WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU
Wybrane problemy

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 1999

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w tomie:

prof. dr hab. Jerzy **HOŁUBIEC**

prof. dr hab. Janusz **KACPRZYK**

prof. dr hab. Tadeusz **NOWICKI**

prof. dr hab. Stanisław **PIASECKI**

prof. dr hab. Piotr **SZCZEPANIAK**

prof. dr hab. Tadeusz **TRZASKALIK**

doc. dr hab. Sławomir **WIERZCHOŃ**

doc. dr hab. Leszek **ZAREMBA**

Warszawa 1999

ISBN 83-85847-24-3

Przedmowa

Na niniejszą publikację składa się zbiór prac doktorantów Zaocznych Studiów Doktoranckich "Informatyka w zarządzaniu i finansach" działających przy ***Instytucie Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk***.

Prace te były referowane na konferencji BOS'98 "Rozwój średnich i małych miast w XXI wieku w Polsce: Rola badań operacyjnych i systemowych", Kutno, 8-10 czerwca 1998 r.[1], a także na seminariach Studiów Doktoranckich "Informatyka w zarządzaniu i finansach". Nad stroną merytoryczną publikacji czuwał Pan Prof. dr hab. Jerzy Hołubiec oraz grono recenzentów i opiekunów naukowych doktorantów.

Prace dotyczą głównie problemów analizy systemowej oraz jej zastosowań w dziedzinie finansów, a zwłaszcza - teorii portfela, obligacji i problemów inwestycyjnych. Niektóre prace przy analizie finansowej posługują się tzw. algorytmami genetycznymi i sieciami neuronowymi, a także modelowaniem rozmytym i strukturami fraktalnymi. Część prac dotyczy zarządzania i sterowania produkcją.

Wypada zauważyć, iż doktoranci Studiów atakują w swych pracach tematy nowoczesne i znajdujące się w obszarze tzw. frontu badawczego analizy systemów. Wypada im życzyć sukcesów i wytrwałości w pracy, która winna zakończyć się obronioną pracą doktorską.

---

[1] Głównymi organizatorami konferencji było Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych oraz Instytut Badań Systemowych PAN.

Wypada także zaznaczyć, iż wydanie niniejszej publikacji stało się możliwe dzięki wsparciu finansowemu ze strony ***Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania***, działającej w ramach Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych. Fundacja ta została założona w 1991 roku z inicjatywy Prof. L. Kuźnickiego, wówczas Sekretarza Naukowego Polskiej Akademii Nauk. Do zadań Fundacji należy, między innymi, wspieranie i promocja prac młodych pracowników nauki, a zwłaszcza prac doktorantów.

Mamy nadzieję, iż publikacja niniejsza zostanie życzliwie przyjęta przez specjalistów działających w obszarze nauk systemowych.

Rektor WSISiZ

Prof. Roman Kulikowski

Wpływ reszty we wzorze Taylora na wartość niespodziewanej stopy zwrotu z portfela obligacji o stałym oprocentowaniu

Joanna Olbryś
Zaoczne Studia Doktoranckie IBS PAN

1 Wstęp

Zmiany stóp procentowych, mające miejsce również na polskim rynku, powodują niespodziewane przez inwestorów zmiany wartości wszystkich instrumentów finansowych. Dotyczy to również obligacji o stałym oprocentowaniu oraz portfeli inwestycyjnych z nich zbudowanych.
Od wielu lat do badania takich zmian stosuje się pojęcia trwałości (duration) i wypukłości (convexity) ([1], [2], [9], [6]).
Fabbozzi i Fabbozzi ([6],1989) stwierdzili, że zmiany w wartości obligacji, spowodowane zmianami stóp procentowych można przybliżyć (z wystarczającą dokładnością) trzema pierwszymi wyrazami rozwinięcia w szereg Taylora funkcji P będącej wartością inwestycyjną obligacji:

$$\partial P = \frac{\partial P}{\partial K}(\partial K) + \frac{\partial^2 P}{\partial K^2}\frac{(\partial K)^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial K^3}\frac{(\partial K)^3}{3!} + R_n \qquad (1)$$

gdzie K=YTM, R_n reprezentuje pozostałe, nie mające znaczenia, składniki. Dwa pierwsze wyrazy tego rozwinięcia to właśnie trwałość i wypukłość obligacji, natomiast trzeci wyraz został nazwany prędkością (velocity) obligacji.

Celem pracy jest wprowadzenie nowego pojęcia *reszty obligacji*, dzięki któremu otrzymamy lepszą aproksymację niespodziewanej stopy zwrotu w warunkach zmiennych stóp procentowych, oraz zbadanie jego własności.

2 Reszta obligacji o stałym oprocentowaniu.

Niech obligacja A płaci kupony C_t po czasie t, gdzie $t \in T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $t_0(t_n)$ jest zapadalnością najkrótszej (najdłuższej) obligacji. Dla konkretnej obligacji, niektóre lub nawet większość kuponów C_t może być równa zero. Bony skarbowe o zapadalności krótszej niż rok traktujemy jak obligacje zero-kuponowe.

Obligację A identyfikujemy z ciągiem kuponów $C_{t_0}, C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}$ (dla uproszczenia ostatnią płatność traktujemy jak kupon), gdzie każdy kupon C_t ma swoją wartość inwestycyjną $C_t \cdot (1+y_t)^{-t}$, gdzie y_t jest stopą spot .

Przez wartość inwestycyjną obligacji A rozumiemy sumę obecnych wartości wszystkich kuponów generowanych przez A :

$$P_A = P_A(y_{t_0}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}) = P_A(\overline{y}) = \sum_{t=t_0}^{t_n} C_t \cdot (1+y_t)^{-t} \qquad (2)$$

gdzie wektor $\overline{y} = (y_{t_0}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_n})$ jest nazywany *strukturą stóp procentowych.*

Z każdym kuponem C_t obligacji A związana jest jego waga:

$$x_t^A = \frac{C_t \cdot (1+y_t)^{-t}}{P_A}, \quad t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \tag{3}$$

Oczywiście wszystkie wagi sumują się do 1.

W wyniku decyzji Banku Centralnego o zmianie stóp procentowych powstaje nowy wektor stóp procentowych $\overline{y} \to \overline{y} + \overline{h}$, gdzie $\overline{h}$ jest wektorem zmian.

2.1 Reszta obligacji

Rozwijając funkcję P_A daną wzorem (2) w szereg Taylora otrzymamy, dla pewnego θ

$$dP_A = \sum_{t=t_0}^{t_n} \left[\frac{\partial P_A(\overline{y})}{\partial y_t} \cdot h_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P_A(\overline{y})}{\partial y_t^2} \cdot h_t^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 P_A(\overline{y}+\theta)}{\partial y_t^3} \cdot h_t^3 \right] \tag{4}$$

gdzie $\theta = (\theta_{t_0}, \theta_{t_1}, \ldots, \theta_{t_n})$, $0 \leq \theta_t \leq h_t$ gdy $h_t > 0$ i $h_t \leq \theta_t \leq 0$ gdy $h_t < 0, t \in \{t_0, \ldots, t_n\}$.

Zatem

$$dP_A = -\sum_{t=t_0}^{t_n} tC_t(1+y_t)^{-t} \cdot \frac{h_t}{1+y_t} + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)C_t(1+y_t)^{-t} \cdot \frac{h_t^2}{(1+y_t)^2} - \epsilon,$$

$$\epsilon = \frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)C_t(1+y_t+\theta_t)^{-t} \cdot \frac{h_t^3}{(1+y_t+\theta_t)^3}$$

$$\epsilon(\theta_{t_0}, \theta_{t_1}, \dots, \theta_{t_n}) = \frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)\frac{C_t \cdot h_t^3}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}}$$

Dzieląc obustronnie przez P_A oraz uwzględniając (3) otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{dP_A}{P_A} &= -\sum_{t=t_0}^{t_n} tx_t^A \cdot \frac{h_t}{1+y_t} + \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)x_t^A \cdot \frac{h_t^2}{(1+y_t)^2} - \\ &-\frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A \cdot \frac{h_t^3(1+y_t)^t}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}} \qquad (6)\end{aligned}$$

Rozważmy teraz 4 przypadki wzajemnych zależności pomiędzy stopami procentowymi i zmianami tych stóp.

Przypadek I Jest to najogólniejszy przypadek, w którym występują współczynniki g_t, nieznane inwestorowi. Z im większą dokładnością umie je przewidzieć, tym lepszą aproksymację otrzyma.

Załóżmy, że zmiany h_t spełniają zależność:

$$\frac{h_t}{1+y_t} = g_t \cdot \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}, \quad t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

Po przekształceniach otrzymamy :

$$h_t = g_t \cdot \frac{1+y_t}{1+y_{t_0}} \cdot h_{t_0} \qquad (7)$$

Podstawiając (7) za h_t w (6) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\frac{dP_A}{P_A} &= -\sum_{t=t_0}^{t_n} tx_t^A \cdot g_t\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)x_t^A g_t^2 \cdot \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2 \\ &-\frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A \cdot \frac{g_t^3 \cdot (1+y_t)^{t+3} \cdot h_{t_0}^3}{(1+y_{t_0})^3\,(1+y_t+\theta_t)^{t+3}} = \\ &= -\sum_{t=t_0}^{t_n} tx_t^A \cdot g_t\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)x_t^A g_t^2 \cdot \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2\end{aligned}$$

$$-\frac{h_{t_0}^3}{6\left(1+y_{t_0}\right)^3}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A\cdot\frac{g_t^3\cdot(1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}}$$

$$\frac{dP_A}{P_A}=-D_I(A)\cdot\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}+C_I(A)\cdot\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2-R_I(A)\cdot\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 \tag{8}$$

gdzie $D_I(A)$ jest trwałością obligacji A ,$C_I(A)$ jest jej wypukłością, natomiast

$$R_I(A):=\frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A\frac{g_t^3\cdot(1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}} \tag{9}$$

zdefiniujemy jako *resztę* obligacji A. Zasadnicza różnica między resztą a prędkością (velocity) polega na tym, że prędkość jest tylko trzecim wyrazem rozwinięcia , natomiast reszta jest po prostu resztą we wzorze Taylora, czyli daje lepsze przybliżenie.

Przypadek II Gdy możemy ustalić dla rynku pewną stałą $0<L<1$ taką, że otrzymamy następujący związek między stopami procentowymi i zmianami:

$$\frac{h_t}{1+y_t}=L^{t-t_0}\cdot\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}},\quad t\in\{t_0,t_1,\ldots,t_n\} \tag{10}$$

Równanie opisujące niespodziewaną stopę zwrotu w tym przypadku przyjmuje postać:

$$\frac{dP_A}{P_A}=-D_{II}(A)\cdot\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}+C_{II}(A)\cdot\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2-R_{II}(A)\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 \tag{11}$$

gdzie $D_{II}(A)$ jest trwałością, $C_{II}(A)$ wypukłością obligacji oraz

$$R_{II}(A) := \frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A \frac{(L^{t-t_0})^3(1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}} \tag{12}$$

definiujemy jako jej *resztę*.

Przypadek III Jest to przypadek proporcjonalnych zmian stóp procentowych.

Zmiany h_t spełniają zależność (10) dla L=1:

$$\frac{h_t}{1+y_t} = \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}, \quad t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \tag{13}$$

Jest on równoważny Przypadkowi I z warunkiem $\forall t \; g_t = 1$.

$$\frac{dP_A}{P_A} = -D_{III}(A)\cdot\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + C_{III}(A)\cdot\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2 - R_{III}(A)\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 \tag{14}$$

gdzie $D_{III}(A)$ jest trwałością, $C_{III}(A)$ wypukłością, natomiast

$$R_{III}(A) := \frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A \frac{(1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}} \tag{15}$$

jest *resztą* obligacji A .

Przypadek IV Jest to najprostszy przypadek, w którym stopy spot są równe, tzn. $y_t \equiv y$. Zmiany stóp też są identyczne : $h_t \equiv h$:

Otrzymamy wtedy:

$$\frac{dP_A}{P_A} = -D_{IV}(A)\cdot\frac{h}{1+y} + C_{IV}(A)\cdot\left(\frac{h}{1+y}\right)^2 - R_{IV}(A)(h)^3 \tag{16}$$

gdzie $D_{IV}(A)$ jest trwałością obligacji A, C_{IV} jest jej wypukłością, natomiast

$$R_{IV}(A) := \frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^A \frac{(1+y)^t}{(1+y+\theta_t)^{t+3}} \tag{17}$$

jest *resztą* , $x_t^A = \frac{C_t}{P_A(1+y)^t}$.

2.2 Reszta dla portfela obligacji o stałym oprocentowaniu

Wszystkie własności opisane poniżej dla najogólniejszego przypadku (7) przenoszą się na przypadki II, III i IV.

Załóżmy, że stopy procentowe zmieniają się zgodnie z równaniem (7). Trwałość i wypukłość portfela obligacji można określić podobnie, jak dla pojedynczej obligacji ([11]). Zostało udowodnione ([11]), że trwałość (wypukłość) portfela $P = (O_1, \ldots, O_r)$ jest kombinacją wypukłą trwałości (wypukłości) obligacji O_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, tzn.

$$D_I(P) = \sum_{k=1}^{r} x_k D_I(O_k), \quad x_k = \frac{P_k}{P*} \tag{18}$$

$$C_I(P) = \sum_{k=1}^{r} x_k C_I(O_k), \quad x_k = \frac{P_k}{P*} \tag{19}$$

gdzie P_k jest wartością inwestycyjną obligacji O_k, podczas gdy $P^* = \sum_{k=1}^{r} P_k$.

Resztę portfela Z możemy zdefiniować wzorem:

$$R_I(Z) := \frac{1}{6}\sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2)x_t^Z \frac{g_t^3 \cdot (1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t)^{t+3}}$$

Uwaga 1 *Jeśli $P = (O_1, O_2, \ldots, O_r)$ jest portfelem obligacji, wtedy reszta portfela jest kombinacją wypukłą reszt obligacji O_m, $m = 1, 2, \ldots, r$, tzn.*

$$R_I(P) = \sum_{k=1}^{r} x_k R_I(O_k), \ x_k = \frac{P_k}{P^*}. \tag{20}$$

gdzie P_k jest wartością inwestycyjną obligacji O_k oraz $P^* = \sum_{k=1}^{r} P_k$.

Dowód : Oznaczmy przez C_t^k kupon obligacji O_k do wypłaty w czasie t, oraz biorąc pod uwagę (9), otrzymamy:

$$x_k \cdot R_I(O_k) = \frac{P_k}{P^*} \cdot R_I(O_k) =$$

$$= \left(\frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) x_t^k \frac{g_t^3 (1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t^k)^{t+3}} \right) \cdot \frac{P_k}{P^*} =$$

$$= \left(\frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) \frac{g_t^3 (1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t^k)^{t+3}} \frac{C_t^k}{P_k (1+y_t)^t} \right) \cdot \frac{P_k}{P^*} =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) \frac{g_t^3 (1+y_t)^3}{(1+y_t+\theta_t^k)^{t+3}} \cdot \frac{C_t^k}{P^* (1+y_t)^t}$$

Jeśli teraz zsumujemy po k od 1 do r, powinniśmy otrzymać formułę na $R_I(P)$ ponieważ $x_t^P = \sum_{k=1}^{r} \frac{C_t^k}{P^*(1+y_t)^t}$.

$$x_1 \cdot R_I(O_1) + \ldots + x_r \cdot R_I(O_r) =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) \frac{g_t^3 (1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t^1)^{t+3}} \cdot \frac{C_t^1}{P^* (1+y_t)^t} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) \frac{g_t^3 (1+y_t)^{t+3}}{(1+y_t+\theta_t^r)^{t+3}} \cdot \frac{C_t^r}{P^* (1+y_t)^t} =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) \cdot g_t^3 (1+y_t)^{t+3}.$$

$$\left[\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t^1\right)^{t+3}}\cdot\frac{C_t^1}{P^*(1+y_t)^t}+\ldots+\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t^r\right)^{t+3}}\cdot\frac{C_t^r}{P^*(1+y_t)^t}\right]$$

Wprowadzimy teraz ciągłą i różniczkowalną funkcję pomocniczą dla ustalonego t :

$$\Psi_t(\theta_t)=\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t\right)^{t+3}}\cdot\frac{C_t^1}{P^*(1+y_t)^t}+\ldots+\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t\right)^{t+3}}\cdot\frac{C_t^r}{P^*(1+y_t)^t}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t\right)^{t+3}}\left[\frac{C_t^1}{P^*(1+y_t)^t}+\ldots+\frac{C_t^r}{P^*(1+y_t)^t}\right]$$

$$\Psi_t'(\theta_t)=\frac{-(t+3)}{\left(1+y_t+\theta_t\right)^{t+4}}\cdot C$$

gdzie $C=\frac{C_t^1}{P^*(1+y_t)^t}+\ldots+\frac{C_t^r}{P^*(1+y_t)^t}$ jest stałą.

Ψ_t jest funkcją malejącą dla $\theta_t\in(0,h_t)$ gdy $h_t>0$ lub dla $\theta_t\in(h_t,0)$ gdy $h_t<0$.

Z własności Darboux istnieje takie $\overline{\theta_t}$, że :

$$\Psi_t(0)>\Psi_t(\overline{\theta_t})>\Psi_t(h_t)\ dla\ h_t>0$$

lub

$$\Psi_t(h_t)>\Psi_t(\overline{\theta_t})>\Psi_t(0)\ dla\ h_t<0$$

oraz

$$\Psi_t(\overline{\theta_t})=A$$

gdzie

$$A=\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t^1\right)^{t+3}}\cdot\frac{C_t^1}{P^*(1+y_t)^t}+\ldots+\frac{1}{\left(1+y_t+\theta_t^r\right)^{t+3}}\cdot\frac{C_t^r}{P^*(1+y_t)^t}.$$

Stąd

$$\Psi_t(\overline{\theta_t})=\frac{1}{\left(1+y_t+\overline{\theta_t}\right)^{t+3}}\left[\frac{C_t^1}{P^*(1+y_t)^t}+\ldots+\frac{C_t^r}{P^*(1+y_t)^t}\right]=$$

$$= \frac{1}{\left(1 + y_t + \overline{\theta_t}\right)^{t+3}} \cdot x_t^P$$

Postępujemy analogicznie dla pozostałych $t \in t_0, \dots, t_n$.

Podstawiając do wzoru otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{r} x_k \cdot R_I(O_k) = \frac{1}{6} \sum_{t=t_0}^{t_n} t(t+1)(t+2) \cdot g_t^3 (1+y_t)^{t+3} \cdot \frac{1}{\left(1 + y_t + \overline{\theta_t}\right)^{t+3}} \cdot x_t^P =$$

$$= R_I(P).$$

Poniżej przedstawiona zostanie silniejsza wersja twierdzenia dotyczącego niespodziewanej stopy zwrotu z portfela obligacji ([11], Theorem 3), uwzględniająca resztę portfela obligacji.

Twierdzenie 1 *Jeśli $Z = (O_1, O_2, \dots, O_r)$ jest portfelem obligacji, wtedy niespodziewana stopa zwrotu z portfela Z odpowiadająca zmianom h_t stóp procentowych y_t spełniających zależność (7) jest dana wzorem*

$$\frac{dP_Z}{P_Z} = -D_I(Z) \cdot \frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}} + C_I(Z) \cdot \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}}\right)^2 - R_I(Z) \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}}\right)^3 \quad (21)$$

gdzie P_Z jest wartością inwestycyjną portfela obligacji Z, podczas gdy $D_I(Z)$, $C_I(Z)$, $R_I(Z)$ są odpowiednio trwałością, wypukłością oraz resztą portfela Z.

Dowód : Jeśli $P_Z = \sum_{k=1}^{r} P_k$ (P_k jest wartością inwestycyjną obligacji O_k), $dP_Z = \sum_{k=1}^{r} dP_k$ i ponieważ (8) jest prawdziwe dla każdej obligacji O_k, zatem niespodziewana stopa zwrotu z portfela Z spełnia równanie:

$$\frac{dP_Z}{P_Z} = \sum_{k=1}^{r} \frac{dP_k}{P_k} \cdot \frac{P_k}{P_Z} = \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k}{P_Z} \left(\frac{dP_k}{P_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k}{P_Z} \left(-D_I(O_k) \cdot \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + C_I(O_k) \cdot \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} \right)^2 - R_I(O_k) \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} \right)^3 \right) =$$

$$= - \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k}{P_Z} \cdot D_I(O_k) \cdot \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k}{P_Z} \cdot C_I(O_k) \cdot \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} \right)^2 - \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k}{P_Z} \cdot R_I(O_k) \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} \right)^3 =$$

$$= -D_I(Z) \cdot \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + C_I(Z) \cdot \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} \right)^2 - R_I(Z) \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} \right)^3 .$$

gdzie $D_I(Z)$ jest trwałością Z daną wzorem (18), $C_I(Z)$ jest wypukłością Z daną przez (19).

Bibliografia

[1] R.Brooks, B.Attinger *Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Convertible Bonds*, Financial Analysts Journal, July-August 1992

[2] M.L.Dunetz, J.M.Mahoney *Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds* Financial Analysts Journal, May-June 1988

[3] E.Elton, M.Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5th ed.Wiley, 1995

[4] L.R. Foulds. *Optimization Techniques*, Springe-Verlag, New York Inc., 1981

[5] F.J.Fabbozzi, T.D.Fabbozzi *The Handbook of Fixed Income Securities*, IRWIN, New York, 1995

[6] F.J.Fabbozzi, T.D.Fabbozzi *Bond Markets, Analysis and Strategies*, New Jersey: Prentice Hall, 1989

[7] R.Kulikowski, H.Bury, A.Jakubowski *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czsowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*, IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa 1996

[8] G.D.Latainer, D.P.Jacob *Modern Techniques for Analyzing Value and Performance of Callable Bonds*

[9] J.Mehran, G.Homaifar *Analytics of Duration and Convexity for Bonds with Embedded Options: The Case of Convertibles*, Journal of Business Finance & Accounting, Jan 1993

[10] J.Olbryś *Computing an Unanticipated Rate of Return on Bonds and Bond Portfolios*, presented at the INFORMS/IFORS/IFAC/IIASA Conference "Transition to Advanced Market Institutions and Economies", Warsaw, Poland, June 18-21, 1997

[11] L.S. Zaremba *Solution of Immunization Problem in Case of Proportional Spot Rate Shifts*, Working paper WP-3-1995, Systems Research Institute, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

działa pod auspicjami
Polskiej Akademii Nauk

ZAŁOŻYCIELEM
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
jest
FUNDACJA KRZEWIENIA NAUK SYSTEMOWYCH
powołana z inicjatywy
Prezesa
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FUNDATOREM
Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych
jest
POLSKA AKADEMIA NAUK

ORGANEM
sprawującym nadzór
jest
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
prowadzi studia wyższe na kierunkach:
INFORMATYKA
ZARZĄDZANIE I MARKETING

SIEDZIBA
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-85847-24-3