

**Raport Badawczy**  
**Research Report**

**RB/68/2010**

**Rozmyte uogólnienie liniowego  
modelu dyskryminacyjnego  
w zastosowaniu  
do przewidywania  
niewypłacalności**

**T. Wysocki**

**Instytut Badań Systemowych**  
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**  
**Polish Academy of Sciences**



# ROZMYTE UOGÓLNIENIE LINIOWEGO MODELU DYSKRYMINACYJNEGO W ZASTOSOWANIU DO PRZEWIDYWANIA NIEWYPŁACALNOŚCI

*Tomasz Wysocki*

*Studia Doktoranckie IBS PAN*

*This paper presents results of research experiment on fuzzy generalization of linear discrimination model used for corporate insolvency prediction. It presents theoretical foundations of logit regression as one of classical models used for binary classification tasks and its generalization - fuzzy interval logit regression. In further part it shows example of practical application leading to improvement of decisions certainty or supporting accuracy ratio in some cases. Finally it demonstrates results based on sample of real data.*

## **Wprowadzenie**

Umiejętność trafnej oceny sytuacji finansowej oraz oceny wypłacalności przedsiębiorstw i instytucji jest obecnie bardzo pożądaną i intensywnie rozwijaną gałęzią wiedzy. Stosowane są bardzo różne metody i narzędzia, zarówno o charakterze nieco autorytatywnym, eksperckim, jak też i bardziej obiektywne: porównawcze, klasyfikacyjne, oparte na statystycznej analizie danych. W praktyce istotna jest skuteczność stosowanych metod nie zaś ich rodzaj. Dziedzina ta oprócz ogromnego zapotrzebowania dostarcza również wielu problemów badawczych i stwarza liczne możliwości udoskonalania stosowanych narzędzi.

W pracy tej przeprowadzone zostało badanie, w którym klasyczny model Altmana (zob. [1]) został uogólniony przez zastosowanie algebry rozmytej zamiast euklidesowej. Parametry rzeczywiste zostały zastąpione liczbami rozmytymi. Poza przedstawieniem metody uogólnienia celem było stwierdzenie, czy zastosowanie liczb rozmytych w modelu numerycznym może wpłynąć pozytywnie na jego wyniki poprzez zwiększenie reprezentacji informacji przeniesionej z danych użytych w fazie kalibracji - do modelu oraz w jakim stopniu taka metoda może być przydatna.

## 1. Badane metody

### a. Model Altmana

Klasyczny model E. Altmana (zob. [1], [13]), mimo, że nie jest powszechnie używany z uwagi na bardzo ogólny i teoretyczny charakter stanowi dobry punkt odniesienia dla oceny innych metod dyskryminacyjnych ze względu na jego prostotę oraz dobrze znane właściwości.

Podobnie jak wcześniejszy model W. Beavera model Altmana przyjmuje postać funkcji liniowej (1) w przestrzeni liczb rzeczywistych. W literaturze przedmiotu opisanych jest wiele udoskonaleń (por. [2], [12], [15]), bądź przystosowań tych modeli do specyficznych zastosowań, polegających głównie na modyfikacjach w zakresie wyboru zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  wchodzących w skład modelu – jak i metod kalibracji parametrów  $a_1, \dots, a_n$ .

$$\zeta = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 \quad (1)$$

W większości prac przy wyborze zmiennych kierowano się zazwyczaj metodami oceny siły dyskryminacyjnej, przyjmując pewne miary skuteczności; natomiast do kalibracji parametrów modelu używano na ogół metod: regresji liniowej, wielokryterialnej optymalizacji, czy też prostych metod bazujących na minimalizacji błędów np. metodą najmniejszych kwadratów.

### b. Model regresji logitowej

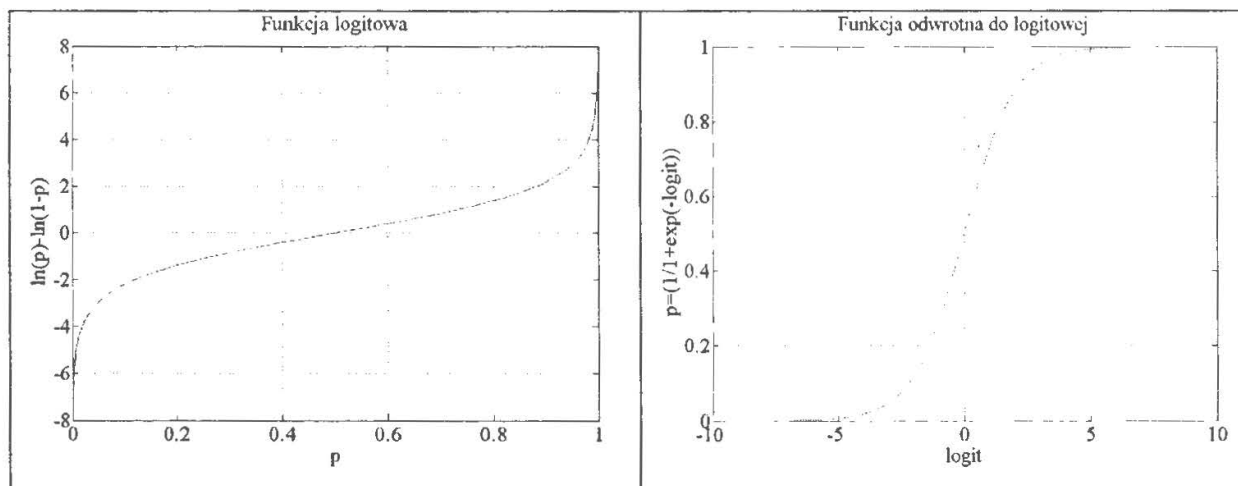
Biorąc pod uwagę, że przedmiotem zainteresowania jest stwierdzenie czy dany podmiot stanie się niewypłacalny czy też nie, można przyjąć, że zmienna objaśniana przyjmuje tylko dwie wartości skrajne i wzajemnie wykluczające się. Takie specyficzne właściwości skłaniają do wyboru metod uwzględniających tę naturalną dychotomię. Jedną z najpopularniejszych technik jest zastosowanie tzw. przekształcenia logitowego (zob. [12]).

Alternatywnym przedstawieniem klasycznego pojęcia prawdopodobieństwa  $p$  w sensie aksjomatyki Kołmogorowa przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, F, P)$  jest iloraz szans, który określany jest jako  $p/(1-p)$ . Iloraz szans określa stosunek ilości powodzeń do liczby porażek w danym eksperymencie. Logarytm ilorazu szans nazywany jest funkcją logitową (2), albo w skrócie logitem  $l$ ; czyli

$l(p) : [0, 1] \rightarrow R$ , przy czym

$$l(p) = \ln \frac{p}{1-p} = \ln(p) - \ln(1-p) \quad (2)$$

Przeciwdziedzina funkcji  $l$  jest cały zbiór liczb rzeczywistych, co sprawia, że jest ona użyteczna jako transformacja rozszerzająca prawdopodobieństwo w sposób różnowartościowy i wzajemnie jednoznaczny na całą przestrzeń rzeczywistą  $R$ . Właściwość ta umożliwia stosowanie metod regresji liniowej dla określania prawdopodobieństwa na podstawie dowolnych parametrów rzeczywistych. Kształt tej funkcji (zob. rys. 1) powoduje, że jest ona szczególnie użyteczna dla tworzenia modeli dwuwartościowych.



Rysunek 1. Funkcja logitowa i przekształcenie odwrotne

Przekształcenie odwrotne do (2), jest często również stosowane jako perceptron – element budowy sieci neuronowej wspomagającej decyzje. Przy czym – w przypadku zależności prawdopodobieństwa od wielu czynników dyskryminujących bardziej przydatna jest ogólniejsza postać wielowymiarowa, w której każdy wymiar (od 1 do  $n$ ) jest związany z jedną ze zmiennych opisujących. Prawdopodobieństwo jest określane w tym przypadku na podstawie kombinacji liniowej zmiennych  $z = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ , która jest modelem logarytmu ilorazu szans (logitu) opisywanego zagadnienia. Nieznane parametry  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  są zazwyczaj estymowane metodą największej wiarygodności. Ponadto, niekiedy, bez straty ogólności<sup>1</sup>, wprowadza się wyraz wolny  $\beta_0$ ; wówczas  $z = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ . W ten sposób otrzymuje się przekształcenie:

$$f : R^n \rightarrow [0, 1],$$

przy czym

<sup>1</sup> Jest to liniowe przesunięcie funkcji o zadaną wartość. Zwykle używa się wyrazu wolnego bądź ze względów technicznych (obliczeniowych), bądź dla celów ułatwienia interpretacji wyniku – wówczas przyjmuje się za  $\beta_0$  wartość średnią – stanowiącą punkt odniesienia.



$$f(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)} = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)} \quad (3)$$

Oznaczając indeksem  $k$  numer porządkowy badanej jednostki, przyjmuje się dla każdego  $k$ , że  $x_k$  jest wektorem zmiennych (danych finansowych i innych) opisujących  $k$ -tą jednostkę  $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ , zaś parametry  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  (wspólne dla wszystkich  $k$ ) są znajdowane metodą regresji liniowej we wcześniej wybranej próbie.

Mając powyższe na względzie, prawdopodobieństwo zdarzenia, że jednostka  $k$  stanie się niewypłacalna można definiować jako:

$$P(k = 1) = \pi_k = \frac{\exp(x_k^T \beta)}{1 + \exp(x_k^T \beta)}, \quad (4)$$

natomiast, że przetrwa jako:

$$P(k = 0) = 1 - \pi_k, \quad (5)$$

Z uwagi na relatywnie rzadkie występowanie przypadków jednostek niewypłacalnych w całej populacji, przeprowadzanie estymacji parametrów  $\beta$  na próbie całkowicie losowej może prowadzić do mało dokładnych i niestabilnych wyników, gdyż sumaryczny błąd estymacji w grupie jednostek niewypłacalnych jest w procesie optymalizacji parametrów  $\beta$  dużo mniejszy z uwagi na ich mniejszą liczbę niż jednostek wypłacalnych; a zatem jest mniej istotny. Uzyskana w ten sposób charakterystyka jest niezbyt adekwatna do rzeczywistości. Metodą zwiększenia wiarygodności estymacji jest przeprowadzenie jej na wcześniej wybranych grupach, w których wybór reprezentantów obu klas jest możliwie zbliżony. Matematycznie jest to równoważne aproksymacji warunkowego prawdopodobieństwa (pod warunkiem istnienia założonej proporcji jednostek niewypłacalnych w stosunku do wypłacalnych – zamiast faktycznej proporcji tych jednostek).

Przybliżenie wartości poszukiwanych estymatorów  $\beta$  odbywa się w ten sam sposób, jednakże wpływa on na zaburzenie wyniku poprzez powstanie innego wyrazu wolnego  $\beta_0$  niż w sytuacji rzeczywistej (zob. [9]). W związku z tym, ważne jest uwzględnienie faktu różnej liczebności obu grup oraz dokonanie odpowiedniego dostosowania modelu przez zmianę proporcji w reprezentacjach obu grup, jednakże z zachowaniem właściwego parametru wartości średniej. Dokonując takiej zmiany, należy pamiętać o odpowiednim dostosowaniu w (6) wyrazu wolnego, tj. przez przesunięcie go o znaną wartość  $\gamma$ , którą ustala się zgodnie z (7) na podstawie wybranej reprezentacji  $(\rho_1, \rho_2)$ .  $\rho_1$  oznacza

liczbę wybranych jednostek niewypłacalnych podzieloną przez liczbę wszystkich jednostek niewypłacalnych, zaś  $\rho_2$  odpowiednio – dla jednostek wypłacalnych.

$$z = x^T \beta = \gamma + x^T \tilde{\beta} \Rightarrow \beta_0 = \gamma + \tilde{\beta}_0 \quad (6)$$

$$\gamma = \ln \rho_1 - \ln \rho_2 \quad (7)$$

$$\exp(-\gamma) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (8)$$

Ostatnim krokiem jest wyznaczenie wartości progowej  $f_0$  na podstawie której model regresyjny podaje decyzje. Jeśli wynik obliczenia jest mniejszy od  $f_0$  to oznacza to wskazanie, że jednostka przetrwa; w przeciwnym wypadku jednostka stanie się niewypłacalna. Najprościej - optymalny wybór parametru  $f_0$  można uzyskać metodą najmniejszych kwadratów poprzez minimalizację błędu wskazania modelu na zbiorze uczącym.

### c. Model rozmytej regresji logitowej (model przedziałowy)<sup>2</sup>

Istotną wadą prostego modelu opartego o regresję logitową jest jego mała wrażliwość na zmienność danych oraz brak eliminacji potencjalnej nieprawidłowości wskazania wynikającej z niepewności danych. Konsekwencją tego jest generowanie stosunkowo dużych błędów.

Rozszerzenie modelu regresji logitowej może być dokonane przez zastąpienie wektora  $\beta$  liczb rzeczywistych będących parametrami regresji logitowej wektorem liczb rozmytych<sup>3</sup>  $A$ . Wówczas funkcja liniowa będąca estymatorem logitu prawdopodobieństwa przyjmie zamiast formy (9) postać (10). Uogólnienie takie można interpretować jako wprowadzenie niepewności parametrów  $A_i$  wyrażanej przez ich funkcje przynależności  $\mu_{A_i}(x)$ .

$$z = \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i \beta_i = \beta_0 + x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \dots + x_n \beta_n \quad (9)$$

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n \quad (10)$$

<sup>2</sup> W modelu tym wykorzystywana jest metoda programowania kwadratowego, liczby rozmyte oraz funkcja logitowa; stąd można stosować zamiennie nazwy: model przedziałowy, model kwadratowej regresji logitowej, model rozmytej regresji logitowej, itp.

<sup>3</sup> Definicje liczb i zbiorów rozmytych, stosowana terminologia oraz właściwości wykorzystywane w tutaj właściwości opisane są m.in. w pracach [14] i [10].

Oczywiście  $y$  podobnie jak współrzędne wektora  $A=(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$  jest liczbą rozmytą. Tak jak w pracy [12] zakładamy, że są to liczby trójkątne o funkcji przynależności (11), rdzeniu  $\alpha_i$  i rozpiętości podstawy  $\delta_i$ . Dla uproszczenia notacji w dalszej części pracy zdefiniowane w ten sposób trójkątne liczby rozmyte  $A_i$  będą oznaczane skrótowo przez parę skalarów, która wystarcza do ich jednoznacznego określenia:  $\langle \alpha_i, \delta_i \rangle$ .

$$\mu_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha_i - x|}{\delta_i} & \text{dla } \alpha_i - \delta_i \leq x \leq \alpha_i + \delta_i \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases} \quad (11)$$

Przyjmując powyższą definicję funkcji przynależności dla parametrów  $A_i$  model (10) można zapisać w równoważnej postaci (12), z której wynika że z każdą zmienną  $x_i$  modelu związane są dwa nieznanne parametry  $\alpha_i$  i  $\delta_i$ .

$$y = \langle \alpha_0, \delta_0 \rangle + \langle \alpha_1, \delta_1 \rangle x_1 + \langle \alpha_2, \delta_2 \rangle x_2 + \dots + \langle \alpha_n, \delta_n \rangle x_n \quad (12)$$

Oszacowanie parametrów  $\alpha_i$  i  $\delta_i$  można uzyskać dwuetapowo poprzez kolejne kroki:

1. Wyznaczenie rdzeni  $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Dla każdej jednostki ze zbioru uczącego posiadamy parę  $(x_k, p_k)$ , gdzie  $x_k$  to  $n$ -wymiarowy wektor danych opisujących jednostkę, natomiast  $p_k$  to binarna zmienna wynikowa (której wartość znamy), przyjmująca wartość 1, gdy jednostka stała się niewypłacalna i 0 w przeciwnym wypadku. Podstawiając dane  $x_k$  do (9), a następnie uzyskany logit  $z$  do (3) otrzymuje się wyrażenie zależne od  $\beta$ , które można optymalizować metodą najmniejszych kwadratów kładąc  $p_k$  w miejsce  $f(z)$ . Optymalne  $\beta$  jest szukanym  $\alpha$ . Krok ten jest równoważny przeprowadzeniu zwykłej regresji logitowej (pkt. 2.b.).

2. Wyznaczenie najmniejszego stopnia rozmycia  $\delta=(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$

Rozwiązując zagadnienie optymalizacji kwadratowej (13) z ograniczeniami (14) ze względu na  $\delta=(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$  przy  $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  wyznaczonej w poprzednim kroku znajdujemy wektor  $\delta$ . Wektor ten reprezentuje dla każdego rdzenia  $\alpha_i$  stopień jego rozmycia  $\delta_i$ , gdzie  $i$  jest indeksem porządkowym zmiennych opisujących (od 1 do  $n$ ). Dla każdego z  $k$  podmiotów ze zbioru uczącego  $p_k$  oznacza, jak w poprzednim kroku, faktyczną realizację zmiennej objaśnianej.



Mamy zatem:

$$\sum_k (p_k - \alpha^T x_k)^2 + \sum_k \delta^T |x_k| |x_k|^T \delta \rightarrow \min, \quad (13)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} x_k \alpha + \delta^T |x_k| \geq p_k & \forall k \\ x_k \alpha - \delta^T |x_k| \leq p_k & \forall k \\ \delta \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Model kwadratowej regresji przedziałowej daje wynik w postaci liczby rozmytej  $y$ . Do dalszych rozważań przydatne są dwie wartości:  $y_-$  oraz  $y_+$  oznaczające odpowiednio dolną i górną granicę nośnika liczby rozmytej  $y$ .

W zależności od zastosowania - można przyjąć różne warianty interpretacji rozmytego wyniku  $y$ : liberalną  $(y_-, f_0)$ , ostrożnościową  $(y_+, f_0)$ , albo najbardziej wiarygodną  $(y_-, y_+, f_0)$ . W ostatnim przypadku model ten ocenia, że dany podmiot stanie się niewypłacalny, gdy obie wartości  $y_-$  oraz  $y_+$  przekroczą progową wartość  $f_0$  prawdopodobieństwa – powyżej którego zwykły model logitowy uznaje dany podmiot za zagrożony; natomiast stwierdza, że podmiot jest bezpieczny gdy obie wartości  $y_-$  i  $y_+$  są poniżej  $f_0$ . W pozostałych sytuacjach model ten nie daje jednoznacznej odpowiedzi.

## 2. Eksperyment badawczy

### a. Opis danych

Do przeprowadzonego doświadczenia użyte zostały dane pochodzące z serwisu Bloomberg oraz agencji Moody's Investors dotyczące przedsiębiorstw i korporacji amerykańskich emitujących papiery dłużne, bądź będących spółkami notowanymi na giełdzie. Dla potrzeb badania wybrane zostało początkowo ok. 2500 spółek aktywnych w latach 2003-2008, z czego ostatecznie wybrano grupę reprezentatywną w ilości 453 podmiotów, dla których dostępne były wszystkie wymagane obliczeniami dane. Przy wyborze grupy reprezentatywnej zapewnione zostało odpowiednie zróżnicowanie jednostek pod względem lokalizacji, czasu powstania, wielkości, posiadanego kapitału, sektora działalności, itp. Jedynie z uwagi na relatywnie niski odsetek występowania spółek niewypłacalnych w ogóle danych, w grupie reprezentatywnej proporcja ta została nieco zmieniona, w celu uzyskania bardziej obiektywnych wyników. Sytuacja ta wynika choćby z tego, że częstym następstwem niewypłacalności firmy jest jej bankructwo i całkowita likwidacja, bądź przejęcie przez inną jednostkę,



co w konsekwencji oznacza usunięcie jej danych z baz danych i serwisów. Problem ten poruszono m.in. w pracy [12]. Ponadto dla zapewnienia właściwości adekwatnej porównywalności danych, przyjęto podobnie jak w pracach [1], [2], że horyzontem obserwacji będzie 1 rok. W praktyce oznacza to, że w ostatecznej próbie danych znalazły się dane dla firm, które zostały niewypłacalne całkowicie, bądź częściowo – czyli nastąpił dla nich tzw. *default*<sup>4</sup> oraz takie, które przetrwały badany okres bez problemów z realizacją swoich zobowiązań – nie zanotowano dla nich *defaultu*.. W przypadku firm *defaultujących* brane pod uwagę były dane z roku poprzedzającego rok, w którym nastąpiło pierwsze stwierdzone niedotrzymanie zobowiązania finansowego, natomiast dla podmiotów, które nie wykazały przejawów jakiegokolwiek niewypłacalności, dane z przedostatniego dostępnego roku. Należy zwrócić szczególną uwagę, że proces przygotowania odpowiedniej bazy danych do badania jest bardzo żmudny, a rygorystyczne wymagania powodują odrzucenie wielu danych z uwagi na ich niekompletność, bądź niedostępność. Oczywiście zjawisko to istotnie ogranicza wielkość badanej próby i zmniejsza możliwości badawcze.

#### b. Źródło i struktura danych

W Tabeli 1 zostały przedstawione źródła danych na których zbudowano bazę danych do doświadczenia.

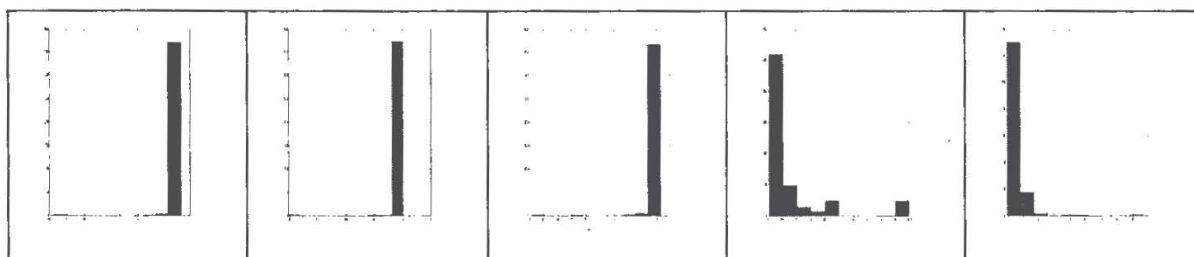
ZMIENNA	ZNACZENIE	ŹRÓDŁO DANYCH	NAZWY PÓL I PRZEKSZTAŁCENIA
X <sub>1</sub>	wsk. płynności	Bloomberg	{WORKING_CAPITAL}/{BS_TOT_ASSET}
X <sub>2</sub>	wsk. rentowności	Bloomberg	{BS_RETAIN_EARN}/{BS_TOT_ASSET}
X <sub>3</sub>	wsk. obsługi zadłużenia	Bloomberg	{EBIT}/{BS_TOT_ASSET}
X <sub>4</sub>	wsk. wypłacalności	Bloomberg	1/{TOT_DEBT_TO_TOT_EQY}
X <sub>5</sub>	wsk. aktywności	Bloomberg	{SALES_TO_TOT_ASSET}
P	Default	Bloomberg/ Moody's	{DEFAULTED}

Tabela 1. Opis parametrów modelu i źródła danych.

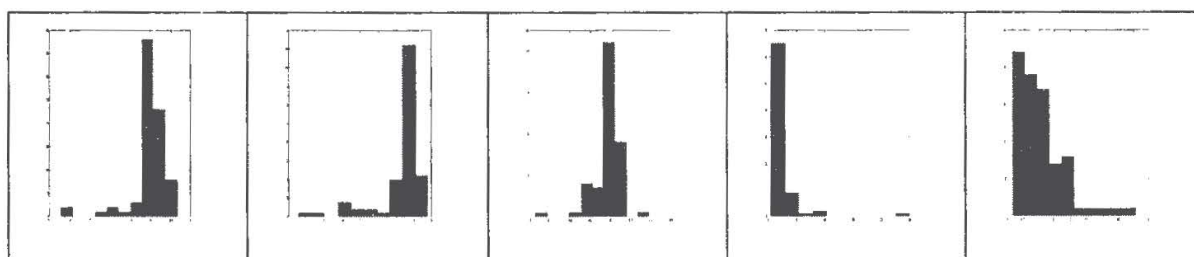
<sup>4</sup> Default – jest pojęciem potocznym, żargonowym, nie posiadającym ścisłego odpowiednika w jęz. polskim. Najczęściej tłumaczony jest jako niewypłacalność, jednakże jest to pewne uproszczenie, gdyż o defaulcie mówi się już wtedy, gdy dana jednostka w jakimkolwiek zakresie nie wykonała któregoś z swoich zobowiązań finansowego. Może to zaistnieć w sytuacji chwilowej utraty płynności, niekoniecznie niewypłacalności.

Rysunki 2 i 3 przedstawiają histogramy wszystkich zmiennych objaśniających odpowiednio dla jednostek wypłacalnych i dla niewypłacalnych.

Na poniższych rysunkach w każdym z okien przedstawiony jest osobno rozkład częstości przyjmowanych wartości przez każdą ze zmiennych opisujących. Okna są w kolejności indeksu zmiennych od lewej. Na osi pionowej zaznaczono częstość występowania wartości zmiennych opisujących w funkcji poszczególnych przedziałów przyjmowanych przez nią wartości.



Rysunek 2. Histogramy zmiennych objaśniających ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ) w grupie podmiotów wypłacalnych.



Rysunek 3. Histogramy zmiennych objaśniających ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ) w grupie podmiotów niewypłacalnych.

c. **Kalibracja parametrów modelu logitowego i przedziałowego**

Tabela 2 przedstawia wyniki kalibracji parametrów modelu logitowego oraz parametrów rozmytych modelu przedziałowego. Wartość progowa  $f_0$  została ustalona dla obydwu modeli na poziomie 0,3951 metodą najmniejszych kwadratów na próbie uczącej.

zmienna	wagi zmiennych w modelu logity- wym $\beta_i$ (rdzenie $\alpha_i$ dla modelu przedziałowego)	rozpiętość parametrów rozmytych $\delta_i$ w modelu przedziałowym
wyraz wolny	0,0891	0,2380
$x_1$	-1,5969	1,1603
$x_2$	0,1718	0,1612
$x_3$	-0,8052	0,2587
$x_4$	-0,4796	0,4775
$x_5$	0,3491	0,0000

Tabela 2. Wyniki optymalizacji modeli

### 3. Porównanie wyników

#### a. Metoda

Do oceny jakości uzyskanych wyników przydatne jest wprowadzenie rozróżnienia dwóch kategorii błędów, bowiem czym innym jest błędne zakwalifikowanie jako zagrożonego upadłością podmiotu, który pozostaje ciągle wypłacalny (tzw. błąd I-go rodzaju), a czym innym uznanie za niezagrożoną *defaultem* jednostkę, która staje się niewypłacalna (błąd II-go rodzaju). Z praktycznego punktu widzenia błąd II-go rodzaju może być dużo bardziej dotkliwy, gdyż wiąże się z możliwością zrealizowania dużej straty w przypadku zainwestowania w taki podmiot, podczas gdy błąd I-go rodzaju jedynie powstrzymuje od osiągnięcia potencjalnej korzyści związanej z zainwestowaniem kapitału w stabilny podmiot, który został niewłaściwie oceniony. Szerzej ten temat traktuje np. praca [6].

#### b. Rezultaty

Poniżej przedstawione jest zestawienie uzyskanych wyników oraz rodzajów i proporcji błędów. Pierwsze cztery wiersze pokazują statystyki warunkowe (w grupach, nie ważone udziałami grup), pozostałe w odniesieniu do całej próbki danych. Dla porównania pokazane są również wyniki zastosowania modelu Altmana do tych samych danych.



	model Altmana	model logitowy	model przedziałowy		
			dolna granica ( $y_- \sim f_0$ )	górną granica ( $y_+ \sim f_0$ )	maksymalnej wiary- godności ( $y_- \sim f_0, y_+ \sim f_0$ )
default poprawnie zaklasyfikowany	83,63%	55,12%	23,07%	87,17%	64,28%
brak defaultu poprawnie zaklasy- fikowany	74,92%	96,53%	99,73%	68,80%	99,61%
błąd I-go rodzaju	25,08%	3,47%	0,27%	31,20%	0,39%
błąd II-go rodzaju	16,37%	44,88%	76,93%	12,83%	35,72%
łączny błąd klasyfi- kacji (% całej próby)	23,58%	10,60%	13,47%	28,04%	6,47%
brak decyzji (% całej próby)	15,76%	0,00%	0,00%	0,00%	36,64%

Tabela 3. Porównanie trafności wskazań modeli

## Podsumowanie

Z przeprowadzonego badania wynika, że zarówno model logitowy jak i model przedziałowy wykazują mniejszą skuteczność klasyfikacji *defaultu* niż model Altmana. Niemniej jednak są prawie stuprocentowo skuteczne w potwierdzaniu dobrej kondycji finansowej (braku *defaultu*) badanych podmiotów, czym istotnie przewyższają model Altmana. Ponadto prosty model logitowy posiada właściwość decyzyjności bezwarunkowej (tzn. zawsze daje odpowiedź), natomiast model przedziałowy, podobnie jak model Altmana, czasami nie wskazuje jednoznacznej decyzji, ale za to wykazuje większą skuteczność w przypadku udzielenia odpowiedzi niż model logitowy.

Dodatkowo, porównując poszczególne wyniki modelu przedziałowego, w zależności od przyjętej interpretacji można otrzymać różne rezultaty. Największa skuteczność rozpoznania przypadku *defaultu* jest osiągalna przy zastosowaniu wariantu ostrożnościowego (ponad 87% skuteczności), symetrycznie, wykrycie przypadków bez *defaultu* dla wariantu liberalnego sięga prawie stu procent (99,73%). Z kolei najrzadziej błędne są decyzje podejmowane na podstawie modelu przedziałowego największej wiarygodności (tylko 6,47% błędnych klasyfikacji), lecz jest to kosztem małej decyzyjności (ponad 36% danych niesklasyfikowanych).

Podsumowując można stwierdzić przydatność modelu przedziałowego jako narzędzia wspierającego ocenę standingu finansowego, zwłaszcza przy umiejętnej interpretacji jego wyników. Z uwagi na duże rozbieżności w poszczególnych wariantach, zalecane jest stosowanie wybranych parametrów do pewnych klas zastosowań. Zatem model ten wnosi wartość dodaną, lecz nie powinien być stosowany samodzielnie, a raczej jako narzędzie wspierające.

Należy również zaznaczyć, że otrzymane szczegółowe rezultaty odnoszą się wyłącznie do danych wziętych do opisanego eksperymentu. W przypadku innej próby danych wyniki mogą odbiegać od przedstawionych.

## Literatura

- [1] Altman E. (1968): Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy, *Journal of Finance*, 1968, 23(4), 589-609.
- [2] Altman E., Haldeman L. G., Narayanan P. (1977): Zeta analysis: a new model to identify bankruptcy risk of corporations, *Journal of Banking and Finance*, 1, 29-54.
- [3] Beaver W.H. (1966): Financial ratios as predictors of failure, *Journal of Accounting Research*, 4, 71-111.
- [4] Blochwitz S., Hamerle A., Hohl A., Rauhmeier R., Rösch D. (2005): Myth and reality of discriminatory power for rating systems, *Wilmott Magazine*, 2005 January, 2-6.
- [5] Chorafas D. N. (1996): Financial statistics, probabilistic models and fuzzy engineering, *Euromoney Publications*, Workbook 5.
- [6] Donoso S., Marín N., Vila M.A. (2006): Quadratic Programming Models for Fuzzy Regression, *International Conference on Mathematical and Statistical Modeling in Honor of Enrique Castillo*, 2006 June 28-30.
- [7] Dubois D., Prade H. (1980): Theory and applications, *Fuzzy Sets and Systems*, 1980.

- [8] Lingo M., Winkler G. (2008): Discriminatory Power - An Obsolete Validation Criterion?, *SSRN*: <http://ssrn.com/abstract=1101508>
- [9] Maddala G. (1983): *Limited-dependent and qualitative variables in econometrics*, Cambridge University Press, 1983.
- [10] Tanaka H. (1987): Fuzzy data analysis by possibilistic linear models, *Fuzzy Sets and Systems* 1987, 24(3), 363-375.
- [11] Tanaka H., Watada J. (1998): Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model, *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 27, 275-289.
- [12] Tseng F-M., Lin L. (2005): *A quadratic interval logit model for forecasting bankruptcy*, *Omega*, Volume 33, Issue 1, 85-91.
- [13] Wysocki T. (2007): *Modelowanie prawdopodobieństwa niewypłacalności*, W: *Analiza systemowa w finansach i zarządzaniu – Wybrane problemy*, Tom 9, 236-243, J. Hołubiec (red.).
- [14] Zadeh L.A. (1965): Fuzzy sets, *Information and Control* 1965, 8, 338-353.
- [15] Żmijewski M. E. (1984): Methodological issues related to the estimation of financial distress prediction models, *Journal of Accounting Research*, 22, 59-82.





