KIWIEL

POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją

Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

WSPOMAGANIE DECYZJI

SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją

Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

Wydano z wykorzystaniem dotacji
KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Materiały konferencji: "Analiza Decyzyjna, Systemy Eksperckie, Zastosowania Systemów Komputerowych", Warszawa, 25-27 maja 1994r.

Komitet Programowy Konferencji:

Andrzej Ameljańczyk, Zdzisław Bubnicki, Wiesław Grudzewski, Olgierd Hryniewicz, Janusz Kacprzyk, Lech Kruś, Roman Kulikowski (przewodniczący), Kazimierz Mańczak, Ireneusz Nykowski, Zdzisław Pawlak, Roman Słowiński, Andrzej Straszak, Andrzej Weryński, Andrzej Wierzbicki.

Wykonano z oryginałów tekstowych dostarczonych przez autorów

ISBN 83-85847-85-5

ANALIZA ŚREDNIEGO PRZYPADKU M-WYMIAROWYCH ZADAŃ ZAŁADUNKU

Krzysztof SZKATUŁA
Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
E-mail: `szkatulk@ibspan.waw.pl`

1. Wprowadzenie

Rozpatrzmy m-wymiarowe, binarne zadanie załadunku:

$$z_{OPT}(n) = \max \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \leq b_j(n) \tag{1}$$

$$\text{gdzie } j = 1,\ldots,m, \quad x_i = 0 \text{ lub} 1$$

Parametry zadania muszą spełniać następujące warunki: $m \leq n$, c_i, $a_{ij} > 0$.
Aby wyeliminować z rozważań zadania sprzeczne i trywialne zakładamy, że:

$$0 < b_j(n) \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Wielowymiarowe, binarne zadanie załadunku jest *NP*-trudnym zadaniem optymalizacji dyskretnej, patrz [2].

Celem niniejszej pracy jest przeprowadzenie analizy probabilistycznej i porównanie asymptycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych dla umiarkowanych oraz bardzo dużych prawych stron ograniczeń w przypadku klasy losowych m-wymiarowych zadań załadunku. Rozważona w pracy klasa losowych zadań załadunku uogólnia modele rozpatrzone w pracach [1, 3-7].

Rozdział 2 zawiera oszacowania wartości optymalnej zadania (1) oparte na relaksacji Lagrange'a i teorii dualności. Główne wyniki pracy zawarte są w rozdziale 3.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

$V_n \approx Y_n$, $n \to \infty$, oznacza:

- $Y_n\cdot(1 - o(1)) \le V_n \le Y_n\cdot(1 + o(1))$ w przypadku jeśli V_n i Y_n są ciągami liczb.
- $\lim_{n\to\infty} P\{Y_n\cdot(1-o(1)) \le V_n \le Y_n\cdot(1+o(1))\} = 1$ w przypadku V_n - ciąg zmiennych losowych oraz Y_n ciąg liczb lub zmiennych losowych, gdzie $\lim_{n\to\infty} o(1) = 0$.
- $(x)_+ = \dfrac{|x|+x}{2} = \begin{cases} x & \text{jesli} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

2. Wybrane oszacowania oparte na relaksacji Lagrange'a i teorii dualności

Rozpatrzmy funkcję Lagrange'a dla zadania (1), $L_n(x, L)$:

$$L_n(x,\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot x_i + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot\left(b_j(n) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot x_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot b_j + \sum_{i=1}^{n}\left(c_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij}\right)\cdot x_i,$$

gdzie $x = \{x_1,\dots,x_n\}$, $L = \{l_1,\dots,l_m\}$.

Dla każdego wektora L, $l_j \ge 0$, $j = 1,\dots,m$:

$$\phi_n(\Lambda) = \max_{x\in\{0,1\}^n} L_n(x,\Lambda) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot b_j(n) + \sum_{i=1}^{n}\left(c_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij}\right)\cdot x_i(\Lambda) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot b_j(n) + \sum_{i=1}^{n} d_i(n)\cdot\left(c_i(\Lambda) - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij}(\Lambda)\right)$$

gdzie

$$x_i(\Lambda) = \begin{cases} 1 & \text{jesli} \quad c_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{2}$$

$$c_i(\Lambda) = \begin{cases} c_i & \text{jesli} \quad c_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \qquad a_{ij}(\Lambda) = \begin{cases} a_{ij} & \text{jesli} \quad c_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Prawdziwe są następujące zależności: $c_i(L) = c_i\cdot x_i(L)$, $a_{ij}(L) = a_{ij}\cdot x_{ij}(L)$.

Zadania dualne do (1) ma postać następującą:

$$\Phi_n^* = \min_{\Lambda\ge 0}\phi_n(\Lambda)$$

Dla każdego $\Lambda \ge 0$, $z_{OPT}(n) \le \Phi_n^* \le \phi_n(\Lambda)$. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$z_n(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot x_i(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\Lambda),\quad s_j(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot x_i(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\Lambda),\quad S_{nm}(\Lambda) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot s_j(\Lambda),$$

$B_m(\Lambda) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot b_j(n)$. Ze względu na konstrukcję: $c_i(\Lambda) \ge \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij}(\Lambda)$, a więc:

$$z_n(\Lambda) \ge S_{nm}(\Lambda) \tag{3}$$

Jeśli dla pewnygo wektora L, $x_i(L)$, określone przez (2), wyznacza dopuszczalne rozwiązanie (1) to znaczy:

$$s_j(L) \le b_j(n) \quad \text{dla wszystkich } j = 1,\dots,m \tag{4}$$

to wtedy:

$$z_n(\Lambda) \le z_{OPT}(n) \le \Phi_n^*(\Lambda) \le \phi_n(\Lambda) = z_n(\Lambda) + B_m(\Lambda) - S_{nm}(\Lambda)$$

Jeśli zachodzi (4) to wtedy $B_m(\Lambda)-S_{nm}(\Lambda)$ jest nieujemne i uwzględniając (3) otrzymamy:

$$\frac{\phi_n(\Lambda)}{z_n(\Lambda)}=\frac{z_n(\Lambda)}{z_n(\Lambda)}+\frac{B_m(\Lambda)-S_{nm}(\Lambda)}{z_n(\Lambda)}\le 1+\frac{B_m(\Lambda)-S_{nm}(\Lambda)}{S_{nm}(\Lambda)}$$

Tak więc jeśli (4) jest spełnione to prawdziwa jest następująca nierówność:

$$1\le\frac{z_{OPT}(n)}{z_n(\Lambda)}\le\frac{\Phi_n^*}{z_n(\Lambda)}\le\frac{\phi_n(\Lambda)}{z_n(\Lambda)}\le\frac{B_m(\Lambda)}{S_{nm}(\Lambda)} \tag{5}$$

3. Analiza Probabilistyczna

Zostanie rozpatrzony następujący model losowy zadania (1):

- m dodatnia liczba całkowita, $n\to\infty$, $i=1,..,n$, $j=1,..,m$.
- c_i, a_{ij}, są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym z przedziału (0,1].
- $0 < b_j(n) \le n/2$, $b_j(n)$ jest funkcją deterministyczną.

W pracach [1,3-5] przyjęto założenie, że $b_j(n)\equiv 1$. Przy przyjętych odnośnie a_{ij} założeniach prawdziwe są następujące zależności: $0<\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\le n$, $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\approx\frac{n}{2}$, $j=1,...,m$.

Fakt, że $0<b_j(n)\le\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$ powoduje iż założenie $b_j(\mathrm{n})\equiv 1$ bardzo zawęża ogólność rozpatrywanego modelu i w konsekwencji w istotny sposób ogranicza adekwatość takiego losowego modelu zadania do jakiejkolwiek sytuacji rzeczywistej. W pracy [6] przyjęto następujące założenie: $\frac{b_j^{m+1}(n)}{b_1(n)\cdot b_2(n)\cdot\ldots\cdot b_m(n)}\le\frac{n}{(m+2)!}$, $j=1,...,m$. Razważony model opisuje przypadek *małych* i *średnich* wartości $b_j(n)$. W pracy [7] rozważono następujący przypadek bardzo dużych $b_j(n)$:

$$\frac{(3\cdot m-1)\cdot n}{12}\le\sum_{j=1}^{m}b_j(n)\le\frac{m\cdot n}{2},\quad \lim_{n\to\infty}b_j(n)=\infty,\ \text{dla wszystkich } j=1,\ldots,m.$$

Celem tej pracy jest przedstawienie obu przypadków w oparciu o jednolitą platformę. Dalsze rozważania będą oparte na analizowaniu zmiennych losowych $a_{ij}(\Lambda), c_i(\Lambda), z_n(\Lambda), s_j(\Lambda)$ jako funkcji n, m, Λ w przypadku asymptotycznym. Dla rozważenia wymienionych zmiennych losowych niezbędna jest dystrybuanta następującej zmiennej losowej: $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij}$. Istnieje $\binom{m}{k}$ różnych k-elementowych permutacji wektora $\mathrm{L}=\{l_1,...,l_m\}$. Niech $l_l(r,k,\mathrm{L})$ oznacza l-ty element w r-tej, k-elementowej, permutacji L.

$P\left\{\lambda_j\cdot a_{ij}<x\right\}=((x)_+-(x-\lambda_j)_+)/\lambda_j$ jest dystrybuantą zmennej losowej $\lambda_j\cdot a_{ij}$.

Wtedy:

$$F_m(x,\Lambda)=P\left\{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot a_{ij}<x\right\}=\frac{1}{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_m\cdot m!}\cdot\left((x)_+ +\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\sum_{r=1}^{\binom{m}{k}}\left(x-\sum_{l=1}^{k}\lambda_l(r,k,\Lambda)\right)_+^m\right)$$

Pełne wzory opisujące dystrybuanty i wartości oczekiwane dla $a_{ij}(\Lambda), c_i(\Lambda)$, przyjmują następującą postać:

$$G_{ij}(x,\Lambda)=P\{a_{ij}(\Lambda)<x\}=P\left\{a_{ij}<x\cup a_{ij}\ge x\cap\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\cdot a_{ik}\ge c_i\right\}=1-\int_x^1\int_0^1 F_{m-1}(r-\lambda_j\cdot t,\Lambda\setminus\lambda_j)drdt$$

,

$$H_i(x,\Lambda)=P\{c_i(\Lambda)<x\}=P\left\{c_i<x\cup c_i\ge x\cap\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\cdot a_{ik}\ge c_i\right\}=1-\int_x^1 F_m(t,\Lambda)dt,$$

$$E(a_{ij}(\Lambda))=\int_0^1 xdG_{ij}(x,\Lambda)=\int_0^1 x\int_0^1 F_{m-1}(r-\lambda_j\cdot x,\Lambda\setminus\lambda_j)drdx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_j\cdot\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_m\cdot(m+2)!}\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\sum_{r=1}^{\binom{m}{k}}\left(1-\sum_{l=1}^{k}\lambda_l(r,k,\Lambda)\right)_+^{m+2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\cdot\sum_{r=1}^{\binom{m-1}{k}}\left(1-\lambda_j-\sum_{l=1}^{k}\lambda_l(r,k,\Lambda\setminus\lambda_j)\right)_+^{m+1}\cdot\lambda_j\cdot(m+2)\right),$$

$$E(c_i(\Lambda))=\int_0^1 xdH_i(x,\Lambda)=\int_0^1 x\cdot F_m(x,\Lambda)dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_m\cdot(m+2)!}\cdot\left(m+1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\sum_{r=1}^{\binom{m}{k}}\left(1-\sum_{l=1}^{k}\lambda_l(r,k,\Lambda)\right)_+^{m+1}\cdot\left(m+1+\sum_{l=1}^{k}\lambda_l(r,k,\Lambda)\right)\right)$$

Należy zwrócić uwagę, że powyższe wzory są bardzo skomplikowane i trudne do użycia w ogólnym przypadku. Tym niemniej dwa ważne szczególne przypadki są znacznie łatwiejsze do rozważenia. Pierwszy z nich zachodzi wtedy, gdy $\lambda_j\ge 1, j=1,\ldots,m$, i był on rozpatrywany w pracy [6]. Wtedy:

$$E(a_{ij}(\Lambda))=\frac{1}{\lambda_j\cdot\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_m\cdot(m+2)!},\quad E(c_i(\Lambda))=\frac{m+1}{\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_m\cdot(m+2)!}.$$

Drugi przypadek zachodzi gdy $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\le 1$ i został rozważony w pracy [7]. Wtedy:

$$E(a_{ij}(\Lambda))=\frac{1}{2}-\frac{\lambda_j}{12}-\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{m}\lambda_j,\quad E(c_i(\Lambda))=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^2-\frac{1}{4}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m}\lambda_j\cdot\lambda_k.$$

Przypadki te dotyczą umiarkowanych i bardzo dużych wartości $b_j(n)$, $j=1,\dots,m$.

Poniżej przytoczono twierdzenia opisujące asymtotyczne zachowanie się rozwiązania optymalnego m-wymiarowego zadania załadunku w obu przypadkach dla rozważanego modelu losowego .

Twierdzenie 1. Niech m ($1 \le m < \delta$, δ - stała) będzie liczbą całkowitą , $n\to\infty$, $b_j(n)$ - ($0<\sigma\le b_j(n)$ σ - stała) funkcje determistyczne, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$; c_i, a_{ij}, realizacje wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym z przedziału (0,1]. Jeśli istnie stała $n_0 \ge 1$, takie, że dla wszystkich $j=1,..,m$, $n \ge n_0$, zachodzi $\frac{b_j^{m+1}(n)}{b_1(n)\cdot b_2(n)\cdot\ldots\cdot b_m(n)} \le \frac{n}{(m+2)!}$ to wtedy:

$$z_{OPT}(n) \sim (m+1)\cdot\sqrt[m+1]{\frac{b_1(n)\cdot b_2(n)\cdot\ldots\cdot b_m(n)}{(m+2)!}} \tag{6}$$

Dowód można odnaleźć w pracy [6].

Twierdzenie 2. Niech $m=o\left(\sqrt[3]{n}\right)$, $n\to\infty$, $b_j(n)$ - funkcje determistyczne, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$; c_i, a_{ij}- są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym z przedziału (0,1]. Jeśli istnieje stała $n_0 \ge 1$, taka, że dla wszystkich $j=1,..,m$, $n \ge n_0$, $\lim_{n\to\infty} b_j(n)=\infty$ oraz $\frac{(3\cdot m-1)\cdot n}{12}\le\sum_{j=1}^{m}b_j(n)\le\frac{m\cdot n}{2}$ to wtedy:

$$z_{OPT}(n) \sim \frac{1}{3m+1}\cdot\left(\frac{n}{2}+6\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}b_j+\frac{6}{n}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m}b_j\cdot b_k-\frac{3m-2}{n}\cdot\sum_{j=1}^{m}b_j^2\right)\right) \tag{7}$$

Dowód może być odnaleziony w pracy [7].

Wzory (6) i (7) opisują sytuację kiedy $\lambda_j>0$, $j=1,\dots,m$ co oznacza, że wszystkie ograniczenia są "aktywne" (w tym przypadku oznacza to, że różnice miedzy prawymi i lewymi stronami wszystkich ograniczeń są asymptotycznie zerowe). Aby uzyskać bardziej realistyczne wyniki należy rozpatrzyć przypadki zadań z "luźnymi" ograniczeniami, to znaczy, że pewne $\lambda_j=0$ (co w przypadku modelu losowego może oznaczać asymptotycznie niezerowe różnice miedzy prawymi i lewymi stronami odpowiednich ograniczeń). Przeprowadzenie takiej analizy wydaje się być bardzo istotnym krokiem w kierunku uzyskania wyników asymptotycznej analizy probabilistycznej dla losowego modelu wielowymiarowego zadania załadunku z pełnym spektum wartości prawych stron ograniczeń ($0 < b_j(n) \le n/2$, $j=1,\dots,m$).

LITERATURA

[1] A.M.Frieze and M.R.B.Clarke, Approximation algorithms for the m-dimensional 0-1 Knapsack problem: Worst case and probabilistic analysis, *European Journal of Operational Research* 15 (1984) 100-109.

[2] M.R.Garey, D.S.Johnson, Computers and Intractability: a Guide to the theory of *NP*-Completeness, (*Freeman*, San Francisco 1979).

[3] J.W.Mamer and K.E.Schilling, On the growth of random knapsacks, *Discrete Applied Mathematics* 28 (1990) 223-230.

[4] K.E.Schilling, The growth of m-constraint random knapsacks, *European Journal of Operational Research* 46 (1990) 109-112.

[5] K.E.Schilling, Random Knapsacks with many constraints, *Discrete Applied Mathematics* 48 (1994) 163-174.

[6 K.Szkatuła, On the growth of multi-constraint random knapsacks with various right-hand sides of the constraints, *European Journal of Operational Research* 73 (1994) 199-204.

[7] K.Szkatuła, Growth of multi-constraint random knapsacks with large right-hand sides of the constraints, praca w przygotowaniu.

ISBN 83-85847-85-5

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt

z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 36-19-01 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl