Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:
Zbigniew Nahorski
Marian Chudy
Andrzej Straszak

ZADANIA METODY

OPTYMALIZACJA

ALGORYTMY

Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

OPTYMALIZACJA

ZADANIA, METODY, ALGORYTMY

Redaktorzy

Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak

WARSZAWA 1991

OPTYMALIZACJA:
Zadania, metody, algorytmy
PTBOiS, Warszawa 1991.

ANALIZA POOPTYMALIZACYJNA DLA ZADANIA WYZNACZANIA W MATROIDZIE BAZY O MINIMALNEJ WADZE

Marek Libura
Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

Wiele problemów optymalizacyjnych w badaniach operacyjnych daje się przedstawić jako zadanie znajdowania bazy o minimalnej wadze dla odpowiednio wybranego matroidu. Podstawowy problem w analizie wrażliwości dla tego zadania polega na znalezieniu dla danej bazy dopuszczalnych zmian wag elementów matroidu nie naruszających jej optymalności. Takie maksymalne zmiany wag są nazywane tolerancjami elementów matroidu. Podany zostanie sposób wyznaczania tolerancji elementów oraz możliwość ich wykorzystania w innych zadaniach z zakresu analizy pooptymalizacyjnej związanych z optymalną bazą matroidu.

1. Wstęp

Liczne zadania optymalizacji kombinatorycznej mogą być sformułowane jako problem wyznaczania bazy o minimalnej wadze w odpowiednio wybranym matroidzie (patrz np. [2,6]). Niniejsza praca dotyczy analizy pooptymalizacyjnej dla tego problemu. Zakłada się, że baza optymalna jest znana i zadanie polega na wyznaczeniu maksymalnych zmian wag pojedynczych elementów matroidu nie naruszających optymalności tej bazy. Zmiany takie są nazywane tolerancjami elementów. Metoda wyznaczania tolerancji jest opisana w rozdziale 2. Rozdział 3 dotyczy pewnych właściwości tolerancji elementów matroidu oraz możliwości ich wykorzystania w zadaniach znajdowania bazy matroidu mającej minimalną wagę i spełniającej dodatkowe warunki dotyczące zawierania zadanych podzbiorów elementów.
Większość wyników przedstawiana jest w pracy jest bez dowodów. Są one podane wraz z obszerniejszą prezentacją omawianego tu materiału w [5,4]. Niezbędne definicje i fakty z teorii matroidów można znaleźć na przykład w [6,8].

2. Tolerancje elementów matroidu

Niech S będzie zbiorem skończonym i $|S| = m$. Parę $(M,\mathcal{I})$, gdzie $\mathcal{I}$ jest rodziną podzbiorów S, nazywamy matroidem na S, jeśli spełnione są następujące warunki: (i) $\emptyset \in \mathcal{I}$, (ii) Jeśli $X \in \mathcal{I}$ i $Y \subseteq X$, to $Y \in \mathcal{I}$, (iii) Dla $U,V \in \mathcal{I}$ gdzie $|U| = |V|+1$, istnieje $x \in U \setminus V$ taki, że $V \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Elementy rodziny $\mathcal{I}$ są nazywane zbiorami niezależnymi, pozostałe podzbiory S noszą nazwę zbiorów zależnych. Maksymalne w sensie zawierania zbiory niezależne nazywane są bazami matroidu, natomiast minimalne zbiory zależne - cyklami.

Oznaczmy symbolem $\mathcal{B}$ rodzinę baz matroidu M. Wiadomo, że dla $B \in \mathcal{B}$ i $y \in S \setminus B$ istnieje dokładnie jeden cykl $C(y,B)$ taki, że $C(y,B) \subseteq B \cup \{y\}$, nazywany cyklem fundamentalnym wyznaczonym w B przez element y. Dla $B \in \mathcal{B}$ i $x \in B$ zbiór $W(x,B) = \{y \in S \setminus B : x \in C(y,B)\}$ jest nazywany przekrojem fundamentalnym wyznaczonym pzez element x i bazę B.

Załóżmy, że każdemu elementowi przyporządkowana jest liczba rzeczywista $w(x)$ nazywana wagą elementu x. Waga $v(Q)$ zbioru $Q \subseteq S$ jest definiowana jest jako suma wag jego elementów.

Wiele zadań z zakresu badań operacyjnych można sformułować (wybierając odpowiedni matroid M i wagi jego elementów) jako następujący problem wyznaczania w matroidzie M bazy o minimalnej wadze

$$\min_{B \in \mathcal{B}} v(B) \tag{1}$$

Wiadomo, że problem (1) może być rozwiązany prostym algorytmem zachłannym (patrz np. [6]). Wymaga to $O(m \log m)$ operacji dla uporządkowania zbioru wag elementów oraz $O(m)$ badań niezależności podzbiorów.

Załóżmy teraz, że znana jest baza B° będąca rozwiązaniem optymalnym zadania (1). Podstawowy problem z zakresu analizy pooptymalizacyjnej (patrz np. [1]) polega na znalezieniu dla bazy B° takich zmian wag pojedynczych elementów matroidu, przy których B° pozostaje bazą optymalną. Maksymalny przyrost wagi elementu x (przy

ustalonych wagach pozostałych elementów) nie naruszający optymalności B^o będziemy oznaczać symbolem $t^+(x,B^o)$ i nazywać tolerancją górną elementu x. Podobnie, maksymalne zmniejszenie wagi $w(x)$, przy którym B^o jest nadal rozwiązaniem optymalnym zadania (1), nazwiemy tolerancją dolną elementu x i będziemy oznaczać symbolem $t^-(x,B^o)$.
Jeden ze sposobów wyznaczania tolerancji elementów matroidu polega na wyznaczeniu wartości optymalnych następujących zadań pomocniczych definiowanych dla $x \in S$:

$$v_x = \min \{ v(B) : B \in \mathcal{B},\ x \notin B \} \tag{2}$$

$$v^x = \min \{ v(B) : B \in \mathcal{B},\ x \in B \} \tag{3}$$

(Przy wyznaczaniu v_x stosujemy standardową konwencję polegającą na przyjęciu, że jeśli zadanie (2) jest sprzeczne, to jego wartość optymalna jest równa ∞.)
Zachodzą następujące proste fakty (patrz [5]):

Lemat 1.
Jeśli $x \in B^o$, to $t^-(x,B^o) = \infty$ oraz $t^+(x,B^o) = v_x - v(B^o)$.
Jeśli $x \in S \setminus B^o$, to $t^+(x,B^o) = \infty$ oraz $t^-(x,B^o) = v^x - v(B^o)$.

Wyznaczenie tolerancji dla pojedynczego elementu matroidu na podstawie powyższego lematu wymaga rozwiązania odpowiedniego zadania (2) albo (3). Można tego dokonać stosując prostą modyfikację algorytmu zachłannego i jeśli wagi elementów zostały wcześniej uporządkowane, to wymaga to $O(m)$ badań niezależności podzbiorów. Na wyznaczenie wszystkich tolerancji elementów przy tym podejściu potrzeba zatem $O(m^2)$ badań niezależności podzbiorów.
Inny sposób wyznaczania tolerancji elementów matroidu polega na skorzystaniu z następujących warunków koniecznych i dostatecznych optymalności bazy matroidu :

Lemat 2.
Następujące warunki są równoważne:
(i) B° jest bazą o minimalnej wadze dla matroidu M.
(ii) Dla każdego $x \in B^\circ$ i dowolnego $y \in W(x,B^\circ)$ spełniona jest nierówność $w(x) \le w(y)$.
(iii) Dla każdego $y \in S \setminus B^\circ$ i dowolnego $x \in C(y,B^\circ)$ zachodzi nierówność $w(y) \ge w(x)$.
■

Bezpośrednią konsekwencją powyższego lematu jest następujący fakt :

Wniosek 1.
Jeśli $x \in B^\circ$, to wówczas $t^-(x,B^\circ) = \infty$ oraz

$$t^+(x,B^\circ) = \min \{ w(y) : y \in W(x,B^\circ) \} - w(x) \quad (4)$$

Jeśli $x \in S \setminus B^\circ$, to wówczas $t^+(x,B^\circ) = \infty$ oraz

$$t^-(x,B^\circ) = w(x) - \max \{ w(y) : y \in C(x,B^\circ),\ y \ne x \} \quad (5)$$

■

Skorzystanie z powyższego wniosku do wyznaczenia tolerancji elementów wymaga znajomości następujących dwóch rodzin podzbiorów zbioru S :
rodziny przekrojów fundamentalnych

$$\mathcal{F}_{cu}(B^\circ) = \{ W(x,B^\circ) : x \in B^\circ \}$$

oraz rodziny cykli fundamentalnych

$$\mathcal{F}_{ci}(B^\circ) = \{ C(y,B^\circ) : y \in S \setminus B^\circ \}.$$

Wprowadźmy numerację elementów zbiorów B° oraz $S \setminus B^\circ$ i niech $B^\circ = \{ x_1,\ldots,x_b \}$, $S \setminus B^\circ = \{ y_1,\ldots,y_n \}$, gdzie $b = |B^\circ|$, $n = |S \setminus B^\circ|$. Pełna informacja o strukturze rodzin $\mathcal{F}_{cu}(B^\circ)$, $\mathcal{F}_{ci}(B^\circ)$ może być odczytana z tak zwanej macierzy fundamentalnej $A(B^\circ)$, gdzie

$$A(B^\circ) = [\, a_{ij} \,] \quad i = 1,\ldots,b,\ j = 1,\ldots,n$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_i \in C(y_j,B^\circ) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Można łatwo zauważyć, że kolumny macierzy $A(B^o)$ odpowiadają elementom rodziny $\mathcal{F}_{ci}(B^o)$ natomiast wiersze tej macierzy - elementom rodziny $\mathcal{F}_{cu}(B^o)$.
Macierz $A(B^o)$ może być skonstruowana w $O(b \cdot n)$ wywołaniach procedury badania niezależności zbiorów, ponieważ pojedynczy element a_{ij} może być określony poprzez sprawdzenie czy $(B^o \setminus \{x_i\}) \cup \{y_j\} \in \mathcal{F}$. Mając macierz fundamentalną można na podstawie zależności (4) i (5) wyznaczyć wszystkie tolerancje elementów dokonując $O(bn)$ porównań.

W niektórych przypadkach struktura cykli oraz przekrojów fundamentalnych matroidu może być reprezentowana w sposób bardziej efektywny poprzez konstrukcję pomocniczego grafu nazywanego transmuterem (patrz np. [5]). Podejście takie było wykorzystywane w [7] do badania wrażliwości dla minimalnych drzew rozpinających grafu, co sprowadza się do znajdowania tolerancji elementów dla tak zwanego matroidu grafowego.

3. Właściwości tolerancji elementów matroidu i ich użycie w analizie pooptymalizacyjnej

W rozdziale tym pokażemy, jak znajomość tolerancji elementów może być wykorzystana w innych zadaniach analizy pooptymalizacyjnej. Podejście to jest oparte na następującym fakcie wiążącym tolerancje elementów z różnicą wag bazy optymalnej i dowolnej innej bazy matroidu.

Twierdzenie 1.
Niech B^o będzie bazą o minimalnej wadze matroidu M, a B dowolną inną bazą tego matroidu. Wówczas

$$v(B) - v(B^o) \geq \sum_{y \in B \setminus B^o} t^-(y,B^o) \tag{6}$$

oraz

$$v(B) - v(B^o) \geq \sum_{x \in B^o \setminus B} t^+(x,B^o) \tag{7}$$

Dowód. Rozważmy dwie bazy B', B'' matroidu M i niech

$\Psi(B',B'') = \{ \psi : \psi$ jest bijekcją $B'\backslash B'' \longrightarrow B''\backslash B'$
spełniającą warunek
$(B''\backslash\{\psi(x)\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ dla każdego $x \in B'\backslash B''$ $\}$.
Z teorii matroidów wiadomo (patrz np. [8]), że dla dowolnych B', $B'' \in \mathcal{B}$, $B' \neq B''$, zbiór $\Psi(B',B'')$ jest niepusty. Weźmy dowolną bijekcję $\psi \in \Psi(B,B^o)$. Mamy $v(B) - v(B^o) = \sum_{y \in B\backslash B^o} [w(y) - w(\psi(y))]$. Z faktu, że dla $y \in B\backslash B^o$, $(B^o \backslash \{\psi(y)\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ wynika, że $\psi(y) \in C(y,B^o)$, bowiem gdyby tak nie było, to zbiór $(B^o \backslash \{\psi(y)\}) \cup \{y\}$ zawierałby cykl fundamentalny $C(y,B^o)$, a zatem nie mógłby być zbiorem niezależnym. Ale teraz zależność (5) pociąga za sobą nierówność $w(y) - w(\psi(y)) \geq t^-(y,B^o)$ dla każdego $y \in B\backslash B^o$, co w konsekwencji implikuje (6). Podobnie, dla dowolnego $x \in B^o\backslash B$ z faktu, że $(B^o \backslash \{x\}) \cup \{\psi^{-1}(x)\} \in \mathcal{B}$ wynika, że $\psi^{-1}(x) \in W(x,B^o)$, co na podstawie zależności (4) pociąga za sobą nierówność $w(\psi^{-1}(x)) - w(x) \geq t^+(x,B)$. Ponieważ $v(B) - v(B^o) = \sum_{x \in B^o\backslash B} [w(\psi^{-1}(x)) - w(x)]$, implikuje to (7).

■

Rozważmy teraz następujący problem z zakresu analizy pooptymalizacyjnej :
Zakładamy, że mając bazę o minimalnej wadze B^o wprowadzamy dodatkowe wymaganie, że niektóre elementy należące do B^o nie mogą występować w rozwiązaniu zadania (1). Waga bazy spełniającej taki warunek jest nie mniejsza niż waga bazy B^o i naszym celem jest wyznaczenie pogorszenie rozwiązania spowodowanego tym dodatkowym wymaganiem. Podobnie, może nas interesować pogorszenie rozwiązania związane z żądaniem, aby pewne elementy, które nie występowały w bazie optymalnej B^o, zostały do bazy wprowadzone. Rozwiązanie powyższych problemów wymaga wyznaczenia wartości optymalnych następujących zadań optymalizacyjnych :
Jeśli badamy pogorszenie rozwiązania związane z usunięciem z bazy podzbioru elementów $D \subseteq B^o$, wówczas należy wyznaczyć wartość v_D, gdzie

$$v_D = \min \{ v(B) : B \in \mathcal{B},\ D \cap B = \emptyset \} \qquad (8)$$

Natomiast dla oceny skutków włączenia do bazy elementów zbioru $A \subseteq S \setminus B^o$, $A \in \mathcal{F}$, trzeba obliczyć wartość v^A, gdzie

$$v^A = \min \{ v(B) : B \in \mathcal{B}, A \subseteq B \} \qquad (9)$$

Zadania (8) i (9) mogą być rozwiązane dla zadanych zbiorów D lub A przez odpowiednio zmodyfikowany algorytm zachłanny. Jeśli jednak znamy wartości tolerancji elementów matroidu, wówczas bardzo łatwo jest wyznaczyć dobre oszacowania od dołu wartości v_D oraz v^A dla dowolnych zbiorów D, A. Możliwość ta wynika z następujących faktów, które są prostymi konsekwencjami Twierdzenia 1 :

Wniosek 2.
Niech $D \subseteq B^o$. Wówczas dla dowolnej bazy B_D spełniającej warunek $D \cap B_D = \emptyset$ zachodzi zależność

$$v(B_D) \geq v(B^o) + \sum_{x \in D} t^+(x,B^o) \qquad (10)$$

■

Wniosek 3.
Niech $A \subseteq S \setminus B^o$, gdzie $A \in \mathcal{F}$. Wówczas dla dowolnej bazy B^A spełniającej warunek $A \subseteq B^A$ zachodzi zależność

$$v(B^A) \geq v(B^o) + \sum_{x \in A} t^-(x,B^o) \qquad (11)$$

■

W [4] pokazano, jak powyższe fakty można wykorzystać w podobnej analizie pooptymalizacyjnej dla znanego zadania komiwojażera. Analogicznie jak w przypadku zadania (1) zakładamy, że znany jest najkrótszy obwód Hamiltona w grafie i interesuje nas pogorszenie rozwiązania związane z wprowadzeniem dodatkowych wymagań, że pewne zadane podzbiory krawędzi grafu muszą należeć do drogi komiwojażera albo że nie mogą się w niej znaleźć. Wartość takiego pogorszenia dla dowolnego podzbioru krawędzi można łatwo oszacować jeśli dla zadania komiwojażera przeprowadzona była analiza wrażliwości opisana w [3]. W trakcie tej analizy dokonuje się wyznaczenia tolerancji elementów dla bazy optymalnej pewnego matroidu związanego z relaksacją zadania komiwojażera i, jak pokazano w [4], na podstawie Wniosków 2 i 3 można łatwo uzyskać poszukiwane oszacowania wydłużenia obwodu Hamiltona. Oszacowania te są mniej ścisłe niż w przypadku zadania (1), ale są uzyskiwane bardzo małym dodatkowym nakładem obliczeń i pozwalają na szybką zgrubną ocenę skutków wprowadzenia dodatkowych ograniczeń na zawieranie zadanych krawędzi w rozwiązaniu optymalnym.

Literatura

[1] Geoffrion A.M., Nauss R.: Parametric and postoptimality analysis in integer programming. Management Science, Vol. 23, 1977, pp.453-466.

[2] Lawler E.L.: Combinatorial Optimization : Networks and Matroids. Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, 1976.

[3] Libura M.: Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems. Discrete Applied Mathematics, Vol.30, 1991, pp.197-211.

[4] Libura M.: On travelling salesman problem with side constraints. W: Kulikowski R., Sosnowski J.S.: Badania Systemowe, t.2, Metody Optymalizacji i Sterowania Komputerowego. Omnitech Press, Warszawa 1990, str. 134-142.

[5] Libura M.: Sensitivity analysis for minimum weight base of matroid, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Report ZPM-26/A1529/89, October 1989.

[6] Lipski W.: Kombinatoryka dla programistów. WNT, Warszawa, 1989.

[7] Tarjan R.E.: Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest path trees. Information Processing Letters, Vol.14, 1982, pp.30-33.

[8] Welsh D.J.A.: Matroid Theory. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.

ISBN 83-900412-1-9