Instytut Badań Systemowych
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW ODPORNEGO STEROWANIA W CZASIE DYSKRETNYM

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW ODPORNEGO STEROWANIA W CZASIE DYSKRETNYM

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 38

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW ODPORNEGO STEROWANIA W CZASIE DYSKRETNYM

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Doc. dr hab. inż. Piotr Kulczyki (prof. PK)

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN

ul. Newelska 6 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw

tel. 837-68-22

email: biblioteka@ibspan.waw.pl

ISBN 83-85847-94-4

ISSN 0208-8029

Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Zakłada się, że poszukiwane rozwiązania (parametry algorytmów o założonej strukturze, nastawy regulatorów) uzyskuje się, stosując komputer w celu wykonania odpowiednich obliczeń wymaganych przez daną metodę syntezy. Jakość takich rozwiązań zależy od trzech podstawowych czynników:

(*1*) właściwości realizowanej arytmetyki (numerycznej precyzji oraz zakresu reprezentowanych liczb),

(*2*) uwarunkowania problemu syntezy (wrażliwości rozwiązania na zmiany wejściowych danych),

(*3*) właściwości algorytmu użytego do rozwiązywania postawionego zadania (numerycznej stabilności metody pozyskiwania rozwiązań).

Wymaga podkreślenia, że w rzetelnej analizie cech danego konkretnego sposobu dochodzenia do pożądanych rozwiązań, nie można zaniedbać żadnego z wyżej wymienionych aspektów. Przykładowo, nawet numerycznie stabilna metoda obliczeniowa implementowana w 'silnej' arytmetyce może, w przypadku źle uwarunkowanego zadania, prowadzić do wyników nieakceptowalnych ze względu na zakładany cel sterowania.

Współcześnie obserwuje się intensywne dążenie do zapewnienia metodom syntezy algorytmów sterowania odpowiednio wysokiej numerycznej jakości. Zabieganie o wymieniony walor dostępnych narzędzi projektowania systemów automatycznego sterowania procesami jest głęboko uzasadnione rolą odgrywaną przez takie systemy we wszystkich dziedzinach techniki. Znaczenie jakie uzyskała omawiana tendencja rozwoju metod projektowania przejawia się w: (*i*) randze licznych publikacji poświęconych tej tematyce (Datta [78], Higham *et al.* [180], Mehrmann i Xu [288], Patel *et al.* [319], Petkov *et al.* [323], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], Varga [451]), (*ii*) powodzeniu oraz żywotności inicjatyw służących promowaniu stosownego oprogramowania – zob. specjalizowane przyborniki pakietu MATLAB, projekt NICONET oraz biblioteka SLICOT (Math Works [283], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], http://www.win.tue.nl/ niconet/niconet.html; por. także biblioteka NETLIB, http://www.netlib.org/ master_counts2.html, Elmroth *et al.* [103]).

W niniejszej pracy skupiono się na wybranych algorytmach odpornego sterowania w czasie dyskretnym, wywiedzionych głównie z metod przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$. Akcentując potrzebę i znaczenie analizy błędów oraz uwarunkowania proponowanych metod syntezy algorytmów sterowania, wskazuje się na sposoby polepszania takiego uwarunkowania. W szczególności, dowodzi się, że cel ten w wielu przypadkach można osiągnąć przez zastosowanie modelowania sterowanych obiektów opartego na operatorze delta (δ).

Merytoryczną treść pracy ujęto w sześciu rozdziałach oraz dodatku.

Wstępny *rozdział 1.* dotyczy modeli z czasem dyskretnym w tym głównie modeli związanych z operatorem δ. Podano tu podstawowe definicje oraz pojęcia wykorzystywane w dalszych rozdziałach.

Rozdział 2. poświęcono problemom syntezy dyskretnych algorytmów sterowania, w których stosuje się metodę rozmieszczania (pozycjonowania) biegunów odpowiedniej funkcji przenoszenia układu zamkniętego. To klasyczne zadanie rozwiązuje się, rozważając niezbędne równania diofantyczne zdefiniowane dla operatora δ. Zbadano właściwości dwóch rodzin par takich równań, przyporządkowanych odpowiednio tylko minimalnofazowym oraz minimalnofazowym i nieminimalnofazowym nominalnym modelom sterowanych obiektów. Pokazano w jaki sposób, modyfikując znaną metodę Youli–Kučery, zapewnić danemu układowi odporną stabilność oraz odporną jakość przy założeniu typowych charakterystyk niepewności nominalnego modelu obiektu. Podano oszacowanie względnego błędu rozwiązania zadania rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń danych tego zadania. Rozważono trudności, które pojawiają się przy rozwiązywaniu równań diofantycznych sformułowanych dla nieminimalnych nominalnych modeli sterowanych obiektów. Przedstawiono także stosowne numerycznie stabilne algorytmy upraszczania takich modeli.

Rozdział 3. poświęcono algorytmom sterowania predykcyjnego w oparciu o prognozę sterowanego procesu uzyskiwaną na podstawie odpowiedniego modelu tego procesu. Podano analityczne formuły opisujące rodziny charakterystycznych wielomianów tak ukształtowanych optymalnych układów zamkniętych. Omówiono metody parametryzacji takich prototypowych wielomianów przy wykorzystaniu standardowych nastaw regulatorów predykcyjnych. Parametryzacja, o której mowa, służy dążeniu do zapewnienia projektowanym układom sterowania założonych cech – a więc wymaganego zapasu stabilności oraz pożądanego charakteru procesów przejściowych. Rozważania tego rozdziału, dotycząc przede wszystkim reguł sterowania w czasie dyskretnym, obejmują także analizę asymptotycznych cech układów zamkniętych odpowiadających predykcyjnemu sterowaniu na podstawie modeli w czasie ciągłym.

Tematem *rozdziału 4.* są właściwości równań Riccatiego oraz Lapunowa zdefiniowanych dla modeli związanych z operatorem δ. Sformułowano tu lematy dotyczące stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego, a także omówiono cechy uogólnionych macierzy Hamiltona skojarzonych z takimi równaniami. Rozważając wrażliwość dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa na zaburzenia elementów macierzowych pęków definiujących takie równania, pokazano, że przy dostatecznie małym okresie próbkowania rozwiązania równań przyporządkowanych standardowemu operatorowi przesunięcia charakteryzują się znacznie gorszym uwarunkowaniem, a więc i mniejszą odpornością na wpływ zaburzeń, w zestawieniu z odpowiednimi równaniami wywiedzionymi dla operatora δ. Pokazano też w jaki sposób, korzystając z rozwiązań pewnych pomocniczych równań Lapunowa, ocenić zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

W *rozdziale 5.* postawiono problem syntezy układu zamkniętego, w którym uogólniony obiekt dynamiczny jest reprezentowany przez swoje odpowiednio zdefiniowane modele w czasie dyskretnym, to znaczy standardową macierz rozproszenia oraz łańcuchowe macierze rozproszenia. W następnej kolejności wprowadzono cechę tak zwanej $J-$bezstratności operatora opisującego dany obiekt, co stanowi podstawę definicji stosownych $J-$bezstratnych faktoryzacji wymienionych modeli. Badano właściwości $J-$bezstratnych stabilizujących koniugatorów, a także dokonano pewnego uogólnienia definicji łańcuchowych macierzy rozproszenia.

Rozdział 6., ostatni i najobszerniejszy rozdział pracy, poświęcono problemom syntezy dyskretnych układów sterowania oraz estymacji optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$. Rozważano standardowe zadania formułowane dla różnych modeli (macierzy) rozproszenia danego uogólnionego obiektu, koncentrując się przede wszystkim na zadaniach dotyczących łańcuchowych macierzy rozproszenia. Podstawę rozwiązania omawianych zadań stanowią odpowiednie $J-$bezstratne faktoryzacje tych macierzy. Liczne twierdzenia sformułowane w tym rozdziale odnoszą się do problemu istnienia oraz właściwości rozwiązań dwóch 'sprzężonych' dyskretnych równań Riccatiego podanych w postaci stosownej dla operatora δ. W przypadku, w którym model obiektu nie ma zer należących do brzegu obszaru wyznaczonego definicją stabilności liniowych systemów modelowanych za pomocą operatora δ, poszukiwane są stabilizujące rozwiązania odpowiednich równań Riccatiego. Gdy model obiektu ma takie zera, interesują nas także rozwiązania niestabilizujące stosownych równań Riccatiego. W omawianym rozdziale dokonano także analizy podstawowych strukturalnych cech tak uzyskiwanych optymalnych regulatorów oraz estymatorów. Wskazano wreszcie na pewien typ osobliwych problemów, które – pomimo stosowania reguł modelowania odwołującego się do operatora δ – mogą charakteryzować się złym numerycznym uwarunkowaniem.

W *dodatku A* zebrano podstawowe informacje dotyczące uwarunkowania, oceny względnych błędów, numerycznej stabilności, a także wstecznych błędów rozwiązań nieosobliwych zadań liniowych oraz nieosobliwych liniowych zadań najmniejszych kwadratów. *Dodatek B* zawiera spis oznaczeń.

Wszystkie istotne wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają analityczne ugruntowanie. Prezentacja materiału zasadza się na układzie *twierdzeń*, *lematów* oraz *uwag*, czyli podziale odwzorowującym merytoryczną ważkość odpowiednich sformułowań. Integralną część pracy stanowią numeryczne *przykłady*, ilustrujące uprzednie teoretyczne wywody. Nie wszystkie twierdzenia oraz lematy są wszakże dowodzone z jednakową szczegółowością. W każdym przypadku podano jednak źródło danej tezy, co umożliwia Czytelnikowi śledzenie wkładu autora niniejszej pracy w rozwój referowanej tematyki.

W pracy umieszczono szereg nowych i nigdzie nie publikowanych elementów. Dotyczy to przede wszystkim: algorytmu wyznaczania minimalnego modelu sterowanego obiektu, zagadnień numerycznego uwarunkowania zadania rozmieszczania biegunów, własności oraz syntezy $J-$bezstratnych stabilizujących koniugatorów oraz własności rozszerzonych modeli obiektów opisanych łańcuchowymi macierzami rozproszenia.

Rozdział 5

Modele łańcuchowe

W niniejszym rozdziale sformułowano problem syntezy układu zamkniętego dla uogólnionego obiektu dynamicznego reprezentowanego w dziedzinie operatora δ przez różne odpowiednio zdefiniowane modele. W tym celu, obok standardowego modelu – czyli *macierzy rozproszenia* – wprowadza się *łańcuchowe macierze rozproszenia* takich obiektów. Następnie definiuje się cechę *J–bezstratności* operatora opisującego dany obiekt. Na tej podstawie można mówić o *J–bezstratnych* oraz *uogólnionych J–bezstratnych faktoryzacjach* rozważanych modeli w czasie dyskretnym. Analizując właściwości obiektów o J–bezstratnych modelach, wyróżnia się ważną klasę odwracalnych operatorów – tak zwanych *stabilizujących koniugatorów*. Rozdział ten zakończono krótkim podrozdziałem, w którym podano pewne uogólnienia definicji łańcuchowych macierzy rozproszenia. Rozważania niniejszego rozdziału pozostają w ścisłym związku z omawianymi w następnym rozdziale metodami kształtowania układów zamkniętych ze względu na kryteria wymagające stosowania normy $\mathcal{H}_\infty$.

Weźmy *uogólniony obiekt dynamiczny* (*generalised plant*) P opisany liniowym, przyczynowym operatorem czasu dyskretnego

$$P : \begin{bmatrix} W \\ U \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Z \\ Y \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

gdzie wejściowy sygnał w o wymiarze r odwzorowuje wpływ zewnętrznych zakłóceń, wejściowy sygnał u o wymiarze p jest sygnałem sterującym (zmienne aktualizujące), sygnał z o wymiarze m oznacza sterowane zmienne modelujące cel sterowania (zmienne kryterialne), zaś sygnał y o wymiarze q jest sygnałem wielkości mierzonych (zmienne obserwowane). Operatorowi P

można przyporządkować *macierz rozproszenia* (*scattering matrix*; Kimura [224, 225])

$$P(\zeta) = \begin{bmatrix} P_{zw}(\zeta) & P_{zu}(\zeta) \\ P_{yw}(\zeta) & P_{yu}(\zeta) \end{bmatrix}$$

o elementach będących macierzowymi wymiernymi funkcjami przenoszenia. W przypadku, w którym $P \in \mathcal{R}_p^{(m+q)\times(r+p)}$, możemy mówić o odpowiednim modelu w przestrzeni stanu. Niech zatem czwórka macierzy $(A,\ B,\ C,\ D)$ o stosownych wymiarach (przyjmujemy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) oznacza pewną realizację funkcji $P(\zeta)$

$$P(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array}\right]. \tag{5.2}$$

Założenie 5.1. Zakłada się, że P jest obiektem standardowym (*standard plant*; Stoorvogel [385], Zhou *et al.* [487]) spełniającym następujące warunki:

(***a1'***) para $(A,\ B_u)$ jest stabilizowalna,

(***a1"***) para $(A,\ C_y)$ jest wykrywalna,

(***a2'***) D_{zu} ma pełny kolumnowy rząd $(D_{zu}^T D_{zu} > 0,\ m \geq p)$,

(***a2"***) D_{yw} ma pełny wierszowy rząd $(D_{yw} D_{yw}^T > 0,\ r \geq q)$,

(***a3'***) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}(\omega) & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix} = n + p,\ \forall \omega \geq 0,$

(***a3"***) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}(\omega) & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + q,\ \forall \omega \geq 0,$ gdzie $\bar{A}(\omega) = A - \frac{e^{j\omega\Delta}-1}{\Delta} I_n,$

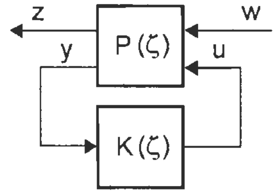
(***a4***) $D_{yu} = 0_{q\times p}$. □

Uwaga 5.1. Założenia *a1* musimy zaakceptować jako konieczne dla zapewnienia istnienia stabilizującego regulatora. Naruszenie założeń *a2* prowadzi do osobliwych rozwiązań – mowa tu, przykładowo, o nierealizowalnym lub numerycznie nadmiernie wrażliwym sterowaniu. Przypadki takich niestandardowych (nieregularnych) obiektów rozważymy w *podrozdziale 6.5.* Z kolei, założenia *a3* wiążą się z postulatem istnienia rozwiązań odpowiednich dyskretnych równań Riccatiego. Zadania syntezy optymalnych układów zamkniętych z obiektami o niestandardowych modelach, dla których założenia te są naruszone, stanowią przedmiot *podrozdziału 6.3* oraz *6.4*. Wreszcie, żądając aby obowiązywało założenie *a4*, zapewniamy uproszczenie odpowiednich algorytmów optymalnego sterowania. Żądanie to to nie ma jednak charakteru krytycznego: regulator odpowiadający przypadkowi $D_{yu} \neq 0_{q\times p}$ łatwo jest uzyskać w oparciu o proste przekształcenie 'źródłowego' algorytmu wyznaczonego dla $D_{yu} = 0_{q\times p}$. □

Sterowanie obiektem P odbywa się w układzie zamkniętym za pomocą regulatora $K : Y \to U$ (rys. 5.1). Wejściowo-wyjściowe cechy tego układu modelujemy funkcją $LF(P,K) : W \to Z$, gdzie $LF(P,K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$ o postaci

$$LF(P,K) = P_{zw} + P_{zu}K(I_q - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}$$

jest odpowiednim *operatorem liniowej frakcyjnej (ułamkowej) transformacji* (*linear fractional transformation, LFT*; por. Kimura [224, 225], Zhou *et al.* [487]).



Rys. 5.1. Układ zamknięty z uogólnionym obiektem P oraz regulatorem K.

Standardowy problem syntezy regulatora K (sub)optymalnego ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$, sformułowany dla macierzy rozproszenia uogólnionego obiektu P, polega na znalezieniu takiego liniowego i przyczynowego operatora $K \in \mathcal{R}_P^{p\times q}$, który prowadzi do dobrze określonego i wewnętrznie stabilnego układu zamkniętego oraz gwarantuje temu układowi spełnienie nierównościowego warunku $\|LF(P,K)\|_\infty < \gamma$, gdzie 'mała' rzeczywista liczba $\gamma > 0$ jest parametrem projektu (por. Doyle *et al.* [96], Dullerud i Paganini [100], Feintuch [110], Francis [116], Green i Limebeer [153], Kimura [221, 225], Skogestad i Postlethwaite [363], Zhou *et al.* [487]).

5.1 Łańcuchowe macierze rozproszenia

W tym podrozdziale przedstawiono podstawowe algebraiczne właściwości łańcuchowych modeli czasu dyskretnego sformułowanych w dziedzinie operatora δ. Większości zdań wypowiedzianych niżej możnaby nadać formę prostych lematów, odwołując się w tym celu do analogicznych wyników odnoszących się do modeli obiektów dynamicznych czasu ciągłego (Kimura [221]-[225], Kimura i Okunishi [227]). Zrezygnowano z tego, aby niepotrzebnie nie wydłużać wywodu.

Właściwości takiego uogólnionego obiektu P, dla którego $q = r$ oraz element $P_{yw}(\zeta)$ jego macierzy rozproszenia $P(\zeta)$ jest odwracalny, można opisać, rozważając następujące pary sygnałów wejściowych oraz wyjściowych

$$G : \begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix}$$

gdzie

$$G(\zeta) = \begin{bmatrix} G_{zu}(\zeta) & G_{zy}(\zeta) \\ G_{wu}(\zeta) & G_{wy}(\zeta) \end{bmatrix}$$

jest *łańcuchową macierzą rozproszenia* (*chain-scattering matrix*) tego obiektu. Zachodzi przy tym

$$\begin{aligned} G = F_c(P) &= \begin{bmatrix} P_{zu} - P_{zw}P_{yw}^{-1}P_{yu} & P_{zw}P_{yw}^{-1} \\ -P_{yw}^{-1}P_{yu} & P_{yw}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{zu} & P_{zw} \\ 0_{r\times p} & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0_{p\times r} \\ P_{yu} & P_{yw} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & P_{zw} \\ 0_{r\times m} & -P_{yw} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{zu} & 0_{m\times r} \\ -P_{yu} & I_r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dla stabilnego uogólnionego obiektu $P \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r)\times(r+p)}$ pierwsza z powyższych faktoryzacji jest prawostronną względnie pierwszą faktoryzacją łańcuchowej macierzy rozproszenia $G \in \mathcal{R}_P^{(m+r)\times(p+r)}$, zaś druga jest lewostronną względnie pierwszą faktoryzacją tej macierzy (por. *rozdział 1.*). Gdy $P_{yw}^{-1} \in \mathcal{R}_P^{r\times r}$, wtedy łańcuchowy model G istnieje, a ponadto $G \in \mathcal{R}_P^{(m+r)\times(p+r)}$ oraz

$$G(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A - B_w D_{yw}^{-1} C_y & B_u - B_w D_{yw}^{-1} D_{yu} & B_w D_{yw}^{-1} \\ \hline C_z - D_{zw} D_{yw}^{-1} C_y & D_{zu} - D_{zw} D_{yw}^{-1} D_{yu} & D_{zw} D_{yw}^{-1} \\ -D_{yw}^{-1} C_y & -D_{yw}^{-1} D_{yu} & D_{yw}^{-1} \end{array}\right]. \tag{5.3}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że dla modelu $P \in \mathcal{R}_P^{(m+r)\times(r+p)}$ odwrotność P_{yw}^{-1} istnieje oraz $P_{yw}^{-1} \in \mathcal{R}_P^{r\times r}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz D_{yw} jest macierzą nieosobliwą. Ponadto, gdy (5.2) jest realizacją minimalną, wtedy realizacja dana wzorem (5.3) jest także minimalna.

Rozważmy przypadek, w którym G jest łańcuchową macierzą rozproszenia pewnego obiektu P; co oznacza, że $G = F_c(P)$. Model takiego obiektu otrzymuje się w następujący sposób

$$\begin{aligned} P = F_c(G)^{-1} &= \begin{bmatrix} G_{zy}G_{wy}^{-1} & G_{zu} - G_{zy}G_{wy}^{-1}G_{wu} \\ G_{wy}^{-1} & -G_{wy}^{-1}G_{wu} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{zu} & G_{zy} \\ 0_{r\times p} & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{wu} & G_{wy} \\ I_p & 0_{p\times r} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & -G_{zy} \\ 0_{r\times m} & G_{wy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{m\times r} & G_{zu} \\ I_r & -G_{wu} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Wymaga podkreślenia, że element G_{wy} łańcuchowej macierzy rozproszenia G jest zawsze odwracalny. Odwzorowanie $F_c(P)$ można opisać w kategoriach odpowiednich względnie pierwszych faktoryzacji. Niech zatem będzie dana pewna prawostronna względnie pierwsza faktoryzacja modelu P

$$P = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \tag{5.5}$$

przy czym wymiary czynników tej faktoryzacji wynoszą odpowiednio: $(m + r) \times (r + p)$ oraz $(r + p)$. Na tej podstawie stwierdzamy, że

$$F_c(P) = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ M_{11} & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Danej lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji modelu P, w której występują czynniki o odpowiednich wymiarach $(m + r)$ oraz $(m + r) \times (r + p)$

$$P = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} \\ \hat{N}_{21} & \hat{N}_{22} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

przyporządkować można łańcuchową macierz rozproszenia

$$F_c(P) = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & -\hat{N}_{11} \\ \hat{M}_{21} & -\hat{N}_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{N}_{12} & -\hat{M}_{12} \\ \hat{N}_{22} & -\hat{M}_{22} \end{bmatrix}.$$

Dla takiego uogólnionego obiektu P, że $p = m$ oraz element $P_{zu}(\zeta)$ jego macierzy rozproszenia $P(\zeta)$ jest odwracalny, można podać opis oparty na następujących parach sygnałów wejściowych oraz wyjściowych

$$H : \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}$$

gdzie

$$H(\zeta)=\begin{bmatrix} H_{uz}(\zeta) & H_{uw}(\zeta) \\ H_{yz}(\zeta) & H_{yw}(\zeta) \end{bmatrix}$$

jest *dualną łańcuchową macierzą rozproszenia* (*dual chain-scattering matrix*) tego obiektu. W rozważanym przypadku mamy

$$\begin{aligned} H = F_{dc}(P) &= \begin{bmatrix} P_{zu}^{-1} & -P_{zu}^{-1}P_{zw} \\ P_{yu}P_{zu}^{-1} & P_{yw}-P_{yu}P_{zu}^{-1}P_{zw} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times r} \\ P_{yu} & P_{yw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{zu} & P_{zw} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} P_{zu} & 0_{m\times q} \\ -P_{yu} & I_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m & -P_{zw} \\ 0_{q\times m} & P_{yw} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dla $P \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q)\times(r+m)}$ pierwsza z powyższych faktoryzacji jest prawostronną względnie pierwszą faktoryzacją dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia $H \in \mathcal{R}_P^{(m+q)\times(m+r)}$, zaś druga z podanych faktoryzacji jest lewostronną względnie pierwszą faktoryzacją tej macierzy (por. *rozdział 1.*). Gdy $P_{zu}^{-1} \in \mathcal{R}_P^{m\times m}$, wtedy dualny model łańcuchowy H istnieje, a ponadto $H \in \mathcal{R}_P^{(m+q)\times(m+r)}$ oraz

$$H(\zeta)=\left[\begin{array}{c|cc} A-B_uD_{zu}^{-1}C_z & B_uD_{zu}^{-1} & B_w-B_uD_{zu}^{-1}D_{zw} \\ \hline -D_{zu}^{-1}C_z & D_{zu}^{-1} & -D_{zu}^{-1}D_{zw} \\ C_y-D_{yu}D_{zu}^{-1}C_z & D_{yu}D_{zu}^{-1} & D_{yw}-D_{yu}D_{zu}^{-1}D_{zw} \end{array}\right]. \tag{5.7}$$

Poczynione ustalenia stanowią podstawę wniosku, że dla $P \in \mathcal{R}_P^{(m+q)\times(r+m)}$ odwrotność P_{zu}^{-1} istnieje oraz $P_{zu}^{-1} \in \mathcal{R}_P^{m\times m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy D_{zu} jest macierzą nieosobliwą. Minimalnej realizacji (5.2) odpowiada minimalna realizacja (5.7). Jeżeli P_{yw} oraz P_{zu} są odwracalne, wtedy istnieją łańcuchowe modele $F_c(P)$ oraz $F_{dc}(P)$, a ponadto $F_c(P)\cdot F_{dc}(P) = I_{m+r}$.

Niech H będzie dualną łańcuchową macierzą rozproszenia pewnego uogólnionego obiektu P; a zatem $H = F_{dc}(P)$. Model takiego obiektu wyznacza się ze wzoru

$$\begin{aligned} P = F_{dc}(H)^{-1} &= \begin{bmatrix} -H_{uz}^{-1}H_{uw} & H_{uz}^{-1} \\ H_{yw}-H_{yz}H_{uz}^{-1}H_{uw} & H_{yz}H_{uz}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times r} \\ H_{yz} & H_{yw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{r\times m} & I_r \\ H_{uz} & H_{uw} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} H_{uz} & 0_{m\times q} \\ -H_{yz} & I_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -H_{uw} & I_m \\ H_{yw} & 0_{q\times m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Element H_{uz} dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia H jest zawsze odwracalny. Odwzorowanie $F_{dc}(P)$ można opisać w kategoriach odpowiednich względnie pierwszych faktoryzacji. W tym celu rozważa się prawostronną względnie pierwszą faktoryzację modelu P daną wzorem (5.5), przy czym założone wymiary czynników tej faktoryzacji wynoszą odpowiednio: $(m+q) \times (r+m)$ oraz $(r+m)$. W ten sposób uzyskujmy reprezentację dualnej macierzy rozproszenia

$$F_{dc}(P) = \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ M_{11} & M_{12} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Danej lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji (5.6), w której występują czynniki o wymiarach $(m+q)$ oraz $(m+q) \times (r+m)$, przyporządkować można dualną łańcuchową macierz rozproszenia o postaci

$$F_{dc}(P) = \begin{bmatrix} \hat{N}_{12} & -\hat{M}_{12} \\ \hat{N}_{22} & -\hat{M}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & -\hat{N}_{11} \\ \hat{M}_{21} & -\hat{N}_{21} \end{bmatrix}.$$

Rys. 5.2 ilustruje przyjętą konwencję przedstawiania zamkniętych układów sterowania danym obiektem P opisanym łańcuchowymi modelami G oraz H, przy czym działanie regulatora $K : Y \to U$ modelowane jest funkcjami przenoszenia odpowiednio: $K \in \mathcal{R}_P^{p\times r}$ oraz $K \in \mathcal{R}_P^{m\times q}$. Wejściowo–wyjściowe cechy takich układów są wyznaczone przez stosowne funkcje przenoszenia: $HM(G, K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$ oraz $DHM(H,K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$, gdzie

$$HM(G,K) = (G_{zu}K + G_{zy})(G_{wu}K + G_{wy})^{-1}$$

to operator *homograficznej transformacji* (*homographic transformation*), zaś

$$DHM(H,K) = -(H_{uz} - KH_{yz})^{-1}(H_{uw} - KH_{yw})$$

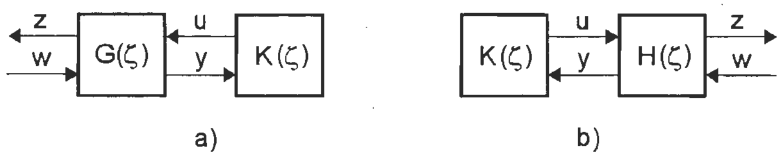
oznacza operator *dualnej homograficznej transformacji* (*dual homographic transformation*).

Uwaga 5.2. Homograficzne transformacje charakteryzują się następującymi właściwościami:

(*a*) $HM(F_c(P), K) = LF(P, K)$,

(*b*) $HM(I_{p+r}, K) = K$,

(*c*) $HM(G_1, HM(G_2, K)) = HM(G_1G_2, K)$, gdzie $G_1 \in \mathcal{R}_P^{(l+r)\times(m+r)}$ oraz $G_2 \in \mathcal{R}_P^{(m+r)\times(p+r)}$,



Rys. 5.2. Schemat układu z uogólnionym obiektem opisanym: a) łańcuchową macierzą rozproszenia, b) dualną łańcuchową macierzą rozproszenia.

(*d*) jeżeli funkcja $G \in \mathcal{R}_P^{(p+r)\times(p+r)}$ jest odwracalna, to $HM(G^{-1}, HM(G, K)) = K$.

Analogiczne właściwości przysługują dualnym homograficznym transformacjom:

(*a*) $DHM(F_{dc}(P), K) = LF(P, K)$,

(*b*) $DHM(I_{m+q}, K) = K$,

(*c*) $DHM(H_1, DHM(H_2, K)) = DHM(H_2 H_1, K)$, przy czym zachodzi $H_1 \in \mathcal{R}_P^{(m+r)\times(m+k)}$ oraz $H_2 \in \mathcal{R}_P^{(m+q)\times(m+r)}$,

(*d*) jeżeli funkcja $H \in \mathcal{R}_P^{(m+q)\times(m+q)}$ jest odwracalna, to $DHM(H^{-1}, DHM(H, K)) = K$.

Podstawowe znaczenie mają właściwości *a* oraz *c*. Pierwsza z nich dotyczy możliwości wykorzystania łańcuchowych modeli do rozwiązywania standardowego problemu syntezy optymalnego sterowania. Problem syntezy regulatora K optymalnego ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$ można bowiem sformułować w postaci żądania, aby $\|HM(G, K)\|_\infty < \gamma$ lub odpowiednio $\|DHM(H, K)\|_\infty < \gamma$, gdzie $\gamma > 0$. Wyróżniając drugą właściwość, wskazujemy na znaną dogodność stosowania łańcuchowych modeli do opisu układów o kaskadowo sprzężonych elementach – takiemu połączeniu odpowiada bowiem mnożenie stosownych łańcuchowych modeli (por. Kimura [224, 225], Kimura i Okunishi [227]). □

Na zakończenie tego podrozdziału podamy modele układów zamkniętych (rys. 5.2) z blokiem K(regulatorem) o realizacji (A_k, B_k, C_k, D_k). Niech

$$G(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_y \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zy} \\ C_w & D_{wu} & D_{wy} \end{array}\right]$$

zaś (A_c, B_c, C_c, D_c) oznacza pewną realizację funkcji przenoszenia $HM(G, K)$ układu zamkniętego. Stosując standardowe reguły algebry modeli łańcuchowych, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} A & B_u C_k \\ 0 & A_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{B} \\ B_k \end{bmatrix} C_2^{-1} \begin{bmatrix} C_w & D_{wu} C_k \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} \hat{B} \\ B_k \end{bmatrix} C_2^{-1} \\ C_c &= \begin{bmatrix} C_z - D_c C_w & (D_{zu} - D_c D_{wu}) C_k \end{bmatrix}, \quad D_c = C_1 C_2^{-1} \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} \hat{B} \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_u & B_y \\ D_{zu} & D_{zy} \\ D_{wu} & D_{wy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_k \\ I_r \end{bmatrix}$$

przy założeniu, że spełniony jest konieczny i wystarczający warunek dobrej określoności tego układu, przyjmujący postać żądania odwracalności macierzy $C_2 = D_{wu} D_k - D_{wy}$. W przypadku statycznego sprzężenia zwrotnego $u = D_k y$ (istotnego przy syntezie tak zwanych *centralnych* algorytmów sterowania optymalnego ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$) mamy

$$HM(G,K) = \left[\begin{array}{c|c} A - \hat{B} C_2^{-1} C_w & \hat{B} C_2^{-1} \\ \hline C_z - C_1 C_2^{-1} C_w & C_1 C_2^{-1} \end{array} \right].$$

Dla dualnego modelu łańcuchowego

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_z & B_w \\ \hline C_u & D_{uz} & D_{uw} \\ C_y & D_{yz} & D_{yw} \end{array} \right]$$

postępując w podobny sposób, wyznaczamy realizację (A_c, B_c, C_c, D_c) funkcji przenoszenia $DHM(H, K)$ układu zamkniętego:

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_k C_y & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_z \\ B_k D_{yz} \end{bmatrix} D_1^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{C} & C_k \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} B_w - B_z D_1^{-1} D_2 \\ B_k (D_{yw} - D_{yz} D_1^{-1} D_2) \end{bmatrix} \\ C_c &= D_1^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{C} & C_k \end{bmatrix}, \quad D_c = -D_1^{-1} D_2 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} \hat{C} & D_1 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_u & D_{uz} & D_{uw} \\ C_y & D_{yz} & D_{yw} \end{bmatrix}.$$

Zakłada się przy tym, że macierz $D_1 = D_{uz} - D_k D_{yz}$ jest odwracalna, co jest koniecznym i wystarczającym warunkiem dobrej określoności tego układu. Stosując statyczne sprzężenie $u = D_k y$, uzyskujemy model

$$DHM(H, K) = \left[\begin{array}{c|c} A - B_z D_1^{-1}\hat{C} & B_w - B_z D_1^{-1} D_2 \\ \hline -D_1^{-1}\hat{C} & -D_1^{-1} D_2 \end{array}\right].$$

5.2 J–bezstratne systemy

Zasadnicze znaczenie dla przedstawionej w *rozdziale 6.* metody syntezy sterowania optymalnego ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$ mają pojęcia tak zwanych *J–bezstratnych* (*J–lossless*) systemów dynamicznych oraz *J–bezstratnych faktoryzacji* modeli systemów (obiektów) opisanych w dziedzinie operatora δ. Odpowiednie definicje sformułowano, stosując analogie do znanych definicji odnoszących się do modeli czasu ciągłego oraz dyskretnego (q) (por. Devilde i Dym [87], Genin *et al.* [130], Green [151], Green *et al.* [152], Hung i Chu [187], Kimura [221], [223]-[225], Kimura i Okunishi [227], Suchomski [389]-[391], Tsai i Postlethwaite [432], Tsai i Tsai [433]-[435], Tsai *et al.* [436]).

Definicja 5.1 (bezstratnej funkcji; Suchomski). Funkcja $G(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ jest *bezstratną* funkcją, gdy $G^\sim(\zeta)\cdot G(\zeta) = I_{p+r}$, $\forall\zeta$. □

Definicja 5.2 (dualnej bezstratnej funkcji; Suchomski). Funkcja $H(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ jest *dualną bezstratną* funkcją, gdy $H(\zeta)\cdot H^\sim(\zeta) = I_{m+q}$, $\forall\zeta$. □

Gdy od funkcji $G(\zeta)$ spełniającej warunek $G^\sim(\zeta)\cdot G(\zeta) = I_{p+r}$, $\forall\zeta$, nie wymaga się stabilności, funkcję tę nazywamy *unitarną*. Funkcja $H(\zeta)$ jest *dualną unitarną* funkcją, gdy $H(\zeta)\cdot H^\sim(\zeta) = I_{m+q}$, $\forall\zeta$. Przyjmijmy, że (A, B, C, D), gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest regularną macierzą, oznacza pewną realizację funkcji $G(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$. Niech $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (gramian obserwowalności) będzie rozwiązaniem równania Lapunowa $A^TX + XA + \Delta A^TXA + C^TC = 0_{n\times n}$. Jak łatwo pokazać, $G^\sim(\zeta)\cdot G(\zeta) = G_-(\zeta) + G_+(\zeta) + (D^T - \Delta B^T I_A C^T)D$, przy czym ściśle właściwy składnik $G_-(\zeta) = (B^T I_A X + (D^T - \Delta B^T I_A C^T)C)(\zeta I_n - A)^{-1}B$ jest funkcją stabilną, zaś składnik $G_+(\zeta) = -B^T I_A(\zeta I_n + I_A A^T)^{-1}(XB + I_A C^T D)$ jest ściśle właściwą funkcją antystabilną. Żądając, aby $XB + I_A C^T D = 0_{n\times(p+r)}$, mamy $B^T I_A X + (D^T - \Delta B^T I_A C^T)C = 0_{(p+r)\times n}$. Co oznacza, że $G^\sim(\zeta)\cdot G(\zeta) =$

$D^T D + \Delta B^T X B$. Konieczny i wystarczający warunek bezstratności można zatem sformułować w postaci następującego lematu.

Lemat 5.1 (o koniecznym i wystarczającym warunku bezstratności; Suchomski). *Funkcja* $G(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ *o realizacji* (A, B, C, D) *z regularną macierzą* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *jest funkcją bezstratną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz* $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \geq 0$, *spełniająca równania:*

$$\begin{aligned} A^T X + XA + \Delta A^T XA + C^T C &= 0_{n\times n} \\ XB + \Delta A^T XB + C^T D &= 0_{n\times(p+r)} \\ D^T D + \Delta B^T XB &= I_{p+r}\,. \;\square \end{aligned}$$

Analogiczny lemat dotyczy dualnej bezstratności.

Lemat 5.2 (o koniecznym i wystarczającym warunku dualnej bezstratności; Suchomski). *Funkcja* $H(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ *o realizacji* (A, B, C, D) *z regularną macierzą* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *jest dualną bezstratną funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz* $Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \geq 0$, *spełniająca równania:*

$$\begin{aligned} AY + YA^T + \Delta AYA^T + BB^T &= 0_{n\times n} \\ YC^T + \Delta AYC^T + BD^T &= 0_{n\times(m+q)} \\ DD^T + \Delta CYC^T &= I_{m+q}\,. \;\square \end{aligned}$$

Definicja 5.3 (J–unitarnej oraz J–bezstratnej funkcji; Suchomski [400, 406]). Niech $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$.

(*1*) $G(\zeta)$ jest (J_{mr}, J_{pr})–*unitarną* funkcją, gdy $G^\sim(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) = J_{pr}$, $\forall\zeta$.

(*2*) (J_{mr}, J_{pr})–unitarna funkcja $G(\zeta)$ jest (J_{mr}, J_{pr})–*bezstratną* funkcją, gdy $G^\star(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) \leq J_{pr}$, $\forall\zeta \in -\mathcal{D}_\Delta$. $\square$

Definicja 5.4 (dualnej J–unitarnej oraz J–bezstratnej funkcji; Suchomski [400, 406]). Niech $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$.

(*1*) $H(\zeta)$ jest *dualną* (J_{mq}, J_{mr})–*unitarną* funkcją, gdy $H(\zeta)\cdot J_{mr} \cdot H^\sim(\zeta) = J_{mq}$, $\forall\zeta$.

(*2*) Dualna (J_{mq}, J_{mr})–unitarna funkcja $H(\zeta)$ jest *dualną* (J_{mq}, J_{mr})– *bezstratną* funkcją, gdy $H(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot H^{\star}(\zeta) \geq J_{mq}$, $\forall \zeta \in -\mathcal{D}_{\Delta}$. □

Podkreślmy, że (dualne) J–unitarne oraz J–bezstratne funkcje nie mogą mieć biegunów należących do $\partial\mathcal{D}_{\Delta}$, mogą jednak być funkcjami niestabilnymi. Macierz 'D' J–unitarnej (bezstratnej) funkcji $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(m+r)\times(p+r)}$ musi mieć pełny kolumnowy rząd, zaś macierz 'D' dualnej J–unitarnej (bezstratnej) funkcji $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(m+q)\times(m+r)}$ musi być macierzą o pełnym wierszowym rzędzie.

Koniecznym warunkiem bezstratności danego operatora P jest jego iniektywność, ponadto taki operator jest izometrią w odpowiednich wektorowych przestrzeniach. Niech macierz rozproszenia $P(\zeta)$ systemu (5.1) będzie macierzą bezstratną, $P^{\sim}(\zeta) \cdot P(\zeta) = I_{r+p}$, $\forall \zeta$. Załóżmy, że istnieje macierz rozproszenia $G(\zeta) = F_c(P(\zeta))$. Warunek izometrii przyjmuje w tym przypadku postać równości $G^{\sim}(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) = J_{pr}$, $\forall \zeta$. Zgodnie z zasadą maksimum modułu (Conway [70], Dullerud i Paganini [100], Feintuch [110], Green i Limebeer [153]) dla bezstratnych funkcji zachodzi $P^{\star}(\zeta) \cdot P(\zeta) \leq I_{r+p}$, $\forall \zeta \in -\mathcal{D}_{\Delta}$, co w odniesieniu do $G(\zeta) = F_c(P(\zeta))$ oznacza wymaganie $G^{\star}(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) \leq J_{pr}$, $\forall \zeta \in -\mathcal{D}_{\Delta}$.

Uwaga 5.3 (Suchomski). Macierz $G(\zeta)$ jest (J_{mr}, J_{pr})–unitarną (bezstratną) funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy $G(\zeta) = F_c(P(\zeta))$, gdzie $P(\zeta)$ jest pewną unitarną (bezstratną) funkcją (por. dowód dla $p = m$; Genin *et al.* [130]). Dla (J_{mr}, J_{pr})–unitarnej funkcji $G(\zeta)$ mamy bowiem $G_{zy}^{\sim}(\zeta) \cdot G_{zy}(\zeta) - G_{wy}^{\sim}(\zeta) \cdot G_{wy}(\zeta) = -I_r$, $\forall \zeta$. Na tej podstawie wnioskujemy, że istnieje $G_{wy}(\zeta)^{-1}$, a zatem, zgodnie ze wzorem (5.4) można zdefiniować funkcję $P(\zeta) = F_c(G(\zeta))^{-1} = N(\zeta) \cdot D(\zeta)^{-1}$, gdzie

$$N(\zeta) = \begin{bmatrix} G_{zu}(\zeta) & G_{zy}(\zeta) \\ 0_{r\times p} & I_r \end{bmatrix}, \qquad D(\zeta) = \begin{bmatrix} G_{wu}(\zeta) & G_{wy}(\zeta) \\ I_p & 0_{p\times r} \end{bmatrix}.$$

Zachodzi przeto $J_{pr} - G^{\sim}(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) = D^{\sim}(\zeta) \cdot D(\zeta) - N^{\sim}(\zeta) \cdot N(\zeta)$. Na tej podstawie łatwo uzasadnić podaną równoważność: $P(\zeta)$ jest funkcją unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy $D^{\sim}(\zeta) \cdot D(\zeta) = N^{\sim}(\zeta) \cdot N(\zeta)$, zaś jest funkcją bezstratną wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją unitarną oraz $D^{\star}(\zeta) \cdot D(\zeta) - N^{\star}(\zeta) \cdot N(\zeta) \geq 0$, $\forall \zeta \in -\mathcal{D}_{\Delta}$. Podobnie rozumując, stwierdzamy, że $H(\zeta)$ jest dualną (J_{mq}, J_{mr})–unitarną (bezstratną) funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy $H(\zeta) = F_{dc}(P(\zeta))$, gdzie $P(\zeta)$ jest pewną dualną unitarną (bezstratną) funkcją. J–bezstratność danego operatora jest zatem pewnym uogólnieniem cechy bezstratności w przypadku, w którym mamy do czynienia z przestrzenią o algebraicznie nieokreślonej (*indefinite*) metryce (przestrzenią *Kreina*; Bognar [36], Hassibi *et al.* [169], Kailath *et al.* [207]). □

Opierając się na powyższych ustaleniach, można sformułować konieczne i wystarczające warunki J–unitarności oraz J–bezstratności funkcji zdefiniowanych dla operatora δ i reprezentowanych przez modele (realizacje) w przestrzeni stanu. Szczegółowych wyprowadzeń nie podaje się – w tym przypadku mają one elementarny charakter (podobny do stosownych dowodów dotyczących funkcji unitarnych oraz bezstratnych), chociaż są trudniejsze niż ich odpowiedniki dla modeli czasu ciągłego (por. Kimura [225]; zob. także Kongprawechnon i Kimura [229, 230], Tsai i Tsai [434]).

Lemat 5.3 (o koniecznym i wystarczającym warunku J–unitarności oraz J–bezstratności; Suchomski [400, 406]). *Funkcja* $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ *o realizacji* $(A,\ B,\ C,\ D)$, *gdzie* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *jest* (J_{mr}, J_{pr})*–unitarną funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz* $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *spełniająca równania:*

$$\begin{aligned}
A^TX + XA + \Delta A^TXA + C^TJ_{mr}C &= 0_{n\times n}\\
XB + \Delta A^TXB + C^TJ_{mr}D &= 0_{n\times(p+r)}\\
D^TJ_{mr}D + \Delta B^TXB &= J_{pr}\,.
\end{aligned}$$

$X \geq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $G(\zeta)$ *jest funkcją* (J_{mr}, J_{pr})*–bezstratną. Ponadto,* $X > 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $G(\zeta)$ *jest* (J_{mr}, J_{pr})*–bezstratną funkcją oraz* $(A,\ C)$ *jest parą obserwowalną.* □

Lemat 5.4 (o koniecznym i wystarczającym warunku dualnej J– unitarności oraz dualnej J–bezstratności; Suchomski [400, 406]). *Funkcja* $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ *o realizacji* $(A,\ B,\ C,\ D)$, *gdzie* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *jest dualną* $(J_{mr},\ J_{pr})$*–unitarną funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz* $Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *spełniająca równania:*

$$\begin{aligned}
AY + YA^T + \Delta AYA^T - BJ_{mr}B^T &= 0_{n\times n}\\
YC^T + \Delta AYC^T - BJ_{mr}D^T &= 0_{n\times(m+q)}\\
DJ_{mr}D^T - \Delta CYC^T &= J_{mq}\,.
\end{aligned}$$

$Y \geq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $H(\zeta)$ *jest dualną* $(J_{mq},\ J_{mr})$*–bezstratną funkcją. Ponadto,* $Y > 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $H(\zeta)$ *jest dualną* $(J_{mq},\ J_{mr})$*–bezstratną funkcją oraz* $(A,\ B)$ *jest parą sterowalną.* □

Jak się dalej okaże, w powyższych definicjach podstawowe znaczenie mają obecne w nich równania Lapunowa. Istotne będą także następujące właściwości $J-$bezstratnych funkcji.

Lemat 5.5 (o realizacji $J-$bezstratnej funkcji; Suchomski [409]). *$(J_{mr}, J_{pr})-$bezstratnej funkcji $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ można przyporządkować obserwowalną realizację*

$$G(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & -X^{-1}I_AC^T \\ \hline C & J_{mr} \end{array}\right] D, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

przy czym $\mathbb{R}^{n\times n} \ni X > 0$ jest rozwiązaniem równania Lapunowa $A^TX + XA + \Delta A^TXA + C^TJ_{mr}C = 0_{n\times n}$, zaś $D \in \mathbb{R}^{(m+r)\times(p+r)}$ spełnia równanie $D^T(J_{mr} + \Delta CI_A^TX^{-1}I_AC^T)D = J_{pr}$. Gdy $m = p$, macierz $D \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$ jest macierzą nieosobliwą.

Dowód. Niech (A, B, C, D') będzie dowolną obserwowalną realizacją danej funkcji $G(\zeta)$, zaś $X > 0$ oznacza macierz spełniającą warunki *lematu 5.3.* Na tej podstawie otrzymujemy $B = -X^{-1}I_AC^TJ_{mr}D'$. Ponadto, $D = J_{mr}D'$. □

Lemat 5.6 (o realizacji dualnej $J-$bezstratnej funkcji; Suchomski [409]). *Dualna $(J_{mq}, J_{mr})-$bezstratna funkcja $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ ma sterowalną realizację*

$$H(\zeta) = D\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^TI_AY^{-1} & J_{mr} \end{array}\right], \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

przy czym $\mathbb{R}^{n\times n} \ni Y > 0$ jest rozwiązaniem równania Lapunowa $AY + YA^T + \Delta AYA^T - BJ_{mr}B^T = 0_{n\times n}$, zaś $D \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+r)}$ spełnia równanie $D(J_{mr} - \Delta B^TI_AY^{-1}I_A^TB)D^T = J_{mr}$. Gdy $r = q$, macierz $D \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$ jest macierzą nieosobliwą. □

Lemat 5.7 (o zerach i biegunach $J-$bezstratnych funkcji; Suchomski [409]). *Jeżeli ζ_0 jest niezmienniczym zerem (dualnej) $J-$bezstratnej funkcji, to $\zeta_0^\sim = -\zeta_0/(1 + \Delta\zeta_0)$ jest biegunem tej funkcji.*

Dowód. Rozważmy (przykładowo) dualną $(J_{mq}, J_{mr})-$bezstratną funkcję $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ o realizacji danej w *lemacie 5.6.* Niech ζ_0 będzie zerem tej realizacji. Istnieją zatem takie wektory $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$

oraz $v \in \mathbb{R}^{m+q}$, dla których: $x^T(A - \zeta_0 I_n) + v^T D B^T I_A Y^{-1} = 0_{1\times n}$ oraz $x^T B + v^T D J_{mr} = 0_{1\times(m+r)}$. Eliminując z tych wyrażeń v, otrzymujemy $x^T(A - BJ_{mr}B^T I_A Y^{-1} - \zeta_0 I_n) = 0_{1\times n}$. Na podstawie *lematu 5.4* uzyskujemy równość $x^T Y(A^T I_A + \zeta_0 I_n) = 0_{1\times n}$, z której wynika, że $((1+\Delta\zeta_0)A + \zeta_0 I_n)Yx = 0_n$. □

Warto podkreślić, że dla asymptotycznego przypadku $\Delta \to 0$ otrzymujemy żądanie, aby macierze 'D' realizacji (dualnych) J–bezstratnych funkcji były odpowiednimi (dualnymi) J–unitarnymi macierzami liczbowymi. Gdy $\Delta > 0$, w stosownych wymaganiach nałożonych na te macierze występuje zależność od dodatnio określonych rozwiązań odpowiednich równań Lapunowa. Fakt ten jest jedną z przyczyn, które sprawiają, że w wielu przypadkach teoretyczne rozważania oraz wyznaczone na ich podstawie formuły mają znacznie bardziej złożony charakter – w porównaniu do podobnych wyprowadzeń oraz wyników dotyczących modeli w domenie czasu ciągłego (Kimura [222, 225]).

5.3 J–bezstratne faktoryzacje

Ustalenia poprzedniego podrozdziału stanowią podstawę definicji tak zwanych J–bezstratnych oraz dualnych J–bezstratnych faktoryzacji odpowiednich łańcuchowych modeli danego obiektu. Definicje takich faktoryzacji w przypadku modeli opartych na operatorze δ mają postać analogiczną do stosownych definicji odnoszących się do modeli czasu ciągłego oraz dyskretnego (q) (por. Green [151], Hung i Chu [187], Kimura [224, 225], Kongprawechnon i Kimura [229, 230], Lee *et al.* [270], Suchomski [400, 406], Tsai i Postlethwaite [432], Tsai *et al.* [436]). Faktoryzacje takie odgrywają pierwszorzędną rolę w syntezie układów optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$.

Definicja 5.5 (J–bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [400, 406]). Jeżeli funkcja $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $G(\zeta) = \Theta(\zeta)\cdot\Pi(\zeta)$, którego pierwszy czynnik $\Theta(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ jest (J_{mr}, J_{pr})–bezstratną funkcją, zaś drugi czynnik $\Pi(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$ jest funkcją unimodularną, wtedy o $G(\zeta)$ mówimy, że ma (J_{mr}, J_{pr})–*bezstratną faktoryzację*. □

Definicja 5.6 (dualnej J–bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [400, 406]). Jeżeli funkcja $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $H(\zeta) = \Omega(\zeta)\cdot\Psi(\zeta)$, którego pierwszy czynnik $\Omega(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$ jest funkcją unimodularną, zaś drugi czynnik $\Psi(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ jest dualną (J_{mq}, J_{mr})–bezstratną funkcją, wtedy o funkcji $H(\zeta)$ mówimy, że ma *dualną* (J_{mq}, J_{mr})*–bezstratną faktoryzację.* □

Uogólnione J–bezstratne faktoryzacje

W dalszych rozważaniach przydatne będą uogólnione J–bezstratne faktoryzacje (*extended J–lossless factorisation*) funkcji należących do przestrzeni $\mathcal{RL}_\infty$. Podane definicje sformułowano przez analogię do odpowiednich definicji dotyczących modeli czasu ciągłego (Hara *et al.* [168]) oraz dyskretnego (q) (Hung i Chu [186, 189]).

Definicja 5.7 (uogólnionej J–bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [404, 409]). Jeżeli funkcja $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$, którego pierwszy czynnik $\Theta(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ jest (J_{mr}, J_{pr})–bezstratną funkcją, zaś drugi czynnik $\Pi(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r)\times(p+r)}$ nie ma zer należących do $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$, wtedy o iloczynie tym mówimy, że stanowi *uogólnioną* (J_{mr}, J_{pr})*–bezstratną faktoryzację* funkcji $G(\zeta)$. □

Definicja 5.8 (uogólnionej dualnej J–bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [404, 409]). Jeżeli funkcja $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$, którego pierwszy czynnik $\Omega(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q)\times(m+q)}$ nie ma zer należących do $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$, zaś drugi czynnik $\Psi(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ jest dualną (J_{mq}, J_{mr})–bezstratną funkcją, wtedy o iloczynie tym mówimy, że stanowi *uogólnioną dualną* (J_{mq}, J_{mr})*–bezstratną faktoryzację* funkcji $H(\zeta)$. □

Należy podkreślić, że od czynników $\Pi(\zeta)$ oraz $\Omega(\zeta)$ występujących w powyższych iloczynach nie wymaga się, aby były funkcjami unimodularnymi (por. *definicja 5.5* oraz *5.6*).

Uogólnione J–bezstratne faktoryzacje stanowią podstawę syntezy układów zamkniętych w przypadku obiektów, których modele mają zera należące do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Metody optymalizacji takich układów ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$ omówiono w *podrozdziale 6.3*.

5.4 J–bezstratne stabilizujące koniugatory

Związki między J–bezstratnymi koniugatorami a klasyczną teorią wymiernej interpolacji w sensie Nevanlinny–Picka badano w (Kimura [220, 224, 225], Kongprawechnon i Kimura [229]). Niniejszy fragment naszych rozważań, dotyczący J–bezstratnych oraz dualnych J–bezstratnych stabilizujących koniugatorów w przypadku omawianych modeli czasu dyskretnego (δ), publikowany jest po raz pierwszy.

Dana jest funkcja $G(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{(m+r)\times(p+r)}$. Każdą funkcję $G_r(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{(p+r)\times(p+r)}$ taką, że wszystkie bieguny $G(\zeta)\cdot G_r(\zeta)$ są równe koniugacjom odpowiednich biegunów $G(\zeta)$ nazywamy *prawostronnym koniugatorem* funkcji $G(\zeta)$. Koniugator taki nie jest oczywiście wyznaczony jednoznacznie. Niech $(A,\, B,\, C,\, D)$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest regularną macierzą, oznacza minimalną realizację funkcji $G(\zeta)$, zaś $(A_r,\, B_r,\, C_r,\, D_r)$, gdzie $A_r \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r}$, będzie realizacją pewnego prawostronnego koniugatora. Kładąc $A_r = -I_A A^T$ oraz $n_r = n$, otrzymujemy model $G(\zeta)\cdot G_r(\zeta)$, dla którego można łatwo sformułować wystarczający warunek niesterowalności modów skojarzonych z wartościami własnymi macierzy A. Rozważając stosowną relację podobieństwa, otrzymujemy następujące równania:

$$P_r B_r - B D_r = 0_{n\times(p+r)} \tag{5.8}$$

$$(AP_r + BC_r)(I_n + \Delta A^T) + P_r A^T = 0_{n\times n} \tag{5.9}$$

w których funkcja (zbiór funkcji) $G(\zeta)$ reprezentowana jest przez parę (A, B), zaś macierz $P_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest parametrem. Funkcję $G_r(\zeta)$, której realizacja $(-I_A A^T,\, B_r,\, C_r,\, D_r)$ dla pewnego P_r spełnia równania (5.8) oraz (5.9), można zatem nazwać *prawostronnym koniugatorem* dla pary (A, B) z regularną macierzą A. System $G(\zeta)\cdot G_r(\zeta)$, w którym $G_r(\zeta)$ jest prawostronnym koniugatorem, opisany jest modelem

$$G(\zeta)\cdot G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} -I_A A^T & B_r \\ \hline DC_r + CP_r & DD_r \end{array}\right].$$

Tak postawione zadanie koniugacji stanowi podstawę bardziej szczegółowych definicji, w których na poszukiwany koniugator nakłada się pewne dodatkowe ograniczenia. Istotną pożądaną cechą takiego koniugatora jest jego odwracalność, co jest równoważne z postulatem nieosobliwości macierzy D_r. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że koniugatory są odwracalne.

Wnioski uzyskane w niniejszym podrozdziale wykorzystuje się w rozdziale następnym przy omawianiu syntezy układów optymalnych ze względu na wymagania wyrażone za pomocą normy $\mathcal{H}_\infty$.

Lemat 5.8 (o prawostronnym koniugatorze; Suchomski). *Jeżeli* $(-I_A A^T,$ $B_r,\ C_r,\ D_r)$ *o nieosobliwej macierzy* $D_r \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$ *jest prawostronnym koniugatorem dla sterowalnej pary* (A, B), *spełniającym warunki (5.8) oraz (5.9), wtedy* P_r *jest macierzą nieosobliwą.*

Dowód. Z (5.8) wynika, że $B = P_r B_r D_r^{-1}$. Jeżeli dla pewnego $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$ zachodziłoby $x^T P_r = 0_{1\times n}$, wtedy $x^T B = 0_{1\times(p+r)}$. Z kolei, na podstawie (5.9) mamy $(I_n + \Delta A)P_r = P_r I_A - \Delta B C_r$. Zatem, konsekwentnie: $x^T(I_n + \Delta A)P_r = 0_{1\times n}$ oraz $x^T(I_n + \Delta A)B = 0_{1\times(p+r)}$. Indukcyjnie można pokazać, że dla takiego x mielibyśmy $x^T(I_n + \Delta A)^k B = 0_{1\times(p+r)}$, $\forall k \geq 0$, co jednak pozostaje w sprzeczności z założeniem o sterowalności pary (A, B). Musimy przeto przyjąć, iż $x = 0_n$, a w konkluzji także przyznać, że P_r jest macierzą nieosobliwą. □

W podobny sposób dla danej pary (A, C), złożonej z regularnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz macierzy $C \in \mathbb{R}^{(m+q)\times n}$, definiujemy *lewostronny koniugator* $G_l(\zeta)$ o realizacji $(A_l,\ B_l,\ C_l,\ D_l)$, gdzie $A_l \in \mathbb{R}^{n_l \times n_l}$. Kładąc $A_l = -I_A A^T$ oraz $n_l = n$, uzyskujemy równania:

$$\begin{aligned} C_l P_l + D_l C &= 0_{(m+q)\times n} && (5.10)\\ (I_n + \Delta A^T)(P_l A - B_l C) + A^T P_l &= 0_{n\times n} && (5.11) \end{aligned}$$

sparametryzowane macierzą $P_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$. W tym przypadku $P_l(I_n + \Delta A) = I_A P_l + \Delta B_l C$. System $G_l(\zeta)\cdot G(\zeta)$, w którym $G_l(\zeta)$ jest lewostronnym koniugatorem, opisany jest modelem

$$G_l(\zeta)\cdot G(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} -I_A A^T & B_l D - P_l B \\ \hline C_l & D_l D \end{array}\right].$$

Lemat 5.9 (o lewostronnym koniugatorze; Suchomski). *Jeżeli* $(-I_A A^T,$ $B_l,\ C_l,\ D_l)$ *o nieosobliwej macierzy* $D_l \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$ *jest lewostronnym koniugatorem dla obserwowalnej pary* (A, C), *spełniającym warunki (5.10) oraz (5.11), wtedy* P_l *jest macierzą nieosobliwą.* □

Ponieważ $-I_A A^T - B_r D_r^{-1} C_r = P_r^{-1} A P_r$, zatem zera prawostronnego koniugatora $G_r(\zeta)$ są biegunami $G(\zeta)$. Podobnie jest w przypadku lewostronnego koniugatora: $-I_A A^T - B_l D_l^{-1} C_L = P_l A P_l^{-1}$. Realizacje $(-I_A A^T,\ B_r,$ $C_r,\ D_r)$ oraz $(-I_A A^T,\ B_l,\ C_l,\ D_l)$ wyżej opisanych koniugatorów są w ogólności realizacjami nieminimalnymi. Istotne znaczenie mają $J-$bezstratne funkcje, które pełnią rolę koniugatorów w odniesieniu do tylko i wyłącznie niestabilnych wartości własnych regularnej macierzy A danej pary. Takie funkcje nazywamy *stabilizującymi koniugatorami* (por. Hung i Chu [187], Kimura [220]-[223], [225], Kongprawechnon i Kimura [229], Liu i Mita [276]).

Lemat 5.10 (o stabilizującym J–bezstratnym prawostronnym koniugatorze; Suchomski). *Stabilizujący J_{pr}–bezstratny prawostronny koniugator $G_r(\zeta)$ dla sterowalnej pary (A, B), w której $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest regularną macierzą, zaś $B \in \mathbb{R}^{n\times(p+r)}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $(U_x, W_x) \in$* dom (δRic) *oraz $X_r = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$, gdzie:*

$$P_x = A, \quad Q_x = 0_{n\times n}, \quad R_x = BJ_{pr}B^T .$$

Jeżeli takie rozwiązanie istnieje, wtedy

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_r & BD_r \\ \hline -J_{pr}B^T I_A X_r & D_r \end{array}\right] \tag{5.12}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} -I_A A^T & X_r BD_r \\ \hline -J_{pr}B^T I_A & D_r \end{array}\right] \tag{5.13}$$

przy czym macierz $\hat{A}_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dana wzorem

$$\begin{aligned} \hat{A}_r &= A - BJ_{pr}B^T(I_n + \Delta X_r BJ_{pr}B^T)^{-1}X_r(I_n + \Delta A) \\ &= A - BJ_{pr}B^T I_A X_r \end{aligned}$$

jest macierzą stabilną, zaś $D_r \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$ jest nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie

$$D_r^T(J_{pr} + \Delta B^T X_r B)D_r = J_{pr} . \tag{5.14}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech (A_r, B_r, C_r, D_r) będzie realizacją stabilizującego J_{pr}– bezstratnego prawostronnego koniugatora, gdzie $A_r \in \mathbb{R}^{n_+\times n_+}$, $n_r = n_+$ oraz $\lambda(A_r) \subset \mathcal{D}_\Delta$, przy czym n_+ jest liczbą niestabilnych wartości własnych macierzy A. Rozważmy relację podobieństwa

$$\begin{bmatrix} A & BC_r \\ 0_{n_+\times n} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_- & M_+ \\ N_- & N_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_- & M_+ \\ N_- & N_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_- & 0_{n\times n_+} \\ 0_{n_+\times n} & A_+ \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

w której $A_- \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_+ \in \mathbb{R}^{n_+\times n_+}$, zbiór $\lambda(A_-) \subset \mathcal{D}_\Delta$ zawiera stabilne wartości własne oraz koniugacje niestabilnych wartości własnych macierzy A, zaś zbiór $\lambda(A_+) \subset -\bar{\mathcal{D}}_\Delta$ składa się z niestabilnych wartości własnych tej macierzy. W podanej macierzy podobieństwa obowiązuje przeto podział

$(n+n_+) \times (n+n_+)$. Mody systemu $G(\zeta) \cdot G_r(\zeta)$ skojarzone z $\lambda(A_+)$ są niesterowalne, zatem

$$\begin{bmatrix} BD_r \\ B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_- & M_+ \\ N_- & N_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_- \\ 0_{n_+ \times (p+r)} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

gdzie $B_- \in \mathbb{R}^{n \times (p+r)}$. Macierz $M_- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą nieosobliwą. W przeciwnym bowiem razie istniałby taki wektor $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$, dla którego $x^T M_- = 0_{1 \times n}$, a w konsekwencji – wobec nieosobliwości D_r – zachodziłoby $x^T B = 0_{1 \times (p+r)}$. Uwzględniając, że $AM_- + BC_r N_- = M_- A_-$, otrzymujemy równość $x^T A M_- = 0_{1 \times n}$. Mamy zatem $\operatorname{Ker} M_-^T \subset \operatorname{Ker} B^T$ oraz $A^T x \in \operatorname{Ker} B^T$. Indukcyjną metodą dochodzimy do równości $x^T A^k B = 0_{1 \times (p+r)}$, $\forall k \geq 0$, która jest jednak sprzeczna z założoną sterowalnością pary (A, B). W konsekwencji, wobec (5.15) oraz (5.16), uzyskujemy:

$$\begin{aligned} B_r &= SBD_r & (5.17) \\ A_- &= M_-^{-1}(A + BC_r S)M_- & (5.18) \end{aligned}$$

gdzie $S = N_- M_-^{-1} \in \mathbb{R}^{n_+ \times n}$. Ponadto $A_r S = S\hat{A}_r$, przy czym $\mathbb{R}^{n \times n} \ni \hat{A}_r = A + BC_r S = M_- A_- M_-^{-1}$ jest macierzą stabilną. Rozważany koniugator jest funkcją $J_{pr}-$bezstratną, zatem na podstawie drugiego równania *lematu 5.3* otrzymujemy równość $C_r = -J_{pr} B^T S^T X (I_{n_+} + \Delta A_r)$, przy czym $\mathbb{R}^{n_+ \times n_+} \ni X \geq 0$. Korzystając z pierwszego równania tego samego lematu, wywodzimy poszukiwane równanie Riccatiego

$$\begin{gathered} A^T X_r + X_r A + \Delta A^T X_r A \\ -(I_n + \Delta A^T) X_r B J_{pr} B^T (I_n + \Delta X_r B J_{pr} B^T)^{-1} X_r (I_n + \Delta A) = 0_{n \times n} \end{gathered} \tag{5.19}$$

w którym $\mathbb{R}^{n \times n} \ni X_r = S^T X S \geq 0$. Biorąc pod uwagę równość

$$(I_n + \Delta X_r B J_{pr} B^T)^{-1} X_r (I_n + \Delta A) = I_A X_r \tag{5.20}$$

stabilną macierz $\hat{A}_r$ zapisujemy jako $\hat{A}_r = A - BJ_{pr}B^T I_A X_r$. Trzecie równanie z warunku $J_{pr}-$bezstratności koniugatora przyjmuje postać ograniczenia (5.14) na nieosobliwą macierz D_r. Okazuje się, że istnienie $X_r = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$ gwarantuje, że potrzebna macierz D_r także istnieje. Stosowne rozumowanie, odnoszące się do szerszego kontekstu, przedstawiono w *podrozdziale 6.2.1*.

Model 'niskiego rzędu' rozważanego stabilizującego $J_{pr}-$bezstratnego koniugatora ma zatem postać

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A_r & SBD_r \\ \hline -J_{pr} B^T S^T X (I_{n_+} + \Delta A_r) & D_r \end{array} \right].$$

Jak widać, wyznaczenie tego modelu wymaga znajomości wielu 'szczegółów' wynikających z (5.15). Model (5.12) koniugatora uzyskamy po wykonaniu kilku prostych przekształceń. Ze wzoru (5.20) otrzymujemy równość $S^T X(I_{n_+} + \Delta A_r)S = I_A X_r$. Na tej podstawie wnioskujemy, że $S^T X(I_{n_+} + \Delta A_r)(\zeta I_{n_+} - A_r)^{-1} S = I_A X_r(\zeta I_n - \hat{A}_r)^{-1}$. Co oznacza, iż

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_r & BD_r \\ \hline -J_{pr}B^T I_A X_r & D_r \end{array}\right].$$

Ze wzorów (5.19), (5.20) oraz z postaci macierzy $\hat{A}_r$ wynika, że

$$A^T X_r + X_r \hat{A}_r + \Delta A^T X_r \hat{A}_r = 0_{n\times n} \tag{5.21}$$

a zatem $X_r \hat{A}_r = -I_A A^T X_r$, co pozwala model (5.12) wyrazić w postaci (5.13). Obie wymienione realizacje w ogólności nie są oczywiście minimalnymi realizacjami rozważanego stabilizującego koniugatora.

($\Leftarrow$) Niech $X_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie stabilizującym rozwiązaniem równania (5.19). Funkcja $G_r(\zeta)$ dana wzorem (5.13) spełnia warunki J_{pr}–bezstratności. Wystarczy zatem pokazać, że rząd tej funkcji jest równy liczbie niestabilnych wartości własnych macierzy A. Niech $\lambda \in \lambda(A)$ oznacza dowolną stabilną wartość własną macierzy A, zaś $x \in \mathbb{R}^n$ będzie odpowiednim (prawym) wektorem własnym tej macierzy. Ze wzoru (5.21) wynika, że $x^T X_r(\hat{A}_r - \lambda^{\sim} I_n) = 0_{1\times n}$. Ponieważ $\hat{A}_r$ jest macierzą stabilną, zatem $x \in \operatorname{Ker} X_r$. Ale $\lambda^{\sim} \in \lambda(-I_A A^T)$, zaś x jest stosownym (lewym) wektorem własnym skojarzonym z tą wartością własną. Wreszcie, z równości $x^T X_r B D_r = 0_{1\times(p+r)}$ wnioskujemy, że $\lambda^{\sim}$ jest wartością własną niesterowalną. □

Lemat 5.11 (o stabilizującym dualnym J–bezstratnym lewostronnym koniugatorze; Suchomski). *Stabilizujący dualny J_{mq}–bezstratny lewostronny koniugator $G_l(\zeta)$ dla obserwowalnej pary (A, C), w której $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest regularną macierzą, zaś $C \in \mathbb{R}^{(m+q)\times n}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $(U_y, W_y) \in \operatorname{dom}(\delta Ric)$ oraz $Y_l = \delta Ric(U_y, W_y) \geq 0$, gdzie:*

$$P_y = A^T, \quad Q_y = 0_{n\times n}, \quad R_y = -C^T J_{mq} C.$$

Jeżeli takie rozwiązanie istnieje, wtedy

$$G_l(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_l & Y_l I_A C^T J_{mq} \\ \hline D_l C & D_l \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -I_A A^T & I_A C^T J_{mq} \\ \hline D_l C Y_l & D_l \end{array}\right]$$

przy czym macierz $\hat{A}_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dana wzorem

$$\begin{aligned}\hat{A}_l &= A + (I_n + \Delta A)Y_l(I_n - \Delta C^T J_{mq} C Y_l)^{-1} C^T J_{mq} C \\ &= A + Y_l I_A C^T J_{mq} C\end{aligned}$$

jest macierzą stabilną, zaś $D_l \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$ jest macierzą nieosobliwą, spełniającą równanie

$$D_l(J_{mq} - \Delta C Y_l C^T)D_l^T = J_{mq}\,. \square$$

Uwaga 5.4 (Suchomski). Rozważmy system $G(\zeta)\cdot G_r(\zeta)$, w którym $G_r(\zeta)$ jest stabilizującym J_{pr}–bezstratnym prawostronnym koniugatorem

$$G(\zeta)\cdot G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_r & BD_r \\ \hline C - DJ_{pr}B^T I_A X_r & DD_r \end{array}\right].$$

Wykażemy, że każde zero tego systemu jest zerem $G(\zeta)$. Niech zatem $\vartheta \in \mathbb{R}$ będzie zerem $G(\zeta)\cdot G_r(\zeta)$. Wtedy istnieje taki wektor $[\ x_1^T \quad x_2^T\ ]^T \neq 0_{n+(p+r)} \in \mathbb{R}^{n+(p+r)}$, dla którego

$$\begin{bmatrix} A - BJ_{pr}B^T I_A X_r - \vartheta I_n & BD_r \\ C - DJ_{pr}B^T I_A X_r & DD_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0_{n+(m+r)}\,.$$

Dla $\tilde{x}_2 = D_r x_2 - J_{pr}B^T I_A X_r x_1 \in \mathbb{R}^{p+r}$ mamy

$$\begin{bmatrix} A - \vartheta I_n & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = 0_{n+(m+r)}\,.$$

Ponieważ D_r jest macierzą nieosobliwą, przeto ϑ musi być zerem funkcji $G(\zeta)$. Podobnie jest dla funkcji $G_l(\zeta)\cdot G(\zeta)$. Stabilizujące koniugatory $G_r(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r)\times(p+r)}$ oraz $G_l(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q)\times(m+q)}$, będąc funkcjami odwracalnymi, nie wprowadzają zatem do odpowiednich iloczynów dodatkowych zer. $\square$

Uwaga 5.5 (Suchomski). Konieczny warunek istnienia stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego podanych w *lemacie 5.10* oraz *5.11* ma postać żądania, aby macierze A odpowiednich par (A, B) oraz (A, C) nie miały wartości własnych należących do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Niech bowiem $\lambda \in \partial\mathcal{D}_\Delta$, zaś $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor własny skojarzony z taką wartością własną $\lambda \in \lambda(A)$. Ponieważ $\lambda(\hat{A}_r) \subset \mathcal{D}_\Delta$, zatem $\lambda^\sim \notin \lambda(\hat{A}_r)$. Na podstawie (5.21) wnioskujemy, że $x \in \operatorname{Ker} X_r$, co jednak – wobec równości $\hat{A}_r x = Ax = \lambda x$ – prowadzi do zaprzeczenia założenia o stabilności macierzy $\hat{A}_r$. Ponieważ $\operatorname{Ker} X_r$

jest podprzestrzenią A−niezmienniczą, przeto dla macierzy A o wszystkich niestabilnych wartościach własnych $\lambda(A) \subset -\bar{\mathcal{D}}_\Delta$ rozwiązanie X_r jest nieosobliwą macierzą, $X_r > 0$ (por. *uwaga 4.5*). Dla Y_l mamy odpowiednio $Y_l > 0$. Niech zatem $\lambda(A) \subset -\bar{\mathcal{D}}_\Delta$ oraz istnieje stabilizujący J_{pr}−bezstratny prawostronny koniugator dla sterowalnej pary (A, B). Stosowne rozwiązanie X_r spełnia równanie $X_rA + I_AA^TX_r - X_rBJ_{pr}B^TI_AX_r = 0_{n\times n}$ (por. *lemat 4.7*). Kładąc $Y_r = X_r^{-1}$, stwierdzamy, że w rozważanym przypadku stabilizujący koniugator istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dualne równanie Lapunowa $AY_r + Y_rA^T + \Delta AY_rA^T - BJ_{pr}B^T = 0_{n\times n}$ ma rozwiązanie $Y_r > 0$.

Wreszcie, jeżeli dla pary (A, B) istnieje stabilizujący J_{pr}−bezstratny prawostronny koniugator związany z macierzami X_r oraz $\hat{A}_r$, wtedy podobnej parze $(T^{-1}AT, T^{-1}B)$, gdzie $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oznacza nieosobliwą macierz, jest przyporządkowany J_{pr}−bezstratny prawostronny koniugator odpowiadający macierzom T^TX_rT oraz $T^{-1}\hat{A}_rT$. Mamy tu zatem do czynienia z pewnymi relacjami kongruencji oraz podobieństwa. Analogiczny wniosek obowiązuje w przypadku stabilizujących dualnych J_{mq}−bezstratnych lewostronnych koniugatorów. □

5.5 Modele rozszerzone

Niniejszy podrozdział dotyczy standardowych obiektów P o modelach, którym nie można przyporządkować odpowiednich łańcuchowych macierzy rozproszenia. Rozpatruje się zatem obiekty, dla których elementy $P_{yw}(\zeta)$ oraz $P_{zw}(\zeta)$ ich macierzy rozproszenia $P(\zeta)$ są macierzami nieodwracalnymi. Prezentowane tu w skrócie podejście opiera się na idei odpowiedniego rozszerzenia podstawowego modelu danego obiektu (por. Hou *et al.* [184], Kimura [225], Kongprawechnon i Kimura [230], Pugh i Tan [329], Suchomski [412], Tan i Pugh [430]). Problemy numerycznego uwarunkowania różnych zadań syntezy układów sterowania takimi obiektami według optymalnych reguł wywiedzionych z właściwości normy $\mathcal{H}_\infty$ szczegółowo opisano w (Suchomski [412]).

Niech będzie dany standardowy obiekt P, czyniący zadość wymaganiom postawionym w *założeniu 5.1.* Przyjmujemy, że przynajmniej jedna z nierówności $m \geq p$ lub $r \geq q$ jest nierównością ostrą. W dalszych rozważaniach niezbędne są następujące dwa dodatkowe modele obiektów: model z *rozszerzonym wyjściem*

$$P_o : \begin{bmatrix} W \\ U \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Z \\ Y \\ Y' \end{bmatrix}$$

gdzie $y' \in Y'$ jest pomocniczym (fikcyjnym) wyjściowym sygnałem o wymiarze $r - q \geq 0$ oraz model z *rozszerzonym wejściem*

$$P_i \; : \; \begin{bmatrix} W \\ U \\ U' \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Z \\ Y \end{bmatrix}$$

gdzie $u' \in U'$ oznacza pomocniczy (fikcyjny) wejściowy sygnał o wymiarze $m - p \geq 0$. Modelom tym przyporządkowujemy odpowiednie macierze rozproszenia:

$$\begin{aligned} P_o(\zeta) &= \begin{bmatrix} P_{zw}(\zeta) & P_{zu}(\zeta) \\ P_{yw}(\zeta) & P_{yu}(\zeta) \\ P_{y'w}(\zeta) & P_{y'u}(\zeta) \end{bmatrix} \\ P_i(\zeta) &= \begin{bmatrix} P_{zw}(\zeta) & P_{zu'}(\zeta) & P_{zu}(\zeta) \\ P_{yw}(\zeta) & P_{yu'}(\zeta) & P_{yu}(\zeta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odnośnie $P_{y'w}(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{(r-q)\times r}$ oraz $P_{zu'}(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{m\times(m-p)}$ zakładamy, że:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{yw}(\zeta) \\ P_{y'w}(\zeta) \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} P_{yw}(\zeta)^{-\prime} & P_{yw}(\zeta)^{\perp\prime} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_{zu'}(\zeta) & P_{zu}(\zeta) \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} P_{zu}(\zeta)^{\prime\perp} \\ P_{zu}(\zeta)^{\prime -} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

przy czym $P_{yw}(\zeta)^{-\prime} \in \mathcal{R}_P^{r\times q}$ jest prawostronną odwrotnością macierzy $P_{yw}(\zeta)$, przez $P_{yw}(\zeta)^{\perp\prime} \in \mathcal{R}_P^{r\times(r-q)}$ oznaczono prawostronny anihilator tej macierzy, $P_{zu}(\zeta)^{\prime -} \in \mathcal{R}_P^{p\times m}$ jest lewostronną odwrotnością, zaś $P_{zu}(\zeta)^{\prime\perp} \in \mathcal{R}_P^{(m-p)\times m}$ jest lewostronnym anihilatorem macierzy $P_{zu}(\zeta)$. Zatem: $P_{yw}(\zeta)\cdot P_{yw}(\zeta)^{-\prime} = I_q$, $P_{yw}(\zeta)\cdot P_{yw}(\zeta)^{\perp\prime} = 0_{q\times(r-q)}$, $P_{zu}(\zeta)^{\prime -}\cdot P_{zu}(\zeta) = I_p$ oraz $P_{zu}(\zeta)^{\prime\perp}\cdot P_{zu}(\zeta) = 0_{(m-p)\times p}$. Modelowi P_o odpowiada *rozszerzona łańcuchowa macierz rozproszenia*

$$G_o \; : \; \begin{bmatrix} U \\ Y \\ Y' \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} G_o &= F_c(P_o) = \begin{bmatrix} P_{zu} - P_{zw}(P_{yw}^{-\prime}P_{yu} + P_{yw}^{\perp\prime}P_{y'u}) & P_{zw}P_{yw}^{-\prime} & P_{zw}P_{yw}^{\perp\prime} \\ -(P_{yw}^{-\prime}P_{yu} + P_{yw}^{\perp\prime}P_{y'u}) & P_{yw}^{-\prime} & P_{yw}^{\perp\prime} \end{bmatrix} \\ G_o(\zeta) &= \begin{bmatrix} G_{zu}(\zeta) & G_{zy}(\zeta) & G_{zy'}(\zeta) \\ G_{wu}(\zeta) & G_{wy}(\zeta) & G_{wy'}(\zeta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Modelowi P_i przyporządkowujemy *rozszerzoną dualną łańcuchową macierz rozproszenia*

$$H_i \; : \; \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} U' \\ U \\ Y \end{bmatrix}$$

przy czym:

$$\begin{aligned} H_i &= F_{dc}(P_i) = \begin{bmatrix} P'^{\perp}_{zu} & -P'^{\perp}_{zu} P_{zw} \\ P'^{-}_{zu} & -P'^{-}_{zu} P_{zw} \\ P_{yu'} P'^{\perp}_{zu} + P_{yu} P'^{-}_{zu} & P_{yw} - (P_{yu'} P'^{\perp}_{zu} + P_{yu} P'^{-}_{zu}) P_{zw} \end{bmatrix} \\ H_i(\zeta) &= \begin{bmatrix} H_{u'z}(\zeta) & H_{u'w}(\zeta) \\ H_{uz}(\zeta) & H_{uw}(\zeta) \\ H_{yz}(\zeta) & H_{yw}(\zeta) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Zachodzi zatem

$$F_{dc}(P_i(\zeta)) \cdot F_c(P_o(\zeta)) = \begin{bmatrix} 0_{(m-p)\times(p+q)} & 0_{(m-p)\times(r-q)} \\ I_{p+q} & 0_{(p+q)\times(r-q)} \end{bmatrix} .$$

Przedmiotem naszego zainteresowania są układy z liniowymi regulatorami $K \; : \; Y \; \to \; U$, gdzie $K \in \mathcal{R}_P^{p\times q}$. W pierwszym przypadku (model z rozszerzonym wyjściem) odpowiednie sprzężenie zwrotne ma postać

$$u = \begin{bmatrix} K & 0_{p\times(r-q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

czemu odpowiada funkcja przenoszenia $EHM(G_o, K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$ opisana następującą *rozszerzoną homograficzną transformacją*

$$EHM(G_o, K) = \begin{bmatrix} G_{zu}K + G_{zy} & G_{zy'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{wu}K + G_{wy} & G_{wy'} \end{bmatrix}^{-1} .$$

W drugim przypadku (model z rozszerzonym wejściem) mamy

$$\begin{bmatrix} u' \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(m-p)\times q} \\ K \end{bmatrix} y$$

czemu z kolei odpowiada funkcja przenoszenia $EDHM(H_i, K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$ reprezentowana przez *rozszerzoną dualną homograficzną transformację*

$$EDHM(H_i, K) = - \begin{bmatrix} H_{u'z} \\ H_{uz} - KH_{yz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{u'w} \\ H_{uw} - KH_{yw} \end{bmatrix} .$$

Uwaga 5.6 (Suchomski). Niech

$$P_o(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}w} & 0_{r\times p} \end{array}\right]$$

przy czym $C_{\hat{y}} = [\ C_y^T \quad C_{y'}^T\ ]^T \in \mathbb{R}^{r\times n}$ oraz $D_{\hat{y}w} = [\ D_{yw}^T \quad D_{y'w}^T\ ]^T \in \mathbb{R}^{r\times r}$, gdzie $C_{y'} \in \mathbb{R}^{(r-q)\times n}$, zaś $D_{y'w} \in \mathbb{R}^{(r-q)\times r}$. Na tej podstawie wyznaczamy rozszerzoną łańcuchową macierz rozproszenia

$$G_o(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A - B_w D_{\hat{y}w}^{-1} C_{\hat{y}} & B_u & B_w D_{\hat{y}w}^{-1} \\ \hline C_z - D_{zw} D_{\hat{y}w}^{-1} C_{\hat{y}} & D_{zu} & D_{zw} D_{\hat{y}w}^{-1} \\ -D_{\hat{y}w}^{-1} C_{\hat{y}} & 0_{r\times p} & D_{\hat{y}w}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_G & B_G \\ \hline C_G & D_G \end{array}\right]$$

gdzie $A_G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_G \in \mathbb{R}^{n\times(p+r)}$, $C_G \in \mathbb{R}^{(m+r)\times n}$ oraz $D_G \in \mathbb{R}^{(m+r)\times(p+r)}$. Macierz tę można przedstawić w postaci iloczynu dwóch łańcuchowych macierzy rozproszenia pewnych pomocniczych (cząstkowych) obiektów, zachodzi bowiem $F_c(P_o(\zeta)) = F_c(P_z(\zeta)) \cdot F_c(P_{\hat{y}}(\zeta))$, gdzie:

$$\begin{aligned} P_z(\zeta) &= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ 0_{r\times n} & I_r & 0_{r\times p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_{z0} & D_z \end{array}\right] \\ P_{\hat{y}}(\zeta) &= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline 0_{p\times n} & 0_{p\times r} & I_p \\ C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}w} & 0_{r\times p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_{o\hat{y}} & D_{\hat{y}} \end{array}\right] \end{aligned}$$

zaś wymiary odpowiednich elementów tych modeli wynoszą: $B \in \mathbb{R}^{n\times(r+p)}$, $C_{z0} \in \mathbb{R}^{(m+r)\times n}$, $D_z \in \mathbb{R}^{(m+r)\times(r+p)}$, $C_{0\hat{y}} \in \mathbb{R}^{(p+r)\times n}$ oraz $D_{\hat{y}} \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(r+p)}$. Obowiązują zatem równości: $A_G = A - BD_{\hat{y}}^{-1}C_{0\hat{y}}$, $B_G = BD_{\hat{y}}^{-1}$, $C_G = C_{z0} - D_z D_{\hat{y}}^{-1} C_{0\hat{y}}$ oraz $D_G = D_z D_{\hat{y}}^{-1}$. Zauważmy, że $P_z(\zeta)$ oraz $F_c(P_z(\zeta))$ nie zależą od parametrów $C_{y'}$ oraz $D_{y'w}$ rozszerzenia modelu P.

Podejmując analizę drugiego rozszerzonego modelu, zakładamy

$$P_i(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_{\hat{u}} \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{z\hat{u}} \\ C_y & D_{yw} & 0_{q\times m} \end{array}\right]$$

przy czym $B_{\hat{u}} = [\ B_{u'} \quad B_u\ ] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ oraz $D_{z\hat{u}} = [\ D_{zu'} \quad D_{zu}\ ] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, gdzie $B_{u'} \in \mathbb{R}^{n\times(m-p)}$, zaś $D_{zu'} \in \mathbb{R}^{m\times(m-p)}$. Odpowiednia rozszerzona dualna łańcuchowa macierz rozproszenia dana jest zatem wzorem

$$H_i(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A - B_{\hat{u}}D_{z\hat{u}}^{-1}C_z & B_{\hat{u}}D_{z\hat{u}}^{-1} & B_w - B_{\hat{u}}D_{z\hat{u}}^{-1}D_{zw} \\ \hline -D_{z\hat{u}}^{-1}C_z & -D_{z\hat{u}}^{-1} & -D_{z\hat{u}}^{-1}D_{zw} \\ C_y & 0_{q\times m} & D_{yw} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_H & B_H \\ \hline C_H & D_H \end{array}\right]$$

w którym $A_H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_H \in \mathbb{R}^{n\times(m+r)}$, $C_H \in \mathbb{R}^{(m+q)\times n}$ oraz $D_H \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+r)}$. Zachęceni poprzednio rozpatrywanym przypadkiem macierzy $G_o(\zeta)$, wyznaczymy odpowiednią faktoryzację macierzy $H_i(\zeta)$, wyróżniając w niej czynniki, które można interpretować jako dualne łańcuchowe macierze rozproszenia pewnych pomocniczych (cząstkowych) obiektów dynamicznych. Okazuje się bowiem, że zachodzi $F_{dc}(P_i(\zeta)) = F_{dc}(P_{\hat{u}}(\zeta)) \cdot F_{dc}(P_w(\zeta))$, gdzie:

$$\begin{aligned} P_w(\zeta) &= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & 0_{n\times m} \\ \hline C_z & D_{zw} & I_m \\ C_y & D_{yw} & 0_{q\times m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B_{0w} \\ \hline C & D_w \end{array}\right] I_{-mr} \\ P_{\hat{u}}(\zeta) &= \left[\begin{array}{c|cc} A & 0_{n\times q} & B_{\hat{u}} \\ \hline C_z & 0_{m\times q} & D_{z\hat{u}} \\ C_y & I_q & 0_{q\times m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B_{\hat{u}0} \\ \hline C & D_{\hat{u}} \end{array}\right] I_{-mq} \end{aligned}$$

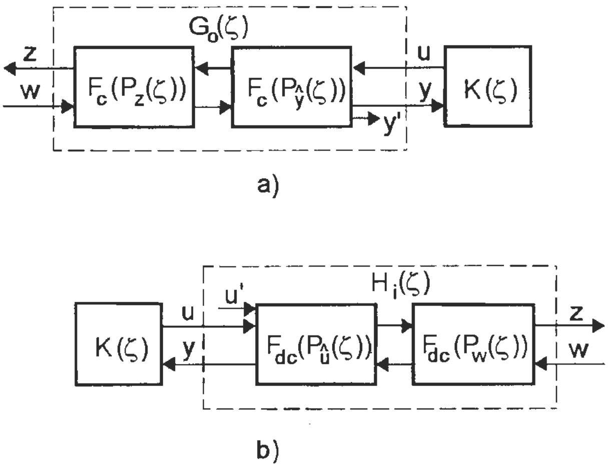
przy czym:

$$B_{0w} = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & B_w \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} -I_m & D_{zw} \\ 0_{q\times m} & D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$B_{\hat{u}0} = \begin{bmatrix} -B_{\hat{u}} & 0_{n\times q} \end{bmatrix}, \quad D_{\hat{u}} = \begin{bmatrix} -D_{z\hat{u}} & 0_{m\times q} \\ 0_{q\times m} & I_q \end{bmatrix}.$$

Wymiary podanych macierzy wynoszą: $B_{0w} \in \mathbb{R}^{n\times(m+r)}$, $B_{\hat{u}0} \in \mathbb{R}^{n\times(m+q)}$, $D_w \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+r)}$, $D_{\hat{u}} \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$ oraz $I_{-mn} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(n+m)}$. Na tej podstawie wyprowadzamy zależności: $A_H = A - B_{\hat{u}0}D_{\hat{u}}^{-1}C$, $B_H = B_{0w} - B_{\hat{u}0}D_{\hat{u}}^{-1}D_w$, $C_H = D_{\hat{u}}^{-1}C$ oraz $D_H = D_{\hat{u}}^{-1}D_w$. Funkcje $P_w(\zeta)$ oraz $F_{dc}(P_w(\zeta))$ nie zależą od parametrów $B_{u'}$ oraz $D_{zu'}$ rozszerzenia modelu P. Odpowiednie schematy układów zamkniętych pokazano na rys. 5.3 (por. rys. 5.2). □

Uwaga 5.7 (Suchomski). Macierz $D_{yw} \in \mathbb{R}^{q\times n}$ jest macierzą o pełnym wierszowym rzędzie, zatem ma reprezentację $D_{yw} = U_{yw}\Sigma_{yw}\overline{V}_{yw}^T$, w której $U_{yw} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ jest ortonormalnym czynnikiem, $\Sigma_{yw} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ jest niesobliwą macierzą diagonalną, zaś $\overline{V}_{yw} \in \mathbb{R}^{r\times q}$. Na tej podstawie otrzymujemy przykładową macierz $D_{y'w} = \underline{V}_{yw}^T$, przy czym $\underline{V}_{yw} \in \mathbb{R}^{r\times(r-q)}$ jest ortonormalnym kolumnowym dopełnieniem w macierzy $\begin{bmatrix} \overline{V}_{yw} & \underline{V}_{yw} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Stąd



Rys. 5.3. Schemat układu z uogólnionym obiektem opisanym: a) rozszerzoną łańcuchową macierzą rozproszenia, b) rozszerzoną dualną łańcuchową macierzą rozproszenia.

$D_{\hat{y}w}^{-1} = [\ \overline{V}_{yw}\Sigma_{yw}^{-1}U_{yw}^T \quad \underline{V}_{yw}\ ]$. Podobnie postępujemy w przypadku macierzy $D_{zu} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ o pełnym kolumnowym rzędzie, której przyporządkowujemy dogodną reprezentację $D_{zu} = \overline{U}_{zu}\Sigma_{zu}V_{zu}^T$, gdzie $\overline{U}_{zu} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $\Sigma_{zu} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ jest niesobliwą macierzą diagonalną, zaś $V_{zu} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ jest ortonormalnym czynnikiem. Mamy zatem $D_{zu'} = \underline{U}_{zu} \in \mathbb{R}^{m\times(m-p)}$, przy czym $[\ \overline{U}_{zu} \quad \underline{U}_{zu}\ ] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest ortonormalną macierzą. W efekcie uzyskujemy

$$D_{z\hat{u}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{zu}^T \\ V_{zu}\Sigma_{zu}^{-1}\overline{U}_{zu}^T \end{bmatrix}.$$

Jak nietrudno zauważyć, obowiązują następujące równości:

$$\begin{aligned} D_{yw}D_{\hat{y}w}^{-1} &= \begin{bmatrix} I_q & 0_{q\times(r-q)} \end{bmatrix} \\ D_{z\hat{u}}^{-1}D_{zu} &= \begin{bmatrix} 0_{(m-p)\times p} \\ I_p \end{bmatrix}. \square \end{aligned}$$

Zakończenie

Praca dotyczyła problemów syntezy algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Próbując wskazać najważniejsze przyczynki, które zdaniem autora wnosi niniejsza praca, należałoby – konsekwentnie wiążąc poniższe sformułowania z przyjętym sposobem modelowania sterowanych obiektów opartym na operatorze δ – wymienić co następuje.

(*1*) Opracowano analityczne formuły nastawiania korektorów Youli–Kučery o niskim rzędzie, służące zapewnieniu odpornej stabilności oraz odpornego zachowania się nominalnie stabilnych układów sterowania wyznaczonych zgodnie z metodą rozmieszczania biegunów oraz układów sterowania predykcyjnego. Zdefiniowano dwie rodziny diofantycznych równań niezbędnych przy rozwiązywaniu zadań syntezy algorytmów sterowania na podstawie zasady rozmieszczania biegunów.

(*2*) Podano oszacowanie wstecznego oraz względnego błędu rozwiązania problemu rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń liniowego zadania wynikającego z odpowiednich równań diofantycznych.

(*3*) Przedstawiono numerycznie stabilną metodę oceny stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów dyskretnego modelu sterowanego obiektu.

(*4*) Opracowano metodę strojenia algorytmów predykcyjnego sterowania, mającą postać analitycznych formuł wywiedzionych z właściwości odpowiednio sparametryzowanych rodzin prototypowych wielomianów.

(*5*) Badając wrażliwość rozwiązań dyskretnych równań Riccatiego oraz dyskretnych równań Lapunowa na zaburzenia odpowiednich macierzowych pęków, wykazano, że w przypadku nieosobliwych zadań przy dostatecznie małej wartości okresu próbkowania równania przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia q charakteryzują się istotnie gorszym uwarunkowaniem w stosunku do równań wynikających z zastosowania operatora δ. Ujawniono także istnienie klasy osobliwych zadań, dla których taka przewaga modeli związanych z operatorem δ nie występuje.

(*6*) Dla typowych struktur algorytmów optymalnego sterowania pokazano w jaki sposób, wykorzystując odpowiednio zdefiniowane równania Lapunowa, wyznaczyć zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

(*7*) Zbadano właściciwości $J-$bezstratnych stabilizujących koniugatorów.

(*8*) Sformułowano konieczne i wystarczające warunki istnienia różnych $J-$bezstratnych faktoryzacji modeli (macierzy) rozproszenia, w tym także uogólnionych $J-$bezstratnych faktoryzacji macierzy, które mają zera należące do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Szczegółowo przeanalizowano właściwości czynników takich faktoryzacji.

(*9*) Ukazano podstawowe strukturalne cechy szerokiej klasy optymalnych algorytmów sterowania, które uzyskuje się, biorąc pod uwagę zalecenia wynikające z teorii przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$. Podano wystarczające warunki istnienia wymiernych rozwiązań o ściśle właściwej postaci, a także zwrócono uwagę na ograniczony zakres ich stosowalności.

(*10*) Omówiono szereg algorytmów odpornego sterowania oraz estymacji stanu, w tym ogólną postać algorytmu wyprowadzonego z metody rozmieszczania biegunów.

Rozdział 6., poświęcony problemom syntezy liniowych układów optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$, stanowi merytorycznie najistotniejszą część pracy. Łatwo wszakże zauważyć, że motyw kształtowania charakterystyk układów dynamicznych (sterowania oraz estymacji) w oparciu o wskazania formułowane z wykorzystaniem normy $\mathcal{H}_\infty$ wielokrotnie pojawiał się także w innych miejscach tej pracy.

Problemy oraz zadania tu podjęte nie wypełniają całości obszaru zasługującego na penetrację. Jeden z rozpoczętych i interesujących wątków wiąże się z pytaniem o możliwość zbudowania numerycznie stabilnego algorytmu syntezy regulatora według normy $\mathcal{H}_\infty$ na podstawie rozszerzonego modelu danego obiektu. Okazuje się, że w przypadku takich modeli, badając konieczne i wystarczające warunki istnienia odpowiednich $J-$bezstratnych faktoryzacji, a także definiując dodatkowe strukturalne wymagania nakładane na unimodularne czynniki tych faktoryzacji, po raz kolejny przekonujemy się o korzyściach, jakie daje reprezentacja rozważanych równań Riccatiego w postaci stosownych macierzowych pęków (Suchomski [412]). Inny problem, o którym tylko wspomniano w toku prowadzonych rozważań, dotyczy algorytmów syntezy odpornych adaptacyjnych układów sterowania z Q–parametrami zmieniającymi się w czasie (Suchomski [411]).

Na zakończenie warto jeszcze wymienić dwa tematy, które będąc rozwinięciem problematyki poruszonej w niniejszej pracy, stanowią o aktualnych fascynacjach jej autora. Są to problemy syntezy numerycznie odpornych algorytmów sterowania nieliniowymi obiektami o nieskończeniewymiarowych modelach oraz zagadnienia związane z adekwatnym modelowaniem w czasie dyskretnym niepewności charakterystyk obiektów opisanych różniczkowymi inkluzjami.

Literatura

[1] J. Abels, P. Benner: CAREX (DAREX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Riccati equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 14 (16), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.

[2] A. Albert: Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudo inverses, *SIAM Journ. Applied Math.*, 1969, 17 (2), 434-440.

[3] B.D.O. Anderson: From Youla-Kučera to identification, adaptive and nonlinear control, *Automatica*, 1998, 34 (12), 1485-1506.

[4] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenny, D. Sorensen: *LAPACK users' guide*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[5] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: *Optimal control. Linear quadratic methods*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.

[6] P. Ansay, V. Wertz: Model uncertainties in GPC: a systematic two-step design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, FR-A-B-3.

[7] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz: Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter, *European Journ. Control*, 1998, 4 (1), 64-70.

[8] K. Arent, I.M.Y. Mareels, J.W. Polderman: The pole-zero cancellation problem in adaptive control: a solution for minimum phase systems by approximate models, *European Journ. Control*, 1998, 4 (3), 320-332.

[9] L. Arnold: *Stochastic differential equations. Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.

[10] W.F. Arnold, A.J. Laub: Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations, *Proc. IEEE*, 1984 , 72 (12), 1746-1754.

[11] K.J. Åström: Limitations on control system performance, *European Journ. Control*, 2000, 6 (1), 2-20.

[12] K.J. Åström, P. Hagander, J. Sternby: Zeros of sampled systems, *Automatica*, 1984, 20 (1), 31-38.

[13] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA., 1989.

[14] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Computer-controlled systems*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1997.

[15] E.W. Bai, Z. Ding: Zeros of sampled data systems represented by FIR models, *Automatica*, 2000, 36 (1), 121-123.

[16] E.W. Bai, Y.Q. Wu: Limiting zero distribution of sampled systems, *Automatica*, 2002, 38 (5), 843-851.

[17] G.A. Baker: *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York, San Fransisco, 1975.

[18] G.A. Baker, P. Graves-Morris, P.A. Carruthers: *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981.

[19] S. Barnett: *Matrices in control theory*, Van Nostrand Rainhold Company, London, 1971.

[20] A.Y. Barraud: A numerical algorithm to solve $A^T XA - X = Q$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1977, AC-22 (5), 883-885.

[21] R.H. Bartels, A.R. Conn, C. Charalambous: On Cline's direct method for solving overdetermined linear systems in the l_∞ sense, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1978, 15 (2), 255-270.

[22] H. Bartels, G.W. Stewart: Algorithm 432. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Comm. Assoc. Computing Mach.*, 1972, 15 (9), 820-826.

[23] F.L. Bauer: Optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1963, 5 (1), 73-87.

[24] F.L. Bauer: Remarks on optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1969, 13 (1), 1-3.

[25] B. Beckermann, G. Labahn: A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials, *Journ. Symbolic Comput.*, 1998, 26 (6), 691-714.

[26] B. Benhammouda: Rank-revealing 'top-down' *ULV* factorizations, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1997, SFB393/97-02, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[27] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic Riccati equations. I: continuous-time case, II: discrete-time case, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1995, 95-22, 95-23, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[28] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: Benchmarks for the numerical solution of algebraic Riccati equations, *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17 (5), 18-28.

[29] A. Berman, R.J. Plemmons: *Nonegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[30] R.R. Bitmead, M. Gevers: Riccati difference and differential equations: convergence, monotonicity and stability, *w* S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[31] R.R. Bitmead, H. Weiss: On the solution of discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (3), 481-482.

[32] Å. Björck: *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[33] Å. Björck: Component-wise perturbation analysis and error bounds, *BIT*, 1991, 31, 238-244.

[34] T. Bleile, P. Boucher, D. Dumur: Delta-operator generalized predictive cascade control, *Proc. 3rd European Control Conf ECC'95*, Rome, Italy, 4, 1995, 2857-2862.

[35] M.J. Błachuta: On zeros of pulse transfer functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1999, AC-44 (6), 1229-1234.

[36] J. Bognar: *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.

[37] D.L. Boley: Computing rank-deficiency of rectangular matrix pencils, *Systems and Control Letters*, 1987, 9, 207-214.

[38] D.L. Boley, W.S. Lu: Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (3), 249-251.

[39] P. Boucher, D. Dumur, R. Neumann: Control axis using delta-operator generalized-predictive control, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993 2, 937-940.

[40] T.L. Boullion, P.L. Odell: *Generalized inverse matrices*, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1971.

[41] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[42] R.D. Braatz: Internal model control, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[43] G.E. Bredon: *Topology and geometry*, Springer Verlag, New York, 1993.

[44] W.S. Brown: On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1971, 18 (4), 476-504.

[45] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang: *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

[46] J.R. Bunch: The weak and strong stability of algorithms in numerical linear algebra, *Linear Algebra Appl.*, 1987, 88/89, 49-66.

[47] J.R. Bunch, C.P. Nielsen: Updating the singular value decomposition, *Numer. Math.*, 1978, 31 (2), 111-129.

[48] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, V. Mehrmann: A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (2), 419-453.

[49] P.A. Businger: Matrices which can be optimally scaled, *Numer. Math.*, 1968, 12, 346-348.

[50] P.A. Businger, G.H. Golub: Linear least squares solutions by Householder transformations, *Numer. Math.*, 1965, 7 (3), 269-276.

[51] M. Busłowicz: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk, Politechnika Białostocka, Warszawa, Białystok, 2000.

[52] R. Byers: A LINPACK-style condition estimator for the equation $AX - XB^T = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (10), 926-928.

[53] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model predictive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[54] T.F. Chan, D.E. Foulser: Effectively well-conditioned linear systems, *SIAM Journ. Sci. Statist. Comput.*, 1988, 9 (6), 963-969.

[55] S. Chandrasekaran, I.C.F. Ipsen: On the sensitivity of solution components in linear systems of equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1995, 16 (1), 93-112.

[56] B.M. Chen: *Robust and $\mathcal{H}_\infty$ control*, Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 2000.

[57] C.T. Chen: *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*, Saunders College Publishing, Philadelphia, San Diego, 1993.

[58] B.S. Chen, T.Y. Dong: LQG Optimal control system design under plant perturbation and noise uncertainty: a state-space approach, *Automatica*, 1989, 25 (3), 431-436.

[59] S. Chen, J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne: Optimising stability bounds of finite-precision controller structures for sampled-data systems in the $\delta-$operator domain, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (6), 517-526.

[60] H.W. Cheng, S.S.T. Yau: More explicit formulas for the matrix exponential, *Linear Algebra Appl.*, 1997, 262, 131-163.

[61] P. Chin, R.M. Corless: Optimization strategies for the approximate GCD problem, *Proc. Int. Symp. Symbolic and Algebraic Computation ISSAC*, Rostock, Germany, 1998, 228-235.

[62] A. Chotai, P. Young, P. McKenna, W. Tych: Proportional-integral-plus (*PIP*) design for delta (δ) operator systems. Part 2: MIMO systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (1), 149-168.

[63] C.K. Chui, G. Chen: *Kalman filtering with real-time applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[64] D.W. Clarke: Self-tuning control, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[65] D.W. Clarke, C. Mohtadi: Properties of generalized predictive control, *Automatica*, 1989, 25 (6), 859-876.

[66] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm, *Automatica*, 1987, 23 (1), 137-148.

[67] T.F. Coleman, Y. Li: A global and quadratically convergent method for linear l_∞ problems, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1992, 29 (4), 1166-1186.

[68] E.G. Collins Jr., W.M. Haddad, V. Challeboina: Robustness analysis in the delta-domain using fixed-structure multipliers, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 3286-3291.

[69] E.G. Collins Jr., T. Song: A delta operator approach to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (4), 315-320.

[70] J.B. Conway: *Functions of one complex variable*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1978.

[71] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A generalized eigenproblem solution for singular $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ problems, *Control and Dynamic Systems*, 1992 50 (2), 331-394.

[72] R.B. Copeland, M.G. Safonov: Zero cancelling compensation for singular control problems and their application to the inner-outer factorization problem, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1992, 2 (2), 139-164.

[73] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A zero compensation approach to singular $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5 (2), 71-106.

[74] C.L. Cox, W.F. Moss: Backward error analysis for a pole assignment algorithm, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (4), 446-456.

[75] S. Cristea, C. De Prada: Predictive control system with slow and fast dynamics using the delta operator, *Proc. CIDIC Seminar. Theory and Applic. Model-based Predictive Control*, Brussel, Belgium, 1996.

[76] C.G. Cullen, C.A. Hall: On determining whether two polynomials are relatively prime, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (4), 369-370.

[77] P.F. Curran: Lyapunov's matrix equation with system matrix in companion form, *Int. Jouurn. Control*, 1993, 57 (6), 1509-1516.

[78] B.N. Datta: *Numerical methods for linear control systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, 2004.

[79] E.J. Davison, I.J. Ferguson: The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using parameter optimization methods, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (1), 93-110.

[80] H. Demircioglu: Constrained continuous-time generalised predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Applic,*, 1999, 146 (5), 470-476.

[81] H. Demircioglu, D.W. Clarke: CGPC with guaranteed stability properties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1992, 139 (4), 371-380.

[82] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Continuous-time generalised predictive control (CGPC), *Automatica*, 1991, 27 (1), 55-74.

[83] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Multivariable continuous-time generalised predictive control (MCGPC), *Automatica*, 1992, 28 (4), 697-713.

[84] J.W. Demmel: *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[85] J.W. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, Slapničar, K. Veselič, Z. Drmač: Computing the singular value decomposition wihh relative accuracy, *LAPACK working note*, 1997, 119, CS-97-348. SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[86] M.C.F. de Oliveira, P.J. Fleming: Effective mapping of continuous-time controllers to their equivalents, *Electronics Letters*, 1990, 26 (9), 562-564.

[87] P. Devilde, H. Dym: Lossless chain scattering matrices and optimum linear prediction: the vector case, textitCircuit Theory Appl., 1981, 9 (2), 135-175.

[88] I.S. Dhillon: Relaible computation of the condition number of a tridiagonal matrix in $\mathcal{O}(n)$ time, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 776-796.

[89] C. De Prada, S. Cristea, A.G. Kuznetsov: Stability guarantee in predictive control delta domain, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 3b-07-3, I, 397-402.

[90] C.A. Desoer, M. Vidyasagar: *Feedback systems: input-output properties*, Academic Press, New York, 1975.

[91] J. Douglas, M. Athans: Multivariable poles, zeros, and pole-zero cancellations, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[92] J.C. Doyle: Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (4), 756-757.

[93] J.C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1982, 129 (6), 242-250.

[94] C.J. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum: *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

[95] J.C. Doyle, A. Packard, K. Zhou: Review of LFTs, LMIs and μ, *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, England, 1991, 1227-1232.

[96] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis: State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, 34 (8), 831-847.

[97] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[98] D. Dumur, P. Boucher: New predictive techniques: control axis solutions, *Proc. 3rd Conf. on Control Applications*, Glasgow, Scotland, UK, 1994, 1663-1668.

[99] D. Dumur, P. Boucher, E. Pope, C. Holtan: PREDATOR: a delta identification and autotuned predictive control software toolbox, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2845-2850.

[100] G.E. Dullerud, F. Paganini: *A course in robust control theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, 2000.

[101] W. Ebert: Optimal filtered predictive control - a delta operator approach, *Systems and Control Letters*, 2001, 42, 69-80.

[102] M. El-Khoury, O.D. Crisalle: Relative zero location for second-order sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1551-1552.

[103] E. Elmroth, F. Gustavson, I. Jonsson, B. Kågström: Recursive blocked algorithms and hybrid data structures for dense matrix library software, *SIAM Review*, 2004, 46 (1), 3-45.

[104] L. Elsner, C. He: An algorithm for computing the distance to uncontrollability, *Systems and Control Letters*, 1991, 17, 453-464.

[105] A. Emami-Naeini, P. Van Dooren: Computation of zeros of linear multivariable systems, *Automatica*, 1982, 18 (4), 415-430.

[106] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Numerical univariate polynomial GCD, *w* J. Renegar, M. Shub, S. Smale (Eds.): *The mathematics of numerical analysis, Lect. appl. math.*, 32, Amer. Math. Soc., 1996.

[107] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Certified approximate univariate GCDs, *Journ. Pure Appl. Algebra*, 1997, 117/118, 229-251.

[108] F.W. Fairman: *Linear control theory, the state space approach*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.

[109] G. Favier, D. Dubois: A review of k-step-ahead predictors, *Automatica*, 1990, 26 (1), 75-84.

[110] A. Feintuch: *Robust control theory in Hilbert space*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1998.

[111] V. Feliu, J.A. Cerrada: Analysis and design of minimum-phase zeros of sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (6), 1397-1416.

[112] A. Feuer, R.H. Middleton: Conditioning of LMS algorithms with fast sampling, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995 , AC-43 (8), 1978-1981.

[113] R.D. Fierro, P.C. Hansen, P.S.K. Hansen: UTV tools: MATLAB templates for rank-revealing *UTV* decompositions, *Numer. Algorithms*, 199, 20 (1), 165-194.

[114] M. Fikar, S. Engell: Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kučera parameterisation, *European Journ. Control*, 1997, 3 (2), 304-316.

[115] M. Fikar, M. Morari, J. Mikleš: On Youla-Kučera parameterisation approach to predictive control, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CP-12-5.

[116] B.A. Francis: *A course in $\mathcal{H}_\infty$ control theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

[117] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (6), 555-565.

[118] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: A sensitivity tradeoffs for plants with time delay, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 99-104.

[119] J.S. Freudenberg, R.H. Middleton, J.H. Braslavsky: Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems, *Int. Journ. Control*, 1995, 61 (6), 1387-1421.

[120] Y. Fu, G.A. Dumont: Choice of sampling to ensure minimum-phase behaviour, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 560-563.

[121] P.A. Fuhrmann: *A polynomial approach to linear algebra*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1996.

[122] Z. Gajic, M. Qureshi: *Lyapunov matrix equation in system stability and control*, Academic Press, New York, 1995.

[123] P.M. Gahinet, A.J. Laub: Computable bounds for the sensitivity for the algebraic Riccati equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1461-1480.

[124] P.M. Gahinet, A.J. Laub, C.S. Kenney, G.A. Hewer: Sensitivity of the stable discrete-time Lyapunov equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1209-1217.

[125] F.R. Gantmacher: *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

[126] P.J. Gawthrop: *Continuous-time self-tuning control; vol. 1: design*, Research Studies Press, Letchworth, U.K., 1987.

[127] C.E. Garcia, M. Morari: Internal model control. A unifying review and some new results, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1982, 21 (2), 308-323.

[128] P.J. Gawthrop, H. Demircioglu, I.I. Siller-Alcala: Multivariable continuous-time generalised predictive control: a state-space approach to linear and non-linear systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1998, 145 (3), 241-250.

[129] P.J. Gawthrop, R.W. Jones, D.G. Sbarbaro: Emulator-based control and internal model control: complementary approaches to robust control design, *Automatica*, 1996, 32 (8), 1223-1227.

[130] Y. Genin, P. Van Dooren, T. Kailath, J. Delosme, M. Morf: On $\Sigma-$lossless transfer functions and related questions. *Linear Algebra Appl.*, 1983, 50, 251-275.

[131] R. Gessing: About some properties of discrete-time transfer functions for small sampling periods, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993,3, 1699-1702.

[132] R. Gessing: Whether the delta operator models are really better for small sampling periods, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-We-M21 .

[133] M. Gevers, G. Li: *Parametrizations in control, estimation and filtering problems*, Springer Verlag, London, 1993.

[134] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Residual bounds for discrete-time Lyapunov equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (7), 1244-1249.

[135] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Backward error, sensitivity and refinement of computed solutions of algebraic Riccati equations, *Numer. Algebra Appl.*, 1995, 2 (1), 29-49.

[136] K.C. Goh, M.G. Safonov: The extended $j\omega-$axis eigenstructure of a Hamiltonian matrix pencil, *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 1897-1902.

[137] G.H. Golub, V. Klema, G.W. Stewart: Rank degeneracy and least squares problems, *Stanford Univ. Tech. Report*, 1976, STAN-CS-76-559, Computer Sci. Depart., Stanford, CA.

[138] G.H. Golub, S. Nash, C.F. Van Loan: A Hessenberg-Schur method for the problem $AX + XB = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1974, AC-24 (6), 909-913.

[139] G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1996.

[140] R.M. Goodall, B.J. Donoghue: Very high sample rate digital filters using the δ operator realisation, *IEE Proc., Circuit Device Syst.*, 1993, 140 (3), 199-206.

[141] G.C. Goodwin, R. Lozano Leal, D.Q. Mayne, R.H. Middleton: Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, 1986, 22 (2), 199-207.

[142] G.C. Goodwin, R.H. Middleton, H.V. Poor: High-speed digital signal processing and control, *Proc. IEEE*, 1992, 80 (2), 240-259.

[143] G.C. Goodwin, M. Salgado: Frequency domain sensitivity functions for continuous time systems under sampled data control, *Automatica*, 1994, 30 (8), 1263-1270.

[144] G.C. Goodwin, M.M Seron: Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (9), 1240-1251.

[145] G.C. Goodwin, A.R. Woodyatt, R.H. Middleton, J. Shim: Fundamental limitations due to $j\omega-$axis zeros in SISO systems, *Automatica*, 1999, 35 (5), 857-863.

[146] R. Gorez, V. Wertz, K.Y. Zhu: On a generalised predictive control algorithm, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (5), 369-377.

[147] H. Górecki: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, WNT, Warszawa, 1971.

[148] H. Górecki: *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.

[149] A. Graham: *Kronecker products and matrix calculus with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1981.

[150] J. F. Grcar: Optimal sensitivity analysis of linear least squares, *Lawrence Berkeley National Laboratory Techn. Report*, 2002, LBNL-52434.

[151] M. Green: $\mathcal{H}_\infty$ controller synthesis by $J-$lossless coprime factorisation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (3), 522-547.

[152] M. Green, K. Glover, D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle: A spectral factorization approach to $\mathcal{H}_\infty$control, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1350-1371.

[153] M. Green, D.J.N. Limebeer: *Linear robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[154] M.J. Grimble: *Robust industrial control*, Prentice Hall International, New York, London, 1994.

[155] M.J. Grimble: Generalised predictive control: an introduction to the advantages and limitations, *Int. Journ. Systems Science*, 1992, 23 (1), 85-98.

[156] M. Gu: Backward perturbation bounds for linear least squares problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 20 (2), 363-372.

[157] D.W. Gu, M.C. Tsai, S.D. O'Young, I. Postlethwaite: State-space formulae for discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ optimization, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (5), 1683-1723.

[158] T. Gudmundsson, C. Kenney, A.J. Laub: Scaling of the discrete-time algebraic Riccati equation to enhance stability of the Schur solution method, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (4), 513-518.

[159] C.H. Guo, A.J. Laub: On a Newton-like method for solving algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2000, 21 (2), 694-698.

[160] T. Hagiwara: Analytic study of the intrinsic zeros of sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1996, AC-41 (2), 261-263.

[161] T. Hagiwara, T. Yuasa, M. Araki: Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds, *Int. Journ. Control*, 1993, 58 (6), 1325-1346.

[162] M.E. Halpern: Modified pole-assignment controller for plant models with exact or near pole-zero cancellation, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (3), 189-195.

[163] S.J. Hammarling: Numerical solution of the stable, nonnegative definite Lyapunov equation, *IMA Journ. Numer. Anal.* 1982, 2, 303-323.

[164] P.C. Hansen, P.Y. Yalamov: Computing symmetric rank-revealing decompositions via triangular factorization, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2002, 23 (2), 443-458.

[165] S. Hara, H. Katori, R. Kondo: The relationship between real poles and real zeros in SISO sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 632-635.

[166] S. Hara, R. Kondo, H. Katori: Properties of zeros in digital control systems with computational time delay, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (2), 493-511.

[167] S. Hara, T. Sugie: Inner-outer factorization for strictly proper functions with $j\omega-$axis zeros, *Systems Control Letters*, 1991, 16 (2), 179-185.

[168] S. Hara, T. Sugie, R. Kondo: $\mathcal{H}_\infty$ control problem with $j\omega-$axis zeros, *Automatica*, 1992, 28 (1), 55-70.

[169] B. Hassibi, A.H. Sayed, T. Kailath: *Indefinite-quadratic estimation and control. A unified approach to $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ theories*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[170] J.W. Helton, O. Merino: *Classical control using $\mathcal{H}_\infty$ methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

[171] H.V. Henderson, S.S. Searle: The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review, *Linear and Multilinear Algebra*, 1981, 9, 271-288.

[172] M.A. Hersh: The zeros and poles of delta operator systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (3), 557-575.

[173] G.A. Hewer, C.S. Kenney: The sensitivity of the stable Lyapunov equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1988, 26 (2), 321-344.

[174] N.J. Higham: Computing error bounds for regression problems, *Contemporary Math.*, 1990, 112, 195-210.

[175] N.J. Higham: Perturbation theory and backward error for $AX - XB = C$, *BIT*, 1993, 33 (1), 124-136.

[176] N.J. Higham: A survey of componentwise perturbation theory in numerical linear algebra, Proc. Symposia in Applied Math., American Math. Soc., 1994, 48, 49-77.

[177] N.J. Higham: *Accuracy and stability of numerical algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[178] N.J. Higham: Notes on accuracy and stability of algorithms in numerical numerical linear algebra, *Numer. Anal. Report*, 1998, 333, The Univ. of Manchester.

[179] D.J. Higham, N.J. Higham: Backward error and condition of structured linear systems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (1), 162-175.

[180] N.J. Higham, M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov: The sensitivity of computational control problems, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 28-43.

[181] R.D. Hocken, S.V. Salehi, J.E. Marshall: Time-delay mismatch and the performance of predictor control schemes, *Int. Journ. Control*, 1983, 38 (2), 433-447.

[182] A.S. Hodel: Recent applications of the Lyapunov equation in control theory, *w* R. Beauvens, P. de Groen (Eds.): *Iterative methods in linear algebra*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[183] R.A. Horn, C.R. Johnson: *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.

[184] M. Hou, A.C. Pugh, G.E. Hayton: Generalized transfer functions and input-output equivalence, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (5), 1163-1178.

[185] Y.S. Hung: $\mathcal{H}_\infty$ optimal control. Part 1. Model matching, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (4), 1291-1330.

[186] Y.S. Hung, D. Chu: A simple and unified approach for analyzing discrete-time algebraic Riccati equation and spectral factorisation related to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem, *Technical Report*, 1995, University of Hong Kong.

[187] Y.S. Hung, D. Chu: (J, J')−lossless factorisation for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (3), 517-533.

[188] Y.S. Hung, D. Chu: Relationships between discrete-time and continuous-time algebraic Riccati inequalities, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 270, 287-313.

[189] Y.S. Hung, D. Chu: On extended (J, J')–lossless factorisation, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 271, 117-138.

[190] P. A. Iglesias, K. Glover: State-space approach to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 1991, 54 (5), 1031-1073.

[191] V. Ionescu, C. Oară, M. Weiss: General matrix pencil techniques for the solution of algebraic Riccati equations: a unified approach, *IEEE Trans.Automatic Control*, 1997, AC-42 (8), 1085-1097.

[192] P.A. Ioannou, J. Sun: *Robust adaptive control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996.

[193] V. Ionescu, M. Weiss: On computing the stabilizing solution of the discrete-time Riccati equation, *Linear Algebra Appl.*, 1992, 174, 229-238.

[194] V. Ionescu, M. Weiss: Two-Riccati formulae for the discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem, Int. Journ. Control, 1993, 57 (1), 141-195.

[195] R. Isermann: *Digital control systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[196] R. Isermann: *Digital control systems. Vol. 1: fundamentals, deterministic control*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[197] M. Ishitobi: Conditions for stable zeros of sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1558-1561.

[198] M. Ishitobi: Stable zeros of sampled low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1485-1498.

[199] M. Ishitobi: Criteria for stability of zeros of sampled systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1994, 141(6), 396-402.

[200] M. Ishitobi: Stable zeros of a discrete systems obtained by sampling a continuous-time plant with a time delay, *Int. Journ. Control*, 1994, 59 (4), 1053-1062.

[201] A.H. Jazwinski: *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, New York, 1970.

[202] J. Ježek: Polynomial equations, conjugacy and symmetry, *w* K.J. Hunt (Ed.): *Polynomial methods in optimal control and filtering*, Peter Peregrinus Ltd, London, 1993.

[203] J.C. Johnson, C.L. Phillips: An algorithm for the computation of the integral of the state transition matrix, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (2), 204-205.

[204] P.T. Kabamba: Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 772-783.

[205] T. Kaczorek: *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Waraszawa, 1996.

[206] T. Kailath: *Linear systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[207] T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi: *Linear estimation*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.

[208] B. Kågström, P. Poromaa: LAPACK-style algorithms and software for solving the generalized Sylvester equation and estimating the separation between regular matrix pairs, *Report UMINF*, 1993, 93.23, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.

[209] B. Kågström, P. Poromaa: Computing eigenspaces with specified eigenvalues of a regular matrix pair (A, B) and condition estimation: Theory, algorithms and software, *Report UMINF*, 1994, 94.04, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.

[210] B. Kågström, L. Westin: Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (7), 745-751.

[211] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib: *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

[212] N. Karcanias, M. Mitrouli: A matrix pencil based numerical method for the computation of GCD of polynomials, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, AC-39 (5), 977-981.

[213] R. Karlson, B. Waldén: Estimation of optimal backward perturbation bounds for the linear least squares, *BIT*, 1997, 37 (4), 862-869.

[214] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[215] J. Kautsky, N.K. Nichols, P. Van Dooren: Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. Journ. Control*, 1985, 41 (5), 1129-1155.

[216] C. Kenney, G. Hewer: The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (1), 50-69.

[217] C. Kenney, A.J. Laub: Condition estimates for matrix functions, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (1), 191-209.

[218] C. Kenney, A.J. Laub, M. Wette: A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers, *Systems Control Letters*, 1989, 12 (2), 241-250.

[219] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick: *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa, 1992.

[220] H. Kimura: Conjugation, interpolation and model matching in $\mathcal{H}_\infty$, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (1), 269-307.

[221] H. Kimura: Generalized chain-scattering approach to $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *w* S.P. Bhattcharyya, L.H. Keel (Eds.): *Control of uncertain dynamic systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, 21-38.

[222] H. Kimura: $(J, J')-$lossless factorisation using conjugations of zero and pole extractions, *w* S. Hosoe (Ed.): *Robust control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[223] H. Kimura: $(J, J')-$lossless factorization based on conjugation, *Systems Control Letters*, 1992, 19 (1) 95-109.

[224] H. Kimura: Chain scattering representation, $J-$lossless factorization and $\mathcal{H}_\infty$ control, *Journ. Math. Systems Estimation Control*, 1995, 5 (2), 203-255.

[225] H. Kimura: *Chain-scattering approach to $\mathcal{H}_\infty$ control*, Birkhaüser, Boston, Basel, 1997.

[226] H. Kimura, Y. Lu, R. Kawatani: On the structure of $\mathcal{H}_\infty$ control systems and related extensions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 653-667.

[227] H. Kimura, F. Okunishi: Chain-scattering approach to control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 151-171.

[228] R. Kondo, S. Hara: On cancellation in $\mathcal{H}_\infty$ optimal controllers, *Systems and Control Letters*, 1989 13 (2), 205-210.

[229] W. Kongprawechnon, H. Kimura: $J-$lossless conjugation and factorization for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1996, 65 (5), 867-884.

[230] W. Kongprawechnon, H. Kimura: J-lossless factorization and $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (3), 423-446.

[231] M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov: *Perturbation theory for matrix equations*, Elsevier Press, Amsterdam, 2003.

[232] B. Kouvaritakis, M. Cannon, J.A. Rossiter: Recent developments in generalized predictive control for continuous-time systems, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (2), 164-173.

[233] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang: Stable generalises predictive control: an algorithm with guaranteed stability, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (2), 349-362.

[234] Z. Kowalczuk, P. Suchomski, A. Marcińczyk: Discrete-time and continuous-time generalised predictive controllers with anticipated filtration: tuning rules, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1996, 6 (4), 707-732.

[235] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Anticipated filtering approach to generalised predictive control, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3591-3596.

[236] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, K, 301-306.

[237] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Numerically robust computer aided Markov-equivalent CGPC design, *Proc. IFAC Symp. Comp. Aided Contr. Syst. Design*, Gent, Belgium, April 1997, 365-370.

[238] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Robust predictive control based on overparameterised delay models, *Proc. 2nd IFAC Symp. Robust Control Design*, Budapest, Hungary, 1997, 525-530.

[239] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Dyskretne uogólnione sterowanie predykcyjne z filtracją antycypacyjną, *Studia z Automatyki i Informatyki*, Poznań, 1997, 22, 41-52.

[240] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Two-degree-of-freedom stable GPC design, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 243-248.

[241] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Continuous-time generalised predictive control of delay systems, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (1), 65-75.

[242] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Control of delay plants via continuous-time GPC principle, *Control and Cybernetics*, 1999, 28 (2), 291-314.

[243] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Analytical design of stable continuous-time generalised predictive control, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 53-100.

[244] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Robust CGPC design via simple Youla parameterisation, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CA-12-2.

[245] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Simple stable discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration of control error, *Control and Cybernetics*, 2002, 31 (1), 17-41.

[246] E. Kreindler, A. Jameson: Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, AC-17 (1), 147-148.

[247] D. Kresner, V. Mehrmann, T. Penzl: CTLEX (DTLEX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Lyapunov equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 6 (7), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.

[248] V. Kučera: Stability of discrete linear feedback system, *Proc. 6th IFAC World Congress*, Boston, 1975, 44.1.

[249] V. Kučera: Diophantine equations in control - a survey, *Automatica*, 1993, 29 (6), 1361-1375.

[250] V. Kučera: A tutorial on $\mathcal{H}_2$ control theory: the continuous time case, *w* M.J. Grimble, V. Kučera: *Polynomial methods for control systems design*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[251] B.C. Kuo: *Digital control systems*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1980.

[252] H. Kushner: *Introduction to stochastic control*, Holt, Rinehart, Winston, Inc., New York, 1971.

[253] A.G. Kuznetsov, R.O. Bowyer, D.W. Clark: Estimation of multiple order models in the δ domain, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (7/8), 629-642.

[254] H. Kwakernaak: Robust control and $\mathcal{H}_\infty$−optimization, *Automatica*, 1993, 29 (2), 255-273.

[255] H. Kwakernaak: Symmetries in control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 17-51.

[256] P. Lancaster, L. Rodman: *Algebraic Riccati equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[257] I.D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad: *Adaptive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[258] A.J. Laub: A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (6), 913-921.

[259] A.J. Laub: Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations, *in* S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[260] A.J. Laub, R.V. Patel, P.M. Van Dooren: Numerical and computational issues in linear control and system theory, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[261] D.L. Laughlin, K.G. Jordan, M. Morari: Internal model control and process uncertainty: mapping uncertainty regions for SISO controller design, *Int. Journ. Control*, 1986, 44 (6), 1675-1698.

[262] D.L. Laughlin, D.E. Rivera, M. Morari: Smith predictor design for robust performance, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 477-504.

[263] M.B. Lauritsen: Delta-domain predictive control and identification for control, *Ph.D. Thesis (Lyngby: Technical University of Denmark, Institute of Mathematical Modelling*, 1997.

[264] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard: Delta-operator predictive control, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 884-889.

[265] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Emulator-based GPC in the delta-domain, *Technical University Denmark Techn. Report.* 1994, IMM-Rep-1994-24, Inst. Math. Modelling, Lyngby, Danmark.

[266] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Optimal prediction in the delta-domain, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2851-2856.

[267] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Generalized predictive control in the delta-domain, *Proc. the American Control Conf.*, Seatle, WA, 1995, 5, 3709-3713.

[268] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: GPC using a delta-domain emulator-based approach, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (1), 219-232.

[269] C.L. Lawson, R.J. Hanson: *Solving least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.

[270] P.H. Lee, H. Kimura, Y.C. Soh: On the lossless and $J-$lossless embedding theorems in $\mathcal{H}_\infty$, *Systems and Control Letters*, 1996, 29 (1), 1-7.

[271] M.A. Lelić, M.B. Zarrop: Generalized pole-placement self-tuning controller, part I, basic algorithms, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 547-568.

[272] F.L. Lewis: *Optimal estimation*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986.

[273] Q. Li, H.H. Fan: On properties of information matrices of delta-operator based adaptive signal processing algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, SP-45 (10), 2454-2467.

[274] G. Li, M. Gevers: Roundoff noise minimization using delta-operator realizations, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, SP-41 (2), 629-637.

[275] G. Li, M. Gevers: Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (5), 803-807.

[276] K.Z. Liu, T. Mita: Conjugation and $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1989, 50 (4), 1435-1460.

[277] G.P. Liu, R.J. Patton: *Eigenstructure assignment for control system design*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.

[278] D.P. Looze, J.S. Freudenberg: Limitations of feedback properties imposed by open-loop right half plane poles, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 736-739.

[279] D.H. Luecking, L.A. Rubel: *Complex analysis, a functional analysis approach*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1984.

[280] J.M. Maciejowski: *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, Reading, MA., 1989.

[281] A.N. Malyshev, M. Sadkane: Computation of optimal backward perturbation bounds for large sparse linear least squares problems, *BIT*, 2002, 41 (4), 739-747.

[282] A.A. Marouf, S.A.K. Al-Assadi: Computer-aided discretization of continuous data control systems, *Computer Aided Design*, 1985, 17 (4), 169-178.

[283] Math Works: *Using MATLAB*, The Math Works Inc., Natick, MA, 2002.

[284] A.R. McIntosh, S.L. Shah, D.G. Fisher: Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control, *Canadian Journ Chem. Eng.*, 1991, 69, 97-110.

[285] V. Mehrmann: A step toward a unified treatment of continuous and discrete time control problems, *Linear Algebra Appl.*, 1996, 241-243, 749-779.

[286] V. Mehrmann, H. Xu: An analysis of the pole placement problem. I. The single-input case, *Electr. Trans. Numer. Anal.*, 1996, 4, 89-105.

[287] V. Mehrmann, H. Xu: Choosing poles so that the single-input pole placement problem is well-conditioned, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 664-681.

[288] V. Mehrmann, H. Xu: Numerical methods in control: from pole assignment via linear quadratic to $\mathcal{H}_\infty$ control, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1999, SFB393/99-12, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[289] D. Megias, J. Serrano, C. De Prada: Uncertainty treatment in GPC: design of T polynomial, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-A-B-1.

[290] C.D. Meyer: *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[291] R.H. Middleton: Trade-offs in linear control system design, *Automatica*, 1991, 27 (2), 281-192.

[292] R.H. Middleton: Trade-offs in linear filter design, *Automatica*, 1991, 31 (10), 1367-1376.

[293] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (11), 1015-1021.

[294] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: *Digital control and estimation*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.

[295] L. Mirkin: On discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ problem with a strictly proper controller, *Int. Journ. Control*, 1997, 66 (6), 747-765.

[296] C. Moler, C.F. Van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*, 1978, 20 (4), 801-836.

[297] M. Morari, E. Zafiriou: *Robust process control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[298] K.S. Narandra, A.M. Annaswamy: *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[299] C.P. Neuman: Transformations between delta and forward shift operator transfer function models, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 295-296.

[300] C.P. Neuman: Properties of the delta operator model of dynamic physical systems, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 296-301.

[301] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Delta-operator generalized predictive control (DGPC), *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 2224-2225.

[302] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Application of delta-operator generalised predictive control (DGPC) *Proc. 32th Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2499-2504.

[303] B.M. Ninness, G.C. Goodwin: The relationship between discrete time and continuous time linear estimation, *w* N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[304] M.T. Noda, T. Sasaki: Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations, *Journ. Comput. Appl. Math.*, 1991, 38, 335-351.

[305] J. Nowakowski, P. Suchomski: O specyfikacji dyskretnej transmitancji wzorcowej układu regulacji cyfrowej, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 1990, 36 (4), 71-73.

[306] J. Nowakowski, P. Suchomski: On a method of mapping of continuous-time control SISO systems to their discrete equivalents, *Archives of Control Sciences*, 1992, 37 (3-4), 269-283.

[307] J. Nowakowski, P. Suchomski: Mapping of continuous-time control SISO systems to their equivalents with stable discrete controllers, *Int. Journ. Systems Science*, 1994, 25 (1), 193-200.

[308] W. Oettli, W. Prager: Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.*, 1964, 6, 405-409.

[309] K. Ogata: *Discrete-time control systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[310] M.L. Overton: *Numerical computing with IEEE floating point arithmetic*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

[311] S.D. O'Young, B.A. Francis: Sensitivity tradeoffs for multivariable plants, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (7), 625-632.

[312] S.D. O'Young, I. Postlethwaite, D.W. Gu: A treatment of $j\omega$−axis model-matching transformation zeros in the optimal $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 551-553.

[313] A. Packard, J.C. Doyle: The complex structured singular value, *Automatica*, 1993, 29 (1) 71-109.

[314] Z.J. Palmor: Time-delay compensation - Smith predictor and its modifications, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[315] V.J. Pan: Numerical computation of a polynomial GCD and extensions, *INRIA Techn. Report*, 1996, Sophia-Antipolis, France.

[316] P. Pandey: On scaling an algebraic Riccati equation, *Proc. of the American Control Conf.*, San Francisco, CA, 1993, 1583-1587.

[317] T. Pappas, A.J. Laub, N.R. Sandell: On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, AC-25 (4), 631-641.

[318] K.M. Passino, P.J. Antsaklis: Inverse stable low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 47 (6), 1905-1913.

[319] R.V. Patel, A.J. Laub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra techniques for systems and control*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993.

[320] R.A. Paz, J.V. Madanić: $\mathcal{H}_\infty$ control in discrete time: state feedback control and norm bounds, *Int. Journ. Control*, 1992, 55 (2), 1405-1424.

[321] J.M. Peña: On the Skeel condition number, growth factor and pivoting strategies for Gaussian elimination, *Proc. SIAM Conf. Applied Linear Algebra*, Williamsburg, VA, 2003, CP2, http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings/penaj.pdf.

[322] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M.Konstantinov: On the numerical properties of the Schur approach for solving the matrix Riccati equation, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (2) 197-201.

[323] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M.Konstantinov: *Computational methods for linear control systems*, Prentice Hall International, New York, London, 1991.

[324] P.H. Petkov, D.W. Gu, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: Condition and error estimates in the solution of Lyapunov and Riccati equations, *NICONET Report*, 2000, 1, Katholieke Univ., Leuven, Belgium.

[325] P.H. Petkov, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: DGRSVX and DMSRIC: Fortran 77 subroutines for solving continuous-time matrix algebraic Riccati equations with condition and accuracy estimates, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1998, SFB393/98-16, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[326] A.W. Pike, M.J. Grimble, M.A. Johnson, A.W. Ordys, S. Shakoor: Predictive control, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[327] H.V. Poor: Delta-operator based signal processing: fast algorithms for rapidly sampled data, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 872-877.

[328] K. Premaratne, R. Salvi, N.R. Habib, J.P. LeGall: Delta-operator formulated discrete-time approximations of continuous-time systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, AC-39 (3), 581-585.

[329] A.C. Pugh, L. Tan: A generalized chain-scattering representation and its algebraic system properties, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, AC-45 (5), 1002-1007.

[330] K.R. Ralev, P.H. Bauer: Limit cycles elimination in delta-operator systems, *IEEE Trans. Circuits Systems, I*, 2000, CAS-47 (5), 769-772.

[331] A.C.M. Ran, R. Vreugdenhill: Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems, *Linear Algebra Appl.*, 1988, 99, 63-83.

[332] G. P. Rao, N.K. Sinha: Continuous-time models and approaches, *w* N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[333] K.S. Rattan: Digitalization of existing continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, AC-29 (3), 282-285.

[334] K.S. Rattan: Compensating for computational delay in digital equivalent of continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, AC-34 (8), 895-899.

[335] J. Rice: A theory of condition, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1966, 3 (2), 287-310.

[336] J.L. Rigal, J.Gaches: On the compatibility of a given solution with the data of a linear system, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1967, 14 (3), 543-548.

[337] B.D. Robinson, D.W. Clarke: Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1991, 138 (1) 2-8.

[338] J.A. Romagnoli, M.N. Karim, O.E. Agamennoni, A. Desages: Controller design for model-plant parameter mismatch, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (2), 157-164.

[339] E. Ronco, T. Arsan, P.J. Gawthrop: Open-loop intermittent feedback control: Practical continuous-time GPC, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 426-434.

[340] J.A. Rossiter, L. Chisci, A. Lombardi: Stabilizing predictive control algorithms in the presence of common factors, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Th-E-B-5.

[341] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen: A state-space approach to the emulator-based GPC design, *Systems and Control Letters*, 1996, 28, 291-301.

[342] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen, O. Ravn: ML estimation using delta based state space models, *Proc. of the 1994 SYSID Conference*, Copenhagen, Denmark, 1994, 3, 655-661.

[343] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: General predictive control using the delta operator, *Proc. 32nd Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2, 1769-1774.

[344] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: A rapprochement between discrete-time operators, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993, 1, 426-431.

[345] S.M. Rump: Structured perturbations. Part I: normwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 1-30.

[346] S.M. Rump: Structured perturbations. Part II: componentwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 31-56.

[347] A. Saberi, B.M. Chen, P. Sannuti: *Loop Transfer Recovery: analysis and design*, Springer Verlag, London, Berlin, 1993.

[348] A. Saberi, P. Sannuti, B.M. Chen: *$\mathcal{H}_2$ optimal control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[349] A. Sage, J. Melsa: *Estimation theory with applications to communications and control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.

[350] M.G. Safonov: Imaginary-axis zeros in multivariable $\mathcal{H}_\infty-$optimal control, *w* R.F. Curtain (Ed.): *Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*, NATO ASI Series, 34, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

[351] M. Salgado, R. Middleton, G.C. Goodwin: Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1988, 135 (1), 28-34.

[352] C. Scherer: $\mathcal{H}_\infty-$control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 123-142.

[353] C. Scherer: $\mathcal{H}_\infty-$optimization without assumption on finite or infinite zeros, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 143-166.

[354] A. Schönhage: Quasi-GCD computations, *Journ. Complexity*, 1985, 1, 118-137.

[355] Z. Schuss: *Theory and applications of stochastic differential equations*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1980.

[356] J. Sefton, K. Glover: Pole/zero cancellations in the general $\mathcal{H}_\infty$ problem with reference to a two-block design, *Systems and Control Letters*, 1990, 14 (3), 295-306.

[357] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin: *Fundamental limitations in filtering and control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[358] A. Shapiro: Optimally scaled matrices, necessary and sufficient conditions, *Numer. Math.*, 1982, 39 (2), 239-245.

[359] A. Shapiro: Optimal block diagonal l_2-scaling of matrices, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1985, 22 (1), 81-94.

[360] J. Shi, M.J. Gibbard: Discrete systems' models based on simple performance specifications in the time, frequency or complex z-domains, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (2), 517-527.

[361] V. Sima, P. Petkov, S. Van Huffel: Efficient and reliable algorithms for condition estimation of Lyapunov and Riccati equations, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, MTNS-2000*, Perpignan, France, June 19-23, 2000, (CD-ROM).

[362] R.D. Skeel: Scaling for numerical stability in Gaussian elimination, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1979, 26 (3), 493-526.

[363] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable feedback control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1996.

[364] O.J.M. Smith: A controller to overcome dead time, *ISA Journ.* 1959, 6 (2), 28-33.

[365] K. Sobczyk: *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers Group, London, Dordrecht, 1991.

[366] T. Söderström: Convergence properties of the generalized least squares identification method, *Automatica*, 1974, 10 (6), 617-626.

[367] T. Söderström: Test of pole-zero cancellation in estimated models, *Automatica*, 1975, 11 (5), 537-541.

[368] T. Söderström: On zero locations for sampled stochastic systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1249-1253.

[369] T. Söderström, H. Fan, B. Carlson, M. Mossberg: Some approaches on how to use the delta operator when identifying continuous-time processes, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 890-895.

[370] T. Söderström, P. Stoica: *System identification*, Prentice Hall International, Hemel Hemstead, U.K., 1989.

[371] R. Soeterboek: *Predictive control, a unified approach*, Prentice Hall International, New York, London, 1992.

[372] T. Song: Robust control and estimation for discrete-time systems with applications to finite word length design and robust detection, *Ph.D. Thesis*, FAMU-FSU College of Engineering, The Florida State University, 1999.

[373] E. Soroka, U. Shaked: On the robustness of LQ regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (7), 664-665.

[374] E. Soroka, U. Shaked: On the stability robustness of the continuous-time LQG optimal control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985 , AC-30 (10), 1039-1043.

[375] V. Sreeram, P. Agathoklis: Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1991, 138 (6), 529-534.

[376] W. Stadler: A survey of multicriteria optimization of the vector maximum problem, *Journ. Optimization Theory Appl.*, 1979, 29 (1), 1-52.

[377] G. Stein, M. Athans: The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 105-114.

[378] G.W. Stewart: Perturbation theory for the singular value decomposition, *UMIACS - Techn. Report*, 1990, TR-90-124.

[379] G.W. Stewart: Updating a rank revealing ULV decomposition, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1993, 14 (2), 494-499.

[380] G.W. Stewart: Determining rank in the presence of error, *w* M.S. Moonen, G.H. Golub, B.L.R. DeMoor (Eds.): *Linear algebra for large scale and real-time applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[381] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. I: basic decompositions*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

[382] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. II: eigensystems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

[383] G.W. Stewart, J. Sun: *Matrix perturbation theory*, Academic Press, London, 1990.

[384] P. Stoica, T. Söderström: Common factor detection and estimation, *Upsala Univ. Techn. Report*, Systems Control Group, Dept. Technology, Upsala, Sweden, 1996.

[385] A. Stoorvogel: *The $\mathcal{H}_\infty$ control problem. A state space approach*, Prentice Hall, Inc., New York, 1992.

[386] A. Stoorvogel: The discrete time $\mathcal{H}_\infty$ control problem with measurement feedback, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 182-202.

[387] A. Stoorvogel, A. Saberi: The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 274, 317-365.

[388] A. Stoorvogel, A. Saberi, B.M. Chen: The discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem with strictly proper measurement feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, 39 (9), 1936-1939.

[389] P. Suchomski: Weighted mixed sensitivity synthesis in $\mathcal{H}_\infty$ by $J-$lossless coprime factorisation, *Proc. XVII-th National Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica-Zdrój, Poland, 1994, 131-136.

[390] P. Suchomski: $J-$lossless coprime factorisation approach to weighted mixed sensitivity suboptimal synthesis in $\mathcal{H}_\infty$, *Proc. 2nd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'95*, Międzyzdroje, Poland, 1995, 1, 211-216.

[391] P. Suchomski: An approach to suboptimal $\mathcal{H}_\infty$ control via $J-$lossless coprime factorisation, *Proc. 3rd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96*, Międzyzdroje, Poland, 1996, 2, 401-406.

[392] P. Suchomski: A recursive method for model order reduction of discrete-time systems via $q-$Markov covariance equivalent realisations, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 1996, 23 (1/2), 127-135.

[393] P. Suchomski: Structural properties of solutions of continuous-time and discrete-time matrix Lyapunov equations in controllable form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1999, 146 (5), 477-483.

[394] P. Suchomski: Stability robustness bounds for LQG continuous-time control systems with unstructured uncertainties, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2000, 36 (3), 401-440.

[395] P. Suchomski: Robust PI and PID controller design in delta domain, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (5), 350-354.

[396] P. Suchomski: A $J-$lossless factorisation approach to $\mathcal{H}_\infty$ control in delta domain, *Proc. 6th European Control Conf. ECC'01*, Porto, Portugal, 2001, FR-IS01-18, 3422-3427.

[397] P. Suchomski: Numerical conditioning of delta-domain Lyapunov and Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (6), 497-501.

[398] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: phase advance and phase lag controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2001, 41 (3), 503-549.

[399] P. Suchomski: Conditioning of $J-$lossless factorisations for $\mathcal{H}_\infty-$control in delta domain, *Proc. 7th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2001*, Międzyzdroje, 2001, 211-216.

[400] P. Suchomski: A $J-$lossless coprime factorisation approach to $\mathcal{H}_\infty$ control in delta domain, *Automatica*, 2002, 38 (10), 1807-1814.

[401] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: PI and PID controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2002, 42 (1), 49-69.

[402] P. Suchomski: A dual $J-$lossless factorisations for suboptimal $\mathcal{H}_\infty$ estimation in delta domain, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-Fr-M05-4.

[403] P. Suchomski: Numerically robust delta-domain solutions to discrete-time Lyapunov equations, *Systems and Control Letters*, 2002, 47 (4), 319-326.

[404] P. Suchomski: $J-$lossless and extended $J-$lossless factorisations approach for $\delta-$domain $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 2003, 76 (8), 794-809.

[405] P. Suchomski: Robust pole placement in delta domain for SISO plants, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 483-512.

[406] P. Suchomski: $J-$lossless factorisations for robust $\mathcal{H}_\infty-$control in delta-domain, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 525-555.

[407] P. Suchomski: Numerically reliable $\mathcal{H}_\infty-$synthesis of estimators based on $J-$lossless factorisations, *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification SYSID*, Rotterdam, the Netherlands, 2003, 1072-1077.

[408] P. Suchomski: Remarks about numerical conditioning of discrete-time Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2003, 149 (5), 449-456.

[409] P. Suchomski: Numerically robust synthesis of discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ estimators based on $J-$lossless factorisations, *Control and Cybernetics*, 2003, 32 (4), 761-802.

[410] P. Suchomski: Structural properties of discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ solutions based on $J-$lossless factorisations, artykuł zgłoszony do *Systems and Control Letters*, 2004.

[411] P. Suchomski: Robust adaptive pole placement in $\mathcal{H}_\infty$, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*, Katholieke Univ., Leuven, Belgium, MA4.5, July 5-9, 2004, (CD-ROM).

[412] P. Suchomski: Numerically robust solutions to $\mathcal{H}_\infty$ control problems for augmented plants, artykuł zgłoszony do *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2004.

[413] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Markov-equivalent continuous-time GPC design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-M-B-1.

[414] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Robust performance and stability of control systems - A unifying survey, *Proc. 4th Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'97*, Międzyzdroje, 1997, 1, 187-194.

[415] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: GPC tuning conditioning, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 249-254.

[416] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Analytical stable CGPC design for minimum-phase systems, *Int. Journ. Control*, 2000, 73 (17), 1605-1620.

[417] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Analytical design of stable delta-domain generalized predictive control, *Int. Journ. Optimal Control Appl. and Methods*, 2002, 23, 239-273.

[418] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Pre-arrangement of solvability, complexity, stability and quality of GPC systems, *Int. Journ. Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16, 177-191.

[419] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Robust $\mathcal{H}_\infty$−optimal synthesis of FDI systems, *w* J. Korbicz, J.M. Kościelny, Z Kowalczuk, W. Cholewa (Eds.): *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 261-298.

[420] T. Sugie, S. Hara: $\mathcal{H}_\infty$−suboptimal control problem with boundary constraints, *Systems and Control Letters*, 1989, 13 (1), 93-99.

[421] J.G. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear LS problem with multiple right-hand sides, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1996, 16 (1), 1-11.

[422] J.G. Sun: Perturbation theory for algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (1), 39-65.

[423] J.G. Sun: Condition numbers of algebraic Riccati equations in the Frobenius norm, *Linear Algebra Appl.*, 2002, 350, 237-261.

[424] H.K. Sung, S. Hara: Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input single-output digital control systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (6), 2429-2439.

[425] Y. Sung, M. Kung: Lower finite word-length effect on state space digital filter by δ operator realisation, *Int. Journ. Electron.*, 1993, 75 (6), 1135-1141.

[426] Z. Świder: *Realizacje cyfrowe algorytmów sterowania i filtracji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2003.

[427] D. Tabak: Digitalization of control systems, *Computer Aided Design*, 1971, 3 (2), 13-18.

[428] M. Tahk, J.L. Speyer: Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 793-801.

[429] K. Takaba, T. Katayama: Discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ algebraic Riccati equation and parametrization of $\mathcal{H}_\infty$ filters, *Int. Journ. Control*, 1996, 64 (6), 1129-1149.

[430] L. Tan, A.C. Pugh: Non-standard $\mathcal{H}_\infty$ control problem: a generalized chain-scattering representation approach, *Int. Journ. Control*, 2002, 75 (11), 775-783.

[431] A. Tesfaye, M. Tomizuka: Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (4), 743-747.

[432] M.C. Tsai, I. Postlethwaite: On J–lossless co-prime factorizations and $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1991, 1 (1), 47-68.

[433] M.C. Tsai, C.S. Tsai: Formulation of the $\mathcal{H}_\infty$ control problem by using chain scattering matrix description, *Proc. of the American Control Conf.*, Chicago, 1992, 1870-1871.

[434] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A chain scattering-matrix description approach to $\mathcal{H}_\infty$ control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (9), 1416-1421.

[435] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A transfer matrix framework approach to the synthesis of $\mathcal{H}_\infty$ controllers, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1995, 5 (2), 155-173.

[436] M.C. Tsai, C.S. Tsai, Y.Y. Sun: On discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control: a J–-lossless coprime factorization approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (7), 1143-1147.

[437] H. Unbehauen, B. Göhring: Tests for determining model order in parameter estimation, *Automatica*, 1974, 10 (3), 233-244.

[438] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Constrained predictive control using a time varying Youla parameter: a state space approach, *Proc. 3rd European Control Conf., ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3235-3240.

[439] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Robust predictive control using a time varying Youla parameter, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 101-128.

[440] Van der Sluis: Condition numbers and equilibration of matrices, *Numer. Math.*, 1969, 14 (1), 14-23.

[441] Van der Sluis: Condition, equilibration and pivoting in linear algebraic systems, *Numer. Math.*, 1970, 15 (1), 74-86.

[442] Van der Sluis: Stability of the solutions of linear least squares problems, *Numer. Math.*, 1975, 23 (3), 241-254.

[443] P.M. Van Dooren: The computation of Kroneckers canonical form of a singular pencil, *Linear Algebra Appl.*, 1979, 27, 103-141.

[444] P.M. Van Dooren: A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equations, *SIAM Journ. Sci. Stat. Comput.*, 1981, 2 (2), 121-135.

[445] P.M. Van Dooren: The generalized eigenstructure problem in linear system theory, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26, 1, 111-129.

[446] P.M. Van Dooren: Structured linear algebra problems in digital signal processing, *w* G.H. Golub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra, digital signal processing and parallel algorithms*, NATO ASI Series, 70, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[447] P.M. Van Dooren: The basic developing numerical algorithms, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 18-27.

[448] S. Van Huffel, V. Sima, A. Varga, S. Hammarling, F. Delebecque: High-performance numerical software for control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 60-76.

[449] C.F. Van Loan: Computing integrals involving the matrix exponential, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (3), 395-404.

[450] A. Varga: Computation of Kronecker-like forms of a system pencil: applications, algorithms and software, *Proc. IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control System Design, CACSD96*, Dearborn, MI, 1996, 77-82.

[451] A. Varga: Numerical awareness in control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 14-17.

[452] M. Vidyasagar: *Control system synthesis - A Factorisation approach*, MIT Press, Cambridge, MA., 1985.

[453] M. Vidyasagar, H. Schneider, B.A. Francis: Algebraic and topological aspects of feedback stabilization, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, AC-27 (4), 880-894.

[454] B. Waldén, R. Karlson, J. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear least squares problem, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1996, 2 (3), 271-286.

[455] B. Wahlberg: Limit results for sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (3), 1267-1283.

[456] B. Wahlberg: The effects of rapid sampling in system identification, *Automatica*, 1990, 26 (1), 167-170.

[457] D.J. Walker: Relationship between three discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ algebraic Riccati equation solutions, *Int. Journ. Control*, 1990, 52 (4), 801-809.

[458] Z.Q. Wang, S. Skogestad: Robust control of time-delay systems using the Smith predictor, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1405-1420.

[459] R.C. Ward: Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1977, 14 (3), 600-610.

[460] G.A. Watson: An algorithm for optimal l_2 scaling of matrices, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1991, 11 (4), 481-492.

[461] P. Wedin: Perturbation theory for pseudo-inverses, *BIT*, 1973, 13 (2), 217-232.

[462] M. Wei; Perturbation of the least squares problem, *Linear Algebra Appl.*, 1990, 141, 177-182.

[463] A. Weinmann: *Uncertain models and robust control*, Springer Verlag, Wien, 1991.

[464] S.R. Weller: Comments on 'Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis', *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, AC-43 (9), 1308-1310.

[465] S.R. Weller, R.H. Middleton: On the role of sampling zeros in robust sampled-data control design, *Techn. Report Dept. Electrical and Computer Eng.*, EE9807, University of Newcastle, Australia, 1998.

[466] P.E. Wellstead, M.B. Zarrop: *Self-tuning systems*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1991.

[467] O.P. Whittle: *Optimal control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1996.

[468] M. Wicks, R.A. DeCarlo: Computing the distance to an uncontrollable system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (1), 39-49.

[469] J.H. Wilkinson: *Rounding errors in algebraic processes*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.

[470] J.H. Wilkinson: *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.

[471] D. Williamson: *Digital control and implementation, finite wordlength considerations*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991.

[472] J.L. Willems, F.M. Gallier: The infinite horizon and the receding horizon LQ-problems with partial stabilization constraints, *w* S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[473] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: Shift and delta operator realisations for digital controllers with finite word length considerations, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 2000, 147 (6), 664-672.

[474] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: An improved closed-loop stability measures for finite-precision digital controller realizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2001, AC-46 (7), 1162-1166.

[475] J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne, S. Chen, J. Hu: Stability issues of finite precision controller structures using the delta operator for sampled data systems, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 9d-02-3, Q, 417-422.

[476] C.S. Xiao, Z.M. Feng, X.M. Shan: On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (3), 286-290

[477] X. Xin, T. Mita: Inner-outer factorization for non-square proper functions with infinite and finite $j\omega-$axis zeros, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (1), 145-161.

[478] I. Yaesh, U. Shaked: A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: $\mathcal{H}_\infty$−linear control and filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, 36 (11), 1264-1271.

[479] T.W. Yoon, D.W. Clarke: Observer design in receding-horizon control, *Int. Journ. Control*, 1985, 61 (1), 171-191.

[480] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, H.A. Jabr: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part I: the single-input case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (1), 3-14.

[481] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part II: the multivariable case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (2), 319-338.

[482] E. Zafiriou, M. Morari: Digital controllers for SISO systems: a review and a new algorithm, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (4), 855-876.

[483] G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximation inverses, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (2) 301-320.

[484] G. Zames, B.A. Francis: Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1983, AC-28 (5), 585-601.

[485] J. Zhang: Property analysis of GPC based coefficient mapping, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, C, 457-462.

[486] K. Zhou, J.C. Doyle: *Essentials of robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1998.

[487] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1996.

Sterowanie odporne polega na zapewnieniu układowi sterowania wymaganej stabilności oraz jakości w warunkach występowania niepewności w modelu sterowanego obiektu dynamicznego. Przedmiotem pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym obiektami czasu ciągłego. Skupiono się na algorytmach wynikających z metod przestrzeni H_∞. Wskazano na znaczenie analizy uwarunkowania zadania syntezy (optymalizacji) sterowania oraz na rolę oceny numerycznych błędów proponowanych algorytmów. Omówiono sposoby polepszania uwarunkowania poprzez zastosowanie modelowania opartego na operatorze *delta*.

W pracy wykazano przydatność łańcuchowych macierzy rozproszenia modelowanego obiektu, udowodniono szereg twierdzeń odnoszących się do J-bezstratnych faktoryzacji takich macierzy, a także omówiono strukturę algorytmów sterowania optymalnych ze względu na normę H_∞.

Teoretyczne rozważania zilustrowano numerycznymi przykładami dotyczącymi zadań odpornego sterowania oraz estymacji stanu. Przykłady te obejmują między innymi: metodę rozmieszczania biegunów, sterowanie predykcyjne, a także sterowanie optymalne ze względu na kwadratowy wskaźnik jakości oraz ze względu na normę H_∞.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-94-4

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl