Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:
Zbigniew Nahorski
Marian Chudy
Andrzej Straszak

OPTYMALIZACJA

Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

OPTYMALIZACJA

ZADANIA, METODY, ALGORYTMY

Redaktorzy

Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak

WARSZAWA 1991

OPTYMALIZACJA:
Zadania, metody, algorytmy
PTBOiS, Warszawa 1991.

UOGÓLNIONE TWIERZENIE BLACKWELLA

Ryszard Antkiewicz
Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Streszczenie: Znane z teorii odnowy twierdzenie Blackwella orzeka, że oczekiwana liczba odnów w przedziale o ustalonej długości jest asymptotycznie wprost proporcjonalna do długości tego przedziału, a odwrotnie proporocjonalna do oczekiwanego czasu pracy odnawianych elementów. W referacie przedstawiono sformułowanie i dowód twierdzenia, zgodnie z którym, zależność powyższa zachodzi również w przypadku, gdy długość przedziału, w którym zlicza się odnowy, jest zmienną losową.

1. Wstęp.

Jednym z problemów rozważanych w teorii odnowy są asymptotyczne własności procesu i funkcji odnowy. Istnieje wiele twierdzeń określających te własności. Jednym z nich jest twierdzenie Blackwella [1],[3], zgodnie z którym oczekiwana liczba odnów w przedziale o ustalonej długości jest asymptotycznie wprost proporcjonalna do długości tego przedziału i odwrotnie proporcjonalna do oczekiwanego czasu pracy odnawianych elementów. Zanim przedstawione zostanie dokładne sformułowanie tego twierdzenia i jego uogólnienia wprowadzimy kilka niezbędnych oznaczeń. Niech $\{S_n\}, n=1,2,..$ będzie ciągiem zmiennych losowych, których wartości oznaczają chwile kolejnych odnów, a zatem będzie to oznaczenie strumienia odnów. Niech $N(t)=\max\{n:S_n<t\}$, zatem $N(t)$ jest procesem odnów tzn. dla ustalonej chwili t jego wartość oznacza liczbę odnów w przedziale $[0,t)$. Przez θ oznaczmy oczekiwany czas pracy odnawianych elementów czyli, $\theta = E\{S_{n+1} - S_n\}$, $n = 1,2,...$ .Wartość oczekiwana procesu odnów $N(t)$ oznaczymy jako $H(t)$ wobec tego $H(t) = E\{N(t)\}$. Wykorzystując wprowadzenie oznaczenia możemy przytoczyć treść twierdzenia Blackwella:

Twierdzenie 1 [1, str.172].

Jeżeli ogólny strumień odnowy jest nieokresowy, to dla każdego $h > 0$ zachodzi relacja:

$$\lim_{t\to\infty} (H(t+h)-H(t)) = \frac{h}{\Theta} \tag{1}$$

Jeśli $\Theta = \infty$ to granica ta jest równa 0.
W praktyce pojawiło się pytanie czy zależność określona w powyższym twierdzeniu jest spełniona również wówczas, gdy długość przedziału określona jako h jest zmienną losową. Odpowiedź na to pytanie stanowi treść zmodyfikowanego twierdzenia Blackwella. W dalszym ciągu referatu przedstawione zostaną sformułowanie i dowód tej modyfikacji.

2. Sformułowanie i dowód zmodyfikowanego twierdzenia Blackwella.

Własności asymptotyczne oczekiwanej liczby odnów w przedziale o losowej długości określa następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Jeśli w ogólnym strumieniu odnów odstępy czasu między odnowami mają gęstość rozkładu prawdopodobieństwa f spełniająca warunki:

$$\int_0^\infty f^p(t)dt < +\infty \quad \text{dla pewnego } p>1 \text{ i } \int_0^\infty tf(t)dt < +\infty$$

oraz W jest nieujemną zmienną losową niezależną od strumienia odnów i $E(W) < +\infty$ to zachodzi następująca zależność:

$$\lim_{t\to\infty} E\,(N(t+W)-N(t)) = \frac{E(W)}{\Theta} \tag{2}$$

Dowód:
Wprowdzmy dodatkowe oznaczenia:

$h(t)= \frac{d}{dt} H(t)$; $h(t)$ – gęstość odnowy:

$M(t,W) = N(t+W)-N(t)$.

Wartość procesu $M(t,W)$ dla ustalonego t oznacza liczbę odnów w przedziale $[t,t+W)$, gdzie W jest nieujemną zmienną losową.

Chcąc wykazać prawdziwość zależności (2) wyznaczymy wartość $E\{M(t,W)\}$, a następnie zbadamy jej własności asymtotyczne dla $t\to\infty$.

Do wyznaczenia $E\{M(t,W)\}$ konieczne jest obliczenie rozkładu chwilowego procesu $N(t)$. Z przyjętych określeń i założeń wynika, że dla $n\geq 1$ spełniona jest zależność:

$$P\{N(t+W)=n\} = P\{S_n<t+W,\ S_{n+1} \geq t+W\}=P\{S_n<t+W\}+$$

$$-\ P\{S_{n+1}<t+W\}=\int_0^\infty P\{W >x-t\}dK_n(x)-\int_0^\infty P\{W >x-t\}dK_{n+1}(x)=$$

$$= \int_0^\infty P\{W>x-t\}d(K_n(x)-K_{n+1}(x)),$$

gdzie $K_n(x)=P\{S_n<x\}$, $n=1,2,\ldots$.

Wobec tego, że funkcja $P\{W>x-t\}$ jest funkcją monotoniczną, względem x, a zatem posiada co najwyżej przeliczalną liczbę punktów nieciągłości [2], funkcje K_n i K_{n+1} są ciągłe można stwierdzić, że:

$$\int_0^\infty P\{W = x-t\}dK_n(x) = 0$$

Biorąc pod uwagę ten fakt otrzymujemy:

$$(3)\quad P\{N(t+W)=n\} = \int_0^\infty \bar{F}_W(x-t)d(K_n(x)-K_{n+1}(x)),\ n = 1,2,\ldots,$$

gdzie

$$\bar{F}_W(t)=P\{W\geq t\}.$$

Zatem:

$$E\{N(t+W)\}= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot P\{N(t+W)=n\}= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \int_0^\infty \bar{F}_W(x-t)d(K_n(x)-K_{n+1}(x))=$$

$$= \int_0^\infty \bar{F}_W(x-t)d\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(K_n(x)-K_{n+1}(x))\Big) = \int_0^\infty \bar{F}_W(x-t)dH(x).$$

Uwzględniając określenie $M(t,W)$ otrzymujemy:

$$E\{M(t,W)\}=E\{N(t+W)-N(t)\}=E\{N(t+W)\}-H(t)=\int_0^\infty \bar{F}_v(x-t)dH(x)+$$

$$-H(t) = \int_0^t \bar{F}_v(x-t)dH(x)+\int_t^\infty \bar{F}_v(x-t)dH(x)-H(t) = H(t) +$$

$$+\int_t^\infty \bar{F}_v(x-t)dH(x)-H(t) = \int_t^\infty \bar{F}_v(x-t)dH(x).$$

W powyższych obliczeniach uwzględniono fakt, że $\bar{F}_v(x)=1$ dla $x \le 0$.

Dokonując dalej podstawienia $y = x-t$ uzyskujemy ostatecznie zależność:

$$(4) \qquad E\{M(t,W)\} = \int_0^\infty \bar{F}_v(y)dH(y+t) = \int_0^\infty \bar{F}_v(y)h(y+t)dy$$

Przyjmijmy, że $h_s(y) = \frac{1}{\Theta}$ oraz $\bar{M} = \int_0^\infty \bar{F}_v(y)h_s(y)dy = \frac{E\{W\}}{\Theta}$.

Funkcję h_s można interpretować jako gęstość odnowy a $\bar{M}$ oczekiwaną liczbę odnów w przedziale $[t,t+W)$ dla stacjonarnego strumienia odnów.

Pokażmy dalej, że $\lim_{t\to\infty} E\{M(t,W)\}=\bar{M}$.

W tym celu musimy udowodnić, że funkcja $g(t,y)=h(y+t)$ dla $y\in[0,\infty)$ spełnia warunek:

$$(5) \qquad g(t,y) \rightrightarrows h_s(y)$$

gdzie $\rightrightarrows$ oznacza zbieżność jednostajną.

Z założenia, że $\int_0^\infty f^p(t)dt < +\infty$ dla pewnego $p > 1$

wynika, że [3]: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{\Theta}$.

Wynika stąd, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{t_0(\varepsilon)} \ \bigwedge_{t>t_0} \left|h(t) - \frac{1}{\Theta}\right| < \varepsilon$$

zatem

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{t_o(\varepsilon)}\ \bigwedge_{t>t_o}\ \bigwedge_{y\geq 0} \left|h(t+y)-\frac{1}{e}\right|<\varepsilon$$

czyli

$$\text{(5A)}\qquad \bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{t_o(\varepsilon)}\ \bigwedge_{t>t_o}\ \bigwedge_{y\geq 0} |g(t,y)-h_s(y)|<\varepsilon$$

a więc $g(t,y) \underset{t\to\infty}{\rightrightarrows} h_s(y)$ dla $y\in[0,\infty)$.

Wobec tego

$$|E(M(t,W)-\bar{M}|=|\int_0^\infty \bar{F}_V(y)h(y+t)dy-\int_0^\infty \bar{F}_V(y)h_s(y)dy|\leq$$

$$\leq \int_0^\infty \bar{F}_V\ (y)\,|h(y+t)-h_s(y)|dy$$

Weźmy $\varepsilon>0$ oraz $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{E(W)}$. Z warunku (5A) wynika, że istnieje $t_o(\varepsilon_1)$ takie, że (5A) jest spełniony zatem

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{t_o(\varepsilon_1)}\ \bigwedge_{t>t_o} \int_0^\infty \bar{F}_V(y)\,|h(y+t)-h_s(y)|dy < \int_0^\infty \bar{F}_V(y)\varepsilon_1 dy =$$

$$= \varepsilon_1\cdot E(W) = \frac{\varepsilon}{E(W)}\cdot E(W) = \varepsilon,$$

czyli

$$\bigwedge_{\varepsilon}\ \bigvee_{t_o(\varepsilon)}\ \bigwedge_{t>t_o} |E(M(t,W))-\bar{M}| < \varepsilon$$

a to oznacza, że $\lim\limits_{t\to\infty} E(M(t,W))=\bar{M} = \dfrac{E(W)}{e}$,

czyli spełniona jest teza twierdzenia.

3. Uwagi końcowe.

Przedstawione w referacie twierdzenie jest modyfikacją twierdzenia Blackwella, ponieważ zawiera ono założenie o tym, że czasy pracy odnawianych elementów posiadają gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, a więc są ciągłymi zmiennymi losowymi. W twierdzeniu Blackwella zakłada się jedynie nieokresowość strumienia odnów.

Literatura

[1] Kopociński B.: Zarys teorii odnowy i niezawodności. PWN, Warszawa, 1973.

[2] Łojasiewicz S.: Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych. PWN, Warszawa, 1973.

[3] Sołowjew A.D.: Analityczne metody w teorii niezawodności. WNT, Warszawa, 1983.

ISBN 83-900412-1-9