POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA METOD ILOŚCIOWYCH I TECHNIK INFORMATYCZNYCH WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY DECYZYJNE

Redakcja:
Jan Studziński
Ludosław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz

ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA METOD ILOŚCIOWYCH I TECHNIK INFORMATYCZNYCH WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY DECYZYJNE

Redakcja:

Jan Studziński
Ludosław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz

Wydanie tej publikacji było możliwe dzięki pomocy finansowej MINISTERSTWA NAUKI I SZKOLNICTWA WYŻSZEGO.

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju i zastosowań metod, modeli, technik i systemów informatycznych w procesach podejmowania decyzji. Kilka artykułów przedstawia rezultaty projektów badawczych finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego i realizowanych przez polskie instytucje badawcze.

Recenzenci:

Prof. Olgierd Hryniewicz
Prof. Andrzej Straszak
Dr hab. Jan Studziński

Komputerowa edycja tekstu: Anna Gostyńska

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
Newelska 6, PL 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw
e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl

ISBN 83-894-7506-5
9788389475060
ISSN 0208-8029

ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA METOD ILOŚCIOWYCH I TECHNIK INFORMATYCZNYCH WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY DECYZYJNE

Instytut Badań Systemowych • Polska Akademia Nauk
Seria: Badania Systemowe
Tom 49

Redaktor Naukowy:

Prof. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2006

ZASTOSOWANIE METOD KOLEJNYCH ELIMINACJI DO WYZNACZANIA OCENY GRUPOWEJ

Hanna BURY, Dariusz WAGNER
Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk
<bury@ibspan.waw.pl, D.Wagner@ibspan.waw.pl>

Streszczenie: *W pracy przedstawiono wyznaczanie oceny grupowej za pomocą metod kolejnych eliminacji. Są one stosowane wówczas, gdy należy wyznaczyć obiekt najlepszy (obiekty najlepsze) a kolejność obiektów nie jest istotna. Przedstawiono następujące metody: Nansona, Hare'a, Coombsa i Arrowa-Raynauda. Podano przykład numeryczny ilustrujący zastosowanie każdej z omawianych metod. Ponadto, na innym przykładzie pokazano trudności, jakie mogą wystąpić przy ich stosowaniu.*

Słowa kluczowe: Decyzje grupowe, oceny ekspertów, metody kolejnych eliminacji.

1. Wstęp

W procesie wyznaczania oceny grupowej na podstawie ocen podanych przez ekspertów istotną rolę odgrywa ustalenie sposobu jej określania. Wiadomo, że różne metody, zastosowane do tego samego zbioru opinii ekspertów, prowadzą do wyników, które są trudne do akceptacji. Przekonywujące przykłady takich sytuacji podał D.G. Saari (1995). Mamy wówczas do czynienia z tzw. paradoksami teorii głosowania. Obszernego przeglądu tych paradoksów dokonał Nurmi (1992).

Do najbardziej znanych należy paradoks Condorceta, wynikający z braku przechodniości opinii ekspertów. Mniej znany jest paradoks (tzw. rank reversal) polegający na odwróceniu kolejności obiektów po zmianie liczby rozważanych obiektów, mimo, że nie nastąpiła zmiana preferencji ekspertów względem pierwotnego zbioru obiektów. Tego typu paradoks ma bogatą literaturę dotyczącą zastosowań metody Saaty'ego (Dyer, 1990).

Próby znalezienia uniwersalnej, niezawodnej metody wyznaczania oceny grupowej są raczej skazane na niepowodzenie. Świadczy o tym dyskusja między zwolennikami metody Condorceta oraz metody Bordy. Interesujące porównanie tych metod przedstawił Risse (2005). Analiza wad i zalet poszczególnych metod jest ważna z uwagi na konieczność świadomego doboru metody wyznaczania oceny grupowej do rozpatrywanego zadania ekspertyzy.

Istotną rolę odgrywa również stopień podatności na manipulacje, bowiem z twierdzeń Gibbarda (1973) i Satterthwaite'a (1975) wynika, że nie ma metod w pełni odpornych na takie działania.

2. Określanie zwycięzcy metodą kolejnych eliminacji

Ocena grupowa może sprowadzać się do wyboru najlepszego obiektu (obiektów) lub uporządkowania całego zbioru obiektów. W pewnych sytuacjach nie zachodzi potrzeba ustalenia kolejności wszystkich obiektów a jedynie zwycięzców. Przykładem są wybory do ciał przedstawicielskich lub na urząd np. prezydenta.

W grupie metod wyznaczania oceny grupowej, które mogą być stosowane w takim przypadku, na uwagę zasługują metody kolejnych eliminacji. Najprostszy przykład stanowią metody, w których zwycięzcę wyznacza się, co najwyżej w dwóch turach. Zwycięzcą pierwszej tury zostaje ten kandydat, który uzyska większość (w sensie przyjętej definicji) głosów. Jeżeli żaden z kandydatów nie uzyska wymaganej liczby głosów, w drugiej turze zwycięża ten, który uzyska największą liczbę głosów. Taka metoda jest stosowana w wyborach prezydenckich np. w Polsce i we Francji. Bardziej złożone, ale wywodzące się z tych samych założeń, są metody Hare'a (Hare, 1861; Lambert, Lakeman, 1955) i Coombsa (Nurmi, 1987). Należy zaznaczyć, że metoda Hare'a w swym oryginalnym sformułowaniu była przeznaczona do wyboru ciała przedstawicielskiego składającego się z zadanej liczby osób. W pracy Nurmiego (1987) a za nim w pracy autorów (Bury, Wagner, 2004a) przedstawiona jest wersja zmodyfikowana, uwzględniająca wybór tylko jednego przedstawiciela.

Zostaną również omówione metody: Nansona i jej modyfikacja podana przez Baldwina oraz metoda Arrowa-Raynauda.

W pracy ograniczymy się do zagadnień dotyczących wyznaczania oceny grupowej na podstawie ocen ekspertów podanych w postaci uporządkowań.

1.1. Sformułowanie zadania

Załóżmy, że jest dany zbiór n obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$ oraz grupa K ekspertów. Zadaniem ekspertów jest uporządkowanie zbioru obiektów zgodnie z danym kryterium (zbiorem kryteriów). Zakładamy również, że opinie ekspertów są podawane w skali porządku a w uporządkowaniach ekspertów nie występują obiekty równoważne.

Przyjmujemy, że opinia eksperta o numerze k (k=1, ..., K) ma postać uporządkowania P^k, w którym obiekt uważany za najlepszy jest umieszczony na pierwszym miejscu; na ostatnim miejscu umieszczony jest obiekt uznany za najgorszy.

$$P^k = \{O_{i_1^k}, \ldots, O_{i_n^k}\}, \quad k = 1, \ldots K, \tag{1}$$

gdzie $O_{i_j^k}$ oznacza obiekt umieszczony przez k-tego eksperta na j-tym miejscu w uporządkowaniu.

Zgodnie z założeniem o braku obiektów równoważnych, liczba pozycji w uporządkowaniu jest równa liczbie obiektów.

Niech l_{ij} oznacza liczbę ekspertów, którzy uznali, że obiekt O_i jest lepszy od obiektu O_j. Dla uproszczenia zapisu będziemy stosować oznaczenie $O_i \succ O_j$. Przy przyjętych założeniach liczba ekspertów, którzy wyrazili przeciwną opinię, to znaczy uznali, że $O_j \succ O_i$ jest równa $l_{ji} = K - l_{ij}$, $i, j = 1,\ldots,n$. Przyjmujemy również, że $l_{ii} = 0$, $i=1, \ldots, n$.

Załóżmy, że dana jest macierz rozkładu głosów ekspertów, skonstruowana na podstawie ocen podanych w postaci uporządkowań.

$$L = \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & O_1 & O_2 & \cdots & O_n & WB_i \\
\hline
O_1 & 0 & l_{12} & \cdots & l_{1n} & \sum_{j=1}^{n} l_{1j} \\
\hline
O_2 & l_{21} & 0 & \cdots & l_{2n} & \sum_{j=1}^{n} l_{2j} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
O_n & l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 0 & \sum_{j=1}^{n} l_{nj}
\end{array} \tag{2}$$

Na podstawie sumy elementów danego wiersza macierzy L można wyznaczyć wskaźnik Bordy WB_i. Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt O_i, dla którego $WB_i = WB_{max}$. W myśl metody Bordy uporządkowanie zbioru obiektów $\mathcal{O}=\{O_1, O_2,\ldots, O_n\}$ wyznaczają malejące wartości wskaźników WB_i.

Pojęcie większości ekspertów K_w definiujemy zazwyczaj następująco

$$K_w = \begin{cases} \dfrac{K+1}{2} & \text{dla K nieparzystych} \\ \dfrac{K}{2}+1 & \text{dla K parzystych} \end{cases} . \tag{3}$$

Zwycięzcą w sensie Condorceta jest obiekt O_i, dla którego $l_{ij} > K_w$ dla $j = 1, \ldots n, j \neq i$.

Powszechnie wiadomo, że zwycięzcy w sensie Condorceta i Bordy mogą się różnić. Podejmowane są zatem próby innego sformułowania pojęcia większości, które pozwoliłoby usunąć tę niezgodność (Baharad, Nitzan, 2003).

1.2. Metoda Arrowa - Raynaud

Aby uniknąć wad metody Bordy, związanych ze zmianą oceny grupowej przy zmianie liczby ekspertów, Arrow i Raynaud (1986), zaproponowali następujące postępowanie opisane m.in. przez Lansdowne'a (1997).

- Metoda prymalna

Założmy, że dana jest macierz rozkładu głosów ekspertów L. W celu uwzględnienia zmian wymiaru macierzy L w kolejnych krokach algorytmu wprowadzimy notację L^{n-r+1}, gdzie r = 1, ... oznacza kolejne kroki algorytmu. W kroku r dla każdego wiersza macierzy L^{n-r+1} określa się

$$l_{i\,max} = \max_{j} l_{ij} \quad i = 1,..., n - r + 1 \tag{4}$$

to znaczy dla każdego obiektu O_i wyznacza się największą liczbę głosów, jaką uzyskał ten obiekt w porównaniach parami z innymi obiektami. Obiekt $O_{i_{n-r+1}}$, dla którego $l_{i_{n-r+1}} = \min_{i} l_{i\,max}$ jest ustawiany na pozycji n – r + 1. Z macierzy L^{n-r+1} wykreśla się wiersz i kolumnę odpowiadające temu obiektowi.

Następnie zwiększa się wartość r o 1 i ponownie wyznacza się $l_{i\,max}$. Postępowanie to powtarza się aż do ustalenia zwycięzcy, tzn obiektu, który zajmuje pierwszą pozycję.

- Metoda dualna

Postępowanie jest analogiczne do opisanego powyżej z tym, że w kroku r dla każdej kolumny macierzy L^{n-r+1} wyznacza się

$$l_{j\,min} = \min_{i} l_{ij} \quad i = 1,..., n - r + 1 \tag{5}$$

to znaczy dla każdego obiektu O_j wyznacza się najmniejszą liczbę głosów, jaką uzyskał ten obiekt w porównaniach parami z innymi obiektami Obiekt $O_{j_{n-r+1}}$, dla którego $l_{j_{n-r+1}} = \max_{j} l_{j\,min}$ ustawia się na pozycji n - r + 1. Z macierzy L^{n-r+1} wykreśla się wiersz i kolumnę odpowiadające temu obiektowi.

Następnie zwiększa się o 1 wartość r i ponownie wyznacza się $l_{j\,min}$. Postępowanie to powtarza się aż do ustalenia zwycięzcy, tzn obiektu, który zajmuje pierwszą pozycję.

1.3. Metody Nansona i Baldwina

Obiekt najlepszy w sensie Nansona (Nanson, 1882) jest wyznaczany następująco. Na podstawie podanych przez ekspertów uporządkowań zbioru obiektów wyznaczane są wartości wskaźnika Bordy oraz ich średnia. Następnie obiekt/ obiekty o wartościach wskaźnika Bordy mniejszych lub równych średniej są usuwane z uporządkowań ekspertów oraz są wyznaczane wartości wskaźnika Bordy. Ponownie obiekt/ obiekty o wartościach wskaźnika Bordy mniejszych lub równych średniej są usuwane z uporządkowań ekspertów. Postępowanie to jest powtarzane do momentu uzyskania jednoelementowego zbioru obiektów (lub zbioru obiektów o jednakowych wartościach wskaźnika Bordy), który jest zwycięzcą (które są zwycięzcami) w sensie Nansona.

Joseph M. Baldwin (1926) zaproponował modyfikację metody Nansona polegającą ma zmianie zasady eliminacji obiektów. W każdym kroku usuwany jest obiekt o najmniejszej wartości wskaźnika Bordy. Należy zaznaczyć, że procedura eliminacji obiektów może prowadzić do niejednoznacznych wyników w sytuacji, gdy w danym kroku algorytmu kandydatami do eliminacji jest kilka obiektów. W zależności od przyjętej kolejności eliminacji tych obiektów można uzyskać różne wyniki.

1.4. Metody Hare'a i Coombsa

Obiekty najlepsze w sensie Hare'a (Hare, 1861; Lambert, Lakeman, 1955) i Coombsa (Nurmi, 1987) wyznaczane są następująco. W zbiorze obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$ należy określić obiekt, który został umieszczony na pierwszym miejscu przez największą liczbę ekspertów. Jeżeli więcej niż połowa ekspertów umieściła dany obiekt na pierwszym miejscu, to jest on zwycięzcą zarówno w sensie Hare'a, jak i Coombsa. Jeżeli nie ma takiego obiektu, wówczas ze wszystkich uporządkowań podanych przez ekspertów należy usunąć:

- w metodzie Hare'a - obiekt umieszczony na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów,
- w metodzie Coombsa – obiekt umieszczony na ostatnim miejscu przez największą liczbę ekspertów.

Następnie należy ponownie określić te obiekty, które zostały umieszczone na pierwszym miejscu przez największą liczbę ekspertów. Procedura jest powtarzana do momentu uzyskania jednoelementowego zbioru obiektów. Należy zauważyć, że wybór obiektu wskazanego jako najlepszy (najgorszy) przez największą liczbę ekspertów nie musi być jednoznaczny. Wówczas należy przeanalizować wszystkie dopuszczalne warianty porządkowania obiektów.

3. Przykłady

W przykładzie 1 pokazano zastosowanie każdej z omawianych metod. Przykład 2 ilustruje trudności, jakie mogą wystąpić przy ich stosowaniu. Przykład 3, zaczerpnięty z pracy Nurmiego (2002), pokazuje brak monotoniczności metod Nansona i Hare'a. Monotoniczność metody jest tutaj rozumiana jako brak zmiany zwycięzcy przy zwiększeniu liczby osób popierających tę kandydaturę (Nurmi, (1987).

3.1. Przykład 1.

Przykład ten został wykorzystany w pracy Saariego (Saari, 2000a) do ilustracji metody Arrowa-Raynauda. W Tabeli 1 przedstawiono uporządkowania zbioru 4 obiektów podane przez 76 ekspertów

Tabela 1

L. uporządkowań	Uporządkowania
23	$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$
6	$O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4$
3	$O_4 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_1$
11	$O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_1$
7	$O_2 \succ O_1 \succ O_4 \succ O_3$
9	$O_2 \succ O_4 \succ O_1 \succ O_3$
5	$O_4 \succ O_1 \succ O_2 \succ O_3$
6	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$
6	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$

Macierz rozkładu głosów ekspertów jest następująca:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & WB_i \\ \hline O_1 & 0 & 40 & 62 & 48 & 150 \\ O_2 & 36 & 0 & 76 & 62 & 174 \\ O_3 & 14 & 0 & 0 & 40 & 54 \\ O_4 & 28 & 14 & 36 & 0 & 78 \end{array} \tag{6}$$

Większość $K_w = 76/2 + 1 = 39$. Zwycięzcą w sensie Condorceta jest obiekt O_1, zaś metoda Bordy daje uporządkowanie O_2, O_1, O_4, O_3.

- Zastosowanie prymalnej metody Arrowa-Raynaud

Dla każdego wiersza macierzy rozkładu głosów ekspertów L^4 wyznaczamy $l_{i\,max} = \max\limits_j l_{ij}$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & l_{imax} \\ \hline O_1 & 0 & 40 & 62 & 48 & 62 \\ O_2 & 36 & 0 & 76 & 62 & 76 \\ O_3 & 14 & 0 & 0 & 40 & 40 \\ O_4 & 28 & 14 & 36 & 0 & 36 \end{array} \tag{7}$$

Minimalna wartość l_{imax} wynosi 36 dla i=4, co oznacza, że obiekt O_4 ustawiamy na 4 pozycji w uporządkowaniu oraz usuwamy z macierzy L^4 wiersz i kolumnę odpowiadające temu obiektowi.

W wyniku otrzymujemy macierz L^3

	O_1	O_2	O_3	l_{imax}
O_1	0	40	62	62
O_2	36	0	76	76
O_3	14	0	0	14

(8)

Minimalna wartość l_{imax} wynosi 14 dla i=3, co oznacza, że obiekt O_3 ustawiamy na 3 pozycji w uporządkowaniu oraz usuwamy z macierzy L^3 wiersz i kolumnę odpowiadające temu obiektowi.

W wyniku otrzymujemy macierz L^2

	O_1	O_2	l_{imax}
O_1	0	40	40
O_2	36	0	36

(9)

Minimalna wartość l_{imax} wynosi 36 dla i=2. Obiekt O_2 ustawiamy na 2 pozycji w uporządkowaniu oraz obiekt O_1 na pozycji pierwszej.

Metoda Arrowa-Raynaud daje więc uporządkowanie O_1, O_2, O_3, O_4.

- <u>Zastosowanie dualnej metody Arrowa-Raynaud</u>

Dla każdej kolumny macierzy rozkładu głosów ekspertów L^4 wyznaczamy $l_{j\,min} = \min\limits_{i} l_{ij}$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	0	40	62	48
O_2	36	0	76	62
O_3	14	0	0	40
O_4	28	14	36	0
$l_{j\,min}$	14	0	36	40

(10)

Maksymalna wartość $l_{j\,min}$ wynosi 40 dla j=4, co oznacza, że obiekt O_4 ustawiamy na 4 pozycji w uporządkowaniu oraz z macierzy L^4 usuwamy wiersz i kolumnę odpowiadające temu obiektowi.

W wyniku otrzymujemy macierz L^3

	O_1	O_2	O_3
O_1	0	40	62
O_2	36	0	76
O_3	14	0	0
$l_{j\,min}$	14	0	62

(11)

Maksymalna wartość $l_{j\,min}$ wynosi 62 dla j=3, co oznacza, że obiekt O_3 ustawiamy na 3 pozycji w uporządkowaniu oraz usuwamy z macierzy L^3 wiersz i kolumnę odpowiadające temu obiektowi.

W wyniku otrzymujemy macierz L^2

	O_1	O_2
O_1	0	40
O_2	36	0
$l_{j\,min}$	36	40

(12)

Maksymalna wartość $l_{j\,min}$ wynosi 40 dla j=2. Obiekt O_2 ustawiamy na 2 pozycji w uporządkowaniu oraz obiekt O_1 na pozycji pierwszej.

Otrzymany wynik pokrywa się z uzyskanym przy użyciu metody prymalnej.

- Zastosowanie metody Nansona

Wyznaczamy średnią wartość wskaźnika Bordy. Dla 76 uporządkowań 4 obiektów wynosi ona 114[1)]. Z macierzy porównań parami usuwamy obiekty, dla których wartość wskaźnika Bordy jest mniejsza lub równa średniej. Są to obiekty O_3 i O_4.

W wyniku otrzymujemy

	O_1	O_2	WB_i
O_1	0	40	40
O_2	36	0	36

(13)

Średnia wartość wskaźnika Bordy wynosi teraz 38, co oznacza, że usuwamy z uporządkowań obiekt O_2. Zwycięzcą jest obiekt O_1, co jest zgodne z twierdzeniem Nansona (Nurmi ((1987)), że jeżeli istnieje zwycięzca w sensie Condorceta, to metoda Nansona również wskazuje go jako zwycięzcę.

- Zastosowanie metody Baldwina

Z macierzy porównań parami usuwamy obiekt z minimalną liczbą punktów Bordy – jest to O_3. W wyniku otrzymujemy

	O_1	O_2	O_4	WB_i
O_1	0	40	48	88
O_2	36	0	62	98
O_4	28	14	0	42

(14)

---

1) W przypadku ogólnym mamy $\sum_{i=1}^{n} WB_i = \frac{(n-1)K+K}{2}(n-1)$. A zatem wartość średnia

$$\overline{WB_i} = \frac{n(n-1)K}{2n} = (n-1)\frac{K}{2}.$$

Następnie z macierzy porównań parami usuwamy kolejny obiekt z minimalną liczbą punktów Bordy – jest to O_4. W wyniku otrzymujemy

$$\begin{array}{c|cc|c} & O_1 & O_2 & WB_i \\ \hline O_1 & 0 & 40 & 40 \\ O_2 & 36 & 0 & 36 \end{array} \tag{15}$$

Z macierzy porównań parami usuwamy O_2; zwycięzcą zostaje O_1.

- Zastosowanie metody Hare'a

Określamy, ilu ekspertów umieściło wybrany obiekt na pierwszym miejscu:

Tabela 2.

Obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4
L. pierwszych miejsc	35	33	0	8

Żaden z obiektów nie został umieszczony na pierwszym miejscu przez większość tj. 39 ekspertów. Z uporządkowań należy usunąć obiekt umieszczony na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów; jest to O_3. W wyniku otrzymujemy

Tabela 3.

L. uporządkowań	Uporządkowania
23	$O_1 \succ O_2 \succ O_4$
6	$O_2 \succ O_1 \succ O_4$
3	$O_4 \succ O_2 \succ O_1$
11	$O_2 \succ O_4 \succ O_1$
7	$O_2 \succ O_1 \succ O_4$
9	$O_2 \succ O_4 \succ O_1$
5	$O_4 \succ O_1 \succ O_2$
6	$O_1 \succ O_4 \succ O_2$
6	$O_1 \succ O_2 \succ O_4$

Ponownie należy określić, ilu ekspertów umieściło dany obiekt na pierwszym miejscu.

Tabela 4.

Obiekt	O_1	O_2	O_4
L. pierwszych miejsc	35	33	8

Ponieważ żaden z obiektów nie został umieszczony na pierwszym miejscu przez większość ekspertów, z uporządkowań należy usunąć obiekt umieszczony na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów; jest to O_4. W wyniku otrzymujemy

Tabela 5

L. uporządkowań	Uporządkowania
23	$O_1 \succ O_2$
6	$O_2 \succ O_1$
3	$O_2 \succ O_1$
11	$O_2 \succ O_1$
7	$O_2 \succ O_1$
9	$O_2 \succ O_1$
5	$O_1 \succ O_2$
6	$O_1 \succ O_2$
6	$O_1 \succ O_2$

Tabela 6.

Obiekt	O_1	O_2
L. pierwszych miejsc	40	36

Zwycięzcą w sensie Hare'a zostaje obiekt O_1 umieszczony na pierwszy miejscu przez większość ekspertów.

- Zastosowanie metody Coombsa

Z Tabeli 2 wynika, że żaden z obiektów nie został umieszczony na pierwszym miejscu przez większość ekspertów. Należy określić, ilu ekspertów umieściło poszczególne obiekty na ostatnim miejscu.

Tabela 7.

Obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4
L. ostatnich miejsc	14	0	33	29

Z uporządkowań usuwamy obiekt umieszczony na ostatnim miejscu przez największą liczbę ekspertów; jest to O_3. W wyniku otrzymujemy tabelę zgodną z Tabelą 3. Z Tabeli 4 wynika, że żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszym miejscu przez większość ekspertów. Aby wskazać, który obiekt należy usunąć z uporządkowań, należy ponownie określić, ilu ekspertów umieściło poszczególne obiekty na ostatnim miejscu.

Tabela 8.

Obiekt	O_1	O_2	O_4
L. ostatnich miejsc	23	11	42

Usuwamy obiekt O_4, w wyniku otrzymujemy tabelę zgodną z Tabelą 5. Obiekt O_1 został umieszczony na pierwszym miejscu przez większość ekspertów (Tabela 6), jest więc zwycięzcą w sensie Coombsa.

- Zastosowanie metody profili Saariego

W cytowanej już pracy Saari (2000a) podał twierdzenie, że w przypadku tzw. profili podstawowych metoda Bordy i metoda Arrowa-Raynaud prowadzą do tych samych wyników. Często zdarza się jednak, że te dwie metody dają różne rezultaty; jest to efektem podatności metody Arrowa-Raynaud na występowanie tzw. profili Condorceta.

Saari (2000a,b) zaproponował następujące podejście.

Załóżmy, że t_j oznacza liczbę ekspertów, których opinia ma postać uporządkowania P^j, $(j=1,...n!)$. Jeżeli liczba ekspertów, których opinie bierzemy pod uwagę jest równa K, to

$$\sum_{j=1}^{n!} t_j = K . \tag{16}$$

Profilem T będziemy nazywać wektor o n! składowych t_j $T = (t_1, ..., t_{n!})$.

Przy przyjętych założeniach profil zawiera pełny opis wyników ekspertyzy.

Można sformułować zadanie przedstawienia tego profilu jako sumy profili składowych. Ich liczba i postać zależą od n (Saari (2000a,b), Bury, Wagner (2004b)).

Dla celów przedstawianej analizy ograniczymy się do rozważania jedynie profilu podstawowego B^n oraz profilu Condorceta C^Q.

Profil T można więc zapisać w postaci

$$T^n = \sum_{j=1}^{n} b_j B_j^n + \sum_{q=1}^{Q} c_q C_q^n + (...) \tag{17}$$

gdzie

$$B^n = \sum_{j=1}^{n} b_j B_j^n \tag{18}$$

B_j^n - składowa podstawowa odpowiadająca obiektowi O_j $(j=1, ..., n)$,

$$\text{przy czym } \sum_{j=1}^{n} B_j^n = 0 , \tag{19}$$

$$C^Q = \sum_{q=1}^{Q} c_q C_q^n \tag{20}$$

C_q^n - profil Condorceta odpowiadający cyklowi q $(q=1, ..., Q)$,

$$\text{gdzie } Q = \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

oraz b_j, c_q stałe współczynniki.

Wartości tych współczynników decydują o wpływie poszczególnych składowych na postać oceny grupowej. Im większa wartość współczynnika, tym wpływ odpowiadającej mu składowej jest większy. Duża wartość współczynnika c_q sugeruje, że ocena grupowa będzie się różnić od wyznaczonej przy użyciu metody Bordy.

Rozpatrywany przykład (Tabela 1) dotyczy 4 obiektów. Z zależności (19) wynika, że należy uwzględnić tylko trzy profile B_j^4 oraz $Q = \binom{3}{2}$ =3 profile Condorceta. Suma profili podstawowych i Condorceta ma postać

$$b_1 B_1^4 + b_2 B_2^4 + b_3 B_3^4 + c_1 C_1^4 + c_2 C_2^4 + c_3 C_3^4 \tag{22}$$

gdzie

B_j^4 - profil podstawowy odpowiadający obiektowi O_j a C_q^4 profil Condorceta odpowiadający kolejnym cyklom Condorceta (q=1, 2, 3).

Wykorzystując podejście przedstawione przez Saariego (2000a) oraz w pracy Bury, Wagner (2005) można wyznaczyć współczynniki b_j i c_j. Są one jak następuje:

$$b_1^1 = 3, \quad b_2^1 = 4, \quad b_3^1 = -1; \qquad c_1 = 4, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0\,. \tag{23}$$

Jeżeli zamiast składowych B_1^4, B_2^4, B_3^4 uwzględnimy składowe B_1^4, B_2^4, B_4^4, to współczynniki b_1^2, b_2^2, b_4^2 będą równe

$$b_1^2 = (b_1^1 - b_3^1) = 3-(-1) = 4, \quad b_2^2 = (b_2^1 - b_3^1) = 4-(-1) = 5, \quad b_4^2 = -\,b_3^2 = 1\,. \tag{24}$$

Wynik ten jest zgodny z przedstawionym przez Saariego (2000a).

Fakt, że współczynnik c_1 przy składowej Condorceta odpowiadającej pierwszemu cyklowi ma dużą wartość świadczy o dużym wpływie tej składowej. Uzasadnia to różnicę między zwycięzcą w sensie Bordy (obiekt O_2) a zwycięzcą w sensie Arrowa-Raynauda (obiekt O_1).

3.2. Przykład 2.

Rozważmy następujące uporządkowania zbioru 5 obiektów podane przez 11 ekspertów.

Tabela 9.

L. uporządkowań	Uporządkowania
4	$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_5$
1	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_5$
1	$O_3 \succ O_1 \succ O_2 \succ O_5 \succ O_4$
5	$O_5 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_1$

Macierz porównań parami ma postać:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & WB_i \\ \hline O_1 & 0 & 6 & 5 & 6 & 6 & 23 \\ O_2 & 5 & 0 & 5 & 6 & 6 & 22 \\ O_3 & 6 & 6 & 0 & 5 & 6 & 23 \\ O_4 & 5 & 5 & 6 & 0 & 5 & 21 \\ O_5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 0 & 21 \end{array} \tag{25}$$

Większość ekspertów K_w=(11+1)/2=6. Z (25) wynika, że nie istnieje zwycięzca w sensie Condorceta, metoda Bordy podaje kolejność obiektów (O_1, O_3), O_2, (O_4, O_5).

Metoda Arrowa Raynauda zawodzi, ponieważ nie można jednoznacznie wyznaczyć $l_{i_{n-r+1}} = \min\limits_i l_{i\max}$ ani $l_{j_{n-r+1}} = \max\limits_j l_{j\min}$.

Metoda Nansona wskazuje jako zwycięzcę obiekt O_3.

Metoda Baldwina w zależności od kolejności eliminacji obiektów wskazuje jako zwycięzcę obiekt O_1 lub O_3 lub O_4.

Metoda Hare'a wskazuje jako zwycięzcę obiekt O_1.

Metoda Coombsa w zależności od kolejności eliminacji obiektów wskazuje obiekt O_3 lub O_4 lub O_5.

3.3. Przykład 3

Przykład ten został podany przez Nurmiego (2002) w celu pokazania braku monotoniczności metody Nansona. Rozważmy następujące uporządkowania zbioru 4 obiektów podane przez 100 ekspertów.

Tabela 10.

L. uporządkowań	Uporządkowania
30	$O_3 \succ O_1 \succ O_4 \succ O_2$
21	$O_2 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_1$
20	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
12	$O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4$
12	$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$
5	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$

Macierz porównań parami ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	WB_i
O_1	0	67	49	79	195
O_2	33	0	53	65	151
O_3	51	47	0	59	157
O_4	21	35	41	0	97

(26)

Zwycięzcą w sensie Nansona i Hare'a jest obiekt O_1, zwycięzcą w sensie Baldwina I Coombsa jest obiekt O_3. Metoda Arrowa-Raynaud wskazuje jako zwycięzcę obiekt O_1.

Załóżmy, że 12 ekspertów zmodyfikowało swoje uporządkowania zamieniając miejscami obiekty O_1 i O_2: zamiast $O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4$

podało kolejność

$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$.

Po tej zmianie macierz porównań parami ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	WB_i
O_1	0	79	49	79	207
O_2	21	0	53	65	139
O_3	51	47	0	59	157
O_4	21	35	41	0	97

(27)

Zwycięzcą w sensie Nansona i Hare'a jest teraz obiekt O_3 – niewielka zmiana opinii ekspertów spowodowała istotną zmianę oceny grupowej. Wyniki pozostałych metod nie uległy zmianie.

4. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono metody, w których ocenę grupową w postaci najlepszego obiektu (obiektów) wyznacza się metodą kolejnych eliminacji. Stosowanie tych metod nie nastręcza specjalnych trudności, może być jednak uciążliwe w sytuacji, gdy proces wyznaczania oceny grupowej ulega silnemu rozgałęzieniu (na danym etapie procedury występuje kilku kandydatów do wyeliminowania). Podane przykłady numeryczne pokazują, że nawet tak proste metody wyznaczania oceny grupowej mogą - przy tych samych opiniach ekspertów – prowadzić do różnych wyników. Możliwość wystąpienia takich sytuacji musi być brana pod uwagę, gdy decydujemy się na wybór konkretnej metody wyznaczania oceny grupowej dla danego zadania ekspertyzy. Znajomość wad i zalet poszczególnych metod może ułatwić dokonanie tego wyboru.

Literatura

Baharad E., Nitzan S. (2003) The Borda rule, Condorcet consistency and Condorcet stability. *Economic Theory*, **22**: 685-688.

Baldwin J.M. (1926) The technique of the Nanson preferential majority system of election. *Proceedings of the Royal Society of Victoria*. n.s.39: 42-52.

Bury H., Wagner D. (2004a) Wybrane algorytmy pozycyjne wyznaczania oceny grupowej. W: *Wspomaganie informatyczne rozwoju społeczno-gospodarczego i ochrony środowiska*, pod red. J. Studzińskiego, L. Drelichowskiego, O. Hryniewicza, PAN, IBS, Warszawa

Bury H., Wagner D. (2004b) Analiza ocen ekspertów metodą Saariego. Przypadek czterech obiektów. W: *Badania operacyjne i systemowe, podejmowanie decyzji - podstawy teoretyczne i zastosowania*, pod red. R. Kulikowskiego, J. Kacprzyka, R. Słowińskiego, EXIT, Warszawa

Bury H., Wagner D. (2005) Interpretacja ocen ekspertów przy użyciu profili Saariego. *Materiały XV Krajowej Konferencji Automatyki*, pod red. Z. Bubnickiego, R. Kulikowskiego, J. Kacprzyk.

Dyer J.S. (1990) Remarks on the analytic hierarchy process. *Management Science*, **36**, 3.

Gibbard A. (1973) Manipulation of voting schemes. *Econometrica*, **41**.

Hare T. (1861) *The Election of Representatives, Parliamentary and Municipal. A Treatise*. Longman, Green, London.

Lambert J., Lakeman E. (1955) *Voting in Democracies*. London, Faber.

Lansdowne Z.F. (1997) Outranking methods for multicriterion decision making: Arrow's and Raynaud's conjecture. *Social Choice and Welfare*, **14**: 125-128.

Nanson E. (1882) Methods of Election. *Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria*, **18**: 197-240.

Nurmi H. (1987) *Comparing Voting Systems*. Dordrecht, D.Reidel.

Nurmi H. (1992) *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Nurmi H. (2002) *Voting Procedures under Uncertainty*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Risse M. (2005) Why the count de Borda cannot beat theMarquis de Condorcet, *Social Choice and Welfare*, **25**: 95-113.

Saari D.G. (1995) *Basic Geometry of Voting*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

Saari D.G. (2000a) Mathematical structure of voting paradoxes I. Pairwise votes. *Economic Theory*, **15**: 1-53.

Saari D.G. (2000b) Mathematical structure of voting paradoxes II. Positional votes. *Economic Theory*, **15**: 55-102.

Satterthwaite M. (1975) Strategy-proofness and Arrow's conditions. *Journal of Economic Theory*, **10**.

APPLICATION OF MULTISTAGE METHODS OF DETERMINING GROUP JUDGEMENT

Abstract: *In the paper multistage methods of determining group judgement are presented. They are used in the case when one is interested in finding the winning alternative (alternatives). The following methods are presented: Nanson, Hare, Coombs, Arrow-Raynaud. A numerical example is given to illustrate the methods mentioned. An other example is presented to point out difficulties encountered when applying these methods.*

Keywords: Group decision, expert judgement, multistage methods.

Jan Studziński, Ludosław Drelichowski, Olgierd Hryniewicz
(Redakcja)

ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA METOD ILOŚCIOWYCH I TECHNIK INFORMATYCZNYCH WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY DECYZYJNE

Monografia zawiera wybór artykułów dotyczących informatyzacji procesów zarządzania, prezentując aktualny stan rozwoju informatyki stosowanej w Polsce i na świecie. Zamieszczone artykuły opisują metody, modele, techniki i systemy informatyczne stosowane do wspomagania procesów podejmowania decyzji, a także omawiają zastosowania narzędzi informatycznych w różnych sektorach gospodarki. Kilka prac przedstawia wyniki projektów badawczych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, dotyczących rozwoju metod informatycznych i ich zastosowań.

ISBN 83-894-7506-5
9788389475060
ISSN 0208-8029

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl