

**Raport Badawczy**  
**Research Report**

**RB/78/2008**

**Optymalizacja  
zarządzania długiem  
skarbu państwa**

**L. Klukowski**

**Instytut Badań Systemowych**  
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**  
**Polish Academy of Sciences**



## **OPTIMALIZACJA ZARZĄDZANIA DŁUGIEM SKARBU PAŃSTWA**

**Leszek Klukowski**

IBS PAN, Newelska 6, 01-447 Warszawa

Leszek.Klukowski@ibspan.waw.pl

Przedstawiono główne wyniki osiągnięte w zakresie optymalizacyjnej metodologii zarządzania długiem publicznym w Polsce. Proponowana metodologia tworzy spójną, jednorodną całość, opiera się na realiach zarządzania w Polsce, została stworzona od podstaw. Jako narzędzia optymalizacyjne wykorzystano metody: \* optymalizacji wypukłej, w tym również stochastycznej, \* teorii gier oraz elementy \* inteligencji obliczeniowej (sztuczne sieci neuronowe). Celem dalszych prac w tym zakresie było: zastosowanie modeli optymalnego sterowania dwu-poziomowego (obejmujących poziom makroekonomiczny i operacyjny) oraz szersze wykorzystanie metod inteligencji obliczeniowej. Prezentowane wyniki powstały w latach 1998–2006, w trakcie pracy autora w Ministerstwie Finansów, we współpracy z Panią Elżbietą Kubą.

### 1. Wstęp

Zarządzanie długiem Skarbu Państwa jest przykładem zarządzania złożonym systemem finansowym. Polega ono na kształtowaniu poziomu i struktury długu oraz struktury przepływów finansowych wynikających z długu. Zarządzanie długiem można sformułować jako proces decyzyjny, tzn. proces rozwiązywania problemów decyzyjnych z zestawu o określonej strukturze.

Dług Skarbu Państwa przekroczył w 2007 r. wartość 500 mld zł. Znaczący poziom zadłużenia wpływa negatywnie na sytuację ekonomiczną kraju, stan budżetu państwa oraz sytuację na rynku finansowym. Optymalne zarządzanie długiem pozwala ograniczyć lub wyeliminować niektóre z tych oddziaływań, a zwłaszcza zminimalizować wydatki z tytułu kosztów obsługi oraz ograniczyć negatywny wpływ na politykę monetarną i rynek finansowy. Koszty obsługi długu osiągają poziom bliski 30 mld zł i będą rosły – ze względu na występowanie deficytu budżetowego. Nawet niewielkie, relatywnie, oszczędności wydatków z tego tytułu, np. 0,5%, osiągnięte w wyniku racjonalnego zarządzania długiem mogą zapewnić niepomijalne oszczędności - ponad 100 mln zł rocznie - nie pociągając za sobą istotnych wydatków. Optymalizacja zarządzania długiem ma zatem istotne znaczenie dla finansów publicznych i gospodarki kraju.

Decyzje składające się na proces zarządzania długiem dotyczą:

- struktury emisji instrumentów dłużnych (bonów i obligacji),
- rozkładu emisji instrumentów dłużnych w czasie,
- transakcji na składnikach długu.

Jako kryterium optymalności tych decyzji przyjmuje się – na poziomie podmiotu realizującego operacyjne zarządzanie długiem - minimalizację kosztów obsłu-

gi długu w dłuższym horyzoncie czasu, przy różnorodnych ograniczeniach - głównie na poziom ryzyka finansowego.

Decyzje składające się na zarządzanie długiem są podejmowane w warunkach ryzyka i niepewności. Zapewnienie optymalności takich decyzji w sposób tradycyjny - na podstawie doświadczenia, intuicji i prostych reguł decyzyjnych lub metod symulacyjnych - nie jest możliwe; wymaga zastosowania metod optymalizacyjnych.

- Wykorzystanie metod optymalizacji decyzji w praktyce wymaga:
  - sformalizowania problemów decyzyjnych,
  - wyznaczenia niezbędnych parametrów tych problemów,
  - opracowania algorytmów do efektywnego ich rozwiązania.

Celem artykułu jest zwięźle omówienie „technologii finansowej” umożliwiającej w praktyce optymalizację operacyjnego zarządzania długiem. Oznacza to rozwiązanie zarówno problemów teoretycznych, jak i praktycznych, zgodnie z istniejącymi w Polsce realiami. Zakres prac pozwalający zrealizować ten cel obejmuje:

1<sup>0</sup>. Sformułowanie zarządzania długiem w postaci procesu decyzyjnego w złożonym systemie finansowym tj. \* zestawu decyzji o określonym zakresie i strukturze, oraz: \* wskazanie ułomności zarządzania tradycyjnego, \* zaakcentowanie różnic w stosunku do problemów zarządzania finansowego w innych instytucjach finansowych i \* wykazanie korzyści ze stosowania optymalizacji decyzji.

2<sup>0</sup>. Sformułowanie zadań optymalizacyjnych odpowiadających rozważanym problemom decyzyjnym, tzn.: \* postaci funkcji celu i \* warunków ograniczających. Zmienne decyzyjne tych zadań wyrażają poziom sprzedaży instrumentów dłużnych na aukcjach z wieloma cenami. Sformułowane zadania należą do klasy dyskretnych – liniowych i nieliniowych; funkcje celu oraz niektóre ograniczenia mają postać funkcji empirycznych, o parametrach określonych przez wyniki aukcji. Cechy te skłaniają – ze względu na nakład obliczeń – do użycia metod przybliżonych, tzn. zastąpienia dyskretnych, nieliniowych funkcji empirycznych funkcjami aproksymowanymi. Niektóre parametry zadań oparte są na prognozach; zasadne jest wówczas wykorzystanie zadań stochastycznych.

Ogólną postać zadania optymalizacyjnego dla rozważanych problemów decyzyjnych można sformułować w następujący sposób:

zminimalizować: koszty obsługi emitowanego długu,  
przy warunkach ograniczających:

- \* potrzeby pożyczkowe budżetu (kapitał),
- \* właściwości emitowanego długu: poziom ryzyka, strukturę, terminy wykupu, itp.

Sformułowanie szczegółowej postaci zadań optymalizacyjnych dla zarządzania długiem wymaga określenia:

- rentowności instrumentów dłużnych i kosztów obsługi (kryterium optymalizacji),
- długości horyzontu optymalizacji (inwestycji),
- miar ryzyka.

## *Optymalizacja zarządzania długiem skarbu państwa*

Formułując rozważane zadania kierowano się trzema postulatami:

- osiągnięciem wysokiego poziomu adekwatności do realiów,
- możliwością wdrożenia w rutynowej pracy jednostki zarządzającej długiem,
- matematyczną złożonością zadań nie wymagającą od odbiorców wyników specjalistycznej wiedzy w zakresie metod optymalizacyjnych.

### 2. Zarządzanie instrumentami dłużnymi jako proces decyzyjny

Zarządzanie długiem stwarza obszar decyzyjny (zbiór rozwiązań dopuszczalnych), w którym należy określić decyzje optymalne. Ramy dla nich wyznaczają: strategia rozwoju makroekonomicznego kraju oraz strategia długu w dłuższym horyzoncie czasu. Podstawowym celem zarządzania długiem jest minimalizacja kosztów obsługi w przyjętym horyzoncie czasu, przy wypełnieniu ograniczeń dotyczących:

- a) poziomu i struktury długu;
- b) profilu zapadalności długu;
- c) rozkładu przepływów finansowych, wynikających z istnienia długu (odsetek i kapitału), w czasie;
- d) ryzyka związanego głównie z kształtowaniem się: \* stóp procentowych, \* poziomu i struktury potrzeb pożyczkowych budżetu, \* kursów walutowych, \* przepływów kapitału na rynkach, itp.;
- e) unikania negatywnego oddziaływania na rynek finansowy;
- f) zgodności z polityką monetarną i fiskalną kraju.

Zarządzanie długiem jest realizowane przy wykorzystaniu:

- instrumentów dłużnych – bonów i obligacji skarbowych oraz
- operacji na składnikach długu (przedterminowego wykupu, swap i repo, zamiany, transakcji terminowych itp.).

Struktura emisji instrumentów dłużnych pozwala kształtować własności (charakterystyki) emitowanego portfela długu. Operacje dokonywane na składnikach długu pozwalają natomiast zmieniać te charakterystyki przed terminem wykupu.

Metody optymalizacyjne nie są powszechnie stosowane w praktyce zarządzania w innych krajach; uważa się, że są to problemy prowadzące do zadań o znacznej złożoności. Próby opracowania takiego ujęcia problemu podjęto m.in.: w IMF i Banku Światowym (zob. Cleassens i in., 1995).

### 3. Sformułowanie zadań optymalizacyjnych

Podstawowymi narzędziami, które zastosowano, są metody: programowania matematycznego oraz teorii gier dwuosobowych. Problemy związane ze sformułowaniem zadań optymalizacyjnych dla zarządzania długiem obejmują określenie:

- a) zakresu optymalizowanych decyzji i stopnia agregacji zmiennych decyzyjnych;
- b) sposobu wyrażenia wielkości stanowiących kryterium optymalizacji, tj. rentowności instrumentów dłużnych oraz kosztów obsługi długu;

- c) zakresu i sposobu uwzględnienia wymogów (ograniczeń) ustalanych przez podmiot zarządzający długiem (m.in.: \* potrzeb pożyczkowych budżetu, \* ograniczeń wynikających z polityki monetarnej);
- d) zakresów wartości charakterystyk emitowanego lub poddawanego transakcjom portfela długu, uwzględnianych w warunkach ograniczających; jednym z najważniejszych jest poziom ryzyka;
- e) sposobu wyrażenia funkcji straty i kryterium wyboru strategii w grze strategicznej.

Rozważane dotychczas problemy decyzyjne sformułowane można podzielić na: bieżące i długofalowe (strategiczne). Decyzje bieżące dotyczą: - optymalizacji struktury bonów skarbowych sprzedawanych w ramach poszczególnych przetargów; - optymalizacji struktury obligacji skarbowych sprzedawanych w ramach poszczególnych przetargów; - optymalizacji struktury hurtowych obligacji skarbowych, z których każda jest sprzedawana na pojedynczym przetargu; - optymalizacji struktury instrumentów dłużnych sprzedawanych w ustalonym okresie czasu, np. kwartale, półroczu; - optymalizacji struktury instrumentów dłużnych sprzedawanych w ustalonym okresie czasu, z uwzględnieniem wielowariantowości prognoz stóp procentowych (przy wyborze wariantów użyto modelu dwuosobowej gry strategicznej i koncepcji macierzy semiwariancji i semikowariancji); - optymalizacji struktury bonów skarbowych sprzedawanych w trakcie wielu kolejnych przetargów, z uwzględnieniem wykupu bonów i możliwości dokonywania lokat i transakcji terminowych.

Do drugiej grupy należą decyzje w zakresie: - optymalizacji struktury sprzedaży instrumentów dłużnych w horyzoncie trzyletniej strategii zarządzania długiem (zadanie deterministyczne i stochastyczne); - operacji przedterminowego wykupu (refinansowania) określonych instrumentów dłużnych z równoczesną sprzedażą instrumentów przeznaczonych na pozyskanie środków na wykup; - transakcji swap polegającej na zamianie stopy procentowej – ze stopy zmiennej na stałą; - optymalizacji struktury długu krajowego i zagranicznego w horyzoncie trzyletnim.

Kryterium optymalizacji, tj. koszty obsługi długu, można sformułować na wiele sposobów. W dotychczasowych pracach (Klukowski 2003, 2005; Klukowski, Kuba 2001a, b; 2002 a, b) stosowano formułę o postaci: iloczyn kapitału (wpływów ze sprzedaży instrumentu) oraz rentowności (w postaci składanej stopy zwrotu, CRR). Ta postać wyraża średnioroczny koszt obsługi emitowanego portfela długu dla przyjętego horyzontu inwestycji i zapewnia porównywalność wyceny dla instrumentów o różnej konstrukcji i okresie życia, przy pełnym refinansowaniu długu.

Formuła określająca rentowność (*i*-tego) instrumentu w postaci składanej stopy zwrotu ma postać:

$$CRR_i = \left[ \left( \sum_{t=1}^{n-1} S_t \prod_{j=t+1}^n (1 + r_j) + N + S_n \right) / I_0 \right]^{1/n} - 1, \quad (1)$$

gdzie:  $S_t$  – przepływ finansowy (generowany przez instrument dłużny) w okresie  $t$ ,  
 $n$  – długość okresu inwestycji w latach,  
 $r_j$  – stopa procentowa (roczna) w okresie  $j$ ,  
 $I_0$  – kwota inwestycji (cena instrumentu w chwili sprzedaży),

$N$  – nominal instrumentu (cena – w przypadku przedterminowego wykupu)  
(w celu uproszczenia zapisu pominięto indeks  $i$  w symbolach  $S_i, n, r_j, I_0, N$ ).

Kapitał instrumentu dłużnego, płacony na przetargu, jest równy nominalowi pomniejszonemu o dyskonto i powiększonemu o wykupywane odsetki (tzw. *cena brudna*). Wielkość kapitału jednostkowego nie jest stała, zależy od poziomu sprzedaży; zwiększenie sprzedaży obniża poziom kapitału, ponieważ w przypadku aukcji z wieloma cenami wiąże się z akceptacją ofert o rosnącym dyskoncie. Kapitał jednostkowy z przetargu jest funkcją empiryczną o postaci wynikającej z ofert.

Funkcje określające kapitał i rentowność  $CRR_i$  są, wskutek stosowania aukcji z wieloma cenami, funkcjami nieliniowymi; ich iloczyn (średnioroczny koszt obsługi) jest - w ogólnym przypadku - nieliniową, dyskretną funkcją empiryczną. Przyjęte w pracy kryterium optymalizacji można wyrazić (w sposób uproszczony), w postaci:

$$\min_x \left\{ \sum_{i=1}^L x_i CRR_i(x_i) K_i(x_i) \right\}, \quad (2)$$

gdzie:  $L$  – liczba instrumentów dłużnych uwzględnionych w optymalizacji;  
 $x_i$  – sprzedaż instrumentu  $i$ -tego rodzaju (liczba nominalów) - zmienna decyzyjna;  $\mathbf{x}$  - wektor zmiennych decyzyjnych;  
 $CRR_i(x_i)$  – rentowność  $CRR$   $i$ -tego instrumentu, odpowiadająca sprzedaży  $x_i$ ;  
 $K_i(x_i)$  – kapitał (przypadający na jeden nominal)  $i$ -tego instrumentu, odpowiadający sprzedaży  $x_i$  nominalów.

Przykładowa funkcja celu minimalizująca koszty obsługi obligacji dwu- i pięcioletnich, przy założeniu pięcioletniego horyzontu optymalizacji ( $n_i=5$ ), ma postać:

$$\min_x [x_1 (M - d^{(1)}(x_1)) \psi_1(x_1) + x_2 (M - d^{(2)}(x_2) + C_2) \psi_2(x_2)], \quad (3)$$

$$\psi_1(x_1) = \left( \left( M - d^{(1)}(x_1) \right) \prod_{j=3}^5 (1 + r_{1j}) \right)^{1/n_1} - 1,$$

$$\psi_2(x_2) = \left( \left( M * R \sum_{k=1}^4 \prod_{j=k+1}^5 (1 + r_{2j}) + M(1 + R) \right) \left( M - d^{(2)}(x_2) + C_2 \right) \right)^{1/n_2} - 1$$

$$d^{(i)}(x_i) = \begin{cases} v_{i1}; & 0 < x_i \leq \pi_{i1}, \\ (\pi_{i1} v_{i1} + (x_i - \pi_{i1}) v_{i2}) / x_i; & \pi_{i1} < x_i \leq \sum_{j=1}^2 \pi_{ij}, \\ (\pi_{i1} v_{i1} + \pi_{i2} v_{i2} + (x_i - \pi_{i1} - \pi_{i2}) v_{i3}) / x_i; & \sum_{j=1}^2 \pi_{ij} < x_i \leq \sum_{j=1}^3 \pi_{ij}, \\ \dots \\ (\sum_{j=1}^v \pi_{ij} v_{ij} + (x_i - \sum_{j=1}^v \pi_{ij}) v_{i,v+1}) / x_i; & \sum_{j=1}^v \pi_{ij} < x_i \leq \sum_{j=1}^{v+1} \pi_{ij}, \\ \dots \end{cases} \quad (i=1, 2),$$

gdzie:  $C_2$  – kwota odsetek obligacji pięcioletniej (jednego nominalu) wykupywanych na przetargu;

$r_{ij}$  – stopa procentowa odpowiadająca  $i$ -temu instrumentowi, w roku  $j$ ;

$d^{(i)}(x_i)$  – dyskonto  $i$ -tej obligacji, odpowiadające sprzedaży równej  $x_i$  (różnica  $M - d^{(i)}(x_i)$  wyraża kapitał);

$v_{ik}$  – cena jednostkowa  $i$ -tej obligacji w  $k$ -tej ofercie (uporządkowanie ofert wg malejącej ceny);

$\pi_{ik}$  – liczba nominalów  $i$ -tej obligacji w  $k$ -tej ofercie.

Warunki ograniczające zadań optymalizacyjnych do zarządzania długiem można podzielić na dwa podzbiory – pierwszy jest określony przez sytuację budżetu państwa oraz politykę monetarną NBP, drugi - przez pożądane właściwości długu. Przykładowe warunki ograniczające poziom kapitału i ryzyka mają postać (numeryczną postać tego problemu podano w Dodatku):

$$\sum_{i=1}^L x_i (N - d^{(i)}(x_i)) \geq A \quad (A - \text{wymagany poziom kapitału}), \quad (4)$$

$e \leq (\sum_{i=1}^L \delta_i x_i) / \sum_{i=1}^L x_i \leq f$  (ograniczenie duracji portfela;  $\delta_i$  – duracja  $i$ -tego instrumentu), (5)

$\mathbf{z}^T \mathbf{S}_v \mathbf{z} \leq \lambda$  ( $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{S}_v$  - macierz semiwariancji-semikowariancji,  $\mathbf{z}$  – wektor wyrażający udział poszczególnych instrumentów w portfelu). (6)

Niektóre parametry występujące w funkcji celu i warunkach ograniczających są prognozami, np. przyszłe rentowności, poziom potrzeb pożyczkowych (kapitał), które można uznać za realizacje zmiennych losowych. Znając ich rozkłady, można nadać zadaniom optymalizacyjnym postać stochastyczną (Klukowski, Kuba, 2002).

Rozwiązywane dotychczas problemy decyzyjne dotyczące długu publicznego, zawierają zwykle od kilku do kilkudziesięciu zmiennych oraz warunków ograniczających. Dotychczasowe doświadczenia wskazują, iż zwiększenie liczby zmiennych, wynikające np. z dezagregacji zmiennych decyzyjnych, nie stwarza istotnych problemów numerycznych.

Przydatnym narzędziem do ograniczania ryzyka, wynikającego ze zmienności rynkowych stóp procentowych, są, obok warunków ograniczających mierniki ryzyka, modele z teorii gier. W dotychczasowych pracach zastosowano prosty model gry dwuosobowej ze skończoną liczbą strategii, uwzględniający przypadek posiadania wariantowych prognoz stóp procentowych (niezbędnych w funkcji celu); umożliwia on wybór jednego z wariantów – również w warunkach nieznajomości funkcji prawdopodobieństwa na zbiorze wariantów. W tym przypadku zastosowano rozwiązanie minimaksowe, tj. minimalizujące maksymalną stratę, najostrożniejsze z punktu widzenia emitenta. Elementami gry, wymagającymi zdefiniowania, są: gracze i ich strategie oraz funkcja straty. Graczami w grze są: emitent oraz inwestorzy (łącznie), a strategiami – warianty prognoz; elementy funkcji (macierzy) straty mają postać:

$$w_{sr} = \Phi_s(x_s^*) - \Phi_s(x_r^*), \quad (s=1, \dots, u; r=1, \dots, u) \quad (7)$$

gdzie:  $\Phi_s(\cdot)$  - funkcja celu postaci (2), odpowiadająca  $s$ -temu wariantowi prognozy,

$x_s^*$ ,  $x_r^*$  - rozwiązania optymalne odpowiadające – odpowiednio –  $s$ -temu oraz  $r$ -temu wariantowi prognozy,  
 $u$  – liczba wariantów prognoz.

Elementy macierzy strat (7) wyrażają przyrost średniorocznego kosztu obsługi długu, wynikający z przyjęcia decyzji (rozwiązania)  $x_r^*$  (optymalnej dla  $r$ -tego wariantu prognozy), w przypadku, gdy zrealizuje się wariant  $s$ -ty. W pracach Klukowski, Kuba (2001) i Klukowski (2003) podano uogólnienie funkcji (7) na przypadek, gdy rozwiązanie  $x_r^*$  nie spełnia warunków ograniczających zadania odpowiadającego wariantowi  $s$ -temu. Gra o powyższej postaci ma zawsze rozwiązanie optymalne; w przypadku kryterium minimaxowego może mieć ono postać zrandomizowaną, wyznaczaną przy użyciu zadania programowania liniowego.

Powyższe fakty pokazują, że zadania sformułowane do optymalizacji zarządzania długiem charakteryzują się znacząco wyższym poziomem złożoności, niż „klasyczne” zadania optymalizacji portfela instrumentów finansowych (zob. Elton, Gruber, 1991). Na szczególne podkreślenie zasługuje uwzględnienie istniejących realiów przetargów na instrumenty dłużne, które skutkują występowaniem nieliniowych funkcji empirycznych oraz wszechstronne ujęcie problemu ryzyka.

#### 4. Własności sformułowanych zadań

W celu określenia algorytmów do rozwiązania sformułowanych zadań należy zbadać własności występujących w nich funkcji. Źródłami trudności w optymalizacji tych decyzji są: \* występowanie nieliniowych funkcji empirycznych i \* dyskretny zbiór wartości zmiennych decyzyjnych, indukujący zbiory rozwiązań dopuszczalnych o dużej (ale skończonej) liczebności (implikuje to istnienie rozwiązań optymalnych). Rząd wielkości zmiennych decyzyjnych ( $10^4$ – $10^6$ ) oraz fakt, iż decyzje są zaokrąglane do wielokrotności dziesiątek lub setek nominałów, skłaniają do wykorzystania metod optymalizacji ciągłej. Pozwala to wyznaczyć postać analityczną składników funkcji celu, w zależności od parametrów określonych przez wyniki aukcji oraz zbadać wypukłość tych funkcji. Rozwiązywanie zadań wypukłych jest łatwiejsze, niż zadań nie mających tych własności. Czas obliczeń wymagany przez zadania wklęsło-wypukłe oraz dyskretne może być nie akceptowalny w praktyce.

W pracy Klukowski (2003, pkt 4.2.2) określono własności nieliniowych składników funkcji celu o postaci (3) oraz funkcji występujących w ograniczeniach kapitału. W szczególności wykazano, że:

- w przypadku rocznego horyzontu inwestycji (parametr  $n$  równy jeden, w formule (1) określającej rentowność CRR), przyjmowanego w zadaniach dla bonów, składniki funkcji celu mają postać funkcji przedziałami liniowych o rosnącym współczynniku kątowym, w kolejnych przedziałach (kolejne przedziały odpowiadają ofertom przetargowym, uporządkowanym wg rosnącego dyskonta). Składniki te są zatem przedziałami liniowymi funkcjami wypukłymi. W przypadku innego niż rok horyzontu, składniki te mają postać nieliniową;



- w przypadku horyzontu inwestycji dłuższego od roku, każdy składnik funkcji celu ma dodatnią pierwszą pochodną, natomiast ujemną drugą pochodną - dla wartości argumentu zawartych wewnątrz przedziału odpowiadającego ustalonej ofercie przetargowej. Druga pochodna jest bliska zeru i maleje do zera wraz ze wzrostem liczby nominalów w ofercie; funkcja dąży, wewnątrz przedziału odpowiadającego danej ofercie, do postaci liniowej. W konsekwencji funkcje będące składnikami funkcji celu mają, w przypadku rosnących do nieskończoności liczebności ofert, graniczną postać wypukłych funkcji przedziałami liniowych;

- funkcje występujące w ograniczeniach kapitału są wklęsłymi funkcjami przedziałami liniowymi.

Wymienione powyżej właściwości funkcji empirycznych uzasadniają dokonanie wypukłych aproksymacji składników funkcji celu. Rzeczywiste wartości każdej funkcji wykazują losowe odchylenia od ich aproksymacji wypukłych; rząd wielkości reszt z aproksymacji wskazuje, że rozwiązanie przybliżonej postaci zadania nie pogarsza w praktyce jakości decyzji. W obliczeniach empirycznych zastosowano, w dotychczasowych pracach, średniokwadratową aproksymację wielomianową. Stopień wielomianu określano przy wykorzystaniu miar adekwatności stosowanych w analizie regresji. Wypukłość aproksymowanych funkcji celu umożliwia efektywne uzyskanie rozwiązań: \* dobór efektywnego punktu startowego i parametrów algorytmów (najczęściej stosowano gradient sprzężony oraz algorytm quasi-Newtona), eliminujących w praktyce ich "zacięcia" (brak zbieżności) oraz \* krótki czas obliczeń.

Należy dodać, że w przypadku zadania dla bonów skarbowych można stosować, przy założeniu rocznego horyzontu optymalizacji i braku funkcji nieliniowych w warunkach ograniczających, algorytmy dokładne (tj. bez aproksymacji funkcji). Otrzymuje się wówczas zadanie liniowe dyskretne, zawierające kilkaset zmiennych decyzyjnych. Jego rozwiązanie przekracza zwykle czas przetargu (tj. otrzymuje się je po podjęciu decyzji), a wynik pokrywa się zwykle z rozwiązaniem przybliżonym (dotychczas nie otrzymano różnego w praktyce wyniku obu zadań). Postępowanie takie jest niecelowe, zwłaszcza, że czynnikiem determinującym rzeczywistą optymalność decyzji jest trafność prognoz rynkowych stóp procentowych.

Optymalizacja zapewnia obniżkę kosztów obsługi długu; w przypadku pojedynczych przetargów – do kilku promili, w przypadku zadań strategicznych: 1 - 3%.

### 5. Parametry niezbędne do sformułowania zadań

Najważniejszymi parametrami sformułowanych zadań są:

- a) długość horyzontu inwestycji;
- b) dopuszczalne zakresy wartości zmiennych decyzyjnych;
- c) prognozy stóp procentowych, występujące w funkcji celu oraz ograniczeniach;
- d) poziom potrzeb pożyczkowych budżetu;
- e) zakresy udziałów różnych rodzajów instrumentów w portfelu;
- f) zakres okresu zapadalności oraz duracji portfela instrumentów;
- g) dopuszczalny poziom ryzyka mierzonego przy wykorzystaniu macierzy semiwariancji i semikowariancji;

h) poziom i rozkład w czasie kosztów obsługi emitowanych lub poddawanych transformacjom instrumentów.

Określenie tych parametrów wymaga zrealizowania niezbędnych prac analitycznych i prognostycznych. Szczególnie istotny, ze względu na wpływ na rozwiązanie optymalne, jest horyzont inwestycji. Prosty sposób wyznaczenia tego parametru jest rozwiązywanie zadania optymalizacyjnego o postaci:

$$\min_h \left[ \sum_{i=1}^L w_i |h - \varpi_i| \right] \quad (8)$$

$$h \geq h_{\min},$$

gdzie:  $w_i$  – udział  $i$ -tej obligacji w łącznej sprzedaży obligacji;

$\varpi_i$  – długość okresu życia  $i$ -tego instrumentu;

$h$  – długość horyzontu (podlegająca optymalizacji).

Rozwiązanie optymalne *dostosowuje* horyzont inwestycji do rozkładu okresów życia instrumentów. Rozwiązaniem optymalnym jest tutaj mediana w rozkładzie okresów życia instrumentów lub  $h_{\min}$  jeśli mediana nie spełnia warunku  $h \geq h_{\min}$ .

## 6. Algorytmy rozwiązywania sformułowanych zadań

Sposób rozwiązania rozważanych zadań wynika z: (i) własności funkcji występujących w zadaniu (oraz ich aproksymowanych postaci), (ii) wymogów procesu decyzyjnego, (iii) parametrów dostępnej techniki obliczeniowej.

Do rozwiązania rozważanych zadań wykorzystano: do aproksymacji empirycznych funkcji nieliniowych przy wykorzystaniu wielomianów – metodę najmniejszych kwadratów; zaś do rozwiązania zadań optymalizacyjnych - algorytmy optymalizacji nieliniowej i liniowej.

Efektywne wykorzystanie zaproponowanych metod wymagało opracowania rozległego oprogramowania (liczącego kilkadziesiąt rozbudowanych arkuszy systemu *EXCEL*, wraz z programami liczącymi kilkanaście tysięcy linii w języku *Visual Basic*), m.in. do określenia: \* funkcji empirycznych i ich pochodnych, \* macierzy semiwariancji i semikowariancji, \* parametrów gry strategicznej, \* rzędu wielomianów aproksymacyjnych, jak również \* graficznej ilustracji wyników, np. precyzji aproksymacji i pochodnych funkcji nieliniowych.

## 7. Podsumowanie i wnioski

Przedstawiona powyżej metodologia umożliwia optymalizację podstawowych decyzji występujących w zarządzaniu długiem Skarbu Państwa. Atrybutami tej metodologii są: \* kompleksowość (uwzględnienie wszystkich istotnych decyzji), \* jednorodność narzędzi optymalizacyjnych (umożliwia łączną optymalizację różnych problemów decyzyjnych) oraz \* uwzględnienie realiów praktyki zarządzania.

Dotychczasowe wyniki stanowią też punkt wyjścia dla dalszych prac rozwojowych. Do głównych kierunków dalszych prac należy zaliczyć:

1<sup>0</sup>. Poszerzenie klasy użytych zadań optymalizacyjnych, zwłaszcza w celu szerszego uwzględnienia różnych rodzajów ryzyka. W przypadkach tego typu celowe jest zastosowanie metod programowania stochastycznego (osiągnięto już w tym zakresie wyniki) i rozmytego. Zasadne jest też użycie programowania wielokryterialnego.

2<sup>0</sup>. Sformułowanie zadań uwzględniających możliwość występowania sprzężeń zwrotnych w procesie decyzyjnym. Zasadne jest wówczas wykorzystanie metod optymalnego sterowania oraz modeli gier wieloetapowych.

3<sup>0</sup>. Zwiększenie skali integracji zadań optymalizacyjnych, tzn. łączne ujęcie rozpatrywanych odrębnie problemów decyzyjnych. Spowoduje to zwiększenie złożoności sformułowań problemów decyzyjnych oraz metod ich rozwiązywania.

4<sup>0</sup>. Nadanie odpowiedniej rangi problemom prognozowania; dotyczy to zmiennych z zakresu makroekonomii, koniunktury, rynków finansowych. Zmienne te wykazują złożone powiązania - często o zmiennej w czasie postaci, niełatwe do określenia (prognozowanie ich wymaga złożonych modeli).

5<sup>0</sup>. Poszerzenie dotychczasowego spektrum procedur decyzyjnych o algorytmy uczące, uwzględniające zmienność sytuacji. Jako narzędzia do tego celu można wykorzystać metody z dziedziny sztucznej inteligencji, a zwłaszcza sieci neuronowe oraz algorytmy ewolucyjne.

6<sup>0</sup>. Rozwinięcie koncepcji zadań dla potrzeb koordynacji zarządzania długiem krajowym i zagranicznym. Zadania te będą *ewoluować* w związku z akcesją do UE i wzrostem udziału polskich instrumentów dłużnych w rynku międzynarodowym.

Osiągnięcie satysfakcjonujących wyników w w/w zakresie wydaje się w pełni realne, podniesie znacząco efektywność zarządzania długiem. Do podstawowych korzyści wdrożenia proponowanych metod należy zaliczyć:

(i) przeniesienie punktu ciężkości na prace koncepcyjne – formułowanie kompleksowych problemów decyzyjnych (celów, ograniczeń, wymogów, uwarunkowań) oraz opracowywanie metod ich rozwiązywania;

(ii) większy zakres formalizacji problemów decyzyjnych, implikujący szersze spektrum metod ich rozwiązywania;

(iii) zmniejszenie nakładu *pracy ludzkiej* w stosunku do tradycyjnego, hybrydowego rozwiązywania problemów (heurystycznego z elementami sformalizowanymi, które nie tworzą integralnej jedności).

Zamierzenia te są ograniczone możliwością absorpcji wyników w praktyce.

## **Dodatek**

### Optymalizacja przetargu sprzedaży obligacji dwu- i pięcioletniej

Oznaczenia:

$x_1$  - liczba nominalów obligacji dwuletnich (zmienna decyzyjna zadania),

$x_2$  - liczba nominalów obligacji pięcioletnich (zmienna decyzyjna zadania),

$d^{(i)}(x_i)$ ,  $i = 1, 2$  - średnie dyskonto przypadające na jedną obligację  $i$ -tego rodzaju ze sprzedaży  $x_i$  obligacji (oferty uporządkowane wg rosnącego dyskonta),

*Optymalizacja zarządzania długiem skarbu państwa*

$R$  - oprocentowanie kuponu obligacji pięcioletniej,

$r_{t+l}$  - rynkowa stopa procentowa w roku  $t+l$ ,  $t$  - rok bieżący,  $l \geq 1$ ,

$\delta_i, i=1, 2$  - duracja obligacji  $i$ -tego rodzaju (średnia dla danego przetargu);

$M$  - nominał jednej obligacji (1000 zł),

$C_2$  - odsetki od obligacji pięcioletniej wykupywane na przetargu.

Funkcja celu:

$$\min_x \{(M - d^{(1)}(x_1)) x_1 \psi_1(x_1) + (M - d^{(2)}(x_2) + C_2) x_2 \psi_2(x_2)\},$$

Warunki ograniczające:

$$\sum_{i=1}^2 x_i (M - d^{(i)}(x_i) + C_i) \geq A \quad (i=1, 2) \quad (\text{ograniczenie kapitału; } C_1 = 0),$$

$$b_i \leq x_i \leq c_i, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{ograniczenie liczby nominałów } i\text{-tej obligacji})$$

$$e \leq (2x_1 + 5x_2) / \sum_{i=1}^2 x_i \leq f \quad (\text{ograniczenie zapadalności portfela})$$

$$g \leq (\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2) / \sum_{i=1}^2 x_i \leq h \quad (\text{warunek ograniczający durację portfela}),$$

$$\psi_i(x_i) \leq \rho_i \quad (i=1, 2) \quad (\text{ograniczenie rentowności } i\text{-tego instrumentu}),$$

$$u_i \leq x_i / (x_1 + x_2) \leq w_i \quad (i=1, 2) \quad (\text{ograniczenie udziału poszczególnych obligacji}).$$

Numeryczna postać zadania

Funkcja celu - parametry wielomianów aproksymacyjnych podano w Tablicy 1.

Warunki ograniczające:

$$\sum_{i=1}^2 x_i (M - d^{(i)}(x_i) + C_i) \geq 1\,770\,457\,939;$$

$$1\,100\,000 \leq x_1 \leq 1\,700\,000;$$

$$600\,000 \leq x_2 \leq 900\,000;$$

$$2,1 \leq 1,78x_1/(x_1+x_2) + 4,2x_2/(x_1+x_2) \leq 5,0 \quad (\text{ograniczenie duracji});$$

$$2,5 \leq 1,78x_1/(x_1+x_2) + 4,84x_2/(x_1+x_2) \leq 5,0 \quad (\text{ograniczenie średniej zapadalności}).$$

Tablica 1. Parametry aproksymowanej funkcji celu - obligacji 2-letniej i 5-letniej.

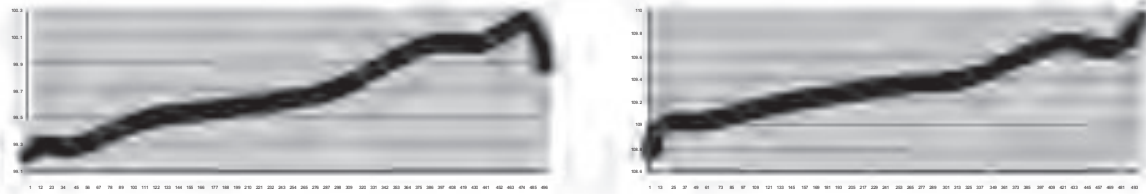
Rodz. oblig.	Odch. stand.	Parametry aproksymowanej funkcji celu: współczynnik przy zmiennej w potęgach											
		$x_i^0$	$x_i^1$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i^5$	$x_i^6$	$x_i^7$	$x_i^8$	$x_i^9$	$x_i^{10}$	$x_i^{11}$
OK	4971	1,3E4	9,9E1	4,5E-7	-1,1E-12	1,3E-18	-8,1E-25	3,2E-31	-7,8E-38	1,2E-44	-1,2E-51	6,8E-59	-1,6E-66
PS	491	1,1E4	1,1E1	7,3E-6	-8,8E-11	5,9E-16	2,4E-21	6,3E-27	-1,0E-32	1,1E-38	-7,6E-45	2,9E-51	-4,7E-58

Źródło: obliczenia własne. Zapis zEυ oznacza liczbę z pomnożoną przez  $10^υ$ .

Rozwiązanie optymalne powyższego zadania ma postać:  $x_1^* = 1\,617\,064$ ,  $x_2^* = 600\,000$ . Wskazuje ono, że niższe średnioroczne koszty obsługi zapewnia obligacja dwuletnia (wartość  $x_2^*$  równa dolnemu ograniczeniu). Wartość funkcji celu

odpowiadająca temu rozwiązaniu wyniosła 226 110 348,7 zł; jest to wartość mniejsza o 0,13% w stosunku do rozwiązania odpowiadającego decyzji podjętej w trakcie przetargu. Duracja portfela wyniosła 3,53 roku, a okres zapadalności -3,74 roku.

Rys. 1. Wykres pochodnych (aproksymowanych) składników funkcji celu obligacji:



dwuletniej

pięcioletniej

### Literatura

- Cleassens S., Kreuser J., Seigel L., Wets R. J-B. (1995) A Strategic Approach to External Asset/Liability Management in Developing Countries. Research Proposal, The World Bank, July 11.
- Elton E. J., Gruber M. J. (1991) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. J. Wiley, New York.
- Klukowski L. (2003) *Optymalizacja decyzji w zarządzaniu instrumentami dłużnymi Skarbu Państwa*. Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Seria: MONOGRAFIE, Warszawa.
- Klukowski L. (2005) Kompleksowa optymalizacja zarządzania zadłużeniem Skarbu Państwa. W.: Studziński J., Drelichowski L., Hryniewicz O., red., *Zastosowania Informatyki w Nauce, Technice i Zarządzaniu*. IBS PAN, *Badania Systemowe* **41**, Warszawa.
- Klukowski L., Kuba E. (2001a) Optymalizacja zarządzania długiem Skarbu Państwa. Minimalizacja kosztów obsługi instrumentów dłużnych emitowanych na rynku krajowym. *NBP Materiały i Studia*, 119 (streszczenie w portalu NBP).
- Klukowski L., Kuba E. (2001b) Minimization of public debt servicing costs based on nonlinear mathematical programming approach. *Control & Cybernetics*, **30**, 1.
- Klukowski L., Kuba E. (2002a) *Optymalizacja zarządzania długiem Skarbu Państwa w horyzoncie trzyletnim*. W: Kacprzyk J., Węglarz J., red., *Badania Operacyjne i Systemowe wobec wyzwań XXI wieku. Modelowanie i optymalizacja, metody i zastosowania*. EXIT, Warszawa.
- Klukowski L., Kuba E. (2002b) *Stochastyczna optymalizacja strategii zarządzania skarbowymi instrumentami dłużnymi*. NBP Materiały i Studia, 152 (tekst w portalu NBP).

