WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU
Wybrane problemy

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 1999

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w tomie:

prof. dr hab. Jerzy **HOŁUBIEC**

prof. dr hab. Janusz **KACPRZYK**

prof. dr hab. Tadeusz **NOWICKI**

prof. dr hab. Stanisław **PIASECKI**

prof. dr hab. Piotr **SZCZEPANIAK**

prof. dr hab. Tadeusz **TRZASKALIK**

doc. dr hab. Sławomir **WIERZCHOŃ**

doc. dr hab. Leszek **ZAREMBA**

Warszawa 1999

ISBN 83-85847-24-3

Przedmowa

Na niniejszą publikację składa się zbiór prac doktorantów Zaocznych Studiów Doktoranckich "Informatyka w zarządzaniu i finansach" działających przy ***Instytucie Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk***.

Prace te były referowane na konferencji BOS'98 "Rozwój średnich i małych miast w XXI wieku w Polsce: Rola badań operacyjnych i systemowych", Kutno, 8-10 czerwca 1998 r.[1], a także na seminariach Studiów Doktoranckich "Informatyka w zarządzaniu i finansach". Nad stroną merytoryczną publikacji czuwał Pan Prof. dr hab. Jerzy Hołubiec oraz grono recenzentów i opiekunów naukowych doktorantów.

Prace dotyczą głównie problemów analizy systemowej oraz jej zastosowań w dziedzinie finansów, a zwłaszcza - teorii portfela, obligacji i problemów inwestycyjnych. Niektóre prace przy analizie finansowej posługują się tzw. algorytmami genetycznymi i sieciami neuronowymi, a także modelowaniem rozmytym i strukturami fraktalnymi. Część prac dotyczy zarządzania i sterowania produkcją.

Wypada zauważyć, iż doktoranci Studiów atakują w swych pracach tematy nowoczesne i znajdujące się w obszarze tzw. frontu badawczego analizy systemów. Wypada im życzyć sukcesów i wytrwałości w pracy, która winna zakończyć się obronioną pracą doktorską.

---

[1] Głównymi organizatorami konferencji było Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych oraz Instytut Badań Systemowych PAN.

Wypada także zaznaczyć, iż wydanie niniejszej publikacji stało się możliwe dzięki wsparciu finansowemu ze strony ***Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania***, działającej w ramach Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych. Fundacja ta została założona w 1991 roku z inicjatywy Prof. L. Kuźnickiego, wówczas Sekretarza Naukowego Polskiej Akademii Nauk. Do zadań Fundacji należy, między innymi, wspieranie i promocja prac młodych pracowników nauki, a zwłaszcza prac doktorantów.

Mamy nadzieję, iż publikacja niniejsza zostanie życzliwie przyjęta przez specjalistów działających w obszarze nauk systemowych.

Rektor WSISiZ

Prof. Roman Kulikowski

Pojęcie dominacji w przypadku obligacji o stałym oprocentowaniu na rynku polskim

Joanna Olbryś
Zaoczne Studia Doktoranckie IBS PAN

1 Wstęp

Inwestor, który ma do wyboru dwa portfele obligacji w tej samej cenie oraz identycznej zapadalności powinien wybrać ten o niższej trwałości. Jeśli natomiast trwałości portfeli są równe (a przynajmniej bardzo zbliżone), powinien zdecydować się na portfel o większej wypukłości ([1], [2], [6], [9]).
Wymienione preferencje można opisać pojęciem *dominacji* ([12]). Dominacja pozwala porównywać obligacje oraz portfele obligacji pod względem stopy zwrotu związanej ze zmianami (spadkami lub wzrostami) stóp procentowych, obecnymi również na polskim rynku.
Celem pracy jest zbadanie, na podstawie przykładów z polskiego rynku obligacji o stałym oprocentowaniu z 1996 roku, czy opisany powyżej sposób wyboru portfela jest słuszny również w przypadku dużych zmian stóp procentowych. Okazuje się, że w momencie dużych zmian, większych od pewnej zmiany krytycznej, twierdzenie dotyczące doboru portfeli

staje się fałszywe.

2 Dominacja

2.1 Wprowadzenie

Niech obligacja A płaci kupony C_t po czasie t, gdzie $t \in T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $t_0(t_n)$ jest zapadalnością najkrótszej (najdłuższej) obligacji. Dla konkretnej obligacji, niektóre lub nawet większość kuponów C_t może być równa zero. Bony skarbowe o zapadalności krótszej niż rok traktujemy jak obligacje zero-kuponowe.

Obligację A identyfikujemy z ciągiem kuponów $C_{t_0}, C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}$ (dla uproszczenia ostatnią płatność traktujemy jak kupon), gdzie każdy kupon C_t ma swoją wartość inwestycyjną $C_t \cdot (1+y_t)^{-t}$, gdzie y_t jest stopą spot. Przez wartość inwestycyjną obligacji A rozumiemy sumę obecnych wartości wszystkich kuponów generowanych przez A:

$$P_A = P_A(y_{t_0}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}) = P_A(\overline{y}) = \sum_{t=t_0}^{t_n} C_t \cdot (1+y_t)^{-t} \qquad (1)$$

gdzie wektor $\overline{y} = (y_{t_0}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_n})$ jest nazywany *strukturą stóp procentowych.*

Z każdym kuponem C_t obligacji A związana jest jego waga:

$$x_t^A = \frac{C_t \cdot (1+y_t)^{-t}}{P_A}, \quad t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \qquad (2)$$

Oczywiście wszystkie wagi sumują się do 1.

W wyniku decyzji Banku Centralnego o zmianie stóp procentowych powstaje nowy wektor stóp procentowych $\overline{y} \to \overline{y} + \overline{h}$, gdzie $\overline{h}$ jest wektorem zmian.

Rozważmy teraz 4 przypadki wzajemnych zależności pomiędzy stopami procentowymi i zmianami tych stóp.

Przypadek I Jest to najogólniejszy przypadek, w którym zmiany stóp h_t spełniają zależność:

$$\frac{h_t}{1+y_t} = g_t \cdot \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}, \quad t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \tag{3}$$

Występują w niej współczynniki g_t, nieznane inwestorowi.

Przypadek II Gdy możemy ustalić dla rynku pewną stałą $0 < L < 1$ taką, że otrzymamy następujący związek między stopami procentowymi i zmianami:

$$\frac{h_t}{1+y_t} = L^{t-t_0} \cdot \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}, \quad t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \tag{4}$$

Przypadek III Jest to przypadek proporcjonalnych zmian stóp procentowych. Zmiany h_t spełniają zależność (4) dla L=1:

$$\frac{h_t}{1+y_t} = \frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}, \quad t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \tag{5}$$

Jest on równoważny Przypadkowi I z warunkiem $\forall t \;\; g_t = 1$.

Przypadek IV Jest to najprostszy przypadek, w którym stopy spot są równe, tzn. $(y_t \equiv y)$ oraz $h_t \equiv h$.

2.2 Dominacja w przypadku portfeli obligacji o stałym oprocentowaniu

Zdefiniujemy teraz pojęcie dominacji w przypadku ogólnym (Definicja 1) oraz dominację w sensie L (Definicja 2).

Definicja 1 *Mówimy, że portfel obligacji Z dominuje (ściśle dominuje) nad portfelem obligacji S gdy, wskutek dowolnej zmiany stóp procentowych*

$$\frac{dP_Z}{P_Z} \geq \frac{dP_S}{P_S} \quad \left(\frac{dP_Z}{P_Z} > \frac{dP_S}{P_S}\right)$$

W tym przypadku zapisujemy to w postaci: $Z \succeq S, \quad (Z \succ S)$.

Definicja 2 *Mówimy, że portfel obligacji Z dominuje w sensie L (ściśle dominuje w sensie L) nad portfelem obligacji S gdy, wskutek nieproporcjonalych zmiany stóp procentowych ze stałą L mamy*

$$\frac{dP_Z}{P_Z} \geq \frac{dP_S}{P_S} \quad \left(\frac{dP_Z}{P_Z} > \frac{dP_S}{P_S}\right)$$

gdzie $P_Z(P_S)$ *jest wartością inwestycyjną portfela Z(S). W takim wypadku piszemy* $Z \succeq^L S, \quad \left(Z \succ^L S\right)$.

W Przypadku III (proporcjonalnych zmian stóp procentowych (5)) otrzymujemy dominację proporcjonalną, tzn. w Definicji 2 $Z \succeq^1 S, \ (Z \succ^1 S)$.

Uwaga 1 *Jeśli Z,S są portfelami obligacji o stałym oprocentowaniu, których trwałości są równe, tzn. $D_I(Z) = D_I(S)$ natomiast dla wypukłości zachodzi nierówność $C_I(Z) > C_I(S)$ wtedy, na rzeczywistym rynku $Z \succ S$.*

Dowód : Załóżmy, że stopy procentowe y_t zmieniają się o h_t w taki sposób, że (3) zachodzi dla pewnych znanych współczynników g_t i pierwszej zmiany stóp procentowych h_{t_0}.
Wtedy, wykorzystując twierdzenie o niespodziewanej stopie zwrotu z portfela obligacji ([10])

$$\frac{dP_Z}{P_Z} = -D_I(Z)\cdot\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + C_I(Z)\cdot\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2 - R_I(Z)\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 \quad (6)$$

gdzie $R_I(S), R_I(Z)$ są resztami portfeli Z i S ([10]). w Przypadku I (3) otrzymujemy:

$$\frac{dP_Z}{P_Z}-\frac{dP_S}{P_S} = (C_I(Z)-C_I(S))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2+(R_I(S)-R_I(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2\left[(C_I(Z)-C_I(S))+(R_I(S)-R_I(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right]$$

. Zauważmy, że $Z \succ S$ jeśli $\frac{dP_Z}{P_Z} > \frac{dP_S}{P_S}$ (Definicja 1), zatem

$$\left[(C_I(Z)-C_I(S))+(R_I(S)-R_I(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] > 0 \quad (7)$$

gdzie, na podstawie założenia

$$C_I(Z)-C_I(S) > 0.$$

Okazuje się, że nierówność (7) jest prawdziwa dla dostatecznie małych zmian stóp procentowych, natomiast jest fałszywa dla zmian większych

od pewnej wartości granicznej, nazwanej *wartością krytyczną*.
W dalszej części pracy przedstawione zostaną przykłady potwierdzające tezę.

2.3 Przykłady

Przykład 1 *Struktura stóp procentowych Maj 1996 zmiany stóp procentowych spot 1996.05 - 1996.06 (w oparciu o [7]).*

stopy procentowe (0.2147; 0.2014; 0.1938; 0.1877; 0.1820)	
zmiany stóp (-0.0013; 0.0006; 0.0011; 0.0007; 0.0001)	
współczynniki g_t (1.0; -0.4666; -0.861; -0.5507; -0.0791)	
portfel Z=P_1 = $(5A_1, 4A_2)$	
obligacja A_1=OS0201=[13,13,13,13,113]	obligacja A_2=OS0601=[12,12,12,12,112]
wartość inwestycyjna P_{A_1}=82.860	wartość inwestycyjna P_{A_2}=79.820
trwałość D_{A_1}=-0.618	trwałość D_{A_2}=-0.609
wypukłość C_{A_1}=0.905	wypukłość C_{A_2}=0.871
reszta R_{A_1}=-0.777	reszta R_{A_2}=-0.745
wartość inwestycyjna portfela Z= P_1= 2028.207	
trwałość portfela Z= $\mathbf{DP_1} = -\mathbf{0.612}$	
wypukłość portfela Z= CP_1=0.884	
reszta portfela Z= RP_1=-0.758	

W Uwadze 1 mamy założenie $D_I(Z) = D_I(S)$, więc musimy dobrać taki portfel $S = P_2$ aby $D_I(P_1) = D_I(P_2)$.
Takim portfelem jest, na przykład, P_2 zawierający 13 obligacji $A_1 = OS0298 = [17, 117, 0, 0, 0]$ oraz 141 obligacji $A_2 = OS0601 = [12, 12, 12, 12, 112]$.
Trwałość portfela P_2 jest równa $\mathbf{DP_2} = -\mathbf{0.612}$.

Tak wybrany portfel P_2 spełnia również drugie założenie Uwagi 1:

$C_I(P_1) = 0.884 > 0.854 = C_I(P_2)$.

Mając zdefiniowane portfele P_1 i P_2, takie, że $D_I(P_1) = D_I(P_2)$ oraz $C_I(P_1) > C_I(P_2)$, możemy sprawdzić słuszność Uwagi 1 :

$$\left[(C_I(Z) - C_I(S)) + (R_I(S) - R_I(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.029 > 0$$

Uwaga 1 jest prawdziwa.

Przykład 2 *Struktura stóp procentowych Wrzesień 1996 zmiany stóp 1996.09 - 1996.10 (w oparciu o [7]).*

stopy procentowe (0.1966; 0.1993; 0.1949; 0.1886; 0.1815)	
zmiany stóp (0.0004; 0.0003; 0.0; -0.0003; -0.0005)	
współczynniki g_t (1.0; 0.7483; 0.0; -0.7550; -1.2660)	
portfel Z=P_1 = $(3A_1, 20A_2)$	
obligacja A_1=OS0201=[13,13,13,13,113]	obligacja A_2=OS0601=[12,12,12,12,112]
wartość inwestycyjna P_{A_1}=83.116	wartość inwestycyjna P_{A_2}=80.064
trwałość D_{A_1}=-3.681	trwałość D_{A_2}=-3.792
wypukłość C_{A_1}=14.957	wypukłość C_{A_2}=15.336
reszta R_{A_1}=-42.298	reszta R_{A_2}=-43.497
wartość inwestycyjna portfela Z= P_1= 1852.926	
trwałość portfela Z= $\mathbf{DP_1} = \mathbf{-3.772}$	
wypukłość portfela Z= CP_1=15.226	
reszta portfela Z= RP_1=-43.281	

Analogicznie jak w Przykładzie 1 musimy dobrać taki portfel $S = P_2$, aby $D_I(P_1) = D_I(P_2)$. Takim portfelem może być np. P_2 zawierający 1 obligację $A_1 = OS0201 = [13, 13, 13, 13, 113]$ oraz 4 obligacje $A_2 = OS0601 =$

$[12, 12, 12, 12, 112]$.

Trwałość portfela P_2 wynosi $\mathbf{DP_2} = \mathbf{-3.747} \approx -3.772 = \mathbf{DP_1}$.

Portfel P_2 spełnia również drugie założenie Uwagi 1:

$C_I(P_1) = 15.266 > 15.171 = C_I(P_2)$.

Mając teraz P_1 i P_2 takie, że $D_I(P_1) = D_I(P_2)$ oraz $C_I(P_1) > C_I(P_2)$,możemy zweryfikować Uwagę 1:

$$\left[(C_I(Z) - C_I(S)) + (R_I(S) - R_I(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.095 > 0$$

Wyrażenie jest dodatnie, tzn. Uwaga 1 zachodzi.

2.4 Wartość krytyczna pierwszej zmiany stóp procentowych

Uwaga 2 *Jeśli Z,S są portfelami, dla których $D_{II}(Z) = D_{II}(S)$ oraz $C_{II}(Z) > C_{II}(S$ wtedy na rzeczywistym rynku $Z \succ^L S$.*

<u>Dowód :</u> Załóżmy, że stopy procentowe y_t zmieniają się o h_t zgodnie z (4), gdzie L jest znanym współczynnikiem, natomiast h_{t_0} jest pierwszą zmianą stóp procentowych. Wtedy, wykorzystując twierdzenie o niespodziewanej stopie zwrotu z portfela obligacji ([10])

$$\frac{dP_Z}{P_Z} = -D_{II}(Z)\cdot\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}} + C_{II}(Z)\cdot\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2 - R_{II}(Z)\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 \quad (8)$$

gdzie $R_I(S), R_I(Z)$ są resztami portfeli Z i S ([10]). w Przypadku II (4) otrzymujemy:

$$\frac{dP_Z}{P_Z}-\frac{dP_S}{P_S} = (C_{II}(Z) - C_{II}(S))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2 + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)^2\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right]$$

. Ponieważ $Z \succ^L S$ gdy $\frac{dP_Z}{P_Z} > \frac{dP_S}{P_S}$ (Definicja 2), zatem

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] > 0 \quad (9)$$

oraz na mocy założenia

$$C_{II}(Z) - C_{II}(S) > 0.$$

Definicja 3 *Największą zmianę h_{t_0}, dla której (9) zachodzi, nazywamy wartością krytyczną.*

Przykład 3 *Stopy procentowe Grudzień 1996 (w oparciu o [7]), stopy zmieniające się zgodnie z (4) .*

stopy procentowe (0.1982; 0.2027; 0.1982; 0.1906; 0.1820)	
pierwsza zmiana stóp procentowych h_{t_0}=0.002	
współczynnik L=1	
kolejne zmiany stóp procentowych (0.002; 0.002; 0.002; 0.002)	
portfel Z=$P_1 = (8A_1, 5A_2)$	
obligacja A_1=OS0201=[13,13,13,13,113]	obligacja A_2=OS0601=[12,12,12,12,112]
wartość inwestycyjna P_{A_1}=82.841	wartość inwestycyjna P_{A_2}=79.802
trwałość D_{A_1}=3.890	trwałość D_{A_2}=3.936
wypukłość C_{A_1}=10.653	wypukłość C_{A_2}=10.835
reszta R_{A_1}=41.235	reszta R_{A_2}=42.053
wartość inwestycyjna portfela Z= P_1=1064.042	
trwałość portfela Z= $\mathbf{DP_1} = \mathbf{3.899}$	
wypukłość portfela Z= CP_1=10.698	
reszta portfela Z= RP_1=41.452	

W Uwadze 2 mamy założenie $D_{II}(Z) = D_{II}(S)$, więc musimy dobrać taki portfel $S = P_2$, że $D_{II}(P_1) = D_{II}(P_2)$.
Wybieramy np. portfel P_2 złożony z 3 obligacji $A_1 = OS0698 = [16, 116, 0, 0, 0]$ oraz 168 obligacji $A_2 = OS0601 = [12, 12, 12, 12, 112]$.
Trwałość portfela P_2 wynosi $\mathbf{DP_2} = \mathbf{3.893} \approx \mathbf{3.899} = \mathbf{DP_1}$.
Portfel P_2 spełnia też drugie założenie Uwagi 2 : $C_{II}(P_1) = 10.698 > 10.666 =$

$C_{II}(P_2)$.

Mając teraz zdefiniowane portfele P_1 i P_2 takie, że $D_{II}(P_1) = D_{II}(P_2)$ oraz $C_{II}(P_1) > C_{II}(P_2)$, możemy sprawdzić słuszność Uwagi 2 :

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.031 > 0$$

Uwaga 2 zachodzi .

Zmieniając teraz h_1 można ustalić *wartość krytyczną pierwszej zmiany* h_1, powyżej której Uwaga 2 jest fałszywa.

1) zmiana $h_{t_0} = 0.04 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.022 > 0$$

2) zmiana $h_{t_0} = 0.09 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.004 > 0$$

3) zmiana $h_{t_0} = 0.10 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = -0.001 < 0$$

4) zmiana $h_{t_0} = 0.098 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.000$$

zatem wartość krytyczna $h_{t_0} \approx 0.098$.

Tak duża zmiana h_{t_0} stóp procentowych y_t jest nierealna na rzeczywistym rynku.

Przykład 4 *Stopy procentowe Grudzień 1996 (w oparciu o [7]), stopy zmieniające się zgodnie z (4)* .

stopy procentowe (0.1982; 0.2027; 0.1982; 0.1906; 0.1820)	
pierwsza zmiana stóp procentowych h_{t_0}=0.002	
współczynnik L=1	
kolejne zmiany stóp procentowych (0.002; 0.002; 0.002; 0.002)	
portfel Z=P_1 = $(6A_1, 9A_2)$	
obligacja A_1=OS0201=[13,13,13,13,113]	obligacja A_2=OS0601=[12,12,12,12,112]
wartość inwestycyjna P_{A_1}=82.841	wartość inwestycyjna P_{A_2}=79.802
trwałość D_{A_1}=3.890	trwałość D_{A_2}=3.936
wypukłość C_{A_1}=10.653	wypukłość C_{A_2}=10.835
reszta R_{A_1}=41.235	reszta R_{A_2}=42.053
wartość inwestycyjna portfela Z= P_1=1217.570	
trwałość portfela Z= $\mathbf{DP_1}$ = **3.910**	
wypukłość portfela Z= CP_1=10.740	
reszta portfela Z= RP_1=41.639	

W Uwadze 2 mamy założenie $D_{II}(Z) = D_{II}(S)$, więc musimy dobrać taki portfel $S = P_2$, że $D_{II}(P_1) = D_{II}(P_2)$.

Portfel P_2 zawierający 4 obligacje $A_1 = OS0698 = [16, 116, 0, 0, 0]$ oraz 224 obligacje $A_2 = OS0601 = [12, 12, 12, 12, 112]$ spełnia to założenie i $\mathbf{DP_2 = 3.893 \approx 3.91 = DP_1}$.

Portfel P_2 spełnia również drugie założenie: $C_{II}(P_1) = 10.740 > 10.667 = C_{II}(P_2)$.

Mając zdefiniowane dwa portfele P_1 i P_2 takie, że $D_{II}(P_1) = D_{II}(P_2)$ oraz $C_{II}(P_1) > C_{II}(P_2)$, możemy zbadać prawdziwość Uwagi 2:

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z)) \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}} \right) \right] = 0.072 > 0$$

Uwaga 2 zachodzi .

Zmieniając teraz h_1 można ustalić *wartość krytyczną pierwszej zmiany* h_1, powyżej której Uwaga 2 jest falszywa.

1) zmiana $h_{t_0} = 0.09 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z)) \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}} \right) \right] = 0.009 > 0$$

2) zmiana $h_{t_0} = 0.095 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z)) \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}} \right) \right] = 0.003 > 0$$

3) zmiana $h_{t_0} = 0.10 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z)) \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}} \right) \right] = -0.002 < 0$$

4) zmiana $h_{t_0} = 0.098 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z)) \left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}} \right) \right] = 0.000$$

zatem wartość krytyczna $h_{t_0} \approx 0.098$.

Tak duża zmiana h_{t_0} stóp procentowych y_t jest nierealna na rzeczywistym rynku.

Przykład 5 *Stopy procentowe Grudzień 1996 (w oparciu o [7]), stopy zmieniające się zgodnie z (4) .*

stopy procentowe (0.1982; 0.2027; 0.1982; 0.1906; 0.1820)	
pierwsza zmiana stóp procentowych h_{t_0}=0.003	
współczynnik L=1	
kolejne zmiany stóp procentowych (0.003; 0.003; 0.003; 0.003)	
portfel Z=$P_1 = (20A_1, 4A_2)$	
obligacja A_1=OS0298=[17,117,0,0,0]	obligacja A_2=OS0201=[13,13,13,13,113]
wartość inwestycyjna P_{A_1}=95.074	wartość inwestycyjna P_{A_2}=82.841
trwałość D_{A_1}=1.851	trwałość D_{A_2}=3.890
wypukłość C_{A_1}=2.702	wypukłość C_{A_2}=10.653
reszta R_{A_1}=6.203	reszta R_{A_2}=41.441
wartość inwestycyjna portfela Z= P_1=2235.14	
trwałość portfela Z= $\mathbf{DP_1 = 2.151}$	
wypukłość portfela Z= CP_1=3.878	
reszta portfela Z= RP_1=11.421	

W Uwadze 2 mamy założenie $D_{II}(Z) = D_{II}(S)$, więc musimy dobrać taki portfel $S = P_2$, że $D_{II}(P_1) = D_{II}(P_2)$.

Portfel P_2 zawierający 30 obligacji $A_1 = OS0298 = [17, 117, 0, 0, 0]$ oraz 5 obligacji $A_2 = OS0201 = [13, 13, 13, 13, 113]$ spełnia to założenie i $\mathbf{DP_2 = 2.108} \approx \mathbf{2.151 = DP_1}$.

Portfel P_2 spełnia również drugie założenie: $C_{II}(P_1) = 3.878 > 3.707 = C_{II}(P_2)$.

Mając zdefiniowane dwa portfele P_1 i P_2 takie, że $D_{II}(P_1) = D_{II}(P_2)$ oraz $C_{II}(P_1) > C_{II}(P_2)$, możemy zbadać prawdziwość Uwagi 2:

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1 + y_{t_0}}\right)\right] = 0.167 > 0$$

Uwaga 2 zachodzi .

Zmieniając teraz h_1 można ustalić *wartość krytyczną pierwszej zmiany* h_1, powyżej której Uwaga 2 jest fałszywa.

1) zmiana $h_{t_0} = 0.09 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.022 > 0$$

2) zmiana $h_{t_0} = 0.10 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = -0.003 < 0$$

3) zmiana $h_{t_0} = 0.099 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = -0.0001 < 0$$

4) zmiana $h_{t_0} = 0.0985 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.001 > 0$$

5) zmiana $h_{t_0} = 0.0987 \Longrightarrow$

$$\left[(C_{II}(Z) - C_{II}(S)) + (R_{II}(S) - R_{II}(Z))\left(\frac{h_{t_0}}{1+y_{t_0}}\right)\right] = 0.000$$

zatem wartość krytyczna $h_{t_0} \approx 0.0987$.

Tak duża zmiana h_{t_0} stóp procentowych y_t jest nierealna na rzeczywistym rynku.

Możemy zatem wyciągnąć wniosek, że sposób wyboru portfeli inwestycyjnych opisany w Uwadze 2 jest skuteczny w normalnych warunkach rynkowych, natomiast nie jest skuteczny, gdy następują bardzo duże, gwałtowne zmiany stóp procentowych .

Bibliografia

[1] R.Brooks, B.Attinger *Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Convertible Bonds*, Financial Analysts Journal, July-August 1992

[2] M.L.Dunetz, J.M.Mahoney *Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds* Financial Analysts Journal, May-June 1988

[3] E.Elton, M.Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5th ed.Wiley, 1995

[4] L.R. Foulds. *Optimization Techniques*, Springe-Verlag, New York Inc., 1981

[5] F.J.Fabbozzi, T.D.Fabbozzi *The Handbook of Fixed Income Securities*, IRWIN, New York, 1995

[6] F.J.Fabbozzi, T.D.Fabbozzi *Bond Markets, Analysis and Strategies*, New Jersey: Prentice Hall, 1989

[7] R.Kulikowski, H.Bury, A.Jakubowski *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czsowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*, IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa 1996

[8] G.D.Latainer, D.P.Jacob *Modern Techniques for Analyzing Value and Performance of Callable Bonds*

[9] J.Mehran, G.Homaifar *Analytics of Duration and Convexity for Bonds with Embedded Options: The Case of Convertibles*, Journal of Business Finance & Accounting, Jan 1993

[10] J.Olbryś *Computing an Unanticipated Rate of Return on Bonds and Bond Portfolios*, presented at the INFORMS/IFORS/IFAC/IIASA Conference "Transition to Advanced Market Institutions and Economics", Warsaw, Poland, June 18-21, 1997

[11] K.Weiskamp *Borland Pascal: Step-by-Step*, John Wiley & Sons, Inc., 1994

[12] L.S. Zaremba *Solution of Immunization Problem in Case of Proportional Spot Rate Shifts*, Working paper WP-3-1995, Systems Research Institute, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995

WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI STOSOWANEJ I ZARZĄDZANIA

działa pod auspicjami
Polskiej Akademii Nauk

ZAŁOŻYCIELEM
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
jest
FUNDACJA KRZEWIENIA NAUK SYSTEMOWYCH
powołana z inicjatywy
Prezesa
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FUNDATOREM
Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych
jest
POLSKA AKADEMIA NAUK

ORGANEM
sprawującym nadzór
jest
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
prowadzi studia wyższe na kierunkach:
INFORMATYKA
ZARZĄDZANIE I MARKETING

SIEDZIBA
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-85847-24-3