

Polskie Towarzystwo Badań  
Operacyjnych i Systemowych  
Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk  
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:  
Zbigniew Nahorski  
Marian Chudy  
Andrzej Straszak



Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO  
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH  
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

# **O P T Y M A L I Z A C J A**

**ZADANIA, METODY, ALGORYTMY**

**Redaktorzy**

*Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak*

**WARSZAWA 1991**

## MINIMALIZACJA FUNKCJI WYPUKLYCH KAWALKAMI LINIOWYCH METODĄ TYPU KARMARKARA

Anna Altman

Instytut Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

### Streszczenie

Funkcje kawalkami liniowe definiowane są jako maksimum skończonej ilości form liniowych. Omówiono zastosowanie metody łączącej algorytm typu Karmarkara z metodą płaszczyzn tnących. Powstał program komputerowy oparty na tej metodzie. Omówiono wyniki numeryczne dla kilku przykładów.

### 1 Wstęp

W roku 1984 Karmarkar [3] opublikował swój algorytm do rozwiązywania zadań programowania liniowego ze znaną wartością funkcji celu. W latach następnych rozszerzono jego metodę na zadania z nieznaną wartością optymalną funkcji celu i znacznie ją ulepszono. Goffin i Vial [2] opracowali algorytm specjalizowany do zadań wypukłych kawalkami liniowych. Niniejsza praca oparta jest na ich pomysle.

Funkcje wypukłe kawalkami liniowe (WKL), definiowane jako maksimum ze skończonej ilości form liniowych, odgrywają dużą rolę w metodach numerycznych. Można nimi aproksymować dowolną funkcję wypukłą. Funkcje te znalazły istotne zastosowanie w metodach elementu skończonego.

Opracowano algorytm do minimalizacji funkcji WKL przy pomocy rozwiązania serii prostszych zadań zrelaksowanych. Opracowano program komputerowy, został on napisany w języku FORTRAN 77, działa na komputerach zgodnych z IBM PC/AT. Wykorzystano liczne procedury z biblioteki LINPACK [1].

### 2 Opis zagadnienia

Rozpatrywano następujące zadanie

$$\min\{f(x) : l \leq x \leq h\}, \quad (1)$$

gdzie  $f$  jest funkcją WKL daną wzorem

$$f(x) = \max\{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j : i \in I\},$$

zbiór  $I$  jest skończony.

Dla funkcji WKL problem może być sformułowany jako zadanie programowania liniowego w postaci prymalnej

$$\min\{\text{vertic} : \text{vertic} * 1_m + Ax \geq b, l \leq x \leq h\} \quad (2)$$

lub dualnej

$$\max\{\bar{b}^T s : \bar{A}s = 0, s \geq 0, g^T s = 1\}, \quad (3)$$

gdzie

- $I$  jest podzbiorem skończonym zbioru liczb naturalnych,
- $1_m = (1, \dots, 1) \in \mathcal{R}^m$ ,
- $p = i + 2n$ , ( $i$  jest mocą zbioru  $I$ ),
- $\text{vertic}$  jest skalarzem rzeczywistym,
- $s, \bar{b}, g \in \mathcal{R}^p$ ,
- $\bar{A} = \{I_n, -I_n, A^T\}$ ,  $I_n$  jest macierzą jednostkową o wymiarach  $n \times n$ ,
- $s^T = (v^T, w^T, u^T) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^i$ ,
- $\bar{b}^T = (l^T, -h^T, b^T) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^i$ ,
- $g = (0_n, 0_n, 1^T)$ ,  $1_i \in \mathcal{R}^i$ ,  $0_n \in \mathcal{R}^n$ .

Niech  $M \subset I$  będzie zbiorem indeksów form liniowych na  $\mathcal{R}^n$  o mocy  $m$ . Niech  $f_M$  będzie funkcją kawałkami liniową zdefiniowaną przez formy liniowe ze zbioru  $M$ . Oznaczamy przez  $A_M$  i  $b_M$  odpowiednio podmacierz macierzy  $A$  i podwektor wektora  $b$  odpowiadające formom liniowym ze zbioru  $M$ . Rozpatrzono problem problem zreleksowany do (1)

$$\min\{f_M(x) : l \leq x \leq h\}, \quad (4)$$

gdzie

$$f_M(x) = \max\{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j : i \in M\},$$

lub do (3)

$$\min\{\text{vertic} : \text{vertic} * 1_m + A_M x \geq b_M, l \leq x \leq h\} \quad (5)$$

Zadaniem dualnym do (5) jest

$$\max\{\bar{b}_M^T s_M : \bar{A}_M s_M = 0, s_M \geq 0, g^T s_M = 1\}. \quad (6)$$

Metoda rozwiązywania zadania (6) oparta jest na [4]. Definiuje się funkcję potencjalową,

$$\phi_M(s_M; \theta) = \ln[-(\bar{b}_M - \theta g)^T s_M] - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \ln s_i, \quad p = m + 2 * n. \quad (7)$$

gdzie  $\theta$  jest oszacowaniem górnym wartości zadania (6). Szukane jest minimum funkcji potencjalowej przy ograniczeniach,

$$\begin{aligned} \bar{A}_M s_M &= 0, \\ (\bar{b}_M - \theta g)^T s_M &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Jeśli układ liniowy (8) ma rozwiązanie, to albo  $\theta$  jest rozwiązaniem (6), albo można znaleźć lepsze oszacowanie rozwiązania (6) niż  $\theta$ . Wstawiając nowe oszacowanie  $\theta$  do (8), można kontynuować proces iteracyjny dopóki oszacowanie spełnia żądane warunki. Do minimalizacji funkcji potencjalowej używa się metody Newtona. Zadanie przybliża się przez

$$\begin{aligned} \min_{q(\theta)} \|q(\theta) - 1_p\|_2, \\ \bar{A}_M S_M q(\theta) &= 0, \\ (\bar{b}_M - \theta g)^T S_M q(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$S_M$  jest macierzą diagonalną z elementami wektora  $s_M$  na przekątnej. Wektor  $q(\theta)$  jest rzutem  $1_p$  na jądro macierzy ograniczeń.

Łatwo jest w zadaniu prymalnym (2) znaleźć rozwiązanie dopuszczalne. Dla dowolnego  $x \in [l, h]$  wystarczy obliczyć  $\text{vertic} = f(x)$ ; tak otrzymany punkt ( $\text{vertic}, x$ ) jest punktem dopuszczalnym. W związku z tym jako oszacowanie górne dualnej wartości optymalnej przyjmuje się wartość prymalnej funkcji celu w punkcie dopuszczalnym dla zadania prymalnego.

Rozwiązywanie pełnego zadania, często bardzo dużego, zostało zastąpione rozwiązywaniem serii zadań (6) z odpowiednio zmienianym (rozszerzonym) zbiorem  $M$ . Gdy moc zbioru  $M$  jest mała, odpowiadające mu zadanie (6) jest małe i łatwe do rozwiązania. Taki sposób postępowania, polegający na zamianie jednego dużego zadania serią zadań mniejszych, często przyspiesza znalezienie rozwiązania.

3 Skrócony opis algorytmu z generacją kolumn

Rozwiązywane jest zadanie (6) dualne do (5). Nazwa algorytmu wywodzi się stąd, że w trakcie jego działania zbiór  $M$  jest rozszerzany, do macierzy  $A_M$  dodawany jest wiersz, a to oznacza dodanie kolumny do macierzy  $S_M \tilde{A}_M^T$ . Algorytm z generacją kolumn ma postać następującą.

Krok 1 - Inicjalizacja

Wybierz dokładność obliczeń  $\epsilon > 0$  i maksymalną liczbę iteracji MAXIT. Zdefiniuj zbiór  $M$ . Znajdź punkt dopuszczalny  $s_M$  dla problemu (6) o dodatnich składowych. Znajdź punkt  $x, 1 \leq x \leq h$  i oblicz  $\theta = f(x)$  (oszacowanie górne wartości zadania dualnego (6)).

Krok 2 - Generacja kierunków

Oblicz  $\gamma_2$  - rzut wektora  $S_M \tilde{b}_M$  na  $\ker(\tilde{A}_M S_M)$  i  $\gamma_3$  - rzut wektora  $S_M g$  na  $\ker(\tilde{A}_M S_M)$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= S_M \tilde{b}_M - S_M \tilde{A}_M^T x_2 \quad \text{i} \quad (10) \\ \gamma_3 &= S_M g - S_M \tilde{A}_M^T x_3, \text{ gdzie} \\ x_2 &= (\tilde{A}_M S_M \tilde{A}_M^T)^{-1} \tilde{A}_M S_M^2 \tilde{b}_M \quad \text{i} \\ x_3 &= (\tilde{A}_M S_M \tilde{A}_M^T)^{-1} \tilde{A}_M S_M^2 g. \end{aligned}$$

Krok 3 - Modyfikacja górnego oszacowania rozwiązania

Oblicz  $\hat{\theta}$  i  $\hat{f}$  sposobem opisanym w rozdziale 4, wzory (11).

Krok 4 - Wyznaczanie kierunku spadku

Oblicz  $\hat{\theta} = \min\{\theta, \hat{\theta}\}$  i  $q$  - rzut wektora  $1_p$  na jądro przekształcenia o macierzy ograniczeń (9)

$$q = 1_p - \frac{(\hat{b} - \hat{\theta}g)^T s(\gamma_2 - \hat{\theta}\gamma_3)}{\|\gamma_3 - \gamma_2\|_2^2}$$

Podstaw  $s_M := s_M + \alpha S_M q(\theta)$  dla pewnego  $\alpha > 0$   
(np.  $\alpha = \frac{1}{1 + \|q\|_\infty}$ ).

Krok 5 - Generacja kolumny

Jeśli  $\hat{\theta} \geq \theta$  (nowe oszacowanie jest gorsze od starego), to idź do kroku 6. W przeciwnym razie ustaw  $\hat{x} := x_2 \hat{x}_3$ .

Gdy  $f(\hat{x}) = f_M(\hat{x})$  (nie zachodzi potrzeba generacji kolumny), to podstaw  $\theta := \hat{\theta}$  i  $x := \hat{x}$ , idź do kroku 6.

Gdy  $f(\hat{x}) > f_M(\hat{x})$ , to wyznacz indeks dodawanej kolumny  $k \notin M$  o własności

$$f(\hat{x}) = b_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} \hat{x}_j.$$

Ustaw  $M := M \cup \{k\}$ ,  $m := m + 1$ , Jeżeli  $f(\hat{x}) < \hat{\theta}$  (można znaleźć lepsze oszacowanie niż  $\hat{\theta}$ ), to podstaw  $x := \hat{x}$  i  $\theta := f(\hat{x})$ . Zdefiniuj wewnętrzny punkt dopuszczalny  $s_M$  dla (6) z nowym zbiorem  $M$ .

**Krok 6 - Normalizacja**

Znormalizuj  $s_M$ , podstawiając  $s_M := \frac{s_M}{\|s_M\|}$ .

**Krok 7 - Test zbieżności**

Sprawdź czy osiągnięto zadaną dokładność  $\varepsilon$ . Gdy  $|\bar{b}_M^T s_M| < \varepsilon$ , to sprawdź czy  $\theta - \bar{b}_M^T s_M < \varepsilon$ , (badana jest dokładność bezwzględna). W przeciwnym razie sprawdź czy osiągnięto dokładność względną, czyli  $\theta - \bar{b}_M^T s_M < \varepsilon |\bar{b}_M^T s_M|$ . Jeśli osiągnięto żądaną dokładność lub przekroczona została maksymalna liczba iteracji, to zakończ działanie. W przeciwnym razie powrót do kroku 2.

Można udowodnić [2] wielomianową zbieżność algorytmu dla funkcji WKL.

**4 Oszacowanie wartości funkcji celu. Procedury do minimalizacji funkcji wypukłej kawałkami liniowej jednej zmiennej**

Jako początkowe oszacowanie górne dualnej wartości optymalnej przyjmuje się wartość prymalnej funkcji celu w punkcie dopuszczalnym dla zadania prymalnego. Następnie  $\theta$  liczono jest w nowym punkcie dopuszczalnym  $s_2 - ts_3$ ,

$$i = \arg \min \{f(s_2 - ts_3) : l \leq s_2 - ts_3 \leq h\}, \quad (11)$$

$$\hat{\theta} = f(s_2 - ts_3).$$

Zależności między  $\gamma_2$  i  $s_2$  oraz  $\gamma_3$  i  $s_3$  dane są równościami (10). Jeśli nie istnieje takie  $t$ , że  $l \leq s_2 - ts_3 \leq h$ , to  $t$  jest niezdefiniowane i przyjmuje się  $\hat{\theta} = +\infty$ .

Aby użyć definicji powyższej definicji trzeba rozwiązać zadanie znalezienia minimum funkcji WKL jednej zmiennej. Zadanie powyższe można rozwiązać, stosując metodę płaszczyzn tnących.

**5 Obliczanie czynnika  $R$  w rozkładzie macierzy  $S\bar{A}^T$**

Do obliczenia rzutu wektora jedynkowego potrzebne są  $\gamma_2$  i  $\gamma_3$  - rsuty wektorów  $S\bar{b}$  i  $Sg$  na  $\ker(\bar{A}S)$ . Dokonywany jest rozkład QR macierzy  $S\bar{A}^T$ . Jest on stabilny numerycznie, ale jest czasochłonny i stanowi główny koszt obliczeniowy programu.

Wykorzystano specjalną strukturę macierzy  $S\bar{A}^T$  do obliczenia czynnika  $R$  (z dokładnością do znaków wierszy czynniki  $R$  w rozkładzie Choleskiego i QR

są równe). Macierz  $S\bar{A}^T$  i wektor  $S\bar{b}$  mają postać

$$S\bar{A}^T = (V, -W, A^T U)^T, S\bar{b} = (Vl, -Wh, Ub)^T,$$

gdzie macierze  $V, W$  i  $U$  są diagonalne. Wyodrębniamy podmacierz  $T$  macierzy  $S\bar{A}^T$  i podwektor  $\tau$  wektora  $S\bar{b}$ ,

$$T^T = (V, -W), \tau^T = (Vl^T, -Wh^T).$$

Rozkład Choleskiego tej macierzy jest bardzo prosty, można go obliczyć analitycznie. Następnie rozszerzamy macierz  $T$  o wiersz macierzy  $UA$ , analogicznie wektor  $\tau$  rozszerzamy o odpowiedni element wektora  $Ub$ . Dla tak powstałego zadania obliczamy rozkład. Dokonując  $m$  takich rozszerzeń, gdzie  $m$  jest liczbą wierszy macierzy  $UA$ , otrzymujemy ostateczny rozkład macierzy  $S\bar{A}^T$ .

## 6 Wyniki

Wszystkie wyniki podane są z co najmniej czterema cyframi znaczącymi. W tabelach z wynikami w kolumnie FQR znajduje się rodzaj użytego rozkładu, T oznacza pełny rozkład QR macierzy  $S\bar{A}^T$ , a F rozkład z rozszerzeniami. BCN oznacza początkową moc zbioru M, a ECN końcową, WDFC jest obliczoną wartością dualnej funkcji celu z podzadania, NITER liczbą iteracji. Dla zwięzłości opisu wyników użyto następujących skrótowych oznaczeń wersji programu:

F1 - FQR = F i generacja kolumn (moc początkowa zbioru M jest równa 1),  
 FA - FQR = F, bez generacji kolumn (moc początkowa zbioru M jest równa jego mocy końcowej),

T1 - FQR = T i generacja kolumn (moc początkowa zbioru M jest równa 1),  
 TA - FQR = T, bez generacji kolumn (moc początkowa zbioru M jest równa jego mocy końcowej).

### 6.1 Minimalizacja normy infimum

Zadanie polegało na rozwiązaniu zadania z  $f(x) = \|x\|_\infty, \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ ,  
 $l = 100 * 1_n, h = 100000 * 1_n, 1_n \in \mathbb{R}^n$ .

Dla  $n = 20$  otrzymano następujące wyniki:

FQR	BCN	ECN	NITER	WDFC	tolerance	time
F	1	20	59	100.0000	1d-4	0:01:46
F	40	40	52	100.0000	1d-4	0:03:11
T	1	20	59	99.99999	1d-4	0:01:52
T	40	40	52	99.99999	1d-4	0:02:16

Wszystkie dokładności w tych przykładach są względne.

Dla  $n = 40$  otrzymano następujące wyniki:



FQR	BCN	ECN	NITER	WDFC	tolerance	time
F	1	40	66	99.9999	1d-4	0:09:06
F	80	80	52	99.9999	1d-4	0:18:28
T	1	40	66	99.9999	1d-4	0:09:58
T	80	80	52	99.9999	1d-4	0:11:45

Wszystkie dokładności w tych przykładach są względne.

Najlepsze czasy uzyskano dla wersji , najgorsze dla FA. Przy FQR = F końcowa moc zbioru M zmniejszyła się dwukrotnie.

## 6.2 Zadanie z macierzą Hilberta

Rozwiązywno zadanie z  $f(x) = \|Hx - b\|_{\infty}$ , gdzie  $H$  jest macierzą Hilberta ( $h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ ),  $b = H * 1_n$ ,  $l = \lambda * 1_n$ ,  $h = \eta * 1_n$ . Macierz  $\tilde{A}$  ma wymiary  $4n * n$ , zadana dokładność  $\epsilon = 10^{-6}$ .

Dla  $n = 20$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\eta = 100$  otrzymano następujące wyniki:

FQR	BCN	ECN	NITER	WDFC	tol.	residuum	time
F	1	25	92	-0.7613d-6	1d-6	0.1917d-6	0:02:49
F	40	40	46	-0.8328d-6	1d-6	0.2470d-9	0:03:32
T	1	25	92	-0.7638d-6	1d-6	0.1920d-6	0:04:13
T	40	40	46	-0.8329d-6	1d-6	0.2470d-9	0:03:17

Dla  $n = 40$ ,  $\lambda = -10$ ,  $\eta = 100$  otrzymano następujące wyniki:

FQR	BCN	ECN	NITER	WDFC	tol.	residuum	time
F	1	36	96	-0.8382d-6	1d-6	0.1398d-6	0:13:21
F	80	80	45	-0.8440d-6	1d-6	0.1134d-9	0:21:01
T	1	36	96	-0.8352d-6	1d-6	0.1381d-6	0:24:05
T	80	80	48	-0.8130d-6	1d-6	0.1120d-9	0:20:51

Najszybszą wersją w tych przykładach jest wersja F1, najwolniejszą T1. Końcowa moc zbioru M, przy FQR = F, zmniejsza się około dwóch razy tak jak w przykładzie (6.1).

## 6.3 Zadanie $2 \times 10$

Rozwiązano zadanie z macierzą

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 & 2 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 8 & 0 & 2 & 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}^T,$$

wektorem  $b = (0, 1, -2, 3, -1, 1, 2, 0, 3, 4)^T$ ,  $l = (0, 0)^T$ ,  $h = (10, 20)^T$ . Zadana dokładność  $\epsilon = 10^{-6}$ , wartość optymalna funkcji celu jest równa 4. Otrzymano następujące wyniki.

## Minimalizacja metodą Karmarkara

FQR	BCN	ECN	NITER	time
F	1	2	40	0:00:03
F	10	10	50	0:00:07
T	1	2	40	0:00:03
T	10	10	50	0:00:06

We wszystkich czterech przypadkach obliczona wartość dualnej funkcji celu jest równa 4, uzyskano dokładność względną  $0.4000 \cdot 10^{-8}$ .

Wszystkie przykłady przytoczone powyżej pokazują, że najszybszą metodą rozwiązywania tych zadań jest wersja F1 z generacją kolumn i otrzymywaniem rozkładu przy pomocy rozszerzeń. To nie oznacza, że zawsze ta wersja jest najszybsza. Może się zdarzyć, że końcowa moc zbioru M jest równa mocy zbioru I (p. rozdz. 2) i wtedy wersja TA jest szybsza. Wersja FA jest wersją nieużyteczną.

### Literatura

- [1] J. Dongarra, J. R. Bunch, C. B. Moller, and G. W. Stewart (1978). LINPACK Users Guide, SIAM Publications, Philadelphia.
- [2] Jean-Louis Goffin and Jean-Philippe Vial (1990). Cutting Planes and Column Generation Techniques With the Projective Algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 65, No. 3, pp. 409-429.
- [3] N. Karmarkar (1984). A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4, pp. 373-395.
- [4] Jean-Philippe Vial (1989). A unified approach to projective algorithms for linear programming. *Optimization - Fifth French-German Conference Castel Novel 1988*, Lecture Notes in Mathematics 1405, pp. 191-220, Springer Verlag.

**ISBN 83-900412-1-9.**