

Polskie Towarzystwo Badań  
Operacyjnych i Systemowych  
Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk  
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:  
Zbigniew Nahorski  
Marian Chudy  
Andrzej Straszak



Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO  
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH  
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

# **O P T Y M A L I Z A C J A**

**ZADANIA, METODY, ALGORYTMY**

**Redaktorzy**

*Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak*

**WARSZAWA 1991**

## ROZMYTE WARTOŚCI PRAWDY W PROBLEMIE SZEREGOWANIA ZADAŃ

Tadeusz Witkowski

Instytut Maszyn i Urządzeń Rolniczych PW

ul. Jachowicza 2/4, 09-400 Płock

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono zastosowanie rozmytych wartości prawdy do oceny harmonogramów pracy maszyn w zależności od uszeregowania zadań na poszczególnych operacjach procesu produkcyjnego. Przedstawiono sposób randomizacji reguł priorytetowych i jego wykorzystanie przy konstrukcji optymalnych harmonogramów produkcji. Analizę wyników przeprowadzono na podstawie funkcji przynależności "uszeregowanie zadań od określonej kolejności do odwrotnej" z wykorzystaniem danych opisujących konkretną sytuację produkcyjną.

### 1. Wstęp

Jednym z podejść do rozwiązywania praktycznych zagadnień opracowania harmonogramów produkcji dającym zadowalające wyniki przy niewielkim nakładzie obliczeń są metody symulacyjne połączone z heurystyką.

Jak wiadomo, ogólne rozwiązanie problemu szeregowania zadań nie jest jeszcze znane. Rozpatrywany problem należy do grupy NP-zupełnych zagadnień, dla których trudno lub prawie niemożliwe jest odnalezienie uogólnionych algorytmów rozwiązania o wielomianowym nakładzie obliczeń.

Jeżeli do szeregowania zadań w procesie opracowania harmonogramów wykorzystuje się tylko jedną lub kilka reguł np. typu FIFO lub SIO, to okazuje się, szczególnie na średnich operacjach procesu produkcyjnego, że otrzymane wyniki są odwrotne do oczekiwanych. Była to jedna z głównych przyczyn opracowania algorytmów randomizowanych. Stosując randomizację można zmienić daną kolejność numerów partii

numeru operacji  $j$ , a więc mając  $Q(j)$ , możemy określić  $M$  konkretnych podziałów odcinka dla określenia  $M$  operacji.

Rozpatrzmy sposoby określania podziału odcinków, wykorzystywanych w procesie randomizacji reguł priorytetowych przy szeregowaniu zadań na poszczególnych operacjach procesu produkcyjnego.

W zbiorze  $\Sigma$   $n$  wszystkich permutacji o długości  $n$  można wyróżnić dwie "skrajne" permutacje, z których jedna jest permutacją tożsamościową  $J_T \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \dots, n\}$ , a druga ma postać  $J_{-T} \stackrel{\Delta}{=} \{n, n-1, \dots, 1\}$ . Z powodu częściowego uszeregowania zbioru  $\Sigma$   $n$ , nie możemy w sposób deterministyczny określać permutacje za pomocą zmiany wartości  $Q(j)$ . Istnieje jednak pewna możliwość częściowego sterowania tym wyborem, a mianowicie:

- a/ czym mniejsza jest wartość ilorazu  $Q$ , tym większe istnieje prawdopodobieństwo tego, że wybrana będzie permutacja  $B_j^R = J_T$ ,
- b/ przy  $Q = 1$  wszystkie odcinki mają jednakową długość i permutacja  $B_j^R$  będzie "absolutnie losowa",
- c/ czym większa wartość ilorazu  $Q$ , tym większe istnieje prawdopodobieństwo tego, że wybrana będzie permutacja  $B_j^R = J_{-T}$ .

Oznaczmy przez  $Q_{\min}$  i  $Q_{\max}$  graniczne znaczenia  $Q$  przy których z prawdopodobieństwem  $p$  /np.  $p = 0,95$ / będzie wybrana permutacja  $J_T$  i  $J_{-T}$ . Wykorzystując procedurę podziału odcinka na części można określić równania, za pomocą których znajduje się  $Q_{\min}$  i  $Q_{\max}$

$$(1 - Q_{\min}^n) / \prod_{i=1}^n (1 - Q_{\min}^i) = p, \quad (1)$$

$$(1 - Q_{\max}^{-1})^n / \prod_{i=1}^n (1 - Q_{\max}^{-i}) = p. \quad (2)$$

detali /zadań/ aż do odwrotnej. Typowa randomizacja daje ogólnie mówiąc zestaw harmonogramów, mniej lub bardziej zbliżonych do optymalnego, z których można wybrać najlepszy pod względem określonych kryteriów.

## 2. Randomizowany algorytm szeregowania zadań

Pod randomizacją rozumiemy złożenie dwóch permutacji

$$B_j^Q \stackrel{\Delta}{=} B_j^R \circ B_j$$

gdzie  $B_j^R$  jest permutacją losową generowaną metodą Monte Carlo, a  $B_j$  oznacza permutację zadań ustaloną przez regułę priorytetu. Na przykład, jeżeli  $B_j = (2, 3, 1, 4)$  i  $B_j^R = (4, 2, 1, 3)$ , to  $B_j^Q = (4, 3, 2, 1)$ .

Przyjęto kompleksową regułę priorytetową  $B_j$  o postaci

$$FIFO_j \rightarrow SIO_j \rightarrow SIO_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow SIO_M$$

gdzie reguła FIFO zwalnia zadanie, które zostało wcześniej dostarczone do wykonania, a reguła SIO zadanie, którego pracochłonność wykonania na wolnej maszynie jest najmniejsza. Powyższa postać reguły priorytetowej oznacza, że dla określenia priorytetu zadań na danej operacji stosuje się początkowo regułę  $FIFO_j$ , a następnie  $SIO_j$ . W przypadku niemożliwości określenia priorytetu na tej operacji za pomocą reguł  $FIFO_j$  oraz  $SIO_j$  porównuje się pracochłonności wykonania zadań na następnych operacjach procesu produkcyjnego przez wykorzystanie reguły  $SIO_{j+1}$  i t.d.

Przy konstrukcji permutacji losowej wykorzystuje się odcinek jednostkowy podzielony na części, których długości na początku jego podziału tworzą postęp geometryczny z ilorazem  $Q$ , zależnym od numeru operacji  $j$ . Poszczególne części odcinka, które odpowiadają kolejno wygenerowanym losowo liczbom, są usuwane, a ich numery tworzą permutację  $B_j^R$ , pozostałe zaś części odcinka są dosuwane jeden do drugiego /z prawej strony na lewą / i t.d. Wybór poszczególnych części odcinka, a więc odpowiadającej im liczby losowej odbywa się poprzez trafienie w niego liczby z generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym. Ponieważ  $Q$  zależy od



### Rozmyte wartości prawdy w szeregowaniu zadań

Na podstawie otrzymanych wyrażań można zauważyć, że przy jednakowych wartościach  $p$  otrzymane wartości  $Q_{\min}$  i  $Q_{\max}$  są wartościami wzajemnie odwrotnymi. Przy  $n=10$  i  $p=0,95$  na podstawie wzoru (1) otrzymujemy  $Q_{\min} = 0,006$ , a ze wzoru (2) wartość dla  $Q_{\max} = 173$ .

Taki prawie deterministyczny wybór permutacji nie jest konieczny dla każdej operacji, a często wystarczy tylko, aby ilorazy  $Q(j)$  przyjmowały wartości w pewnym zakresie  $Q_{\min} \leq Q(j) \leq Q_{\max}$ , przy  $1 \leq j \leq M$ .

Zakładamy, że permutacja zadań przy przejściu od  $j$ -ej do  $(j+1)$  operacji zmienia się stosunkowo płynnie, a także, że  $Q(j)$  traktowane jako funkcje  $j$ , są funkcjami ciągłymi o 1-2 przedziałach monotoności. W charakterze takich funkcji przyjmowane funkcje odcinkowo-liniowe, odcinkowo-wykładnicze i funkcje kwadratowe. W zależności od charakteru krzywej  $Q(j)$  i sposobu jej zmiany opracowane kilka algorytmów określania podziału odcinków.

W algorytmach tych w macierzy operacji technologicznych  $\|O_{ij}\|$ , której wiersze przedstawiają wspólne operacje, wybierane są trzy "bazowe" operacje: pierwsza  $j=1$ , średnia  $j_{\text{SR}}$  oraz ostatnia  $j=M$ , gdzie  $j_{\text{SR}} = M/2$  dla  $M$  parzystych i  $(M+1)/2$  dla  $M$  nieparzystych. Na tych operacjach w określony sposób określona jest trójka

$$\{Q_1(1), Q_1(j_{\text{SR}}), Q_1(M)\} \triangleq Q_1, \text{ gdzie } l = 1, l_{\text{max}}.$$

Dla pośrednich operacji  $1 < j < j_{\text{SR}}$  oraz  $j_{\text{SR}} < j < M$  wartości  $Q(j)$  są określane za pomocą interpolacji liniowej lub wykładniczej. W celu utworzenia bardziej równomiernej dyskretyzacji na operacjach bazowych  $j \in \{1, j_{\text{SR}}, M\}$  zamiast wartości  $Q$  są wybierane wartości  $q$  z zakresu  $[q_{\min}, q_{\max}]$ , gdzie  $q_{\min} = l_1 Q_{\min}$ ,  $q_{\max} = l_2 Q_{\max}$  t.j. wybierana jest uporządkowana trójka  $q_1 = \{q_1(1), q_1(j_{\text{SR}}), q_1(M)\} \in \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3$ , spośród  $N^3$  wariantów, przy czym  $\Theta_1$  jest pewną dyskretyzacją przedziału  $[q_{\min}, q_{\max}]$  zawierającą  $N$  punktów rozdzielających odcinki. Dyskretyzację można wykonać przez podział przedziału  $[q_{\min}(j), q_{\max}(j)]$  na równe odcinki lub

za pomocą losowego wyboru  $N$  punktów dla każdej z trzech dyskretyzacji  $O_1$ . Tym razem możliwe jest także utworzenie  $l_{\max} = N^3$  wariantów. Wykorzystując dyskretyzację przedziałów  $[q_{\min}, q_{\max}]$  na operacjach bazowych, dla pozostałych wartości konstruuje się funkcję  $q(j)$ , podobnie jak poprzednio funkcję  $Q(j)$ . W przypadku jednakowych wartości  $q_{\min}$  i  $q_{\max}$  na operacjach bazowych, pole ograniczone funkcją  $q(j)$  ma kształt prostokąta, a dla różnych wartości  $q_{\min}$ ,  $q_{\max}$  pole przybiera postać sześciokąta.

Szczegółowy opis algorytmów do określania podziału odcinków dla procesu randomizacji przedstawiono w [1]. Jeden z tych algorytmów ma tę właściwość, że funkcje  $q(j)$  całkowicie wypełniają swoimi wartościami odcinek  $[q_{\min}, q_{\max}]$ , zaś inny algorytm w odróżnieniu od przedstawionego wyżej jest oparty na wykorzystaniu funkcji parabolicznej.

Wszystkie opracowane algorytmy mają zastosowanie do szerokiej klasy zadań harmonogramowania, pozwalają otrzymać suboptymalne rozwiązania, z których wybiera się najlepsze, nie wymagają dużego nakładu obliczeń oraz są wygodne do pracy w trybie konwersacyjnym.

## 2. Ocena harmonogramów z wykorzystaniem rozmytych wartości prawdy i zmiennych lingwistycznych

Zazwyczaj opracowywana metoda oraz program komputerowy są doskonalone na zadaniach testowych. W przypadku algorytmu heurystycznego, który nie gwarantuje dokładnego rozwiązania, oraz z powodu niemożliwości sprawdzenia optymalności znalezionego rozwiązania, pozostaje testowanie algorytmu na wybranych zadaniach.

W procesie testowania opracowanych algorytmów wprowadzono pojęcie sześciokąta "ramowego" dla funkcji  $q(j)$ . Jeżeli połączyć krzywą trzy punkty odpowiadające  $q_{\min}$  i  $q_{\max}$  na operacjach bazowych, to wraz z dwiema rzędnymi tworzą one sześciokąt "ramowy", który zawiera wszystkie możliwe w danym wariancie funkcje  $q(j)$ . Algorytm jest określony przez swoje parametry, w tym również przez wartości granic dolnych  $q_{\min}$  i górnych  $q_{\max}$ . Czym mniejszy

### Rozmyte wartości prawdy w szeregowaniu zadań

obszar sześciokąta ramowego, tym mniejszy jest w większości przypadków podzbiór harmonogramów znacznie różniących się wartościami kryterium optymalizacji /w danym przypadku sumarycznego minimalnego czasu wykonania wszystkich zadań/, który może wygenerować określony algorytm. Przyjmujemy, że jeżeli ten podzbiór planów zawiera większy procent harmonogramów, które posiadają mniejsze wartości kryterium optymalizacji  $F$ , to algorytm jest bardziej efektywny.

W eksperymencie symulacyjnym wybrano następujące wartości  $q$  na poszczególnych operacjach bazowych przedstawione w tabl. 1 oraz tabl. 2.

Tablica 1. Wartości  $q(j)$  na operacjach bazowych 1 i M.

| nazwa zakresu | oznaczenie | dolna i górna granica |
|---------------|------------|-----------------------|
| niski         | N          | -5,28 ; -4,98         |
| średni        | S          | -0,01 ; 0,001         |
| wysoki        | W          | 4,09 ; 4,14           |
| najwyższy     | NW         | 5,13 ; 5,15           |

Tablica 2. Wartości  $q(j)$  na operacji bazowej  $J_{4R}$

| nazwa zakresu | oznaczenie | dolna i górna granica |
|---------------|------------|-----------------------|
| niską         | N          | -5,12 ; -4,96         |
| szeroki       | Sz         | -0,82 ; 0,18          |
| wąski         | Ws         | -0,01 ; 0,001         |
| wysoki        | Wk         | 4,09 ; 4,14           |
| najwyższy     | NW         | 5,13 ; 5,15           |

W wyniku eksperymentu uporządkowano zbiór algorytmów pod względem wartości kryterium  $F$  uzyskanej dla najlepszego harmonogramu spośród harmonogramów generowanych każdym algorytmem przy jednakowej ilości prób  $N^3$ . Ta kolejność przedstawia się następująco: pojedynczy harmonogram losowy, otrzymany metodą Monte Carlo ;



harmonogramy otrzymane za pomocą reguły  $LIFO_j \rightarrow LIO_j$  i niektórych odmian reguły FIFO oraz SIO; najlepszy harmonogram z pierwszych dziesięciu harmonogramów otrzymanych metodą Monte Carlo; harmonogramy otrzymane za pomocą kompleksowej reguły  $FIFO_j \rightarrow SIO_j \rightarrow SIO_{j+1} \rightarrow \dots$ ; metoda Monte Carlo przy parametrach  $q_{\min} = -0,01$  i  $q_{\max} = 0,001$  na wszystkich operacjach bazowych; randomizowane reguły priorytetów  $FIFO_j \rightarrow SIO_j \rightarrow SIO_{j+1}$  z sześciokątem ramowym typu "N Ws N" lub "N Sz N".

Ze wszystkich możliwych uporządkowanych kombinacji, w eksperymencie wykorzystuje się te wartości zakresów  $q$  na operacjach 1-sj,  $j_{GR}$ , M, które uwzględniają poglądy o zastosowaniu reguł priorytetowych na różnych etapach procesu produkcyjnego, przy przyjętym kryterium optymalizacji. Ma to na celu przede wszystkim skrócenie czasu eksperymentu symulacyjnego, w którym reguły określania sposobów randomizacji określa się następująco:

JEŻELI  $q(1) \in N \wedge q(j_{GR}) \in N \wedge q(M) \in N$ ,

TO algorytm typu  $FIFO_j \rightarrow SIO_j \rightarrow SIO_{j+1}$  ;

JEŻELI  $q(1) \in S \wedge q(j_{GR}) \in Ws \wedge q(M) \in S$ ,

TO algorytm Monte Carlo;

JEŻELI  $q(1) \in NW \wedge q(j_{GR}) \in NW \wedge q(M) \in NW$ ,

TO algorytm typu  $LIFO_j \rightarrow LIO_j \rightarrow LIO_{j+1}$  itp.

Zakładamy, że mamy określić najlepsze uszeregowania zadań do wykonania na podstawie przyjętego w pracy kryterium wyboru F. Niech będzie dane zdanie R o postaci "sposób randomizacji  $\{q(1), q(j_{GR}), q(M)\}$  reguł priorytetowych przy szeregowaniu zadań jest najlepszy przy przyjętym kryterium F". Temu zdaniu w zależności od parametrów sterujących  $q$  można przypisać odpowiednie rozmyte wartości prawdy [2].

Wprowadzamy określenie funkcji przynależności zbioru

### Rozmyte wartości prawdy w szeregowaniu zadań

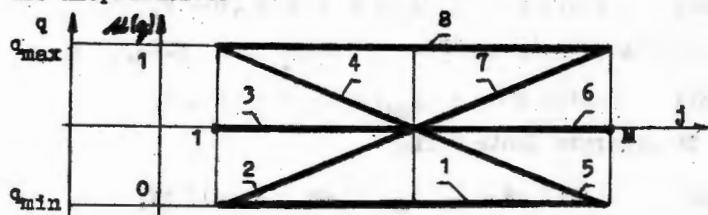
rozmytego "uszeregowanie zadań od kolejności określonej wstępnie  $J_T$  do kolejności odwrotnej do niej  $J_{-T}$ ", którego zmienne lingwistyczne mają postać:

{ "zgodne z  $J_T$ ", "bardzo bliskie do  $J_T$ ", "bliskie do  $J_T$ ", "dalekie do  $J_T$ ", "niezgodne z  $J_T$  i niezgodne z  $J_{-T}$ ", "dalekie do  $J_{-T}$ ", "bliskie do  $J_{-T}$ ", "bardzo bliskie do  $J_{-T}$ ", "zgodne z  $J_{-T}$ ", ... }.

Jeżeli przy wyborze wariantów randomizacji reguł priorytetowych /przy określonej strukturze danych rzeczywistych/ przyjąć wartości  $q$  przedstawione na rys. 1. tj.:

1.  $q_{\min}$ ,  $\forall j \in [1, M]$ ; 2. od  $q_{\min}$  do  $q_{\frac{M}{2}}$ ,  $\forall j \in [1, M/2]$ ;
3.  $q_{\frac{M}{2}}$ ,  $\forall j \in [M/2, M]$ ; 4. od  $q_{\max}$  do  $q_{\frac{M}{2}}$ ,  $\forall j \in [1, M/2]$ ;
5. od  $q_{\frac{M}{2}}$  do  $q_{\min}$ ,  $\forall j \in [M/2, M]$ ; 6.  $q_{\frac{M}{2}}$ ,  $\forall j \in [M/2, M]$ ;
7. od  $q_{\frac{M}{2}}$  do  $q_{\max}$ ,  $\forall j \in [M/2, M]$ ; 8.  $q_{\max}$ ,  $\forall j \in [1, M]$ ,

wtedy rozmyte wartości prawdy dla zdania  $R$  przyjmują następującą postać: 2 i 5 - bardzo prawdziwe; 2 i 7 oraz 3 i 6 - prawdziwe; 3 i 5 oraz 3 i 7 - dość prawdziwe; 4 i 5 oraz 1 - mało prawdziwe; 4 i 7 - nieprawdziwe; 8 - bardzo nieprawdziwe.



Rys. 1. Warianty struktury randomizacji w funkcji  $q(j)$ .

### Literatura

- [ 1 ] Witkowski T.: Metody i algorytmy optymalizacji kalendarnych planów dla cichow miękkosierijnego przodwstwa. IK AN USSR, Kijew 1983.
- [ 2 ] Kaoprzyk J.: Zbiory rozmyte w analizie systemowej. PWN Warszawa 1986.

**ISBN 83-900412-1-9.**