby 3: między 1 i 10 szukamy średnio-jeometrycznie równomiennéj, która jest, $\sqrt{10} = 3,162$ &; jako téż średnio-arytmetycznie równomiennéj między 0 i 1, która jest 0,5; więc 0,5 = log. 3,162 &. Ponieważ liczba 3 jest zawarta między 1 i 3,162 &, zatém log. 3 zawarty jest między 0 i 0,5; znalazłszy więc średnio-jeometrycznie równomienną między 1 i 3,162, która jest 1,778 &, i średnio-arytmetycznie równomienną między 0 i 0,5, która jest 0,25, będziemy mieli 0,25 = log. 1,778 &. Tu znów postrzegamy, że 3 zawarte jest między 1,778 i 3,162, więc log. 3 zawarty jest między 0,5 i 0,25; między piérwszemi znalazłszy średnio-jeometrycznie równomienną, a między drugiemi liczbami średnio arytmetycznie równomienną, otrzymamy 0,375=log. 2,371. Tym sposobem zbliżając się do liczby 3, po wielu jeszcze działaniach znaleźlibyśmy średnio-jeometrycznie równomienną 2,99999... lub 3,000001... &, tak do liczby 3 zbliżoną, iżbyśmy ją bez błędu za tęż liczbę 3 wziąść mogli, a odpowiadający jéj wyraz średnio-arytmetycznie równomienny za jéj logarytm.

Tą samą postępując drogą, możnaby otrzymać logarytmy wszystkich liczb piérwszych, zawartych między 1 i 10 między 10 i 100 i t. d. Innych liczb, będących iloczynami lub potęgami z liczb piérwszych, otrzymamy logarytmy podług numeru 257; tak np. log. 4 = 2×log. 2; log. 6 = log. 2 + log. 3; log. 45 = 2 log. 3 + log., 5, i t. d.; bowiem $4=2^2$, $6=2\times3$, $45=3^2\times5$, i t. d.

Pomimo tego ułatwienia, oba tu podane sposoby takie przedstawiają trudności, że ich nigdy nie używano do obliczenia logarytmów. Wyższe części Matematyki podają nam wzory, za pomocą których prostszemi sposobami, lubo pracowicie, obliczono logarytmy liczb wszystkich, od 1 do 108000, wyrażone w siedmiu, i więcéj znakach dziesiętnych.

259. Z tego co poprzedziło widzimy, że logarytmy tylko liczb 1, 10, 100, 1000 &, są liczbami całkowitemi, innych zaś liczb logarytmy są ułamkami dziesiętnemi. Ponieważ liczby 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 są zawarte między 1 i 10, przeto ich logarytmy zawarte są między 0 i 1, a zatém są ułamkami dziesiętnemi, których całkowitą jest zero. Liczb pośrednich między 10 i 100 logarytmy zawarte są między 1 i 2, zatém są to ułamki dziesiętne z całkowitą 1; liczb środkujących między 100 i 1000, logarytmy zawarte są między 2 i 3, zatém za całkowitą mają 2; logarytmy liczb zawartych między 1000 i 10000 mają całkowitą 3; logarytmy liczb zawartych między 10000 i 100000 mają całkowitą 4 i t. d. Widzimy więc, że całkowita w logarytmach wskazuje nam, czy liczby odpowiadające im są jednościami, dziesiątkami, stami i t. d.; dla téj to przyczyny całkowite logarytmów nazywają się *cechami* (Характеристика), które zwykle oddzielają się od ułamku dziesiętnego kropką, gdy tymczasem w zwyczajnych liczbach całkowita od dziesiętnych ułamków oddziela się przecinkiem.

Stąd wypada, że *cecha tyle zawiera jedności ile znaków zawiera liczba odpowiadająca logarytmowi, mniéj jednym.* Tak logarytmy liczb jednoznakowych mają cechę zero; logarytmy liczb dwuznakowych mają cechę 1; logarytmy liczb trzyznakowych mają cechę 2 &.

Uwaga. Powyższe prawidło stosuje się do liczb całkowitych; co nam następujący numer objaśnia.

260. *Logarytmów liczb dziesięć, sto, tysiąc i t. d., razy większych, część dziesiętna jest ta sama, zmienia się tylko cecha:* albo, Mnożąc jaką liczbę przez 10, 100, 1000 &, otrzymanych iloczynów logarytmy w częściach dziesiętnych pozostaną niezmienione, cechy tylko powiększą się o 1, 2, 3 &; zgoła, o liczbę zer mnożnika. Tak np. log. 2=0.3010300, log. 20=1.3010300, log. 2000000=6.3010300. Podobnież, log. 1,5789=0,1983546, log. 15,789=1,1983546, log. 157,89 = 2.1983546, log. 1578,9 = 3.1983546, log. 15789=4.1983546. Jakoż 15,789=1,5789×10, zatém log. 15,789=log. 1,5789 + log. 10, a że log. 10=1, zatém tylko całkowita, czyli cecha logarytmu liczby 1,5789 powiększy się o 1.

Tym samym sposobem okazać możemy, że dzieląc liczbę przez 10, 100 &, jéj logarytmu część dziesiętna pozostaje niezmieniona, cecha tylko pomniejsza się o 1, 2 &; zgoła o tyle jedności ile dzielnik zawiera zer; na przykład, log. 15789=4,1983546, log 15,789=1.1983546; bowiem, $15{,}789 = \frac{1.5789}{1000}$, zatém log. 15,789 = log. 15789 — log. 1000, czyli 4.1983546 — 3=1.1983546.

Widzimy więc, że *logarytmy liczb złożonych z tych samych znaków i w tym samym porządku ułożonych, różniących się tylko położeniem kréski oddzielającéj liczby całkowite od dziesiętnych części, różnią się tylko cechą.*

261. USTĘP. W Arytmetyce nie można odejmować większéj liczby od mniejszéj; lecz gdyby podług zadania szczególnego wypadało odjąć większą od mniejszéj liczby, wtedy po odjęciu mniejszéj od większéj, piszemy przed resztą znak (—), dla pokazania, że tyle brakowało liczbie mniejszéj żeby od niéj liczbę większą odjąć było można. Tak np. gdyby kto miał złoty 3 a wydał złotych 5, i zapytano, ile mu po tym wydatku pozostało pieniędzy, napisalibyśmy — 2, dla oznaczenia, że zabrakło 2 złote. Liczba ze znakiem (—) nazywa się w Algebrze *odjemną*, a znak wymawia się wyrazem *mniéj*, który jeszcze oznacza odejmowanie, jakeśmy to widzieli w num. 10.

262. *Logarytmy ułamków mniejszych od jedności są odjemne.* Jakoż, dajmy że chcemy miéć logarytm ułamku $\frac{2}{3}$, ponieważ w ułamku zwyczajnym licznik jest dzielną a mianownik dzielnikiem, zatém log. $\frac{2}{3}$ = log. 2 — log. 3, czyli log. $\frac{2}{3}$ = 0.3010300 — 0.4771212 = — 0.1760912. Podobnież mamy, log. 0,3 = — 0.5228788, albowiem 0,3 = $\frac{3}{10}$, więc log. 0,3 = log. 3 — log. 10, czyli 0,4771212—1.

263. Jan Neper, jakeśmy wyżéj powiedzieli, wynalazł logarytmy, których spis, czyli tablice, ogłosił w roku 1614. Współczesny jemu Briggs obliczył logarytmy, wziąwszy za zasadę 10, z czternastoma znakami dziesiętnemi, liczb od 1 do 20 000 i od 90 000 do 100 000, które ogłosił w roku 1624. Następnie Adryan Wlak, dwom poprzedzającym spółczesny, dorobił logarytmy liczb od 20 000 do 90 000; nadto obliczył logarytmy linij trygonometrycznych. Logarytmy ogłoszone przez pomienionych matematyków, jako téż następnych wydawców, dość niewygodne do użycia, są teraz wielką rzadkością. Najzupełniejsze, najpoprawniejsze oraz najdogodniejsze do użycia, tak ze względu układu, jako téż kształtu książki, są tablice logarytmowe Franciszka Callet'a, które ogłosił po raz pierwszy w roku 1795. Prawie jednocześnie Borda wydał tablice logarytmów tak obszerne, bo do 108 000, jak Callet; tylko logarytmy linij trygonometrycznych obliczone są na podział setny. Logarytmy Wegi są równie rozległe i układ ich wygodny. Prócz wymienionych tablic logarytmowych, jest bardzo wiele pomniejszych, wydanych dla dogodności i użycia w pomniejszych obliczeniach. W naszém dziele pokażemy układ i użycie tablic logarytmowych Calleta, a z mniejszych Lalanda; a dla ich łatwiejszego poznania, przyłączamy po jednéj stronnicy z jednych i drugich logarytmów.

264. Tablice logarytmowe Lalanda obejmują logarytmy liczb od 1 do 10000. Logarytmy wyrażone są w pięciu znakach dziesiętnych, i przed każdym logarytmem położona jest całkowita, czyli cecha. Kolumna pierwsza, któréj nagłówek naznaczony jest napisem: *Nomb*, co znaczy *nombres*, po polsku *liczby*, obejmuje liczby po sobie następujące: kolumna druga z nagłówkiem *Logarit*, obejmuje logarytmy liczb, obok nich w pierwszéj kolumnie położonych: trzecia kolumna z nagłówkiem *D*, pokazuje różnice pomiędzy dwoma po sobie następującemi logarytmami. Następne sześć kolumn, biorąc je po trzy, tak samo jak trzy poprzedzające są ułożone. W kolumnach drugich, czwartych i osmych nad wyrazem *logarit*, widzimy napisane stopnie, minuty i sekundy, jak np. na stronnicy za wzór wtém dziele zamieszczonéj, 0 stopni 37 minut 30 sekund, tak napisane $0°37'30''$: piérwszy logarytm w téj kolumnie jest logarytmem sekund, których w $37'30''$ jest 2250, która to liczba jest pierwszą w kolumnie liczb. Na początkowych stronnicach nie ma wyrażonych różnic w kolumnach trzecich, zapewne dla tego, że je każdy może łatwo, na rzut oka, otrzymać.

Taki jest układ tablic logarytmowych liczb; co się tycze układu tablic dla linij trygonometrycznych, te nie należą do zakresu tego dzieła.

Teraz podamy sposób użycia tych tablic.

265. Użycie tablic logarytmowych polega na tych dwóch zagadnieniach: 1º *Mając daną liczbę, znaleźć jéj logarytm.* 2º *Mając dany logarytm, znaleźć odpowiadającą mu liczbę.*

Kiedy liczba dana znajduje się w tablicach, to jest, nie przechodzi 10000, wtedy obok niéj znajdziemy gotowy logarytm. Toż samo, kiedy dany logarytm znajduje się w tablicach, wyszukawszy go, obok niego znajdziemy gotową, odpowiadającą mu liczbę. Gdybyśmy chcieli miéć logarytm liczby 2329, znalazłszy tę liczbę, obok niéj mamy logarytm 3.36717; gdybyśmy znów mieli logarytm 3.35736, obok niego mamy liczbę odpowiadającą mu 2277.

Dajmy, że chcemy miéć logarytm liczby 229200. Ponieważ 229200 jest 100 razy większe od 2292, przeto logarytm danéj liczby 229200, tylko cechą różni się od logarytmu liczby 2292 (260); wyszukawszy więc liczbę 2292, obok niéj znajdujemy logarytm 3.36021, lecz zamiast cechy 3 weźmiemy cechę 5 (259).

Chcąc miéć logarytm liczby np. 2,281, uważamy że, nie zważając na przecinek, liczba 2281 znajduje się w tablicach; zatem wyszukawszy ją, obok niéj mamy logarytm 3.35813, lecz zamiast cechy 3, napiszemy zero (259 i 260); więc log. 2,281 $=$ 0.35813.

Dwa poprzedzające przykłady uczą nas, że część dziesiętna logarytmu liczby większéj lub mniejszéj od 10000, lecz będącéj iloczynem lub ilorazem liczby znajdującéj się w tablicach, rozmnożonéj lub podzielonéj przez 10, 100, &c, znajduje się w tablicach logarytmowych, o których mowa; szukając więc logarytmu takowéj liczby, nie potrzeba zważać na cechy.

Kiedy liczba większa od 10000 daje się rozłożyć na czynniki mniejsze od 10000, wtedy wynalazłszy logarytmy jéj czynników, dodajemy je do siebie, a ogół otrzymany będzie logarytmem danéj liczby (257). Dajmy że mamy znaleźć logarytm liczby 27084: ta liczba jest podzielna przez 12 (num. 45, 46, 50), zatém można ją rozłożyć na dwa czynniki, 12 i 2257; więc log. 27084 = log. 12+log. 2257, czyli log. 27084 = 1.07918+3.35353 = 4.43271.

Logarytm liczby większéj od 10000, niedającéj rozłożyć się na czynniki, znajdujemy następującym sposobem. Dajmy że mamy znaleźć logarytm liczby 22537: ostatni znak odciąwszy kréską, znajdziemy liczbę 2253,7 dziesięć razy mniejszą od danéj. Ta liczba większa jest od 2253 a mniejsza od 2254, zatem jéj logarytm jest większy od log. 2253 a mniejszy od log. 2254, czyli większy od 3.35276 a mniejszy od 3.35295, między któremi różnica 19 jest obok, w kolumnie oznaczonéj nagłówkiem D. wypisana. Ułożymy więc równomian taki: ma się różnica między liczbami 2253 i 2254 do różnicy między 2253,7 i 2253, jak się ma różnica między 3.35295 i 3.35276, do różnicy szukanéj między log. 2253,7 i log. 2253; to jest, $1:0,7::19:x$ skąd $x = 0,7 \times 19 = 13,3$. Tę znalezioną wartość dodawszy do log. 2253, to jest, do 3.35276, znajdziemy 3.35289 = log. 2253,7; zatém log. 22537 = 4.35289 (260). (*a*) Z tego więc co poprzedza takie wyprowadzamy prawidło. *Kiedy liczba dana większa jest od* 10000, *w ogóle, od liczby najwyższéj w tablicach znajdującéj się, odcinamy na ułamek dziesiętny od prawéj ręki tyle znaków, żeby pozostała liczba całkowita znajdowała się w tablicach; po czém znalazłszy tę liczbę wypiszemy lub znajdziemy różnicę między jéj logarytmem a logarytmem liczby po niéj następującéj; nareszcie ułożymy równomian*

(*a*) Ułamek dziesiętny w wartości x, jeśli mniejszy od 5 opuszcza się, jeżeli zaś większy uważa się ją za 1 *taki:* ma się 1 do ułamku odciętego z liczby danéj, jak się ma różnica logarytmów do x; *i znalazłszy wartość téj niewiadoméj, dodamy ją do logarytmu liczby całkowitéj, odciętéj z liczby danéj.*

266. Uwaga. Ściśle biorąc, równomian powyższy jest fałszywy; bowiem kiedy liczby stanowią stosunki ilorazowe, odpowiadające im logarytmy czynią stosunek różnicowy (256). Błąd jednakże w otrzymanym wypadku z tego równomianu daje się ocenić dopiero w milionowych częściach: jakoż, pomiędzy 10000 i 100000 mamy liczb, pośrednich 90000, różnica zaś między log. $100000 = 5$, i log. $10000 = 4$ jest 1: rozłożywszy tę jedność na 90000 liczb pośrednich między 10000 i 100000, różnice pomiędzy logarytmami będą nadzwyczaj małe.

Ponieważ między 100 a 1000 jest 900 liczb pośrednich, a między ich logarytmami różnica jest 1; zaś między 1000 a 10000 jest liczb pośrednich 9000, między ich logarytmami różnica 1, wnosimy stąd, że różnice logarytmów liczb po sobie następujących, tém są mniejsze, im te liczby są większe. Równomian téż złożony z różnic liczb i różnic logarytmów daje wypadki dość dokładne, niewielkiemi błędami obciążone, kiedy te liczby są wielkie, większe od 10000.

267. Powiedzieliśmy w num. 262, że, logarytmy ułamków są odjemne: lecz że działania z takowemi logarytmami są niewygodne, i łatwo w błąd wprowadzić mogą, przeto dla uniknienia téj niedogodności, postępuje się tak. Dajmy że mieć chcemy log. $\frac{225}{2339}$; wyszukawszy logarytmy licznika i mianownika, będzie log. 225 — log. $2339 = 2.35218 - 3.36903$; powiększywszy cechę pierwszego o tyle jedności, żeby naznaczone odejmowanie uskutecznić się dało, na przykład o 2, będziemy więc mieli 4.35218 — 3.36903 = 0.98315: oczywiście ten wypadek jest logarytmem ułamku 100 razy większego od danego ułamku, bowiem 2.35218+2, czyli: 4.35218 = log. 225 + log. 100; dla pokazania więc, że odpowiadającą liczbę znalezionemu logarytmowi, to jest, 0.98315, potrzeba podzielić przez 100, przed tym logarytmem piszemy cechę $\overline{2}$, ze znakiem odjemnym nad nią położonym: tak więc mamy log. $\frac{225}{2339}$ = log. 225 + 2 — log. 2339 = $\overline{2}$.98315. Szukając tego logarytmu natrafimy na logarytm 3-98313, który, lubo nie zgadza się z danym, obok niego położoną liczbę bierzemy za wypadek, który jest 9620; lecz że naszego logarytmu nie 3, lecz $\overline{2}$ jest cechą, przeto liczba znaleziona jest 100000 razy większa od szukanéj, bowiem gdyby cecha znalezionego logarytmu była 0, liczba byłaby 1000 razy większa od szukanego wypadku, a że cecha jest o 2 mniejsza od 0, przeto jest jeszcze 100 większa, zatém 100000 razy większa; ostatecznie więc $\overline{2}$.98315 = log. 0,09620.

Z tego cośmy teraz powiedzieli, wyprowadza się takie prawidło.

Szukając logarytmu ułamku zwyczajnego właściwego, to jest, mniejszego od jedności, znajdziemy logarytmy licznika i mianownika; cechę logarytmu licznika powiększamy o tyle jedności, żeby po wykonaném odejmowaniu logarytmu mianownika od logarytmu licznika, reszta otrzymana miała za cechę, czyli całkowitą, zero. Lecz w miejsce zera piszemy za cechę liczbę dodaną do cechy logarytmu licznika, nad którą piszemy znak (—). Następnie szukamy pomiędzy logarytmami najwyższych liczb, logarytmu otrzymanego, nie *zważając na cechę, obok którego znajdziemy liczbę; przed tą liczbę wypiszemy tyle zer, ile cecha ze znakiem (—) zawiera jedności, i jedno z tych zer po lewéj ręce położone, na całkowitę przecinkiem odetniemy.*

268. Wziąwszy powyższy przykład, mamy log. $\frac{225}{2339}$ $=$ log. 225 — log. 2339, czyli, log. $\frac{225}{2339} = 2.35218 - 3.36903$. Ażeby naznaczone odejmowane uskutecznić można, potrzeba cechę logarytmu piérwszego powiększyć o tyle, żeby od niego dał się odjąć logarytm drugi: powiększywszy cechę 2 o 10, będziemy mieli $12.35218 - 3.36903 = 8.98315$; lecz ponieważ 10 jest logarytmem liczby 10000000000, zatém 12.35218 jest logarytmem liczby 2250000000000, a następnie 8.98315 jest logarytmem liczby 10000000000 większéj od danego ułamku $\frac{225}{2339}$: oczywistą więc jest rzeczą, że dla otrzymania szukanego wypadku, potrzeba iloraz odpowiadający logarytmowi 8.98315, podzielić przez 10000000000, a zatém od 8.98315 odjąwszy 10, znajdziemy logarytm szukanego wypadku. Gdybyśmy z tém ostatniem działaniem postąpili podług prawidła w poprzedzającym numerze ustanowionego, znaleźlibyśmy ten sam wypadek, to jest $\bar{2}.98316$. Jednakże tak się nie postępuje, ale owszem zatrzymawszy na wypadek 8.98315, szukamy między logarytmami, nie zważając na cechę, logarytmu 98315; obok niego znalezioną liczbę wypisawszy, napiszemy przed nią dwa zera, to jest, tyle ile jedności do 8 dodać potrzeba dla otrzymania 10, z których to zer jedno od lewéj ręki odcinamy na całkowitą. *W ogóle, kiedy odejmowanie logarytmów uskutecznić się nie daje, powiększa się cecha logarytmu, od którego drugi ma być odjęty o 10, dopiéro uskuteczniwszy naznaczone odejmowanie, szukamy liczby odpowiadającéj części dziesię-*

tnéj logarytmu wypadkowego, nie zważając na jego cechę; następnie przed tą znalezioną liczbą po lewéj ręce piszemy tyle zer, ile cesze otrzymanego logarytmu brakuje jedności do dopełnienia jéj do 10; nareszcie piérwsze zero po lewéj ręce odcinamy na całkowitą.

Dajmy np. że miéć chcemy logarytm ułamku $\frac{22,5}{2339}$. Ponieważ log. 22,5 = 1.35218 (num. 260), dodawszy do niego 10, będziemy mieli 11.35218—3.36903 = 7.98315, logarytm danego ułamku, którego cecha 7 pokazuje, że przed znalezioną liczą, odpowiadającą części dziesiętnéj logarytmu, potrzeba napisać trzy zera.

Uwaga. Tego sposobu prawie wyłącznie używa się w zastosowaniach logarytmów, mianowicie do obliczań inżenierskich. Z powodu cech, które tu są dopełnieniami cechy właściwéj do liczby 10, nie może zachodzić żadna pomyłka, bowiem natura zadania i liczby w niego wchodzące, dostatecznie ostrzegają, że cechy otrzymane są rzeczywiście dopełnieniami cechy prawdziwéj do liczby 10, czyli że cechy te są o 10 większe od cechy właściwéj. Dogodność tego sposobu, jak to wkrótce zobaczymy, na tém polega, że dopiero po skończonych działaniach, od ostatniego wypadku odejmujemy owe 10, o które cecha ułamku jest większa od cechy prawdziwéj logarytmu tegoż ułamku.

269. Logarytmy ułamków dziesiętnych wynajdują się podług téj saméj zasady jak logarytmy zwyczajnych ułamków. Szukając logarytmu liczby 0,2295 = $\frac{2295}{10000}$, mamy log. 0,2295 = log. 2295 — log. 10000, czyli log. 2295 = 3.36078 — 4; log. 2295 powiększywszy o 10, będziemy mieli 13.36078 — 4 = 9.36078; skąd widzimy, że część dziesiętna logarytmu liczby 0,2295 jest ta sama co logarytmu liczby 2295. Z tego więc cośmy teraz otrzymali wyprowadzamy to prawidło. *Część dziesiętna ułamku dziesiętnego jest ta sama co liczby złożonéj ze znaków ułamku po opuszczeniu zer po lewéj ręce przed znakami składającemi ułamek położonych, cecha zaś tego ułamku (raczéj dopełnienie téj cechy) jest liczba o tyle jedności mniejsza od 10, ile zer stoi przed znakiem piérwszym ułamku dziesiętnego.* Tak np. log. 0.002295 = 7.36078; to jest, ponieważ są trzy zera przed znakiem piérwszym ułamku, zatém cecha jest 10 — 3 = 7, część zaś dziesiętna logarytmu jest ta sama co część dziesiętna liczby 2295.

Chcąc przeto miéć logarytm ułamku dziesiętnego, nie zważając na zera przed znakami stojące, szukamy logarytmu liczby całkowitéj złożonéj ze znaków ułamku, a przed częścią dziesiętną tego logarytmu piszemy za cechę liczbę o tyle jedności mniéjszą od 10, ile było zer przed piérwszym znakiem w ułamku.

270. Teraz pokażemy, jak się znajduje liczba odpowiadająca danemu logarytmowi.

Chcąc mieć liczbę odpowiadającą logarytmowi 2.36305, nie zważając na cechę, pomiędzy logarytmami z cechą 3 szukamy logarytmu mającego część ułamkową danego logarytmu; obok znalezionego logarytmu mamy liczbę 2307; lecz że cecha danego logarytmu jest 2, przeto w otrzymanéj liczbie odciąwszy na całkowite trzy znaki, znajdziemy 230,7 liczbę szukaną. Gdyby w danym logarytmie cecha była 3, liczba odpowiadająca mu byłaby liczba znaleziona, to jest, 2307.

Gdyby zaś cecha danego logarytmu była 4, 5 i t. d., do znalezionéj liczby 2307, dodalibyśmy na końcu, to jest, po prawéj ręce, jedno, dwa i t. d. zer.

W ogólności, mając dany logarytm, jeżeli część jego ułamkowa znajduje się w tablicach, wypisujemy liczbę obok niego położoną, poczém, na całkowite odcinamy więcéj o jeden znak niżeli jest jedności w cesze danego logarytmu; jeśli zaś cecha jego jest większa od cechy logarytmu znalezionego w tablicach, do liczby znalezionéj dodaje się na końcu tyle zer, o ile jedności cecha danego logarytmu jest większa od cechy logarytmu znalezionego w tablicach (num. 259 i 260).

Kiedy dany logarytm nie znajduje się w tablicach, postąpimy w następujący sposób. Dajmy, że chcemy znaleźć liczbę odpowiadającą logarytmowi 2.36688; nie zważając na cechę, szukając logarytmu mającego część ułamkową danego logarytmu, natrafiamy na dwa logarytmy, między któremi dany jest zawarty, to jest, między 3.36680 odpowiadającym liczbie 2327, i 3.36698 odpowiadającym liczbie 2328; zatém liczba szukana jest zawarta między liczbami 2327 i 2328, różniącemi się o 1. Znalazłszy powyższe logarytmy, widzimy w kolumnie różnic, różnicę 18; ułożymy więc taki równomian. *Ma się różnica znalezionych logarytmów*, jak tu, 18, *do różnicy zachodzącéj między logarytmem danym a bezpośrednio mniejszym od niego*, to jest, $3.36688 - 3.36680 = 8$, *jak się ma różnica między liczbami znalezionemi w tablicach*, to jest; $2327 - 2328 = 1$, *do różnicy między szukaną liczbą a liczbą od niéj mniéjszą* 2327. W powyższym przykładzie mamy:

$$18:8::1:x, \text{ skąd } x = \tfrac{8}{18} = 0{,}44...$$

Różnicę znalezioną dopisawszy do liczby mniejszéj 2327, *bez żadnego odcięcia jéj od całkowitych, będzie* 232744; *dopiéro w tak znalezionéj liczbie odciąwszy, stosownie do cechy danego logarytmu*, jak w naszym przykładzie, *trzy* *znaki, na całkowite, otrzymamy* liczbę odpowiadającą logarytmowi danemu, 232,744. Gdyby cecha danego logarytmu była 5, liczba odpowiadająca mu byłaby 232744.

Uwaga. Tym sposobem znaleziona liczba odpowiadająca logarytmowi nieznajdującemu się w tablicach, jest dokładna tylko wtedy, kiedy poprzestajemy na jednoznakowéj liczbie, znalezionéj z powyższego równomianu; im zaś więcéj znaków weźmiem w wartości czwartego wyrazu powyższego równomianu, tém większy popełniamy błąd. Dla tego téż, nie radzimy więcéj nad dwa znaki dla x otrzymywać.

Liczba odpowiadająca logarytmowi mającemu cechę odjemną, lub téż jakąkolwiek liczbę dodatną, lecz kiedy wiemy że taż szukana liczba jest ułamkiem, wyszukuje się zupełnie tym samym sposobem jak liczba całkowita; tylko przed znalezioną liczbą kładzie się tyle zer, ile zawiera jedności cecha odjemna, albo w drugim razie, ile jedności brakuje cesze do do 10, z których piérwsze odcina się na całkowitą. Np. logarytmowi $\overline{3}.36688$, odpowiada liczba 0,00232744; podobnież, logarytmowi 8.36688 odpowiada liczba 0,0232744.

Postępując podług przepisów w tym rozdziale podanych, nigdy nie otrzymuje się, na ostatni wypadek, logarytmów odjemnych; gdybyśmy wszakże napotkali logarytm odjemny, znajdziemy odpowiadającą mu liczbę w następujący sposób. *Logarytm odjemny odejmujemy od liczby całkowitéj takiéj, żeby na resztę wypadł ułamek z całkowitą zero; nie zważając na cechę, szukamy liczby odpowiadającéj logarytmowi wypadłemu z odejmowania, przed którą piszemy tyle zer, ile jedności zawiera liczba, od któréj odejmowaliśmy dany logarytm odjemny; z tych zer piérwsze odcinamy na całkowitą.* Na przykład: żeby znaleźć liczbę odpowiadającą logarytmowi — 1.00423, ten logarytm odejmiemy od liczby 2, skąd na resztę otrzymamy 0.99577; szukając liczby odpowiadającéj temu wypadkowemu logarytmowi, znajdziemy 9903, zatém liczba odpowiadająca logarytmowi danemu — 1.00423, jest 0,09903.

271. Pokażemy teraz układ i użycie tablic logarytmowych Calleta. Tablice Calleta złożone są ze cztérnastu kolumn z góry na dół idących. Znaczenie i użycie dwóch piérwszych na końcu pokażemy. Trzecia kolumna z nagłówkiem *N* obejmuje liczby, porządkiem po sobie idące, tak wszakże napisane, że liczby na zero i na pięć kończące się są wszystkiemi znakami wyrażone, liczb zaś pośrodku takowych znajdujących się, są wypisane tylko dwa ostatnie znaki, zatém dwa znaki liczby nad niemi będącéj powtarzają się. Na przykład, szukając liczby 1664 szukamy pod liczbą 1660 liczby 64, przed którą położywszy dwa znaki z liczby 1660, to jest 16, mamy liczbę 1664. W następnych dziesięciu kolumnach, oznaczonych nagłówkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, umieszczone logarytmy, bez cech, to jest, same dziesiętne części logarytmów, tak są ułożone. W kolumnie oznaczonéj nagłówkiem 0 widzimy liczby złożone z siedmiu znaków, których trzy piérwsze znaki są w pewnéj odległości od pozostałych cztérech; następne liczby są złożone ze cztérech znaków; trzy piérwsze znaki połączone ze cztérema obok nich lub pod niemi położonych, stanowią logarytmy liczb, obok w kolumnie N położonych, lub 10 razy większych, to jest, z dopisaniem do nich po lewéj ręce zera w nagłówku położonego. Tak np. obok liczby 1669, w następnéj kolumnie widzimy liczbę 4563, napisawszy przed nią trzy piérwsze znaki nad nią znajdujące się 222, znajdziemy 2224563, część ułamkową logarytmu liczby 1669 lub 16690. W kolumnach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 są liczby cztéroznakowe, które wypisawszy obok trzech piérwszych znaków kolumny w nagłówku 0, znajdziemy część ułamkową logarytmu liczby odpowiedniéj w kolumnie N wypisanéj, z dołączeniem jéj na końcu liczby nagłówka; tak np. logarytm liczby 16627 znajdziemy, napisawszy obok 220 w następnéj kolumnie cokolwiek wyżéj napisanych nad liczbą 1662, cztéry znaki 8139, położone w kolumnie oznaczonéj liczbą 7, w wierszu tym samym, w których znajduje się liczba 1662; będzie więc log. 16627 = 4.2208139.

W ostatniéj kolumnie oznaczonéj nagłówkiem *dif. et p.* co znaczy, *różnice i części równomienne* (proporcyonalne), widzimy pomniejsze kolumny; nad każdą z tych kolum wypisane liczby większemi znakami, są różnicami logarytmów po sobie idących, położonych w tym samym wierszu co téż różnice; np. w wierszu liczby 1626, różnice logarytmów liczb 16260 i 16261, jest 267, która téż na czele swéj kolumny jest położona. W tych kolumnach, po lewéj ręce wypisane są różnice liczb, po prawéj zaś równomienne części logarytmów.

Dla łatwiejszego szukania logarytmów liczb i odwrotnie, u spodu stronnicy jest taki sam nagłówek jak na jéj wierzchu.

Jeszcze i to dodać musimy, że w tych tablicach logarytmy liczb od 1 do 1200 są wyrażone w ośmiu znakach, i że liczby te idą po sobie tak jak w logarytmach Lalanda, któreśmy już poznali.

W tablicach Calleta dla tego nie ma wyrażonych cech, że te, mając liczbę, każdy dopisać może (259).

272. Logarytm liczby, np. 16338, jako téż liczb 16,338 i 163380, znajdziemy tak: nie zważając na przecinek, jeżeli jest, bierzemy tylko cztéry żnaki z danéj liczby, to jest 1633, poczem w kolumnie N szukamy liczby 1630, pod którą znajdziemy liczbę 33; w następnéj kolumnie 0, nad liczbą 1630 znajdujemy trzy znaki 212 logarytmu, które wypisawszy posuniemy palec po wierszu liczby 33 aż do kolumny z nadgłówkiem 8, to jest, ostatniego znaku danéj liczby, i znalezione cztéry znaki obok trzech już otrzymanych 212, wypisawszy po lewéj ręce, otrzymamy logarytm szukany. Kiedy, jak w naszym przykładzie, w wierszu liczby 33 a kolumnie 8, nie ma żadnego znaku, wtedy trzy piérwsze znaki kolumny 0, bierzemy niżéj pod liczbą 33, to jest 213 i obok nich wypisujemy cztéry znaki z kolumny 8, położone w tym samym wierszu co trzy piérwsze znaki, to jest, 213. Zatém dopisawszy cechy, będziemy mieli, log. 16338 = 4.2131989, log. 16,338 = 1.2131989, log. 163380 = 5.2131989.

Dajmy, że chcemy mieć logarytm liczby większéj od 108000, np. liczby 1672372. Od téj liczby odciąwszy dwa ostatnie znaki 72, pozostałéj liczby 16723, jako znajdującéj się w tablicach, znajdziemy, podług powyższego wskazania, logarytm 2233142. Potém posunąwszy palcem po wierszu liczby 72 aż do kolumny różnic, natrafimy na kolumnę, któréj początek najbliżéj tego wiérsza jest położony; w naszym przykładzie ta kolumna ma na czele liczbę 260; w téj kolumnie szukamy po lewéj ręce liczby piérwszéj z odciętych od danéj liczby, jak tu 7; obok téj liczby położoną liczbę 182 podpiszemy pod logarytmem poprzednio znalezionym; następnie szukamy drugiego znaku 2 odciętéj liczby 72, obok niego znajdziemy liczbę 26, tę również pod logarytmem podpisujemy, lecz występujemy o jeden znak na prawą rękę; nareszcie tak wypisane części równomienne pod logarytmem, dodają się do niego, tak jak pokazuje wzór:

$$
\begin{array}{r}
2233142 \\
182 \\
26 \\
\hline
22333266;
\end{array}
$$

ponieważ logarytmy mamy w siedmiu znakach, zatém zbywające znaki nad siedm odrzucają się, jeżeli warte są mniéj niż 5, jeśli zaś więcéj, ostatni znak logarytmu powiększa się o 1. Podług tego, dołączywszy cechę (n. 259) mamy log. 1672372 = 6.2233327.

273. Mając dany logarytm, znąjdujemy odpowiadającą mu liczbę, w następujący sposób.

Kiedy logarytm znajduje się w tablicach, na przykład 2.2214403; w kolumnie 0 szukamy trzech piérwszych znaków, nie zważając na cechę, następnie w dalszych kolumnach szukamy znaków 4403; nad temi znakami widzimy w nagłówku znak 1, który będzie ostatnim liczby szukanéj; zaś w wiérszu tych znaków 4403, w kolumnie N widzimy liczbę 1665; więc liczba odpowiadająca danemu logarytmowi, mając wzgląd na cechę, jest 166,51.

Kiedy dany logarytm, np. 2236296, nie znajduje się w tablicach, wtedy tak postąpić należy. W kolumnie 0 znalazłszy trzy piérwsze znaki 223, w dalszych szukamy cztérech następujących; lecz znajdujemy tylko 6257 i zaraz następujące 6517. Od danego logarytmu 2236296 odjąwszy logarytm 2236257, znajdziemy resztę 39; następnie posunąwszy palcem po wierszu liczby 6257 do kolumny różnic, natrafimy na kolumnę oznaczoną liczbą naczelną 260; w téj kolumnie, po prawéj ręce, szukając liczby 39, lub, jeśli jéj nie ma, mniejszéj bezpośrednio, znajdziemy liczbę 26, obok któréj położone po lewéj ręce 1 piszemy na końcu liczby odpowiadającéj logarytmowi 2236257, która jest, 16735, skąd otrzymamy 167351;

liczbę 26 w kolumnie będącą odjąwszy od różnicy 39, otrzymamy resztę 13, do któréj dopisawszy zero, będzie 130; szukając téj liczby w kolumnie téj saméj, to jest oznaczonéj liczbą 260, obok tych 130 znajdziemy liczbę 5, którą do poprzedzającéj liczby 167351 dopisawszy, znajdziemy 1673515. Stosownie do cechy danego logarytmu odetniemy na całkowite pewną liczbę znaków.

Gdybyśmy w kolumnie oznaczonéj liczbą 260, nie znaleźlibyli liczby 130, bylibyśmy wzięli liczbę bezpośrednio mniejszą, wypisali liczbę obok takowéj po lewéj ręce położoną, liczbę mniejszą od 130 odjęlibyśmy od tychże 130 i do otrzymanéj reszty dopisawszy zero, daléj postąpilibyśmy jak z poprzedzającą resztą 130. Wszelako, z powodów już nam znanych, więcéj nad trzy znaki, tym sposobem, szukać nie wypada.

Uwaga. Cokolwiek powiedzieliśmy w num. 262 i następnych, o logarytmach ułamków zwyczajnych i dziesiętnych, jest ogólne i stosuje się do użycia wszelakich tablic logarytmowych.

274. Liczby odjemne, to jest, poprzedzone znakiem (—), nie mają logarytmów; jeżeli przeto w mnożenie, dzielynie i t. p., wchodzą liczby odjemne, uważamy je za dodatne, lecz na końcu ich logarytmów piszemy znak (—), dla przypomnienia że logarytmy te należą do liczb odjemnych. Jeżeli liczba znaków (—) jest nieparzysta, wtedy po logarytmie wypadkowym piszemy znak (—), a liczba odpowiadająca mu jest odjemna. Jeżeli zaś liczba znaków jest parzysta, wtedy logarytm wypadkowy pisze się bez żadnego znaku, a odpowiadająca mu liczba, jest dodatna. Dajmy że mamy znaleźć za pomocą logarytmów iloczyn: $23 \times -7 \times 147$; znalazłszy logarytmy tych czynników i wypisawszy je pod sobą, będzie:

$$\begin{aligned} \log.\ 23 &= 1.3617278 \\ \log.\ 7 &= 0.8450981\ (-) \\ \log.\ 147 &= \underline{2.1673173} \\ & \quad 4.3741432\ (-); \end{aligned}$$

ten logarytm odpowiada liczbie — 23667.

275. Pozostaje nam jeszcze pokazać użycie dwóch najpiérwszych kolum w tablicach Caleta, oznaczonych nagłówkami O^d i np. 4^d, mających związek z kolumną oznaczoną nagłówkiem N; służą one do zamiany stopni lub godzin i minut na sekundy. W kolumnie piérwszéj, zaraz pod nagłówkiem widzimy tu 27′ (minut), które czynią sekund 1620, w tym samym wierszu w kolumnie N napisane. Dajmy teraz, że chcemy zamienić 27′ 54″ na sekundy. W piérwszéj kolumnie szukam liczby 50, a w czwartym wierszu od téj liczby, w kolumnie N znajduję liczbę 1674″ = 27′54″.

Kolumna druga służy do zamiany stopni, minut i sekund na sekundy. Dajmy, że chcemy zamiunić 4°36′47″ na sekundy. Szukamy w kolumnie drugiéj nagłówka 4°, pod nim większemi liczbami wypisany nagłówek 36′, a pod tą liczbę 40; nakoniec w wierszu téj liczby w kulumnie N znajdujemy liczbę 1660, do któréj dopisawszy na końcu liczbę 7″, będzie 16607″ = 4°36′47″.

KILKA PRZYKŁADÓW ZASTOSOWANIA LOGARYTMÓW.

I. Obliczyć procent od summy 15718,74 rubli po $5\frac{2}{5}$ %, za pośrednictwem logarytmów.

Procent szukany jest:

$$100 : 5\tfrac{2}{5} :: 15718{,}74 : x.$$

$$\text{skąd } x = \frac{5\frac{2}{5}\times 15718{,}74}{100} = \frac{27\times 157{,}1874}{5}.$$

ROZWIĄZANIE.

$$\begin{array}{rl} \log. 27 = & 1.4313638 \\ \log. 157{,}1874 = & 2.1963973 \\ & 194 \\ & 11 \\ \text{dop. } \log. 5 = & 9.3010300 \\ \hline \log. x = & 2.9288116 \\ & 05 \\ \hline & 11 \end{array}$$

więc $x = 848$ rub. i 81 kop.

Objaśnienie działania. Pod logarytmem w wiérszu log. 157,1874, wypisane są części równomienne wzięte z kolumny ostatniéj, czyli części równomiennych, podług num. 273 znalezionych. Pod logarytmem szukanym x, dwa znaki położone, są ostatniemi znakami logarytmu w tablicach znajdującego się, którego pięć piérwsze są te same co logarytmu liczby x, pod temi znakami znajdujące się 11, są różnicą logarytmów, znalezionego z działań i znajdującego się w tablicach. Liczba $x = 848{,}81$, w któréj dalsze znaki są opuszczone, składa się z liczby odpowiadającéj logarytmowi 2.9288105, i z liczby równomiennéj 22 odpowiadającéj różnicy logarytmów 11, znajdującéj się w odpowiedniéj kolumnie różnic.

II. Za pomocą logarytmów obliczyć $\sqrt[3]{\frac{0{,}15 \times 42{,}01}{1{,}17}}$.

$$\log. \sqrt[3]{\frac{0{,}15 \times 42{,}01}{1{,}17}} = \tfrac{1}{3}, \ \log. \frac{0{,}15 \times 42{,}01}{1{,}17} =$$

$$\tfrac{1}{3} \times (\log. 0{,}15 + \log. 42{,}01 + \text{dop. } \log. 1{,}17 - 10)$$

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\begin{array}{rll} \log.\ 0{,}15 & = 9.1760913 & \\ \log.\ 42{,}01 & = 1.6233527 & \\ \text{dop. } \log.\ 1{,}17 & = 9.9318141 & 0.0681859 = \log.\ 1{,}17 \\ \log.\ \frac{0{,}15\times42{,}01}{1{,}17} & = 0.7312581 & \\ \frac{1}{3}\times\log.\ \frac{0{,}15\times42{,}01}{1{,}17} & = 0.2437527 & \\ & \quad\quad\quad\ \ 324 & \\ & \quad\quad\quad\ \ 202 & \end{array}$$

$$\text{więc } \sqrt[3]{\frac{0{,}15\times42{,}01}{1{,}17}} = 1{,}75288.$$

Objaśnienie działania. Logarytm liczby 0,15 ma cechę 9, (n. 268); zamiast odejmować log 1,17, dodaliśmy jego dopełnienie. Z wykonanego działania otrzymaliśmy logarytm z cechą 20; lecz ponieważ cecha logarytmu liczby 0,15 była dopełnieniem do 10, jako też dopełnienie Log. 1,17 było do 10, zatém od tego ogółu odtrąciliśmy 20, i dla tego to logarytm wypadły z dodawania ma cechę zero. Szukając logarytmu 0.2437527, natrafiamy na logarytm bezpośrednio mniejszy, to jest 2437324, którego niezgadzające się trzy ostatnie znaki podpisaliśmy pod logarytmem wypadkowym. Odjąwszy te trzy znaki od trzech wyżéj napisanych, znaleźliśmy różnicę 203. W kolumnie różnic, położonéj naprzeciw liczby 17528 odpowiadającéj logarytmowi 2437324, szukając po prawéj stronie liczby 203, znaleźliśmy bezpośrednio mniejszą 198, któréj odpowiadającą część równomienną 8 napisaliśmy na końcu znalezionéj liczby, i otrzymaliśmy, zważając na cechę, liczbę 1,75288. Gdyby potrzeba było doprowadzić wypadek do więcéj znaków dziesiętnych, postąpilibyśmy podług num 272; gdyby zaś można było poprzestać na trzech znakach w ułamku dziesiętnym, wtedy nie potrzeba szukać części równomiennéj, lecz za wypadek wziąść liczbę odpowiadającą logarytmowi 2437324, to jest 17528, a opuszczając 8 na końcu położone, liczbę przed nią stojącą 2 powiększymy o 1; byłoby więc 1,753.

III. Za pomocą logarytmów obliczyć $\sqrt[3]{\frac{0,15\times4,201}{1,17}}$.

Postąpiwszy tak jak w poprzedzającym przykładzie, od którego obecny różni się tylko czynnikiem jednym, i to w tém, że tam tenże czynnik jest 42,01, tu zaś 4,201, mamy:

$$\begin{aligned} \log.\ 0.15 &= 9.1760913 \\ \log.\ 4,201 &= 0.6233527 \\ \text{dop. } \log.\ 1,17 &= 9.9318141 \\ \hline \log.\ \frac{0,15\times4,201}{1,17} &= 19.7312581. \end{aligned}$$

Dla téj saméj przyczyny jak w poprzedzającym przykładzie, powinniśmy od ogółu otrzymanego 19.7312581 odjąć 20, czego ponieważ uczynić nie można, postąpimy następującym sposobem. Zważając że powyższy logarytm ma być jeszcze podzielonym przez 3, żeby po ukończoném dzieleniu można odjąć całkowite 10, potrzeba do cechy, w któréj już znajduje się dwa razy po 10, dodać jeszcze jedno 10, i dopiéro uskutecznić dzielenie; co uczyniwszy, będzie $\frac{1}{3}\times\log.\frac{0,15\times4,201}{1,17} = \log.\sqrt[3]{\frac{0,15\times4,201}{1,17}} = \frac{29.7312581}{3}$ $= 9.9104193$. Od tego logarytmu należałoby, odjąć 10, co gdy uskutecznić nie można, pozostawiamy go takim jak jest, a cecha 9 ostrzega nas, że szukany wypadek jest ułamkiem z całkowitą zero. Nie zważając na cechę, wyszukawszy logarytm powyższy, znajdziemy że 9.9104193 $=$ log. 0,8136155....

Ten sam przykład rozwiązując sposobem podanym w numerze 267; tak postąpimy:

$$\sqrt[3]{\frac{0,15\times4,201}{1,17}}=\sqrt[3]{\frac{15}{100}\times\frac{4201}{1000}\times\frac{100}{117}}=\sqrt[3]{\frac{15\times4201}{117000}};\text{ zatém:}$$

$$\log.\sqrt[3]{\frac{15\times4201}{117000}}=\tfrac{1}{3}\times(\log.15+\log.4-201\log.117000);$$

albo $\frac{1}{3}\times(1.1760913+3.6233527-5.0681859)$,

czyli $\frac{1}{3}\times(4.7994440-5.0681859)=\frac{4.7994440}{3}-\frac{5.0681859}{3}$

$=1.5998146-1.6893953=\bar{1}.9104193.$

Uwaga. Porównywając oba podane sposoby, widzimy że ostatni wymaga więcéj zachodu. Dla tego téż tylko piérwszego używają inżenierowie.

ZASTOSOWANIE LOGARYTMÓW DO ROZWIĄZANIA PYTAŃ DOTYCZĄCYCH SIĘ POSTĘPÓW, JAKO TÉŻ PROCENTÓW SKŁADANYCH, WKŁADEK RÓWNORATOWYCH I UMORZENIA DŁUGÓW.

276. W poprzedzających zastosowaniach używaliśmy logarytmów Calleta, w następujących użyjemy logarytmów Lalanda.

I. *Mając wyraz piérwszy 2, wyraz 128 stojący na siódmém miejscu postępu ilorazowego, znaleźć wykładnik tegoż postępu.*

Podług numeru 247, oznaczywszy wykładnik szukany przez x, mamy, $x=\sqrt[6]{\frac{128}{2}}=\sqrt[6]{64}$, zatém,

$\log.\sqrt[6]{64}=\frac{\text{Log. }64}{6}=\frac{1.80618}{6}=0.90103$, zatém $x=2$.

II. *Znając wyraz piérwszy 3 postępu ilorazowego, wykładnik jego 2, i wyraz 3072, położony na niewiadomém miejscu. znaleźć to miejsce.* Podług numeru 250, oznaczywszy to szukane miejsce przez x, mamy:

$2^{x-1} = \frac{3072}{3} = 1024$; więc log. $2^{x-1} =$

$(x-1) \times \log. 2 = \log. 1024$; następnie $x - 1 = \frac{\log. 1024}{\log. 2} =$

$\frac{3.01030}{0.30103} = 10$; zatém $x = 11$.

277. Kiedy od wypożyczonéj summy na pewien przeciąg czasu pobiéramy procent nie tylko od téj summy ale i od przypadających co termin procentów, wtedy umieściliśmy tę summę na *procent składany* (сложные проценты). Zajmiemy się teraz wynalezieniem wzoru na obliczenie sum przypadających po pewnym czasie, za summy umieszczone na procencie składanym.

Dajmy stopę procentu 5, i szukajmy ile 1 rubel, lub jedność jakiéjkolwiek monety, uczyni za lat 10. Ponieważ mamy 5 od 100, więc od jednego rubla mamy 0,05; zatém po roku za 1 rubel weźmiemy $1 + 0,05$, czyli 1,05. Kapitał więc umieszczony na procencie z początkiem drugiego roku jest 1,05, a że od jednego rubla procent jest 0,05, więc od rubli 1,05, procent jest $1,05 \times 0,05 = 0,0525$, do którego dodawszy kapitał 1,05, będzie kapitał wraz z procentem na końcu drugiego roku 1,1025 czyli $(1,05)^2$, o czém się łatwo przekonać można.

Ta summa $(1,05)^2$ będąc umieszczoną na procencie na początku roku trzeciego, daje procentu $(1,05)^2 \times 0,05 = 0,055125$, do którego dodawszy kapitał 1,1025, otrzymamy kapitał wraz z procentem na końcu trzeciego roku $1,157625 = (1,05)^3$.

Mamy więc z początkiem czwartego roku kapitał $(1,05)^3$, od którego procent jest $1,157625 \times 0,05 = 0,05788125$, do którego dodawszy kapitał 1,157625, otrzymamy kapitał wraz z procentem na końcu czwartego roku $1,21550625 = (1,05)^4$. Ponieważ 1 rubel czyni:

na końcu 1^{go} roku $(1{,}05)$
2^{go} $(1{,}05)^2$
3^{go} $(1{,}05)^3$
4^{go} $(1{,}05)^4$
więc 5^{go} $(1{,}05)^5$
6^{go} $(1{,}05)^6$

i t. d., więc nareszcie
na końcu 10^{go} roku $(1{,}05)^{10}$

Dajmy teraz, że mamy obliczyć kapitał wraz z procentem składanym po 5%, za lat 10, mając pierwotny kapitał 4285 rubli. Ponieważ za 1 rubel po 10 latach mamy $(1{,}05)^{10}$, więc za 4285 rubli będzie $4285\times(1{,}05)^{10}$.

Z tego co poprzedziło wyprowadzamy takie prawidło. *Kapitał wraz z procentem składanym po danéj liczbie lat, równa się danemu pierwotnemu kapitałowi, pomnożonemu przez kapitał 1 wraz z jego rocznym procentem, podniesiony do potęgi równéj liczbie lat, przez które kapitał dany zostawał na procencie składanym.*

Obliczmy teraz powyższe zadanie. Oznaczywszy szukaną summę przez x, będzie $x = 4285\times(1{,}05)^{10}$; zatém, $\log x = \log. 4285+10\times\log. 1{,}05$.

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\log. 4285 = 3.63195$$
$$10 \times \log. 1{,}05 = 0.21190$$
$$\log. x = 3.84385$$
$$x = 6980$$

Mając 6980 kapitał wraz z procentem za lat 10, po 5% znaleźć kapitał pierwotny, to jest wypożyczony.

W powyższe wyrażenie położywszy za x summę 6980, a zamiast 4285 wstawiwszy x, będziemy mieli;

$x \times (1{,}05)^{10} = 6980$; ilości równe podzieliwszy przez $(1{,}05)^{10}$, znajdziemy:

$$x = \frac{6980}{(1{,}05)^{10}}:$$

skąd widziemy, *że pierwotny kapitał równa się kapitałowi wraz z procentem, podzielonemu przez potęgę równą liczbie lat z jedności powiększonéj stopą procentu od téjże jedności.*

Powyższego wyrażenia wziąwszy logarytmy, mamy:

$$\log.\ x = \log.\ 6980 + \text{dop.}\ 10 \times \log.\ (1{,}05).$$

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\begin{aligned} \log.\ 6980 &= 3.84385 \\ \text{dop.}\ 10 \times \log.\ (1{,}05) &= 9.78810 \\ \hline \log.\ x &= 3.63195 \\ x &= 4285 \end{aligned}$$

Z wyrażenia $x = 4285 \times (1.05)^{10}$, gdyby stopa procentu była niewiadoma, kapitał zaś wraz z procentem był 6980, mielibyśmy:

$$6980 = 4285 \times x^{10},$$

skąd,

$$x^{10} = \tfrac{6980}{4285};$$

wziąwszy logarytmy, będzie:

$$10 \times \log.\ x = \log.\ 6980 + \text{dop.}\ \log.\ 4285,$$

a następnie:

$$\log.\ x = \frac{\log.\ 6980 + \text{dop.}\ \log.\ 4285}{10}.$$

WZÓR DZIAŁANIA.

$$\begin{aligned} \log.\ 6980 &= 3.84385 \\ \text{dop.}\ \log.\ 4285 &= 6.36805 \\ \hline 10 \times \log.\ x &= 0.21190 \\ \log.\ x &= 0.02119 \\ x &= 1{,}05, \end{aligned}$$

zatém stopa procentu od jednego jest 0,05, a następnie 5%.

Widzimy więc, że *logarytm jedności powiększonéj stopą procentu od téjże jedności, jest równy różnicy logarytmów kapitału pierwotnego i kapitału wraz z procentem składanym za dane lata, podzielonéj przez liczbę lat.*

Gdybyśmy mieli dane: kapitał pierwotny 4285, stopę procentu 5%, i kapitał wraz z procentem 9680; lata po których dany kapitał zamienił się na końcowy, znajdziemy z wyrażenia: $x^{10} = \frac{6980}{4285}$, w którém za 10 położymy x a 1,05 w miejscu x, będzie więc:

$$(1{,}05)^x = \tfrac{6980}{4285}:$$

a wziąwszy logarytmy, otrzymamy:

$$x \times \log. 1{,}05 = \log. 6980 + \text{dop. log. } 4285,$$

skąd $x = \dfrac{\log. 6980 + \text{dop. log. } 4285}{\log. 1{,}05}$.

Więc *liczba lat równa się różnicy logarytmów kapitałów pierwotnego i końcowego, podzielonéj przez logarytm jedności powiększonéj stopą procentu od téjże jedności.*

Wykonanie wskazanego działania.

$$\begin{array}{rl} \log. 6980 = & 3.84385 \\ \text{dop. log. } 4285 = & \underline{6.36805} \\ & 0.21190, \end{array}$$

więc $x = \dfrac{0.21190}{0{,}021200} = 10$.

278. Składając na procent składany w równych odstępach czasu równe summy, po pewnym czasie urośnie summa końcowa, równa ogółowi włożonych rat i procentów składanych: to nazywamy *wkładkami równoratowemi* (Срочныя вклaдки). Kassy oszczędności równie składki emerytalne, są w pewnym względzie wkładkami ratowemi.

Wkładając co rok 1 rubel, na procent składany po 5%, przez lat 10, na końcu tych lat jaką summę otrzymamy?

Uważamy, że piérwszy rubel 10 lat jest na procencie składanym; drugi rubel lat 9; trzeci lat 8, czwarty lat 7, piąty lat 6, szósty lat 5, siódmy lat 4, ósmy lat 3, dziewiąty lat 2, nareszcie dziesiąty 1 rok; zatém podług poprzedzającego numeru mamy:

1szy rubel uczyni $(1,05)^{10}$
2gi $(1,05)^{9}$
3ci $(1,05)^{8}$
4ty $(1,05)^{7}$
i t. d. nareszcie
10ty $1,05$.

Te summy zebrawszy w ogół, otrzymamy końcową summę. Lecz przypatrzywszy się tym wartościom, widzimy że składają postęp ilorazowy, którego piérwszym wyrazem jest 1,05, wykładnikiem również taż liczba 1,05, a liczba wyrazów 10. Zatém, podług num. 251, mamy ogół wyrazów tego postępu, czyli końcową summę, którą tu przez x oznaczamy;

$$x = \frac{(1,05)^{10} \times 1,05 - 1,05}{0,05}$$

czyli, podług num. 229,

$$x = \frac{(1,05)^{11} - 1,05}{0,05} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Z tego pokazuje się oczywiście, że *końcowa summa, kiedy wkładka jest jednością, równa się jedności powiększonéj stopą procentu od téjże jedności, podniesionéj do potęgi o jeden wyższéj od liczby rat, zmniejszonéj jednością ze stopą procentu od niéj, a to wszystko podzielone przez stopę procentu od jedności.*

Powyższe wyrażenie, dla ułatwienia rachunku, tak ułożyć należy.

$$x = \frac{(1,05)^{11}}{0,05} - \frac{1,05}{0,05} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

gdzie $\frac{(1,05)^{11}}{0,05}$ oblicza się za pośrednictwem logarytmów, zaś $\frac{1,05}{0,05}$ można policzyć bez użycia logarytmów.

Dajmy teraz, żeśmy wnosili raty po 315 rubli, przez lat 10 po 5%; przez tę summę pomnożywszy końcową summę uczynioną przez 1 rubel, będziemy mieli końcową summę z rat po 315 rubli; będzie więc z wyrażenia (1).

$$x = 313 \times \left(\frac{(1,05)^{11} - 1,05}{0,05} \right) \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

albo z wyrażenia (2)

$$x = 315 \times \frac{(1,05)^{11}}{0,05} - 315 \times \frac{1,05}{0,05} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Obliczmy to ostatnie wyrażenie. Na sam przód mamy $\frac{1,05}{0,05} = 21$, zatém $315 \times \frac{1,05}{0,05} = 21 \times 315 = 6615$; zaś

$\log. 315 \times \frac{(1,05)^{11}}{0,05} = \log. 315 + 11 \times \log. 1,05 +$ dop. log. 0,05.

$$\log. 315 = 2.49831$$
$$11 \times \log. 1,05 = 0.23308$$
$$\text{dop. log. } 0.05 = 1.30103 \qquad \log. 0.05 = 8.69897$$
$$\log. 315 \times \frac{(1,05)^{11}}{0,05} = 4.03242.$$

$$315 \times \frac{(1,05)^{11}}{0,05} = 10775:$$

od téj liczby odjąwszy powyżéj obliczone 6615, otrzymamy końcową summę powstałą z rat po 315 rubli, 4160 rubli.

Aby po dziesięciu latach otrzymać 4160 rubli, po ile rocznie wkładać potrzeba, gdy stopa procentowa jest 5%?

W wyrażeniu (3) końcowéj summy za x położywszy końcową summę 4160, a w miejsce raty 315, niewiadomą x, znajdziemy:

$$4160 = x \times \left(\frac{(1{,}05)^{11} - 1{,}05}{0{,}05}\right),$$

zatém, podzieliwszy obie równe liczby przez

$$\left(\frac{(1{,}05)^{11} - 1{,}05}{0{,}05}\right)$$

znajdziemy:

$$x = 4160 : \left(\frac{(1{,}05)^{11} - 1{,}05}{0{,}05}\right),$$

czyli nakoniec:

$$x = \frac{4160 \times 0{,}05}{(1{,}05)^{11} - 1{,}05}.$$

Więc szukana rata równa się końcowéj summie pomnożonéj przez stopę procentu od jedności, podzielonéj przez różnicę między potęgą wyższą o 1 od liczby rat z jedności z dołączoną do niéj stopą procentu od jednego, a potęgą piérwszą téjże liczby.

W obliczeniu powyższego wyrażenia, potrzeba naprzód obliczyć z pomocą logarytmów piérwszy wyraz mianownika, potém od téj wartości odjąć drugi wyraz 1,05, dopiéro przez tak uproszczony, to jest, przywiedziony do jednéj liczby mianownik, podzielić iloczyn $4160 \times 0{,}05$.

Mając dane raty, końcową summę i stopę procentu, znajdziemy liczbę lat z wyrażenia (4); w którém w miejsce x położywszy daną summę końcową 4160, a za 11 napisawszy x, będzie:

$$4160 = 315 \times \frac{(1{,}05)^x}{0{,}05} - 315 \times \frac{1{,}05}{0{,}05};$$

a stąd,

$$4160 \times 0{,}05 = 315 \times \left((1{,}05)^x - 1.05 \right),$$

następnie:

$$(1{,}05)^x = \frac{4160 \times 0{,}05}{315} + 1{,}05,$$

$$x = \frac{\log.\left(\frac{4160 \times 0{,}05}{315} + 1{,}05 \right)}{\log.\ 1{,}05}$$

W tém wyrażeniu potrzeba naprzód obliczyć wartość $\frac{4160 \times 0{,}05}{315} + 1{,}05$, która jest 1,71; wziąwszy więc logarytmy, będzie:

$$x = \frac{\log.\ 1{,}71}{\log.\ 1{,}05} = \frac{0.23300}{0.02119} = 11;$$

zatém liczba lat jest 10.

Stąd wyprowadzamy takie prawidło. *Liczbę lat otrzymamy, podzieliwszy iloczyn z końcowéj summy i stopy procentu od jedności, przez ratę; do tego ilorazu dodawszy jedność, ze stopą procentu od téjże jedności; nakoniec podzieliwszy logarytm tak otrzymanego wypadku przez logarytm jedności z jéj stopą procentu.*

Uwaga. Raty mogą być wkładane co rok, co miesiąc, nawet co tydzień. Mając przeto stopę procentu od jedności na rok, potrzeba obliczyć stopę procentu od jedności za miesiąc, kiedy wkładki są miesięczne: W powyższym przykładzie otrzymaliśmy wartość dla x cokolwiek mniéj niż 11, lecz ponieważ raty ułamkowe być nie mogą, dla tego wzięliśmy 11 na wartość x. W ogóle, nigdy prawie podobnéj wartości nie otrzymujemy w całkowitych liczbach, bo logarytmy są także przybliżonemi wartościami. Dla tego to, jeśli ułamek dziesiętny wartości x przechodzi połowę, bierzemy go za 1, gdy zaś mniejszy jest od połowy opuszczamy go.

278. Kiedy zaciągniony dług, płacąc równemi ratami, umarzamy w pewnym przeciągu czasu, to nazywamy *umorzeniem długu* (Погашенie долговъ). Przykłady takowego umorzenia przedstawia nam Towarzystwo Kredytowe Ziemskie, od którego zaciągniony dług na posiadłość gruntową, umarza się w 25 lat, płacąc rocznie po 6% od summy wypożyczonéj. Zabezpieczenie dochodu pewnéj summy aż do śmierci, co Francuzi nazywają *Rentes viagères*, należy także do umorzenia długu. Zabezpieczenie dochodu pewnéj summy aż do śmierci, oparte jest na prawdopodobieństwie, że osoba składająca pewną summę żyć będzie tyle lat, ile potrzeba do umorzenia włożonéj przez nią summy. To prawdopodobieństwo opiera się na śmiertelności ludzi w różnych dobach życia ludzkiego; np. gdyby średnia śmiertelność osób pięćdziesiąt lat liczących, wypadła w 67 roku ich życia, byłoby 17 lat, przez które summa włożona przez pięćdziesięcioletnią osobę prawdopodobnie umorzoną będzie.

Dajmy teraz, że ktoś pożyczone 10000 rubli chce umorzyć w 25 latach, ze stopą procentu po 5%, jak wielkie raty płacić ma?

Gdyby roczna upłata wynosiła 1 rubel, uważając że piérwszą ratę płaci się po roku od zaciągniętego długu, i że od niéj liczymy składany procent, mielibyśmy podług num. 277:

1sza rata czyni $(1,05)^{24}$
2ga $(1,05)^{23}$
i t. d.
ostatnia 1;

bowiem ostatni rubel upłacony na końcu ostatniego roku nie przynosi żadnego procentu. Widzimy, że te summy czynią postęp ilorazowy, którego piérwszym wyrazem jest 1, ostatnim $(1,05)^{24}$, a wykładnik 1,05; ogół więc tych sum podług numeru 251:

$$\frac{(1,05)^{25}-1.}{0,05}$$

Lecz upłacając rocznie po rubli x, mamy ogół upłaconych rubli $\frac{(1,05)^{25}-1}{0,05}\times x$, że zaś tym sposobem wypłacimy 10000 rubli, które również uważamy jako umieszczone na procencie składanym, po téj saméj stopie procentu; będziemy więc mieli kapitał wraz z procentem składanym (num. 277), $10000\times(1,05)^{25}$; który powinien być równy kapitałowi końcowemu, więc mamy:

$$\frac{(1,05)^{25}-1}{0,05}\times x = 10000\times(1,05)^{25},$$

a stąd,

$$x=\frac{10000\times(1,05)^{25}\times 0,05}{(1,05)^{25}-1};$$

Z tego widzimy, że *rata upłaty równa się iloczynowi z pożyczonéj summy przez jedność ze stopą procentu od téjże jedności przypadającą, podniesioną do potęgi równéj liczbie lat, pomnożonemu przez stopę procentu od jedności, podzielonemu przez potęgę równą liczbie lat, z jedności powię-*

kszonéj jéj stopą procentu, od któréj to potęgi odejmuje się jedność.

Rozwiążemy teraz powyższe wyrażenie. Naprzód obliczymy mianownik.

$$\log.\,(1{,}05)^{25} = 0.52973, \text{ więc}$$
$$(1{,}05)^{25} = 3{,}386;$$

zatém $(1{,}04)^{25} - 1 = 2{,}386$, a $\log.\,2{,}386 = 0{,}37767$.

Teraz dopiéro mamy,

$$\begin{aligned} \log.\,10000 &= 4.00000 \\ \log.\,(1{,}05)^{25} &= 0{,}52973 \\ \log.\,(0{,}05) &= 8.69897 \\ \text{dop. } \log.\,2{,}386 &= 9{,}62233 \\ \hline \log.\,x &= 2.85103 \\ x &= 709{,}52. \end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

I. Za wypożyczoną summę rubli 15000 na procent składany, po stopie procentu 3%, za lat 14 ile się odbierze? (22647,08 rubli).

II. Jeden rubel wypożyczony na procent składany po 5%, za ile lat podwojonym będzie? (za 14,2 lat).

III. Płacąc co miesiąc po 5 rubli z procentem 5%, jaka wypadnie summa do odebrania po 40 latach? (8667,19 rubli).

NB. W odpowiednim wzorze potrzeba położyć stopę procentu od jedności za miesiąc; rat zaś jest 40×12.

IV. Osoba 60 lat mająca zabezpiecza sobie dochód do śmierci; na ten koniec oddaje do kassy ubezpieczeń 51079 złotych polskich; licząc po 5%, jaki dochód ta osoba mieć będzie, uważając że prawdopodobnie pożyje lat 11? (6149 złot. 7 gr.).

KONIEC.

SPROSTOWANIE POMYŁEK.

Strona.	Wierz.	Zamiast.	Czytaj.
4	6 z góry	Tasięcy	Tysięcy
8	18 —	Отвлечепиое	Отвлеченное
67	3 z dołu	Siedmdziesiątych szóstych	Siedmdziesiątych ósmych
97	2 z góry	Zwrotkowe	Zwrotowe
152	19 —	$2\times2^2=12$	$3\times2^2=12$
156	4 —	hilometr	Kilometr
162	10 —	np. □	np. 5□
164	18 —	Krużków	Krużek
—	— —	Kużek	Krużka
177	2 —	$\frac{0,30479\times7}{68}$	$\frac{0,30479\times7}{48}$
—	16 —	1424014,10	1424014,00
—	7 z dołu	2134	2135
197	3 z góry	$5.2=9.9$	$5.2=9.6$
199	7 z dołu	$11+7=10+9$	$12+7=10+9$
217	15 —	$x : 22$	$x : 32$
238	12 z góry	dedent	dédans
250	16 —	od końca	od końców
258	2 z dołu	$(2\times128)\times\frac{7}{2}$	$(2\times128)^{\frac{7}{2}}$
260	6 —	∺ 2 : 16 : 1 x ∺	∺ 2 : 16 : x ∺
264	4 —	złożoną	złożą.

Nomb	0,38′30″ Logarit.	D.	Nomb	0. 38′ 0″ Logarit	D	No b	0,38′30″ Logarit	D.
2250	3,35218		2280	3,35793		2310	3,36361	
2251	3,35238	20	2281	3,35813	20	2311	3,36380	19
2252	3,35257	19	2282	3,35832	19	2312	3,36399	19
2253	3,35276	19	2283	3,35851	19	2313	3,36418	19
2254	3,35295	19	2284	3,35870	19	2314	3,36436	18
2255	3,35315	20	2285	3,35889	19	2315	3,36455	19
2256	3,35334	19	2286	3,35908	19	2316	3,36474	19
2257	3,35353	19	2287	3,35927	19	2317	3,36493	19
2258	3,35372	19	2288	3,35946	19	2318	3,36511	18
2259	3,35392	20	2289	3,35965	19	2319	3,36530	19
2260	3,35411	19	2290	3,35984	19	2320	3,36549	19
2261	3,35430	19	2291	3,36003	19	2321	3,36568	19
2262	3,35449	19	2292	3,36021	18	2322	3,36586	18
2263	3,35468	19	2293	3,36040	19	2323	3,36605	19
2264	3,35488	20	2294	3,36059	19	2324	3,36624	19
2265	3,35507	19	2295	3,36078	19	2325	3,36642	18
2266	3,35526	19	2296	3,36097	19	2326	3,36661	19
2267	3,35545	19	2297	3,36116	19	2327	3,36680	19
2268	3,35564	19	2298	3,36135	19	2328	3,36698	18
2269	3,35583	19	2299	3,36154	19	2329	3,36717	19
2270	3,35603	20	2300	3,36173	19	2330	3,36736	19
2271	3,35622	19	2301	3,36192	19	2331	3,36754	18
2272	3,35641	19	2302	3,36211	19	2332	3,36773	19
2273	3,35660	19	2303	3,36229	18	2333	3,36791	18
2274	3,35679	19	2304	3,36248	19	2334	3,36810	19
2275	3,35698	19	2305	3,36267	19	2335	3,36829	19
2276	3,35717	19	2306	3,36286	19	2336	3,36847	18
2277	3,35736	19	2307	3,36305	19	2337	3,36866	19
2278	3,35755	19	2308	3,36324	19	2338	3,36884	18
2279	3,35774	19	2309	3,36342	18	2339	3,36903	19
2280	3,35793	19	2310	3,36361	19	2340	3,36922	19

S. 4,685 5704; V. — 0,57 : T. 5838; V. + 1,12

d 0	d 4	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	dif. et p.
′	′												
27	30	1620	209.5150	5418	5686	5954	6222	6490	6758	7026	7294	7562	268
	10	21	7830	8098	8366	8634	8902	9170	9437	9705	9973		1 27
			210.									0241	2 54
	20	22	0508	0776	1044	1312	1579	1847	2115	2382	2650	2918	3 80
	30	23	3185	3453	3720	3988	4255	4523	4790	5058	5325	5593	4 107
	40	24	5860	6128	6395	6662	6930	7197	7464	7732	7999	8266	5 134 6 161
5″	50	1625	8534	8801	9068	9335	9603	9870					7 188 8 214
			211.						0137	0404	0671	0938	9 241
	31	26	1205	1472	1740	2007	2274	2541	2808	3075	3342	3609	
	10	27	3876	4142	4409	4676	4943	5210	5477	5744	6010	6277	1 27
	20	28	6544	6811	7078	7344	7611	7878	8144	8411	8678	8944	2 53
	30	29	9211	9477	9744								3 80
			212.			0011	0277	0544	0810	1077	1343	1610	4 107 5 134
10	40	1630	1876	2142	2409	2675	2942	3208	3474	3741	4007	4273	6 160 267
	50	31	4540	4806	5072	5338	5605	5871	6137	6403	6669	6935	7 187 8 214
	32	32	7202	7468	7734	8000	8266	8532	8798	9064	9330	9596	9 240
	10	33	9862										
			213.	0128	0394	0660	0926	1191	1457	1723	1989	2255	
	20	34	2521	2786	3052	3318	3584	3849	4115	4381	4646	4912	1 27
15	30	1635	5178	5443	5709	5974	6240	6505	6771	7037	7302	7568	2 53 3 80
	40	36	7833	8098	8364	8629	8895	9160	9425	9691	9956		4 106
			214.									0221	266 5 133 6 160
	50	37	0487	0752	1017	1283	1548	1813	2078	2343	2609	2874	7 186
	33	38	3139	3404	3669	3934	4199	4464	4730	4995	5260	5525	8 213
	10	39	5790	6055	6319	6584	6849	7114	7379	7644	7909	8174	9 239
20	20	1640	8438	8703	8968	9233	9498	9762					1 27
			215.						0027	0292	0556	0821	2 53 3 80
	30	41	1086	1350	1615	1880	2144	2409	2673	2938	3203	3467	4 106
	40	42	3732	3996	4260	4525	4789	5054	5318	5583	5847	6111	5 133 265
	50	43	6376	6640	6904	7169	7433	7697	7961	8226	8490	8754	6 159
	34	44	9018	9282	9546	9811							7 186 8 212
			216.				0075	0339	0603	0867	1131	1395	9 239
25	10	1645	1659	1923	2187	2451	2715	2979	3243	3507	3771	4034	
	20	46	4298	4562	4826	5090	5354	5617	5881	6145	6409	6672	1 26
	30	47	6936	7200	7463	7727	7991	8254	8518	8781	9045	9309	2 53
	40	48	9572	9836									3 79
			217		0099	0363	0626	0890	1153	1416	1680	1943	264 4 106 5 132
	50	49	2207	2470	2733	2997	3260	3523	3786	4050	4313	4576	6 158
30	35	1650	4839	5103	5366	5629	5892	6155	6418	6682	6945	7208	7 185 8 211
	10	51	7471	7734	7997	8260	8523	8786	9049	9312	9575	9838	9 238
	20	52	218.0100	0363	0626	0889	1152	1415	1677	1940	2203	2466	1 26
	30	53	2729	2991	3254	3517	3779	4042	4305	4567	4830	5092	2 53
	40	54	5355	5618	5880	6143	6405	6668	6930	7193	7455	7718	3 79
35	50	1655	7980	8242	8505	8767	9030	9292	9554	9816			4 105 5 132 263
			219.								0079	0341	6 158
	36	56	0603	0866	1128	1390	1652	1914	2177	2439	2701	2963	7 184 8 210
	10	57	3225	3487	3749	4011	4273	4535	4797	5059	5321	5583	9 237
	20	58	5845	6107	6369	6631	6893	7155	7417	7678	7940	8202	
	30	59	8464	8726	8987	9249	9511	9773					1 26
			220.						0034	0296	0558	0819	2 52
40	40	1660	1081	1342	1604	1866	2127	2389	2650	2912	3173	3435	3 79
	50	61	3696	3958	4219	4481	4742	5003	5265	5526	5788	6049	262 4 105 5 131
	37	62	6310	6571	6833	7094	7355	7617	7878	8139	8400	8661	6 157
	10	63	8922	9184	9445	9706	9967						7 183 8 210
			221.					0228	0489	0750	1011	1272	9 236
	20	64	1533	1794	2055	2316	2577	2838	3099	3360	3621	3882	
45	30	1665	4142	4403	4664	4925	5186	5446	5707	5968	6229	6489	1 26
	40	66	6750	7011	7271	7532	7793	8053	8314	8574	8835	9095	2 52
	50	67	9356	9617	9877								3 78
			222.			0138	0398	0658	0919	1179	1440	1700	4 104 5 131 261
	38	68	1960	2221	2481	2741	3002	3262	3522	3783	4043	4303	6 157
	10	69	4563	4824	5084	5344	5604	5864	6124	6384	6645	6905	7 183 8 209
50	20	1670	7165	7425	7685	7945	8205	8465	8725	8985	9245	9505	9 235
	30	71	9764										
			223.	0024	0284	0544	0804	1064	1324	1583	1843	2103	
	40	72	2363	2622	2882	3142	3402	3661	3921	4181	4440	4700	1 26 2 52
	50	73	4959	5219	5479	5738	5998	6257	6517	6776	7036	7295	3 78
	39	74	7555	7814	8073	8333	8592	8852	9111	9370	9630	9889	4 104
55	10	1675	224.0148	0407	0667	0926	1185	1444	1704	1963	2222	2481	260 5 130 6 156
	20	76	2740	2999	3258	3517	3777	4036	4295	4554	4813	5072	7 182 8 208
	30	77	5331	5590	5849	6107	6366	6625	6884	7143	7402	7661	9 234
	40	78	7920	8178	8437	8696	8955	9213	9472	9731	9990		
			225.									0248	1 26 2 52
	50	79	0507	0766	1024	1283	1541	1800	2059	2317	2576	2834	3 78 4 104
″	″	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	259 5 130

LISTA PRENUMERATORÓW.

Adamowicz Aleksander Jeom. K. R. P. i S.
Adelt Kaźmierz.
Aszert Aleksander.
Aleksandrowicz Jan.
Babiński Eugeniusz.
Bayer Franciszek K. R. G. Rad.
Bayer Edward.
Bandzemer Jan.
Bańkowski Józef.
Barciński.
Bełżyński.
Beneweni Feliks.
Bernhard.
Berner Robert.
Bernsztein Kaźmierz.
Berski Stanisław.
Białobrzeski Juliusz.
Biedrzycki Klemens.
Bieńkowski.
Biernacki.
Biesiekierski Wiktor.
Bliziński Walery.
Blum.
Bochusiewicz Konstanty, Jeom. w K. R. P. i S.
Bochusiewicz Teodor.
Bogdański Edward.
Bojankowski Jan.
Borowski Karol Rewizor Pomiarów w K. R. P. i S.
Brandt Józef.
Bratyński Leon.
Bromirski Władysław.
Brudnicki Józef.
Bruszewski, U. G. G.
Brüner Aleksander.
Brzeziński Bronisław.
Buchowski.
Budny Przemysław.
Buksicki Zygmunt.
Bułcharyn Włodzimierz.
Burlakowska.
Burzyński.
Butrym Nikodem, Nacz. Pomiar. w K. R. P. i S.
Byszewski Przemysław.
Bzura Adam Rew. Pom. w K. R. P. i S.
Bzura Władysław.
Carossi Antoni.
Chamski Damazy.
Chrapczyński Józef.
Chudzyński Ludwik.
Cichorski Władysław, Jeom. K. R. P. i S.
Cidrowski Jan.
Ciechomski Kaźmierz.

Cielewski Franciszek.
Cielewski Tymoteusz.
Cohn Józef.
Cyroński Koronad, Rew. Pom. w K. R. P. i S.
Czacki Feliks.
Czajewicz.
Czajkowska.
Czaplicki Konstanty.
Czajewski Julian, Jeometra K. R. P. i S.
Czarnecki.
Czarnecki Edward Jeom. K. R. P. i S.
Czerniewicz Seweryn.
Dal-Trozzo Antoni.
Damse Stanisław.
Dawidsohn.
Dąbrowski Michał.
Dejcz Aleksander.
Dembiński Henryk.
Dębowski Konstanty U. J. S.
Dębski Władysław.
Dębska Władysława.
Dłużewski Jan.
Dmóchowski Janusz.
Dobrowolski.
Dobrzański Edward.
Dobrzeleski Tadeusz.
Drahol, Urzędnik Kom. Rząd. P. i Skarbu.
Drewnowski Adam.
Dufren Czesław.
Dwernicki Jan.
Dworzaczek Jan, Jeom. w K. R. P. i S.
Dziarkowski Henryk.
Dziedzicki Adam.
Dziewulski Wojciech Jeom. w K. R. P. i S.
Dziewulski Mieczysław.
Dzierzgowski Konrad.
Ehrlich Emanuel.
Ehrhardt Franciszek.
Ejdziatowicz Władysław.
Erlicki Witold.
Ertel Franciszek.
Esiński Antoni.
Falkowski Józef.
Feldman Zygmunt.
Fiszer Józef.
Gacki U. G. Rad.
Gajewski Jan.
Garbiński Andrzéj.
Gepner Bolesław.
Gerlach Sylwin.
Gersz Jan U. J. G. Wiej. i Leś.
Giraud Edward U. J. G. Wiejs. i Leś.
Gnatkowski Tomasz, Jeom. w K. R. P. i S.
Godlewski Franciszek.
Gołębiowski Ignacy, U. G. Rad.
Gorłow, U. G. Rad.
Górski Michał.
Górski Piotr.
Grabowski Paulin, Jeom. K. R. P. i S.
Gradenwitz Aleksander.
Granzow Gustaw.
Grochowski Hilary.
Grobelni Ignacy.
Grodecki Jan.
Grumau Adolf.
Gruszewski Aleksander.
Gridin Włodzimierz.
Grzegorzewski Walenty, Jeom. K. R. P. i S.
Gumowski Jan.
Gutkowski Henryk.
Hegel.
Hempel Józef.
Hempel Wilhelm.
Hermann Ludwik.

Hermanowski Józef, U. I. G. W. i Leśn.
Herbrzyński Ignacy.
Hesse.
Heurich Jan.
Hildebrand, U. G. Rad.
Hill Seweryn.
Hirszberg Wilchelm.
Holszczewnik.
Homicki, U. G. Rad.
Huba Mieczysław.
Huba Stanisław.
Hübsch Władysław.
Jacob Roman.
Jakubowski Franciszek.
Jakubowski Stanisław.
Janicki.
Janicki Stanisław.
Janiszewski Tomasz.
Janiszewski, U. G. Rad.
Jankiewicz Kaźmierz, Jeom. K. R. P. i S.
Jarociński Karól.
Jarociński Wincenty.
Jasiński Józef.
Jasiński Stanisław.
Jasiński Zdzisław.
Jasper Adela.
Jaworowski.
Jäger Gracyan, Budow.
Idźkowski Stanisław.
Jelińkiewicz Jan.
Jenike Henryk.
Jeska.
Jeziorański Stanisław.
Jędrzejewicz Jan.
Jórkowski Grzegórz, U. I. G.W. i Leś.
Iwanicki Władysław.
Kaftal Henryk, U. G. Wiej. i L.
Kahl Adolf.
Kamiński Adam.
Kamiński Bronisław.
Kapliński Edward.
Karpiński Leon.
Karski Stanisław.
Kasperski Jan.
Kazimirus Konstanty.
Kąkolewski Leon.
Kessler Władysław.
Kinastowski, Adjunk Leś. K. R P. i S.
Kiniorski, U. G. Rad.
Kittel Dominik.
Klicki Józef.
Klonowski Stanisław, U. I. Gos. Wiej. i Leś.
Kloss Edward.
Kłopotowski Antoni.
Kobylański Dobrosław, U. In. S.
Kocki Kazimierz, R. Pom. K. R. P. i S.
Kokieli Józef.
Kokieli Władysław.
Kołakowski Konstanty, Nadleś. Rządowy.
Koncewicz Henryk.
Konopacki Leon, Jeom. K. R. P. i S.
Konotkiewicz Jan.
Komodziński Jan.
Koperski Stanisław.
Kosiński Antoni.
Kosiński Tomasz, Jeom. w K. R. P. i S.
Korczakowski Stanisław.
Korabiewski Stanisław.
Korzybski Władysław.
Korzybski Stanisław.
Kosowski, U. G. Rad.
Kosowski Konstanty.
Kotkowski Gustaw, U. G. Rad.
Kotkowski Ignacy, U. G. Rad.
Kowalewski Jakób.

Kowalski Władysław.
Kozanecki Władysław.
Kozarzewski Zygmunt.
Kozicki Gustaw.
Kozieradzki Adolf.
Kozłowski Władysław.
Kraetschmer Karol, Adj. Mier. K. R. P. i S.
Krupka Wincenty.
Krauss Antoni.
Krauze Władysław.
Krukowski Tadeusz.
Kruszewski Antoni.
Krupiński Stanisław, Jeom. K. R. P. i S.
Krysiński Józef.
Krystek Szczepan, Jeom. K. R. P. i S.
Krzemiński Stanisław.
Krzymuski Piotr.
Krzesimowski Stanisław.
Krzymiński Ludwik.
Kucharska Józefa.
Kurdwanowski Wincenty, U. G. Rad.
Kulesza Aleksander, Apl. Mier. K. R. P. i S.
Kunicki Antoni, Adj. Mier. K. R. P. i S.
Kurkowski, U. G. R.
Kuszel Witold.
Laskowski Michał, Apl. Miern. K. R. P. i S.
Lasocki Bolesław.
Lasocki Henryk.
Last Franciszek, Adj. Miern. K. R. P. i S.
Lebrun Józef.
Lechowicz Maksym.
Lemprecht Henryk.
Leśniowska.
Lewiński Ludwik.
Lewiński, U. G. Rad.
Levy.
Liebich Karol, Adj. Mier. K. R. P. i S.
Liszewski Jan.
Luboińska.
Lubomirski Stanisław.
Łabęcki Adam, U. I. G. W. i L.
Łaski.
Łempicki Adam.
Łempicki Artiur.
Łempicki Karol.
Łubiński Franciszek.
Łysakowski.
Majewski, U. G. Rad.
Majewski Stanisław.
Malcz Władysław.
Malinowski Szczepan.
Makowski Stanisław.
Mańkowski Józef, N. S. Realn. Rad.
Markowski Julian, Adj. Mier. K. R. P. i S.
Marylski Władysław.
Marx, U. B. P.
Mass Karol.
Mastelski Józef.
Maszkow.
Matuszewski Ignacy.
Mauesberger Sylwiusz, R. Pom. K. R. P. i S.
Mezer Stanisław.
Mężeński Rudolf.
Mianowski Władysław, U. I. S.
Michałowski Franciszek.
Michałowski Aleksander.
Michałowski Franciszek.
Michałowski Władysław.
Miechowicz.
Mierzejewski Antoni, Adj. Mier. K. R. P. i S.
Milewski Edward.

Milewski Stanisław.
Milkuszyc Karol, Jeom. K. R. P. i S.
Miniewski Władysław.
Mleczko Jan.
Morawski.
Mościcki Faustyn.
Moszyński Walenty.
Müller Julian.
Munkiewicz Antoni.
Murawski Antoni.
Musielewicz Piotr, Adj. Ek. K. R. P. i S.
Myłobędzki Ferdynand.
Naimski Aleksander.
Nemerycz Teodor.
Netto Ksawery.
Newelski Wiktor.
Niewiarowski Honorat, Rewizor Pom. K. R. P. i S.
Nowakowski Feliks.
Nowakowska Kazimiera.
Nyko Poliodor.
Oborski, U. G. R.
Obyrn Leon.
Oczapowski Józef.
Opieński Seweryn.
Orłowski Józef.
Ośniałowski, U. B. P.
Ostrowski August.
Paczyński Cypryan.
Pajewski.
Pankiewicz Jan, Naucz. Gim. R.
Paszkowicz Edward.
Peel Stanisław, Jeom. K. R. P. i Skarbu.
Pepłowski Władysław, Apl. Mie. K. R. P. i S.
Perkowski Jan.
Piasecki Adam, U. I. G. Wiej. i Leś.
Piechowski, U. B. P.
Pieńkowski Adolf.
Pieniążek Wojciech.
Pietrulewicz Walenty.
Piętaszewski.
Piotrowski Michał.
Piotrowski Sabin, Jeom. K. R. P. i S.
Pląskowski Adolf.
Pławski Henryk.
Płonczyński Teofil.
Podczaski Edward.
Podziemski Kazimierz, Jeom. K. R. P. i S.
Polkowski Teodor.
Pomarnacki, U. G. Rad.
Pomianowski Andrzéj, Adj. Mier. K. R. P. i S.
Popławski Bronisław.
Poths Karól.
Potocki Stanisław.
Posternikow Aleksander.
Powidzki.
Prądzyński Wincenty.
Pruski Antoni.
Przeciechowski Stanisław.
Przybyłowski Kazimierz.
Przybyłowski, U. G. Rad.
PrzystańskiStanisław, Naucz. In. Szlach.
Puławski Mieczysław
Puszet Jan.
Radziszewski Antoni.
Rau Wilhelm, Jeom. K. R. P. i Skarbu.
Raych Jan.
Raych Konstanty.
Rakmanowski Gustaw.
Redler Paweł.
Reklewski, U. G. Rad.
Riedel Józef.
Rogalski Bazyli.
Rogójski Stanisław, U. G. Rad.

Romocki Juliusz.
Roth Henryk.
Rudinger.
Rudnicki Saturnin.
Rudnicki Stanisław.
Rudnicki Tytus.
Rutkowski Zdzisław.
Ryszkiewicz Józef, Jeom. K. R. P. i S.
Rzączyński, U. Sz. R. Radom.
Rzędkowski Adolf.
Rzeszotarski Antoni.
Salomonowicz Tomasz.
Samojłowicz Tytus.
Schmüke.
Scholtze Adolf.
Scholtze Kazimierz.
Schubert Ryszard.
Schuch.
Schwartze Eustachy.
Semadeni Antoni.
Sieklucki Władysław.
Sienicyn.
Sienkiewicz, U. G. Rad.
Sikorski Antoni.
Sikorski Ludwik, Jeom. K. R. P. i S.
Skółdycki Erazm U. B. P.
Skółdycki Romuald, U. B. P.
Skrętowski, U. S. R. Rad.
Skrodzki Andrzéj, Adj. Ekon. K. R. P. i S.
Skrzyński Jan.
Skrzyński Seweryn.
Skupiński Władysław.
Skwarcow Piotr.
Sławiński Aleksander, Jeom. K. R. P. i S.
Sławiński Michał, Jeom. K. R. P. i S.
Śmiarowski Maryan.
Sobolewski Artur, U. I. S.
Sobolewski Tomasz.
Sokołowski Ernest.
Sokołowski Maksymilian.
Sosnkowski Feliks.
Staczyński Rudolf.
Stankowski Ignacy Apl. Sąd.
Stembart Gustaw.
Strączyński Feliks.
Stengel Kazimierz.
Ströhmer Aleksander.
Struś Lucyjan.
Strzębosz, U. S. R. Rad.
Suffczyński Stefan.
Sulistrowski.
Sumiński.
Swiątkowski Ludwik.
Swiątkowski Władysław.
Swiechowski, U. G. Rad.
Swierzyński Rajmund, U. I. Gos. Wiejs. i Leś.
Syrewicz Ksawery.
Szalowski Seweryn, U. I. S.
Szczasny Henryk.
Szczepanowski, U. G. Rad.
Szczuka Rajmond.
Szerner Władysław, U. I. S.
Szlązkiewicz Polikarp.
Szostkiewicz, U. G. Rad.
Sztochel Ludwik, Jeom. K. R. P. i S.
Szultz Jarosław.
Szuwalski.
Szyller Ludwik.
Tabęcki Józef.
Tomicki Władysław.
Trautzolt Ludwik.
Trejdosiewicz Jan.
Turczynowicz Józef.
Turkułł Konstanty.
Tnrski Alfons.
Turzański Saturnin, Apl. K. R. P. i S.

Tymiński Adam, U. G. Rad.
Tyszka Antoni.
Vetter Kazimierz.
Wambach Władysław.
Waroczewski Konstanty.
Wartałowicz Witold, Apl. K. R. P. i S.
Wasiański Gustaw.
Wedeman Jan.
Weinert Aleksander.
Westphal Józef, Adj. Kom. Rząd. Przych. i Skar.
Wereszczyński, U. G. Rad.
Werner Teodor.
Wierzbicki Leon.
Wierzbowski Artur.
Wilchelm Teodor.
Winnicki Michał.
Wiśniewski Seweryn, N. G. G. Rad.
Wiszowaty Wiktor.
Witkowski Andrzéj, Jeom. K. R. P. i S.
Witkowski Roman.
Włodek Wiktor.
Wodziński Władysław.
Wojciechowski Jan.
Wojciechowski Feliks.
Wojciechowski Tytus.
Wojczyński.
Wojdalski Andrzéj, Jeom. K. R. P. i S.
Wolle Ottomar, Jeom. K. R. P. i Skarbu.
Wolski Ludwik.
Wróblewski Jan.
Wrześniowski Edwin.
Wszebor Józef.
Wyganowski Józef.
Wyrzykowski Daniel.
Zabłocki Hipolit.
Zabłocki Szymon.
Zabokrzycki.
Zajęczkowski, U. B. P.
Zagórowski Antoni.
Zalewski Edward.
Zalewski Władysław.
Żaliński Julian.
Załęski, U. G. Rad.
Załuski Jan.
Zawadzki Klemens, Jeom. K. R. P. i S.
Zarnowski Józef.
Zdzitowiecki Władysław.
Żegliński Józef, Sekr. Koll. St. N. G. G. Rad.
Zieliński Ignacy.
Zieliński Julian.
Zienkowicz Zofia.
Zientarski Piotr.
Zwierkowski Juliusz, U. I. Gos. Wiej. i Leś.
Żywolska.