KIWIEL

POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją
Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

WSPOMAGANIE DECYZJI

SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją

Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

Wydano z wykorzystaniem dotacji
KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Materiały konferencji: "Analiza Decyzyjna, Systemy Eksperckie, Zastosowania Systemów Komputerowych", Warszawa, 25-27 maja 1994r.

Komitet Programowy Konferencji:

Andrzej Ameljańczyk, Zdzisław Bubnicki, Wiesław Grudzewski, Olgierd Hryniewicz, Janusz Kacprzyk, Lech Kruś, Roman Kulikowski (przewodniczący), Kazimierz Mańczak, Ireneusz Nykowski, Zdzisław Pawlak, Roman Słowiński, Andrzej Straszak, Andrzej Weryński, Andrzej Wierzbicki.

Wykonano z oryginałów tekstowych dostarczonych przez autorów

ISBN 83-85847-85-5

UPORZĄDKOWANIE ZBIORU OBIEKTÓW W SKALI LICZBOWEJ

Lidia Księżopolska, Dariusz Wagner
Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

1. WPROWADZENIE

Jednym z najczęstszych zadań stawianych zespołom ekspertów jest uporządkowanie danego zbioru obiektów ze względu na wybrane kryterium lub zbiór kryteriów. Uproszczona wersja tego zadania sprowadza się do wyboru obiektu (lub obiektów) najlepszych z punktu widzenia danego kryterium (lub kryteriów).

Zadanie uporządkowania wszystkich obiektów, które wchodzą w skład danego zbioru jest zadaniem trudnym lub nawet bardzo trudnym jeśli liczba obiektów jest duża. Z tego powodu formułując takie zadanie wymaga się zazwyczaj od ekspertów, aby wyrązili opinię dotyczącą jedynie porządku obiektów. Fakt, że w uporządkowaniu podanym przez eksperta dany obiekt poprzedza inne oznacza jedynie, że jego zdaniem obiekt ten - w sensie wybranego kryterium - jest lepszy od nich. Opinia ta nie zawiera oceny ilościowej mówiącej o ile dany obiekt jest lepszy od drugiego. Konieczność wprowadzenia takiej oceny może zaistnieć na przykład w przypadku, gdy zadanie polega na uporządkowaniu zbioru projektów badawczych przewidzianych do realizacji a uporządkowanie wynikłe z rozwiązania tego zadania ma określić nakłady przeznaczone na ich wykonanie.

Należy podkreślić, że zadanie uporządkowania obiektów w skali liczbowej - na podstawie ocen ekspertów - jest zagadnieniem bardzo trudnym i wymaga szczegółowego i wnikliwego przygotowania.

Zagadnieniem tym zajmował się - między innymi - prof. F.A.Lootsma z Delft University of Technology. Uzyskane przez niego i jego zespół wyniki zostały przedstawione w raportach badawczych [3], [4], [5].

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

2.1. *Założenia i pojęcia podstawowe.*

Załóżmy, że jest dany zbiór obiektów $0 = \{0_1, ..., 0_n\}$. Przyjmiemy, że ekspert dokonuje oceny liczbowej tych obiektów - ze względu na przyjęte kryterium lub zbiór kryteriów - posługując się liczbami naturalnymi z danego przedziału $\{S_{min} - S_{max}\}$ (np. 1-10, 1-100 itp.). Jeżeli przedział ten jest podzielony na b podprzedziałów, to ekspert w swej ocenie może posłużyć się liczbami ze zbioru S

$$S : S_o = S_{min}; \; S_1 = S_o + \frac{S_{max} - S_{min}}{b}; ...; S_b = S_o + b\,\frac{S_{max} - S_{min}}{b} = S_{max}$$

Dobór wielkości: S_{max}, S_{min} oraz b nie pozostaje bez wpływu na ostateczną ocenę liczbową wag obiektów. Ustalenie wartości tych wielkości powinno być związane z rodzajem rozpatrywanych obiektów oraz stosowanych kryteriów.

Oznaczymy ocenę obiektu 0_i ($i = 1, ..., n$) dokonaną przez k-tego eksperta przez g_{ik}. Ocena ta zgodnie z przyjętymi ustaleniami ma charakter dyskretny. Pozostaje teraz powiązać tę ocenę z "wagą" w_i obiektu 0_i, która pozwoli dokonywać porównań obiektów w sposób ilościowy. Wielkość ta powinna być już zmienną ciągłą. Porównania obiektów mają charakter względny. Dlatego przyjmiemy, że wagi w_i oraz w_j obiektów 0_i oraz 0_j są powiązane zależnością

$$\zeta(w_i, w_j) = 0 \qquad i, j = 1, ..., n \tag{1}$$

przy czym zakładamy, że funkcja ζ daje się rozwikłać względem zmiennych w.

Jeżeli w ocenie danego eksperta (dla uproszczenia zapisu nie będziemy stosować indeksu k oznaczającego numer eksperta) obiekty 0_i i 0_j uzyskały odpowiednio oceny g_i i g_j, to przejście od ocen eksperta do wag obiektów sprowadza się do skonstruowania funkcji

$$r_{ij} = \kappa\left(w_i, w_j\right) = f\left(g_i, g_j\right) \qquad i, j = 1, ..., n \tag{2}$$

gdzie κ *i* f są funkcjami odpowiednio gładkimi.

Zakładając, że zależność (2) jest liniowa otrzymujemy

$$r_{ij} = \kappa\left(w_i - w_j\right) = w_i - w_j = \gamma\left(g_i - g_j\right) \; i, j = 1, ..., n. \tag{3}$$

gdzie γ - stały współczynnik, przy czym zazwyczaj $\gamma \leq 1$.

Z badań psychologów [1], [6], [7] wynika, że dość często zależność przyrostu wag obiektów od zmiany ich ocen nie jest liniowa, a ma charakter wykładniczy, to znaczy

$$r_{ij} = \kappa\left(w_i, w_j\right) = \frac{w_i}{w_j} = a^{\gamma(g_i - g_j)} \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Aby móc posłużyć się zależnością (4), należy założyć, że $w_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n)$.

Łatwo wykazać, że:

$$r_{ij} = a^{\gamma(g_i - g_j)} = \exp\left[\ln a\, \gamma\left(g_i - g_j\right)\right] \tag{5}$$

Najczęściej przyjmuje się, że a jest równe 2 lub stanowi podstawę logarytmu naturalnego.

W dalszym rozważaniu będziemy stosować zapis $\ln a\, \gamma = \bar{\gamma}$.
Oznaczymy przyrost ocen przez $\Delta g_{ij} \ (i j = 1, \ldots, n)$, przy czym

$$|\Delta g_{ij}|_{max} = S_{max} - S_{min}$$

Mamy zatem

$$\left(\frac{r_{ij}^{\bar{\gamma}+\Delta\bar{\gamma}}}{r_{ij}^{\bar{\gamma}}}\right)_{max} = \exp\left(|\Delta\bar{\gamma}| \cdot |\Delta g_{ij}|_{max}\right) = \exp\left[|\Delta\bar{\gamma}|\left(S_{max} - S_{min}\right)\right] \tag{6}$$

Z zależności (6) bezpośrednio wynika, że stosunek $\left(\frac{r_{ij}^{\bar{\gamma}+\Delta\bar{\gamma}}}{r_{ij}^{\bar{\gamma}}}\right)$ może osiągnąć stosunkowo duże wartości przy przyjęciu znacznej rozpiętości skali ocen.

Należy również podkreślić, że przy dużych wartościach iloczynu $\bar{\gamma}(g_i - g_j)$ niewielka zmiana którejkolwiek z ocen może pociągnąć za sobą duże zmiany wartości r_{ij}. Przytoczone wnioski sugerują, że posługując się w zastosowaniach praktycznych funkcją o postaci określonej należnością (4), należy zwrócić szczególną uwagę na dobór wielkości $\bar{\gamma}$ oraz $(S_{max} - S_{min})$ oraz zachować dużą ostrożność przy porównywaniu wyników uzyskanych dla różnych wartości $\bar{\gamma}$ *)

Założymy teraz, że istnieją i są określone wagi $w_i^* \ (i = 1, \ldots, n)$ obiektów należących do rozpatrywanego zbioru. Dla każdej pary obiektów $(0_i, 0_j) \ (i, j = 1, \ldots, n)$ można wtedy określić wielkość:

---

*) Jeśli rozłożyć r_{ij} w szereg MacLaurina i pominąć wyrazy rzędu wyższego niż pierwszy, to otrzymamy $\frac{w_i}{w_j} = e^{\bar{\gamma}(g_i - g_j)} = 1 + \bar{\gamma}(g_i - g_j)$. Skąd $\frac{w_i - w_j}{w_j} = \bar{\gamma}(g_i - g_j)$. A zatem przyjmując to przybliżenie, można stwierdzić, że w przypadku zależności (4) względny przyrost wag jest proporcjonalny do różnic ocen.

$$r^*_{ij} = \frac{w^*_i}{w^*_j} \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

Przyjmiemy, że wielkość tę chcemy wyznaczyć na podstawie ocen ekspertów. Dla uproszczenia założymy wstępnie, że mamy do czynienia z jednym ekspertem. Przyjmując, że ekspert określił oceny wszystkich obiektów oraz, że będziemy posługiwać się funkcją o postaci (5), stanowiącą oszacowanie r^*_{ij}, możemy wyznaczyć wielkości $\tilde{r}_{ij}$,

$$\tilde{r}_{ij} = \exp\ \overline{\gamma}\left(g_i - g_j\right) \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

Wielkość $\tilde{r}_{ij}$ wyznaczona na podstawie ocen eksperta może różnić się od rzeczywistej wartości r^*_{ij}. Przyjmiemy, że różnica między tymi wielkościami jest równa $\Delta r_{ij} = r^*_{ij}\, \delta r_{ij}$. Mamy wtedy

$$\overline{r}_{ij} = r^*_{ij} + \Delta r_{ij} = r^*_{ij}(1 + \delta r_{ij}) \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

Przeanalizujemy teraz wyrażenia $\ln\left(\frac{\tilde{r}_{ij}}{r^*_{ij}}\right)$. Rozkładając $\tilde{r}_{ij}$ w szeregu Taylora w otoczeniu punktu r^*_{ij} otrzymujemy:

$$\ln\left(\frac{\tilde{r}_{ij}}{r^*_{ij}}\right) = \ln(1 + \delta r_{ij}) = \left(\delta r_{ij} - \frac{1}{2}\delta^2 r_{ij} + \ldots\right) \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{10}$$

Z analizy wyrażenia (10) wynika, że przy $\delta r_{ij} = 0$, tzn. w przypadku gdy wielkość $\tilde{r}_{ij}$ wyznaczona na podstawie oceny eksperta pokrywa się z wartością rzeczywistą r^*_{ij} mamy: $\ln\left(\frac{\tilde{r}_{ij}}{r^*_{ij}}\right) = \ln 1 = 0$. Jeżeli $\delta r_{ij} \neq 0$, to wartość wyrażenia $\ln\left(\frac{\tilde{r}_{ij}}{r^*_{ij}}\right)$ odpowiednio szybko rośnie lub maleje.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie odwrotne, to znaczy przyjmiemy, że są dane oceny o postaci (8) i na ich podstawie należy określić wagi w_i $(i = 1, \ldots, n)$ obiektów. Z przeprowadzonej analizy wynika, że kryterium prowadzące do wyznaczenia tych wag można zapisać jak następuje:

$$\min F\left[\ln \tilde{r}_{ij}\left(\frac{w_j}{w_i}\right)\right] = \min F\left(\ln \tilde{r}_{ij} - \ln w_i + \ln w_j\right) \tag{11}$$

gdzie F - funkcja odpowiednio gładka.

Z definicji wielkości r_{ij} (5) wynika, że $\frac{w_i}{w_j} = r_{ij}$ oraz $\frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{r_{ij}}$ $i, j = 1, \ldots, n$

Zadanie minimalizacji (11) wystarczy zatem rozwiązać jedynie dla takich i, j, że:

$$i = 1, \ldots, n - 1 \; ; \; j = i + s \quad \text{gdzie} \quad s = 1, \ldots, n - i$$

Ze względu na wygodę rachunkową można przyjąć, że:

$$F\left[\ln \tilde{r}_{ij}\left(\frac{w_j}{w_i}\right)\right] = \left[\ln \tilde{r}_{ij}\left(\frac{w_j}{w_i}\right)\right]^2 \tag{12}$$

2.2. *Wyznaczenie wag jako rozwiązanie zadania optymalizacji*

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowano, że obiekty ocenia tylko jeden ekspert. W przypadku ogólnym należy założyć, że dysponujemy opiniami wielu ekspertów (przyjmiemy, że ich liczba jest równa m). Jeżeli każdy ekspert dokona oceny wszystkich obiektów, to na podstawie (m x n) ocen

$$g_{ik} \quad i = 1, \ldots, n \; ; \; k = 1, \ldots, m \tag{13}$$

będzie można określić

$$\tilde{r}_{ijk} = \exp \; \overline{\gamma}\left(g_{ik} - g_{jk}\right) \quad \text{lub} \quad \tilde{r}_{i\,i+s\,k} = \exp \; \overline{\gamma}\left(g_{ik} - g_{i+s\,k}\right) \tag{14}$$

$$i = 1, \ldots, n - 1 \; ; \; s = 1, \ldots, n - i$$

Argument funkcji F występującej w wyrażeniu (11) będzie więc można zapisać w postaci:

$$\ln\left(\tilde{r}_{i\,i+s\,k} - \ln w_i + \ln w_{i+s}\right) \tag{15}$$

Jeżeli przyjąć założenie (12), to zadanie wyznaczenia wag w_i ($i = 1, \ldots, n$) sprowadzi się do wyznaczenia rozwiązania następującego zadania optymalizacyjnego:

$$\min_{w_i\,(i=1,\dots,n)} W \tag{16}$$

gdzie:

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-i} \sum_{k=1}^{m} \left[\ln \tilde{r}_{i\,i+s\,k} - \ln w_i + \ln w_{i+s} \right]^2 \tag{17}$$

Zadanie minimalizacji (16) traktujemy jako zadanie bez ograniczeń, a więc sprowadza się ono do wyznaczenia w_i $(i = 1, \dots, n)$ z układu równań:

$$\frac{\partial W}{\partial w_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n \tag{18}$$

Wyrażenie $\frac{\partial W}{\partial w_l}$ $(l = 1, \dots, n)$ można zapisać w postaci jak następuje [8]:

$$\frac{\partial W}{\partial w_l} = 2\,(w_l)^{-1} \left[\ln \frac{\prod_{j=1}^{l-1} R_{jl}}{\prod_{s=1}^{n-l} R_{l\,l+s}} \cdot \frac{(w_l)^{m(l-1+n-l)}}{\prod_{j=1}^{l-1} (w_j)^m \cdot \prod_{s=1}^{n-l} (w_{l+s})^m} \right] \tag{19}$$

$$\text{gdzie} \quad \prod_{k=1}^{m} \tilde{r}_{jlk} = R_{jl} \tag{20}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\prod_{j=1}^{l-1} (w_j)^m \cdot \prod_{s=1}^{n-l} (w_{l+s})^m = \left[\prod_{j=1}^{n} (w_j)^m \right] \cdot (w_l)^{-m} \tag{21}$$

mamy

$$\frac{\partial W}{\partial w_l} = 2\left(w_l^{-1} \right) \left[\ln \frac{\prod_{j=1}^{l-1} R_{jl}}{\sum_{s=1}^{n-l} R_{l\,l+s}} \cdot \frac{(w_l)^{mn}}{\prod_{j=1}^{n} (w_j)^m} \right] \tag{22}$$

Z warunku (18) oraz założenia, że $w_l \neq 0$ $(l = 1, \dots, n)$ otrzymujemy

$$\frac{\prod_{s=1}^{n-l} R_{l\,l+s}}{\prod_{j=1}^{l-1} R_{jl}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{w_j}{w_l^n} \right)^m = 1 \tag{23}$$

W podobny sposób z warunku $\dfrac{\partial W}{\partial w_{l+b}} = 0\,, \;\; l = 1\,,\ldots,n\,; \;\; b = -1 + 1\,,\ldots, n - 1\,;$

$l + b \leq n$, mamy:

$$\frac{\sum_{s=1}^{n-(l+b)} R_{l+b\,l+b+s}}{\sum_{j=1}^{l+b-1} R_{jl+b}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{w_j}{w_{l+b}^n} \right)^m = 1 \tag{24}$$

Dzieląc zależność (23) przez równanie (24), otrzymujemy

$$\frac{\prod_{s=1}^{n-l} R_{l\,l+s} \cdot \prod_{j=1}^{l+b-1} R_{j\,l+b}}{\prod_{j=1}^{l-1} R_{jl} \cdot \prod_{s=1}^{n-(l+b)} R_{l+b\,l+b+s}} \cdot \left(\frac{w_{l+b}}{w_l} \right)^{mn} = 1 \tag{25}$$

Skąd

$$\left(\frac{w_{l+b}}{w_l} \right)^{mn} = \frac{\prod_{j=1}^{l-1} R_{jl} \prod_{s=1}^{n-(l+b)} R_{l+b\,l+b+s}}{\prod_{s=1}^{n-l} R_{l\,l+s} \cdot \prod_{j=1}^{l+b-1} R_{j\,l+b}} \tag{26}$$

Jeśli dla uproszczenia przyjąć $l = 1$, to przy założeniu $\prod_{j=r}^{r-a} R_{jl} = 1 \quad a \geq 1$

$$\left(\frac{w_{1+t}}{w_1} \right)^{mn} = \frac{\prod_{s=1}^{n-(t+1)} R_{1+t\;1+t+s}}{\prod_{s=1}^{n-1} R_{1\;1+s} \cdot \prod_{j=1}^{t} R_{j\,1+t}} =$$

$$= \prod_{s=1}^{n-(t+1)} R_{1+t\,1+t+s} \cdot R_{1\,1+t}^{-2} \cdot \prod_{j=2}^{t} R_{j\,1+t}^{-1} \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq t}}^{n-1} R_{1\,1+s}^{-1} \qquad t = 1,\ldots,n-1 \tag{27}$$

Z przekształcenia zależności (27) wynika:

$$w_{1+t} = \left[\prod_{s=1}^{n-(t+1)} R_{1+t\,1+t+s}^{\frac{1}{mn}} \cdot R_{1\,1+t}^{-\frac{2}{mn}} \cdot \prod_{j=2}^{t} R_{j\,1+t}^{-\frac{1}{mn}} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} R_{1\,1+s}^{-\frac{1}{mn}} \right] \cdot w_1$$

$$t = 1,\ldots,n-1 \tag{28}$$

Wprowadzimy dodatkowy warunek, że suma wag obiektów w_i $(i = 1,\ldots,n)$ jest równa jedności, to znaczy

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{29}$$

Uwzględniając zależność (28), otrzymamy

$$w_{1+t} = \frac{\prod_{s=1}^{n-(t+1)} R_{1+t\,1+t+s}^{\frac{1}{mn}} \cdot R_{1\,1+t}^{-\frac{2}{mn}} \cdot \prod_{j=2}^{t} R_{j\,1+t}^{-\frac{1}{mn}} \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq t}}^{n-1} R_{1\,1+s}^{-\frac{1}{mn}}}{1 + \sum_{u=1}^{n-1} \prod_{s=1}^{n-(u+1)} R_{1+u\,1+u+s}^{\frac{1}{mn}} \cdot R_{1\,1+u}^{-\frac{2}{mn}} \cdot \prod_{j=2}^{u} R_{j\,1+u}^{-\frac{1}{mn}} \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq u}}^{n-1} R_{1\,1+s}^{-\frac{1}{mn}}} \tag{30}$$

We wzorze (30) występują wyrażenia o postaci $(R_{ij})^{\frac{d}{mn}}$, gdzie d przyjmuje wartości ze zbioru $\{1, -1, -2\}$.

Przykład 1

Załóżmy, że oceny trzech obiektów przygotowane przez jedenastu ekspertów - podawane w skali (4-10) - są jak następuje:

Eksperci 1-5	*Eksperci 6-8*	*Eksperci 9-11*
$g_{1(1-5)} = 10$	$g_{1(6-8)} = 10$	$g_{1(9-11)} = 10$
$g_{2(1-5)} = 6$	$g_{2(6-8)} = 4$	$g_{2(9-11)} = 4$
$g_{3(1-5)} = 4$	$g_{3(6-8)} = 6$	$g_{3(9-11)} = 4$

Aby wyznaczyć wagi w_1, w_2 i w_3, należy posłużyć się wzorem (30). Zilustrujemy wpływ wartości współczynnika $\overline{\gamma}$ na wartości wag wyznaczając wagi w_1, w_2 i w_3, dla najczęściej stosowanych wartości $\overline{\gamma}$.

W tablicy 1 podano wartości wag oraz wielkości $\tilde{r}_{12}$, $\tilde{r}_{13}$, $\tilde{r}_{23}$ odpowiadających poszczególnym wartościom $\overline{\gamma}$. Z tablicy tej wynika, jak wielki wpływ na wartości wag i zależności między nimi ma dobór wartości $\overline{\gamma}$.

Tablica 1

$\overline{\gamma}$	w_1	w_2	w_3	$\tilde{r}_{12}$	$\tilde{r}_{13}$	$\tilde{r}_{23}$	$\frac{\tilde{r}_{12\overline{\gamma}}}{\tilde{r}_{12\overline{\gamma}=1}}$	$\frac{\tilde{r}_{13\overline{\gamma}}}{\tilde{r}_{13\overline{\gamma}=1}}$	$\frac{\tilde{r}_{23\overline{\gamma}}}{\tilde{r}_{23\overline{\gamma}=1}}$
1,000	0,990	0,006	0,004	165,000	247,500	1,500	1	1	1
0,693	0,950	0,028	0,022	33,929	43,182	1,273	0,206	0,174	0,849
0,500	0,874	0,069	0,057	12,667	15,333	1,211	0,077	0,062	0,807
0,347	0,756	0,130	0,114	5,815	6,632	1,140	0,035	0,027	0,760
0,250	0,651	0,182	0,167	3,577	3,898	1,090	0,022	0,016	0,727
0,173	0,554	0,230	0,216	2,409	2,565	1,065	0,015	0,010	0,710
0,125	0,491	0,260	0,249	1,888	1,972	1,044	0,011	0,008	0,696
0,087	0,436	0,292	0,272	1,493	1,603	1,074	0,009	0,006	0,716

Przykład 2

Założymy, że oceny trzech obiektów przygotowane przez jedenastu ekspertów - podawane w skali (4-6) - są jak następuje:

Eksperci 1-5

$g_{1(1-5)} = 6$
$g_{2(1-5)} = 5$
$g_{3(1-5)} = 4$

Eksperci 6-8

$g_{1(6-8)} = 6$
$g_{2(6-8)} = 4$
$g_{3(6-8)} = 5$

Eksperci 9-11

$g_{1(9-11)} = 6$
$g_{2(9-11)} = 4$
$g_{3(9-11)} = 4$

W tablicy 2 podano wartości wag oraz wielkości $\tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}, \tilde{r}_{23}$ odpowiadających poszczególnym wartościom $\tilde{\gamma}$.

Tablica 2

$\bar{\gamma}$	w_1	w_2	w_3	$\tilde{r}_{12}$	$\tilde{r}_{13}$	$\tilde{r}_{23}$	$\frac{\tilde{r}_{12\bar{\gamma}}}{\tilde{r}_{12\bar{\gamma}=1}}$	$\frac{\tilde{r}_{13\bar{\gamma}}}{\tilde{r}_{13\bar{\gamma}=1}}$	$\frac{\tilde{r}_{23\bar{\gamma}}}{\tilde{r}_{23\bar{\gamma}=1}}$
1,000	0,719	0,153	0,128	4,699	5,617	1,195	1	1	1
0,693	0,608	0,208	0,184	2,923	3,304	1,130	0,662	0,588	0,946
0,500	0,531	0,245	0,224	2,167	2,371	1,094	0,461	0,422	0,915
0,347	0,469	0,274	0,257	1,721	1,825	1,066	0,364	0,325	0,892
0,250	0,429	0,292	0,279	1,469	1,538	1,047	0,313	0,274	0,876
0,173	0,399	0,305	0,296	1,308	1,348	1,030	0,278	0,240	0,862
0,125	0,380	0,314	0,306	1,210	1,242	1,026	0,258	0,221	0,859
0,087	0,366	0,320	0,315	1,144	1,162	1,016	0,243	0,207	0,850

Tablica 3

$\bar{\gamma}$	$\frac{w_1^{III}}{w_1^{IV}}$	$\frac{w_2^{III}}{w_2^{IV}}$	$\frac{w_3^{III}}{w_3^{IV}}$
1,000	1,377	0,039	0,031
0,693	1,563	0,135	0,120
0,500	1,646	0,282	0,254
0,347	1,612	0,474	0,444
0,250	1,517	0,623	o,599
0,173	1,388	0,754	0,730
0,125	1,292	0,828	0,814
0,087	1,191	0,913	0,863

Różnica między przykładami 1 i 2 polega na zmianie zakresu ocen ekspertów. W przykładzie 1 jest on równy (4-10), a w przykładzie 2 jest mniejszy i wynosi (4-6).

W tablicy 3 podano stosunek wag odpowiadających tym dwu zakresom zmienności ocen. Wagi wyznaczone dla pierwszego zakresu zmienności oznaczono przez w^{III}, a dla drugiego w^{IV}.

Z porównań danych zawartych w tablicy 3 wynika, że kilkukrotne (w rozpatrywanym przypadku trzykrotne) zmniejszenie zakresu zmienności ocen może prowadzić - przy większych wartościach $\overline{\gamma}$ - do kilkudziesięciokrotnej zmiany wartości wag. Słuszność tego wniosku w przypadku ogólnym potwierdza wzór (6). Z przedstawionych porównań wynika, jak istotne jest zagadnienie doboru zakresu zmienności ocen.

3. KOMPUTEROWA REALIZACJA ALGORYTMU WYZNACZANIA WAG OBIEKTÓW

Na podstawie rozważań przedstawionych w poprzednich punktach opracowano programy komputerowe umożliwiające wyznaczanie wag obiektów. Zostały one napisane w języku PASCAL 6.0. Na ich podstawie można wyznaczyć wagi liczbowe dla maksymalnie 128 obiektów i 128 ekspertów przy zmieniających się współczynnikach skali $\overline{\gamma}$ (od 0,173 do 1,0). Programy te będą włączone do opracowywanego w IBS PAN systemu MEDIATOR wyznaczającego oceny grupowe na podstawie opinii zaspołu ekspertów. Przyjmuje się, że opinie te mogą być podane zarówno w postaci uporządkowań, jak i ocen liczbowych.

4. UWAGI KOŃCOWE

Z przeprowadzonych rozważań teoretycznych oraz przedstawionych przykładów liczbowych wyraźnie wynika, że przyjęcie założenia o wykładniczej zależności wag obiektów od ocen obiektów podanych przez ekspertów powoduje, że na wartości tych wag w sposób istotny wpływają: a) zakres zmienności ocen ekspertów; b) wartości współczynników $\overline{\gamma}$ przyjętych przy wyznaczaniu wag obiektów.

Porównanie wag obiektów obliczonych przy różnych założeniach musi więc być prowadzone z dużą ostrożnością. Przy tych samych bowiem ocenach ekspertów można uzyskać - przyjmując inne założenia - istotne różniące się wyniki.

Przedstawione w pracy zależności umożliwiają bezpośrednie wyznaczenia wartości wag. Należy jednak podkreślić konieczność prowadzenia obliczeń z odpowiednio dużą dokładnością.

Przedstawiony w pracy algorytm wyznaczania wag obiektów można bezpośrednio zastosować w przypadku, gdy oceny obiektów są dokonywane z uwzględnieniem kilku kryteriów. Szczegółowe rozważania dotyczące tego zadania oraz wzory pozwalające wyznaczyć wartości wag podano w opracowaniu [8]. W pracy [9] omówiono zastosowanie tego podejścia do wyznaczania istotności kierunków badawczych.

W przypadkach praktycznego stosowania przedstawionej metody należy wyczerpująco przedyskutować z ekspertami biorącymi udział w sesji konsekwencje wyboru danego zakresu zmienności ocen oraz przyjęcia określonych wartości współczynnika $\overline{\gamma}$.

LITERATURA

[1] Birnbaum M.H.: Controversies in psychological measurement. W: Wegener B. (red.). Social Attitudes and Phsycho-Physical Measurements. Hillsdale, New York, 1982.

[2] Cichocki K., Wagner D.: Zastosowanie metod grupowych do analizy i wyboru scenariuszy rozwoju gospodarczego. W: Modele i decyzje (red. Z.Nahorski, M.Chudy, A.Straszak), PTBOiS, IBS PAN, WAT, Warszawa 1991.

[3] Lootsma F.A.: REMBRANDT system for multicriteria decision analysis via pairwise comparisons or direct ratings. Report 92-05, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1992.

[4] Lootsma F.A.: Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART. Report 93-37, Faculty of Technical Matchematics and Informatics, Delft University of Technology, 1993.

[5] Lootsma F.A.: Context - related scaling of human judgement in the multiplicative AHP, SMART and Electre. Report 93-38, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1993

[6] Torgerson W.S.: Distances and ratios in psycho-physical scaling. Acta Psychologica XIX, 1961.

[7] Veit C.T.: Ratio and subtractive processes in psycho-physical judgement. Journal of Experimental Psychology: General 107, 1978.

[8] Wagner D.: Wyznaczanie wag obiektów na podstawie liczbowych ocen obiektów. Opracowanie wewnętrzne IBS PAN. Warszawa, grudzień 1993.

[9] Wagner D.: Uporządkowanie zbioru obiektów w skali liczbowej. Zastosowanie do oceny istotności kierunków badawczych. Biuletyn IBS PAN, nr 2/czerwiec 1994.

ISBN 83-85847-85-5

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt

z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 36-19-01 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl