POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE ROZWOJU SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO I OCHRONY ŚRODOWISKA

Redakcja:
Jan Studziński
Ludosław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz

WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU
SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA

Polska Akademia Nauk Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 36

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004

WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE ROZWOJU SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO I OCHRONY ŚRODOWISKA

Redakcja:

Jan Studziński
Ludosław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz

Książka wydana dzięki dotacji KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju modeli, technik i systemów zarządzania oraz ich zastosowań w różnych dziedzinach gospodarki narodowej. Wyodrębnioną grupę stanowią artykuły omawiające aplikacyjne wyniki projektów badawczych i celowych KBN.

Recenzenci artykułów:

Dr Lucyna Bogdan
Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz
Dr Grażyna Petriczek
Prof. dr hab. inż. Andrzej Straszak
Dr inż. Jan Studziński

Komputerowa edycja tekstu: Anna Gostyńska

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw IBS PAN
tel. 836-68-22

Druk: Zakład Poligraficzny Urzędu Statystycznego w Bydgoszczy
Nakład 110 egz.

ISBN 83-85847-92-8
ISSN 0208-8028

WYBRANE ALGORYTMY POZYCYJNE – WYZNACZANIE OCENY GRUPOWEJ

Hanna Bury, Dariusz Wagner

Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk

<bury@ibspan.waw.pl, D.Wagner@ibspan.waw.pl >

In the paper some problems of so called positional methods of group judgement are considered. In these methods group opinion results from the analysis of the position of a given variant in the preference order. All the methods under discussion are derived from the Borda method. It is shown that the problem of determining the Borda winner can be considered as that of maximizing the specially defined distance. There exist also so called multistage positional methods. The methods of Hare and Coombs are of this type. It is shown that different positional methods can result in different group judgements.

Keywords: Group decision, expert judgement, Borda method.

1. Wstęp

Wśród metod wyznaczania oceny grupowej na podstawie opinii ekspertów coraz większe zainteresowanie budzą te, w których wyznaczenie najlepszego obiektu (najlepszych obiektów) sprowadza się do minimalizacji (lub maksymalizacji) odpowiednio zdefiniowanej odległości. Najbardziej znaną jest metoda mediany Kemeny'ego (Kemeny, 1959; Kemeny, Snell, 1960). Do tej grupy metod zaliczają się również między innymi metoda Islei'a (Islei G. 1986), metoda mediany Litvaka (Litvak, 1982), (Bury, Wagner, 2002), metoda Dodgsona (Nurmi, 2004; Ratliff, 2002). W pracy opublikowanej w 1981 r. w czasopiśmie *Theory and Decision* S. Nitzan (Nitzan, 1981) zwrócił uwagę na możliwość interpretowania wskaźnika Bordy jako pewnego rodzaju odległości między uporządkowaniami. Wynik ten przypomniał H. Nurmi w pracy (Nurmi H. 2004). W artykule zagadnienie to zostanie rozpatrzone w sposób ogólny.

Metoda Bordy stanowi przykład tak zwanej metody pozycyjnej, to znaczy takiej, w której ocena grupowa jest dokonywana na podstawie analizy pozycji danego obiektu w uporządkowaniu. Najprostszym przykładem metody pozycyjnej jest metoda większości oraz metoda antywiększości (Nurmi, 1987; Bury, Wagner, 2002). Do metod pozycyjnych, ale wieloetapowych, zaliczane są również, między innymi metody Coombsa i Hare'a (Nurmi, 1987). W pracy podano przykłady numeryczne. Pokazano, że zastosowanie różnych metod pozycyjnych tworzenia oceny grupowej może prowadzić do różnych wyników.

Rozpatrywane zagadnienia stanowią fragment ogólnego problemu wyboru metody tworzenia oceny grupowej (Aizerman, Aleskerov, 1995; Nurmi 1983). Z problemem tym wiążą się bezpośrednio tzw. paradoksy głosowania (Nurmi, 1992; Saari 1997a,b).

2. Metoda Bordy

Metoda Bordy, podobnie jak metoda Condorceta, została zaproponowana w XVIII wieku dla celów ustalania zwycięzcy wyborów. Jak wspomniano, w metodzie Bordy wyboru dokonuje się na podstawie pozycji obiektu w uporządkowaniu, przy czym przyjmuje się, że najbardziej preferowany obiekt zajmuje pozycję pierwszą, a najmniej – ostatnią. Opis i analiza własności metody Bordy zostały podane m.in. w (Bury, Wagner, 2002).

Zasadniczym elementem metody Bordy jest wyznaczenie tzw. wskaźnika Bordy

$$WB_i = \sum_{j=1}^{n}(n-j)l_i^j \tag{1}$$

gdzie i – numer obiektu, j – numer pozycji, l_i^j - liczba ekspertów, którzy umieścili obiekt O_i na pozycji j. Załóżmy, że dana jest macierz rozkładu głosów ekspertów, skonstruowana na podstawie ocen podanych w postaci uporządkowań. W macierzy tej l_{ij} (i, j = 1,..., n) oznacza liczbę ekspertów, zdaniem których obiekt O_i jest lepszy w sensie przyjętego kryterium (kryteriów) od obiektu O_j, co oznaczamy $O_i \succ O_j$.

$$L = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & O_1 & O_2 & \cdots & O_n & WB_i \\ \hline O_1 & - & l_{12} & \cdots & l_{1n} & \sum_{j=1}^{n} l_{1j} \\ \hline O_2 & l_{21} & - & \cdots & l_{2n} & \sum_{j=1}^{n} l_{2j} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline O_n & l_{n1} & l_{n2} & \cdots & - & \sum_{j=1}^{n} l_{nj} \end{array} \tag{2}$$

Wskaźnik Bordy można wyznaczyć również na podstawie sumy elementów danego wiersza macierzy (2).

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt O_i, dla którego $WB_i = WB_{max}$. Zwycięzcę w sensie Bordy, w przeciwieństwie do metody Condorceta, zawsze można określić. W myśl metody Bordy uporządkowanie zbioru obiektów $O = \{O_1, ..., O_n\}$ wyznaczają malejące wartości wskaźników WB_i.

1.1 Zapis wskaźnika Bordy jako odpowiednio definiowanej odległości między uporządkowaniami

Załóżmy, że mamy dwa uporządkowania P^1, P^2 zbioru obiektów $O = \{O_1, ..., O_n\}$, różniące się jedynie pozycją obiektu O_i. W pierwszym uporządkowaniu zajmuje on pozycję j_1, w drugim pozycję j_2, przy czym przyjmujemy, że $j_1 > j_2$. Zakładamy ponadto, że każde z uporządkowań ma n pozycji, to znaczy nie występują obiekty równoważne.

Jako odległość między tymi dwoma uporządkowaniami $d(P^1, P^2)$ przyjmiemy liczbę porównań parami, których wynik jest różny dla obu uporządkowań.

Można stwierdzić, że przy przyjętych założeniach

$$d(P^1, P^2) = (j_1 - 1) - (j_2 - 1) = (j_1 - j_2) \tag{3}$$

Należy podkreślić, że tak definiowana odległość jest szczególnym przypadkiem odległości określonej dla tak zwanych wektorów preferencji (Litvak, 1982). W cytowanej pracy wykazano, że odległość ta spełnia pięć aksjomatów, które w sposób jednoznaczny określają miarę bliskości na zbiorze wektorów preferencji. Oczywiście,

$$\text{jeżeli } j_1 = j_2, \text{ to } d(P^1, P^2) = 0 \text{ oraz } \max_{j_1, j_2} d(P_1, P_2) = n - 1. \tag{4}$$

Założymy teraz, że mamy zbiór uporządkowań podanych przez K ekspertów; przyjmujemy ponadto, że uporządkowania te spełniają wszystkie założenia przyjmowane przy definiowaniu odległości $d(P^1, P^2)$. Zbiór tych uporządkowań oznaczymy jako $\{P^{(k)}\} = \{P^1, ..., P^K\}$. Przekształcimy teraz zbiór $\{P^{(k)}\}$ w taki sposób, że w każdym z uporządkowań należących do tego zbioru obiekt O_i zajmie pozycję j_i. Ten nowy zbiór oznaczymy jako $\{P^{(k)}_{i j_i}\}$.

Analogicznie do (3) odległość między zbiorami uporządkowań $\{P^{(k)}\}$ i $\{P^{(k)}_{i j_i}\}$ określimy następująco

$$d[\{P^{(k)}_{i j_i}\}, \{P^{(k)}\}] = \sum_{\substack{j_i \geq j_{i_k} \\ k=1,...,K}} (j_i - j_{i_k}) + \sum_{\substack{j_{i_k} > j_i \\ k=1,...,K}} (j_{i_k} - j_i) = \sum_{k=1,...,K} | j_i - j_{i_k} | \tag{5}$$

gdzie j_{i_k} określa pozycję obiektu O_i w uporządkowaniu P^k (k = 1, , K).

Łatwo zauważyć, że największa wartość wyrażenia $| j_i - j_{i_k} |$ wynosi (n-1). Zatem maksymalna wartość odległości (5) wynosi

$$d_{max}[\{P^{(k)}_{i j_i}\}, \{P^{(k)}\} = (n - 1)K. \tag{6}$$

Założymy teraz, że zbiór uporządkowań można opisać podając liczbę ekspertów, którzy postawili obiekt O_i (i = 1, ..., n) na pozycji j; liczbę tę oznaczymy, zgodnie z oznaczeniami przyjętymi przy zapisie wzoru (1), przez l_i^j. A zatem

$$d[\{P_{ij_i}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = \sum_{j=1}^{j_i}(j_i - j)l_i^j + \sum_{j=j_i+1}^{n}(j - j_i)l_i^j \tag{7}$$

Wskaźnik Bordy dla obiektu O_i (i=1,...,n) definiujemy zgodnie z wzorem (1).

Wyrażenie (1) można zapisać w postaci

$$WB_i = (n - j_i)K + \sum_{j=1}^{j_i}(j_i - j)l_i^j - \sum_{j=j_i+1}^{n}(j - j_i)l_i^j \tag{8}$$

Uwzględniając (7) mamy

$$WB_i = (n - j_i)K - d[\{P_{ij_i}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] + 2\sum_{j=1}^{j_i}(j_i - j)l_i^j \tag{9}$$

Łatwo wykazać, że

$$\sum_{j=1}^{j_i}(j_i - j)l_i^j = \sum_{j=1}^{j_i}(n - j)l_i^j - \sum_{j=1}^{j_i}(n - j_i)l_i^j = \sum_{j=1}^{j_i-1}(n - j)l_i^j - (n - j_i)\sum_{j=1}^{j_i-1}l_i^j \tag{10}$$

Podstawiając wyrażenie (10) do zależności (9) otrzymujemy

$$WB_i = (n - j_i)(K - 2\sum_{j=1}^{j_i-1}l_i^j) + 2\sum_{j=1}^{j_i-1}(n - j)l_i^j - d[\{P_{ij_i}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] \tag{11}$$

Należy odnotować, że zgodnie z (1)

$$WB_i = \sum_{j=1}^{j_i-1}(n - j)l_i^j + \sum_{j=j_i}^{n}(n - j)l_i^j \tag{12}$$

Pierwszy składnik tego wyrażenia jest wyznaczony przez opinie tych ekspertów, którzy w podanych uporządkowaniach postawili obiekt O_i na pozycjach od 1 do (j_i – 1); oznaczymy ten składnik jako $WB_i^{j_i-1}$. Podobnie $\sum_{j=1}^{j_i-1} l_i^j$ określa liczbę ekspertów, którzy w podanych przez siebie uporządkowaniach umieścili obiekt O_i na pozycjach od 1 do (j_i – 1). A zatem wyrażenie (11) można zapisać w postaci

$$WB_i = (n - j_i)(K - 2\sum_{j=1}^{j_i-1} l_i^j) + 2WB_i^{j_i-1} - d[\{P_{ij_i}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] \quad (13)$$

Pierwszy składnik w wyrażeniu (13) określa wartość wskaźnika Bordy dla obiektu O_i w sytuacji, gdy $(K - 2\sum_{j=1}^{j_i-1} l_i^j)$ ekspertów umieściło obiekt O_i na pozycji j_i. Naturalnym założeniem wydaje się więc, że $j_i = 1$, to znaczy ograniczenie rozważań do przypadku, gdy wszyscy eksperci umieścili obiekt O_i na pierwszej pozycji; dla $j_i = 1$ mamy bowiem $\sum_{j=1}^{j_i-1} l_i^j = 0$ oraz $WB_i^{j_i-1} = 0$.

Zatem w tym przypadku

$$WB_i = (n-1)K - d[\{P_{i1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] \quad (14)$$

Zgodnie z (6) maksymalna wartość odległości $d[\{P_{i1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}]$ wynosi (n-1)K. W tym przypadku wartości wskaźnika Bordy $WB_i = 0$, co jest oczywiste. Jeżeli zaś

$$d[\{P_{i1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = 0, \text{ to } WB_i = WB_{max} = (n-1)K. \quad (15)$$

Z zależności (14) bezpośrednio wynika, że zadanie wyznaczenia zwycięzcy w sensie Bordy, to znaczy obiektu O_i, dla którego $WB_i = WB_{max}$, sprowadza się do znalezienia minimalnej wartości odległości (7)

$$WB_{max} = \min_i d[\{P_{i1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] \quad (16)$$

1.2 Przykład 1

Załóżmy, że są dane uporządkowania zbioru 5 obiektów podane przez 5 ekspertów (przykład ten jest rozpatrywany w pracy (Litvak, 1982)).

Tablica 1

Uporządkowanie	Miejsce w uporządkowaniu				
	1	2	3	4	5
P^1:	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P^2:	O_2	O_5	O_1	O_4	O_3
P^3:	O_3	O_2	O_1	O_4	O_5
P^4:	O_1	O_5	O_3	O_2	O_4
P^5:	O_4	O_3	O_1	O_5	O_2

Macierz rozkładu głosów ekspertów ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	WB_i
O_1	-	3	3	4	4	14
O_2	2	-	2	4	3	11
O_3	2	3	-	3	3	11
O_4	1	1	2	-	3	7
O_5	1	2	3	4	-	7

$$WB_{max} = WB_1 = 14 \tag{17}$$

$$(n-1)K=(5-1)\cdot 5 = 20$$

W rozpatrywanym przykładzie mamy

O_1:	$l_1^1=2$,	$l_2^1=0$,	$l_3^1=3$,	$l_4^1=0$,	$l_5^1=0$
O_2:	$l_1^2=1$,	$l_2^2=2$,	$l_3^2=0$,	$l_4^2=1$,	$l_5^2=1$
O_3:	$l_1^3=1$,	$l_2^3=1$,	$l_3^3=2$,	$l_4^3=0$,	$l_5^3=1$
O_4:	$l_1^4=1$,	$l_2^4=0$,	$l_3^4=0$,	$l_4^4=3$,	$l_5^4=1$
O_5:	$l_1^5=0$,	$l_2^5=2$,	$l_3^5=0$,	$l_4^5=1$,	$l_5^5=2$

(18)

Wykorzystując wzór (7) otrzymujemy

$$d[\{P_{1,1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = \sum_{j=2}^{5}(j-1)l_1^j = 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 + 4\cdot 0 = 6 \qquad WB_1=20\text{-}6=14$$

$$d[\{P_{2,1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = \sum_{j=2}^{5}(j-1)l_2^j = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 9 \qquad WB_2=20-9=11$$

$$d[\{P_{3,1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = \sum_{j=2}^{5}(j-1)l_3^j = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 = 9 \qquad WB_3=20-9=11$$

$$d[\{P_{4,1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = \sum_{j=2}^{5}(j-1)l_4^j = 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 = 13 \qquad WB_4=20-13=7$$

$$d[\{P_{5,1}^{(k)}\},\{P^{(k)}\}] = \sum_{j=2}^{5}(j-1)l_5^j = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 = 13 \qquad WB_5=20-13=7$$

(19)

2. Wybrane metody pozycyjne

Jeżeli na podstawie uporządkowań podanych przez ekspertów nie można wyznaczyć zwycięzcy w sensie Condorceta lub wady metody Condorceta (Saari, 1995) ograniczają jej zastosowanie, wówczas powstaje konieczność posłużenia się innymi metodami wyznaczania oceny grupowej. W systemach wspomagania pracy grupowej często stosowane są – wspomniane we wstępie – wieloetapowe metody pozycyjne Hare'a i Coombsa (Nurmi, 1987). Podano przykłady numeryczne ilustrujące działanie tych metod. Pokazano, że zastosowanie tych metod może prowadzić do różnych ocen grupowych. Dla celów porównawczych podano również wyniki zastosowania najprostszych metod pozycyjnych - większościowej i antywiększościowej.

2.1 Metoda większościowa

Zwycięzcą jest obiekt umieszczony na pierwszym miejscu w uporządkowaniach przez największą liczbę ekspertów.

2.2 Metoda antywiększościowa

Zwycięzcą jest obiekt umieszczony na ostatnim miejscu w uporządkowaniach przez najmniejszą liczbę ekspertów.

2.3 Metoda Hare'a

Obiekt najlepszy w sensie Hare'a wyznaczany jest w następujący sposób. W zbiorze obiektów $O = \{O_i, ..., O_n\}$ należy określić obiekt, który został umieszczony na pierwszym miejscu przez największą liczbę ekspertów. Jeżeli więcej niż połowa ekspertów umieściła dany obiekt na pierwszym miejscu, to jest on zwycięzcą w sensie Hare'a. Jeżeli nie istnieje taki obiekt, wówczas ze wszystkich uporządkowań podanych przez ekspertów należy usunąć obiekt umieszczony na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów. Następnie należy ponownie określić te obiekty, które zostały umieszczone na pierwszym miejscu przez największą liczbę ekspertów. Procedurę jest powtarzana do momentu uzyskania jednoelementowego zbioru obiektów. Należy zauważyć, że wybór obiektu wskazanego jako najlepszy przez największą liczbę ekspertów nie musi być jednoznaczny. Wówczas należy przeanalizować wszystkie dopuszczalne warianty porządkowania obiektów.

2.4 Metoda Coombsa

Obiekt najlepszy w sensie Coombsa wyznaczany jest w następujący sposób. Jeżeli więcej niż połowa ekspertów umieściła dany obiekt na pierwszym miejscu, to jest on zwycięzcą w sensie Coombsa. Jeżeli nie istnieje taki obiekt, wówczas ze wszystkich uporządkowań podanych przez ekspertów należy usunąć obiekt umieszczony na ostatnim miejscu przez największą liczbę ekspertów. Procedura jest powtarzana do momentu uzyskania jednoelementowego zbioru obiektów. Należy zauważyć, że wybór obiektu wskazanego jako najgorszy przez największą liczbę ekspertów nie musi być jednoznaczny. Wówczas należy przeanalizować wszystkie dopuszczalne warianty porządkowania obiektów.

2.5 Przykład 2

Dany jest zbiór 5 obiektów oraz zbiór uporządkowań tych obiektów podany przez 11 ekspertów.

Tablica 2

Uporządkowanie	Miejsce w uporządkowaniu				
	1	2	3	4	5
P^1	O_4	O_2	O_3	O_1	O_5
P^2	O_5	O_1	O_4	O_3	O_2
P^3	O_4	O_2	O_3	O_5	O_1
P^4	O_3	O_1	O_4	O_2	O_5
P^5	O_3	O_1	O_4	O_5	O_2
P^6	O_1	O_4	O_2	O_3	O_5
P^7	O_3	O_1	O_4	O_2	O_5
P^8	O_2	O_1	O_5	O_3	O_4
P^9	O_3	O_1	O_4	O_5	O_2
P^{10}	O_1	O_4	O_5	O_2	O_3
P^{11}	O_2	O_1	O_4	O_3	O_5

$$\frac{K}{2} = \frac{11}{2} < 6$$

Dla tych uporządkowań macierz rozkładu głosów ekspertów ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	WB_i
O_1	-	7	5	9	9	30
O_2	4	-	6	2	7	19
O_3	6	5	-	5	8	24
O_4	2	9	6	-	9	26
O_5	2	4	3	2	-	11

(20)

W tab. 3 podano zapis uporządkowań przedstawionych w tab. 2 z uwzględnieniem pozycji zajmowanych przez poszczególne obiekty w kolejnych uporządkowaniach.

Tablica 3

	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6	P^7	P^8	P^9	P^{10}	P^{11}	l_i^1	l_i^5
O_1	4	2	5	2	2	1	2	2	2	1	2	2	1
O_2	2	5	2	4	5	3	4	1	5	4	1	2	3
O_3	3	4	3	1	1	4	1	4	1	5	4	4	1
O_4	1	3	1	3	3	2	3	5	3	2	3	2	1
O_5	5	1	4	5	4	5	5	3	4	3	5	1	5

gdzie

l_i^1 - liczba ekspertów, którzy umieścili dany obiekt na pierwszej pozycji

l_i^5 - liczba ekspertów, którzy umieścili dany obiekt na ostatniej pozycji

2.5.1 Wyznaczanie zwycięzcy w sensie Hare'a

Z tab. 3 bezpośrednio wynika, że żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę, tzn. 6, ekspertów.

Najmniejsza liczba ekspertów umieściła na pierwszej pozycji obiekt O_5. Zgodnie z metodą Hare'a obiekt O_5 należy usunąć z tab. 3. W wyniku otrzymujemy tab. 4.

Tablica 4

	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6	P^7	P^8	P^9	P^{10}	P^{11}	l_i^1	l_i^4
O_1	4	1	4	2	2	1	2	2	2	1	2	3	2
O_2	2	4	2	4	4	3	4	1	4	3	1	2	5
O_3	3	3	3	1	1	4	1	3	1	4	4	4	3
O_4	1	2	1	3	3	2	3	4	3	2	3	2	1

Podobnie, jak w przypadku tab. 3 żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę ekspertów. Obiekty O_2 oraz O_4 zostały umieszczone na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów. A zatem należy rozpatrzyć dwa przypadki.

a) Obiekt O_2 zostaje usunięty z uporządkowań. Tablica 4 przybiera postać

Tablica 5

	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6	P^7	P^8	P^9	P^{10}	P^{11}	l_i^1	l_i^3
O_1	3	1	3	2	2	1	2	1	2	1	1	5	2
O_3	2	3	2	1	1	3	1	2	1	3	3	4	4
O_4	1	2	1	3	3	2	3	3	3	2	2	2	5

Podobnie, jak w przypadku tab. 4 żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę ekspertów. Obiekt O_4 został umieszczony na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów. Zgodnie z metodą Hare'a obiekt O_4 należy usunąć z tab. 5. W wyniku otrzymujemy tab. 6.

Tablica 6

	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6	P^7	P^8	P^9	P^{10}	P^{11}	l_i^1
O_1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	1	5
O_3	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	6

Z tablicy 6 wynika, że zwycięzcą w sensie Hare'a jest obiekt O_3.

b) Obiekt O_4 zostaje usunięty z uporządkowań.

Tablica 4 przybiera postać

Tablica 7

	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6	P^7	P^8	P^9	P^{10}	P^{11}	l_i^1	l_i^3
O_1	3	1	3	2	2	1	2	2	2	1	2	3	3
O_2	1	3	1	3	3	2	3	1	3	2	1	4	5
O_3	2	2	2	1	1	3	1	3	1	3	3	4	4

Podobnie, jak w przypadku tab. 4 żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę, tzn. 6, ekspertów. Obiekt O_1 został umieszczony na pierwszym miejscu przez najmniejszą liczbę ekspertów. Zgodnie z metodą Hare'a należy go usunąć z tab. 7. W wyniku otrzymujemy tab. 8.

Tablica 8

	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6	P^7	P^8	P^9	P^{10}	P^{11}	l_i^1
O_2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	1	6
O_3	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	2	5

Z tablicy 8 wynika, że zwycięzcą w sensie Hare'a jest obiekt O_2.

Tak więc, stosując algorytm Hare'a można wybrać różnych zwycięzców zależnie od kolejności usuwania obiektów.

2.5.2 Wyznaczanie najlepszego obiektu w sensie Coombsa

Z tablicy 3 bezpośrednio wynika, że żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę, tzn. 6, ekspertów. Największa liczba ekspertów umieściła na ostatniej pozycji obiekt O_5. Zgodnie z metodą Coombsa obiekt O_5 należy usunąć z tab. 3. W wyniku otrzymujemy tab. 4.

Z tablicy 4 wynika, że żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę ekspertów. Największa liczba ekspertów umieściła na ostatniej pozycji obiekt O_2. Zgodnie z metodą Coombsa obiekt O_2 należy usunąć z tab. 4. W wyniku otrzymujemy tab. 5.

Z tablicy 5 wynika, że żaden obiekt nie został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę ekspertów. Największa liczba ekspertów umieściła na ostatniej pozycji obiekt O_4. Zgodnie z metodą Coombsa obiekt O_4 należy usunąć z tab. 4. W wyniku otrzymujemy tab. 6.

Z tablicy 6 wynika, że obiekt O_3 został umieszczony na pierwszej pozycji przez więcej niż połowę, tzn. 6, ekspertów; obiekt O_3 jest zwycięzcą w sensie Coombsa.

Zestawienie wyników otrzymanych przy użyciu omawianych metod przedstawiono w tab. 9.

Tablica 9

Metoda	Zwycięzca
Bordy	O_1
Większości	O_3
Antywiększości	$(O_1, O_3, O_4$
Hare'a	O_3 lub O_2
Coombsa	O_3

Zapis (O_i, O_j) oznacza, że zarówno obiekt O_i, jak i O_j są najlepsze w sensie wybranej metody tworzenia oceny grupowej

3. Podsumowanie

Wybór metody wyznaczania oceny grupowej jest sprawą bardzo istotną i zależy od właściwej analizy rozważanych zadań ekspertyzy, która należy przeprowadzić. Jak pokazano w pracy, w zależności od zastosowanej metody można uzyskać różną ocenę grupową. Nurmi (Nurmi, 1987) dokonał analizy częstości sytuacji, kiedy wybrane metody wskazują jako zwycięzcę obiekt będący również zwycięzcą w sensie Condorceta.

Tablica 10

Metoda	Liczba obiektów					
	2	3	4	5	7	10
Bordy	100	94,1	90,4	88,7	86,2	86,4
Większościowa	100	84,4	76,6	69,7	61,0	51,7
Hare'a	100	96,4	92,1	88,9	83,3	75,8
Coombsa	100	96,1	93,1	90,8	86,1	80,7

Warto zwrócić uwagę na duży stopień zgodności ocen uzyskiwanych za pomocą metod Bordy, Hare'a i Coombsa, uznawanych w dużej mierze za podstawowe, z ocenami generowanymi za pomoca algorytmu Condorceta.

Inne podejście przedstawił Saari (Saari, 1995, 1997a,b). Zaproponował on dekompozycję uporządkowań na tzw. profile, pozwalającą na interpretację różnic wyników uzyskiwanych za pomocą różnych metod. Przykłady zastosowań tego podejścia można znaleźć w pracach (Nurmi, 2000, 2004; Bury, Wagner, 2004).

Literatura

Aizerman M., Aleskerov F. (1995) *Theory of Choice*. North Holland, Amsterdam-New York-Tokyo.

Bury H., Wagner D. (2002) Wybór metody tworzenia oceny grupowej. Propozycje rozwiązań. w: *Metody i techniki analizy informacji i wspomagania decyzji, pod red. Z. Bubnickiego, O. Hryniewicza, R. Kulikowskiego*. Akad. Ofic. Wyd. EXIT, Warszawa

Bury H., Wagner D. (2004) Analiza ocen ekspertów metodą Saari'ego. Przypadek czterech obiektów. Referat na VII konferencję PTBOiS BOS 2004, *Badania operacyjne i systemowe a rozwój gospodarki i społeczeństwa wiedzy: Wyzwania dla nauki polskiej po wejściu Polski do UE*

Islei G.(1986) An approach to measuring consistency of preference vector derivations. In: J.Jahn and W.Krabs (eds). Recent Advances and Historical Development of Vector Optimization, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **294**, Springer Verlag, Berlin. 265-284.

Kemeny J. (1959) Mathematics without numbers, Daedalus 88.

Kemeny J., Snell L. (1960) *Mathematical Models in the Social Sciences*. Ginn. Boston.

Litvak B.G. (1982) Expert Information. Methods of acquisition and analysis (in Russian). *Radio and Communication*, Moscow.

Nitzan S. (1981) Some measures of closeness to unanimity and their implications. *Theory and Decision*, **13**.

Nurmi H. (1983) Voting procedures: a summary analysis. *British Journal of Political Science*, **13**.

Nurmi H. (1987) *Comparing voting systems*. Dordrecht, D.Reidel.

Nurmi H. (1992) *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Nurmi H. (2000) Some techniques of preference profile analysis. Paper presented at NPO meeting on "Power and Fairness", Bad Segeberg, September 3-6.

Nurmi H. (2004) A comparison of some distance-based choice rules in ranking environments. Private communication.

Ratliff T.C. (2002) A Comparison of Dodgson's method and the Borda Count, *Economic Theory*, **20**.

Saari D.G. (1995) *Basic Geometry of Voting*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

Saari D.G. (1997a) Explaining positional voting paradoxes I. The simple case. *NU Center for Mathematical Economy*, discussion paper, 1179, January.

Saari D.G. (1997b) Explaining positional voting paradoxes. The general case. NU Center for Mathematical Economy, discussion paper, 1187, April .

ISSN 0208-8028
ISBN 83-85847-92-8

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl