Raport Badawczy
Research Report

RB/43/2008

Mezoskopowe modele przepływów strumieni ruchu drogowego

M. Bereziński

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2008

Mezoskopowe modele przepływów strumieni ruchu drogowego

Mirosław Bereziński
Instytut Badań Systemowy PAN
01-447 Warszawa, ul. Newelska 6
Miroslaw.Berezinski@,ibspan.waw.pl

Streszczenie

Zwrócono uwagę, że podstawy teorii ruchu drogowego zostały sformułowane w połowie 20. wieku przez wybitnych fizyków, którzy nadali jej strukturę zgodną ze strukturą fizyki newtonowskiej. Przez analogię do fizyki rozwinięto w niej przede wszystkim dwa nurty badawcze: mikroskopowy i makroskopowy. Pierwszy dąży do wiernego odwzorowania struktury strumienia pojazdów i oddziaływań między pojazdami, drugi patrzy na strumień w sposób całościowy. W obu przypadkach modelem strumienia pojazdów są odpowiednie zależności matematyczne uzupełnione odpowiednimi zależnościami empirycznymi. Z uwagi na systemową złożoność strumieni pojazdów nie ma możliwości bezpośredniego wyznaczenia ich własności makroskopowych na podstawie mikroskopowych. Stąd potrzeba znalezienia ogniwa pośredniego między mikroskopowym i makroskopowym, tj. podejścia mezoskopowego. W pracy proponuje się, aby – idąc jak dotychczas tropem fizyki – podjąć próbę skonstruowania mezoskopowej teorii ruchu drogowego przez analogię do teorii kinetycznej, która w fizyce jest pośrednim ogniwem między mikroskopową i makroskopową analizą własności materii. W szczególności jako model przepływu strumienia pojazdów wybrano przepływ strumienia gazu w naczyniu o odpowiednim kształcie. Przedstawiono podstawowe założenia kinetycznej teorii gazów i przedyskutowano ich zgodność z własnościami ruchu drogowego. Sformułowano równania matematyczne, które powinny stanowić trzon każdego mezoskopowego modelu ruchu. Podano formuły na obliczanie wartości makroskopowych charakterystyk strumienia na podstawie charakterystyk mezoskopowych.

Słowa kluczowe: ruch drogowy, strumień pojazdów, modele mikroskopowe, modele makroskopowe, modele mezoskopowe, mechanika płynów, fizyka statystyczna

1. Wprowadzenie

W klasycznej teorii ruchu drogowego wyróżniano dwa podejścia do modelowania przepływu strumieni pojazdów na sieciach: mikroskopowe i makroskopowe. Włożono dużo wysiłku w powiązanie tych podejść, a jego myślą przewodnią było dążenie do opracowania metodologii określania makroskopowych własności ruchu bezpośrednio na podstawie znajomości jego własności mikroskopowych. Nie przyniosło to jednak spodziewanych rezultatów. Z powodów czysto praktycznych okazało się to niemożliwe. Powstaje więc konieczność szukania innych sposobów powiązania podejścia mikroskopowego z makroskopowym. Przedstawienie propozycji takiego podejścia jest podstawowym celem tej pracy.

2. Rola fizyki w powstaniu i rozwoju teorii ruchu drogowego

U źródeł proponowanego w tej pracy podejścia leży spostrzeżenie, że chociaż teoria ruchu drogowego liczy już bez mała dziewięćdziesiąt lat, to jednak właściwy jej rozwój zaczął się dopiero w latach 50. dwudziestego wieku i jest dziełem przede wszystkim fizyków. Impulsem do zainteresowania się tego środowiska ruchem drogowym było ukazanie się pracy E.M.J. Herrey'a i H. Herrey'a, w której po raz pierwszy zostały sformułowane podstawowe zasady ruchu drogowego w kategoriach pojęciowych fizyki newtonowskiej (Herrey i Herrey 1945). Kilka lat później niemiecki matematyk, W. Prager (1903-1980), przeprowadził niezwykle wnikliwą analizę problemów ruchowych w transporcie i zwrócił uwagę na możliwość wykorzystania w badaniach nad ruchem drogowym analogii tego zjawiska do przepływu prądu w układach elektrycznych (Prager 1954). Praca ta wzbudziła zainteresowanie wielu wybitnych ówczesnych fizyków, którzy z miejsca zaangażowali się w nową dla nich dziedzinę praktyki. Nie ma żadnej przesady w stwierdzeniu, że głównymi twórcami teorii ruchu drogowego byli amerykańscy i europejscy fizycy tej miary, co G.F. Newell (1925-2001), E.W. Montroll (1916-1983), R.

Herman (1914-1997), R.B. Potts (1925-2005), I. Prigogine (1917-2003) i inni. Potem, w połowie lat 70. dwudziestego wieku, na kilkanaście lat zdecydowanie przejęli pałeczkę teoretycy reprezentujący fizykę matematyczną, ale na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych znów doszli do głosu fizycy. Tym razem była to młoda generacja przede wszystkim naukowców europejskich i japońskich, takich jak M. Bando, D. Helbing, B.S. Kerner, P. Konhäuser, R. Kühne, K. Nagel, A. Schadschneider, M. Schreckenberg, Y. Sugiyama, S. Yukawa i wielu innych.

Podstawowym rysem metodologicznym teorii ruchu drogowego, nadanym jej przez fizyków, stało się wyodrębnienie dwóch podejść badawczych, różniących się skalą szczegółowości rozpatrywania ruchu: mikroskopowego i makroskopowego. Cała dotychczasowa teoria ruchu mieści się w ramach wyznaczonych przez te podejścia. Gdy każde z nich osiągnęło pewien poziom teoretycznej dojrzałości, wtedy powstało pytanie: czy można, a jeśli tak, to w jaki sposób, określić makroskopowe własności strumienia ruchu na podstawie znajomości jego własności mikroskopowych? Z teoretycznego punktu widzenia odpowiedź na nie jest prosta: ponieważ wszystkie charakterystyki makroskopowe mają sens średnich statystycznych, więc wystarczy znać liczbę pojazdów znajdujących się w danej chwili na sieci oraz wartości interesujących badacza parametrów ruchowych każdego z nich, aby – za pomocą operacji uśredniania – wyznaczyć wartości odpowiednich charakterystyk makroskopowych. Rzecz w tym, że jednoczesne określenie wartości parametrów ruchowych poszczególnych pojazdów jest praktycznie niewykonalne. Nie można więc bezpośrednio skorzystać z operacji uśredniania. Problem znalezienia metodologicznego ogniwa łączącego modelowanie mikroskopowe ruchu drogowego z modelowaniem makroskopowym pozostaje więc otwarty.

Wydaje się, że istnieje swoista blokada myślowa utrudniająca rozwiązanie tego problemu. Aby zrozumieć jej przyczyny trzeba przede wszystkim uzmysłowić sobie, że teoria ruchu drogowego powstała i rozwinęła się w ramach paradygmatu newtonowskiego determinizmu, który obowiązywał w fizyce do początku lat 30. dwudziestego wieku, kiedy to W. Heisenberg i E. Schrödinger sformułowali podstawy mechaniki kwantowej, opartej na paradygmacie stochastycznego determinizmu. Dopełniając widzenie rzeczywistości w kategoriach koniecznych związków przyczynowo-skutkowych paradygmat ten uznał obiektywny charakter przypadkowości. Zwracał uwagę na to, że nie jest prawdą, iż zjawiska mogą być tylko albo konieczne, albo przypadkowe. Relacja między koniecznością i przypadkowością polega na tym, że przypadkowość jest formą przejawiania się konieczności i jej dopełnieniem (zob., np.: Gawecki 1969; Miakiszew 1976; Einstein i Infeld 1998; Feynman 2000; Stróżewski 2007).

Niestety, idea ta dotychczas jeszcze nie przeniknęła do wielu dziedzin nauki, między innymi do teorii ruchu drogowego. Cały jej dorobek mieści się w ramach paradygmatu newtonowskiego. A przecież kiedy w latach 50. formułowano podstawy teorii ruchu, w fizyce już od przeszło dwudziestu lat obowiązywał paradygmat determinizmu stochastycznego. Pod jego wpływem powstały nowe teorie fizyczne, takie jak mechanika statystyczna i mechanika kwantowa, których idee wciąż jeszcze nie znalazły odbicia w teorii ruchu drogowego. Jeszcze bardziej zastanawiający jest fakt, iż nie zwrócono uwagi na to, że w klasycznej fizyce istnieje teoria, która jest ogniwem pośrednim między mikroskopową i makroskopową teorią gazów. Chodzi o kinetyczną teorię gazów.

Skoro mikroskopowa teoria ruchu została skonstruowana przez analogię do fizyki mikroskopowej, a makroskopowa – przez analogię do fizyki makroskopowej, to warto zastanowić się, czy przez analogię do kinetycznej teorii gazów nie można by stworzyć teorii będącej pośrednim ogniwem między mikroskopowym i makroskopowym modelowaniem ruchu, czyli teorii mezoskopowej. Aby na nie odpowiedzieć trzeba przede wszystkim przypomnieć główne idee kinetycznej teorii gazów.

3. Podstawowe postulaty kinetycznej teorii gazów a realia ruchu drogowego

Korzenie tej teorii tkwią w pracach holendersko-szwajcarskiego fizyka – D. Bernoulliego (1700-1782), rosyjskiego uczonego – M.W. Łomonosowa (1711-1765), niemieckiego fizyka – R. Clausiusa (1822-1888) oraz szkockiego matematyka i fizyka – J.C. Maxwella (1831-1879). Podstawy teorii zostały sformułowane przez fizyka austriackiego – L.E. Boltzmanna (1844-1906), a rozwinięte – przede wszystkim przez niemieckiego fizyka, A. Einsteina (1872-1917) oraz polskiego fizyka, M. Smoluchowskiego (1879-1955). Teoria była pomyślana jako podejście łączące mikroskopową analizę gazów z analizą makroskopową, tj. jako podejście mezoskopowe. Ma charakter statystyczny i zajmuje się określaniem całościowych własności gazu na podstawie praw rządzących ruchem jego cząsteczek.

W kinetycznej teorii gazów rozpatruje się gaz zamknięty w jakimś naczyniu i zakłada się, że: (1) gaz ma budowę cząsteczkową, (2) liczba cząsteczek jest wystarczająco duża, by było uprawnione korzystanie z metod statystycznych, (3) cząsteczki trwają w nieustannym chaotycznym ruchu i zderzają się ze sobą, (4) zderzenia cząstek ze ściankami naczynia są odbywają się błyskawicznie i idealnie elastycznie, (5) interakcje między cząsteczkami są pomijalnie małe, (6) średnia odległość cząsteczek od siebie jest stosunkowo duża w porównaniu ze średnicą cząsteczki, (7) cząsteczki mają kształt kulisty i są doskonale elastyczne, (8) średnia energia kinetyczna cząsteczek zależy tylko od temperatury gazu, (9) efekty relatywistyczne i kwantomechaniczne są pomijalnie małe, (10) równania ruchu cząsteczek są odwracalne w czasie (zob., np., Grad 1950, Duckworth 1983; Huang 2006). Liczba założeń upraszczających jest długa. Powstaje pytanie, czy są one możliwe do zaakceptowania z punktu widzenia ruchu drogowego i czy stworzona na wzór kinetycznej teorii gazów teoria kinetyczna ruchu drogowego mogłaby pełnić rolę ogniwa pośredniczącego między podejściem mikroskopowym i makroskopowym. Próba odpowiedzenia na to pytanie jest treścią tej pracy.

Przede wszystkim trzeba zastanowić się, w jakiej mierze powyższe założenia przystają do rzeczywistości ruchowej w drogownictwie. Odpowiednikiem naczynia jest droga lub odcinek drogi, przy czym przyjmuje się, że są one tworami płaskimi (odcinkami lub prostokątami).Jeśli chodzi o dalsze założenia, to:

(1) Tradycyjnie przyjmuje się, że fizyczną idealizacją pojazdu jest punkt materialny – strumieniowi pojazdów odpowiada więc układ punktów materialnych na odcinku lub w prostokącie symbolizującym rozpatrywany układ drogowy.
(2) Zakłada się, że układ drogowy jest w stanie natłoku lub bliskim natłokowi. Stanom tym odpowiada duża gęstość strumienia, tj. duża liczba pojazdów przypadających na jednostkę długości drogi.
(3) Pojazdy przemieszczają się na drodze, ale ich ruch nie jest chaotyczny, lecz świadomie ukierunkowany w przód, przy czym nie powinno dochodzić do zderzeń.
(4) Nie powinno dochodzić do kolizji pojazdów z fizycznymi krawędziami drogi – pojazd w ruchu powinien stale utrzymywać się na drodze.
(5) Mają miejsce silne czasoprzestrzenne oddziaływania między pojazdami i to zarówno na drogach jednopasowych, jak i wielopasowych. Szczególnie ważne są oddziaływania pojazdu jadącego z przodu (tzw. lidera), na pojazd lub pojazdy jadące bezpośrednio za nim oraz oddziaływania związane z wykonywaniem manewrów drogowych (zmiana pasma ruchu, wjazd na drogę, wyprzedzanie itd.).

(6) Średnia odległość pojazdów w strumieniu nie zawsze jest większa od średniej długości pojazdu, ale – z uwagi na konieczność utrzymania bezpieczeństwa ruchu – nigdy nie powinna być mniejsza niż droga hamowania.
(7) Pojazdy mają różne kształty i różne wymiary zewnętrzne.
(8) Średnia energia kinetyczna pojazdów zależy przede wszystkim od temperatury strumienia (temperatura strumienia pojazdów jest miarą zdolności przekazywania energii ruchu między bezpośrednio stykającymi się ze sobą odcinkami drogowymi).
(9) W ruchu drogowym efekty relatywistyczne i kwanto-mechaniczne nie występują.
(10) Równania ruchu pojazdów są odwracalne, tzn. zmiana kierunku biegu czasu nie wpływa na postać równań.

Jak widać, chociaż istnieje wiele podobieństw między strumieniem gazu a strumieniem pojazdów, to jednak istnieją również między nimi istotne różnice. Wydaje się, że najważniejszą z nich jest to, że o ile cząsteczki gazu wykonują ruchy w różnych kierunkach, to ruch pojazdów powinien być zawsze ukierunkowany w przód.

Podejście mezoskopowe do modelowania strumienia ruchu drogowego ma być ogniwem pośrednim między podejściami mikroskopowym i makroskopowym. Jest to zagadnienie podobne do tego, jakim od dawna zajmują się fizycy i które doprowadziło do powstania tzw. kinetycznej teorii materii. Jej korzenie sięgają co najmniej połowy 18. wieku. Jej naukowe podstawy sformułowali przede wszystkim L. Euler (1707-1783), L.M.H. Navier (1785-1836) i G.G. Stokes (1819-1903). Teoria ta powstała więc i rozwinęła się w ramach paradygmatu klasycznej fizyki, którego istotę wyrażała filozoficzna koncepcja mechanicznego determinizmu (Euler 1755a, 1755b; Navier 1827; Stokes

1845). Głosiła ona, że wszystkie własności materii można opisać w kategoriach pojęciowych obowiązujących na poziomie cząsteczkowej budowy materii

Chociaż teoria kinetyczna osiągnęła największe sukcesy w dziedzinie gazów, to jednak nie ogranicza się do samych tylko gazów. Jej podstawowym celem było rozstrzygnięcie, czy można przyjąć, że zjawiska cieplne zachodzące w gazach są efektem ruchu cząsteczek i ich wzajemnych bezpośrednich oddziaływań. Uznano, że skoro każde zjawisko fizyczne ma charakter mechaniczny, to również ciepło musi być formą energii mechanicznej. To przekonanie legło u podstaw kinetycznej teorii gazów. W teorii tej gaz jest traktowany jako zbiorowisko olbrzymiej liczby cząsteczek, które poruszają się we wszystkich kierunkach zderzając się ze sobą i zmieniając przy każdym zderzeniu kierunek ruchu. Zakłada się, że ponieważ istnieje średnia prędkość cząsteczek, więc istnieje także średnia energia kinetyczna przypadająca na jedną cząsteczkę. Skoro tak, to ciepło nie jest jakąś odmienną od mechanicznej postacią energii, ale jest po prostu średnią energią kinetyczną ruchu cząstek, która jest miarą temperatury gazu. Wzrost lub spadek temperatury gazu oznaczają więc – odpowiednio – zwiększenie się lub zmniejszenie średniej energii kinetycznej jego cząsteczek.

Kinetyczna teoria gazów jest zasadniczo zgodna z doświadczeniem i tłumaczy – zarówno w sposób ilościowy, jak i jakościowy - istotę ustanowionych eksperymentalnie praw mechaniki gazów. Na gruncie kinetycznej teorii gazów zinterpretowano temperaturę, ciśnienie, entropię i inne makroskopowe funkcje stanu, wyrażając je przez wartości średnie odpowiednich wielkości mikroskopowych. Wychodząc z założenia, że między cząstkami gazu zachodzą proste oddziaływania, określono również postać równania stanu gazów. Skorzystanie z ustanowionego przez J.C. Maxwella (1831-1879) prawa rozkładu prędkości cząsteczek w gazie jednorodnym w warunkach stałej temperatury pozwoliło uściślić rachunki związane z obliczaniem wartości wielu parametrów i uczyniło teorię kinetyczną jeszcze bardziej realistyczną. Maxwell sformułował też prostą mikroskopową teorię takich zjawisk jak przewodnictwo cieplne, lepkość oraz dyfuzja gazów. Trzeba jednak pamiętać, że współczesna fizyka odrzuciła możliwość mechanistycznego wyjaśniania wszelkich zjawisk. Kinetyczna teoria gazów ma więc charakter uproszczony. Uproszczenie to automatycznie przenosi się na wszystkie jej zastosowania do modelowania zjawisk rzeczywistych. Przenosi się więc również na modelowanie przepływów strumieni pojazdów w drogownictwie. Z tego aproksymacyjnego charakteru teorii kinetycznej trzeba sobie w pełni zdawać sprawę, tym bardziej, że dojdą do tego jeszcze inne uproszczenia rzeczywistości ruchowej.

4. Ogólna charakterystyka podejść mikroskopowego i makroskopowego

Aby zrozumieć potrzebę i istotę podejścia mezoskopowego do badania ruchu drogowego trzeba najprzód dobrze pojmować ideę podejść mikroskopowego i makroskopowego. Scharakteryzujemy więc pokrótce te podejścia.

4.1. Podejście mikroskopowe

Modele mikroskopowe są najbardziej szczegółowymi opisami strumieni pojazdów. Są to modele deterministyczne, a jeśli występuje w nich element przypadkowości, to pojawia się on zawsze w fazie szacowania liczbowych wartości parametrów modelu na podstawie wyników obserwacji ruchu. Istotą podejścia mikroskopowego jest założenie, że fizycznym modelem pojazdu jest punkt materialny, którego ruch – zgodnie z zasadami mechaniki teoretycznej – opisuje się w sposób jednoznaczny za pomocą równania ruchu Newtona. Modele mikroskopowe strumieni pojazdów mają więc postać układów równań różniczkowo-różnicowych opisujących dynamikę zachowania się każdego pojazdu wchodzącego w skład strumienia oraz dodatkowych zależności wyrażających interakcje zachodzące między pojazdami w rozpatrywanych warunkach ruchowodrogowych. Używając pojęcia pojazd mamy na myśli nie tylko samo urządzenie techniczne (samochód osobowy, autobus, lekki lub ciężki samochód towarowy itd.), ale także jego kierowcę, który pełni funkcję regulatora procesu przemieszczania się pojazdu, wpływając tym samym na czasoprzestrzenną strukturę strumienia. Każdy kierowca nieustannie śledzi zmiany ogólnej sytuacji ruchowej w otoczeniu swojego pojazdu i w ich kontekście ocenia swoją sytuację. Biorąc ponadto pod uwagę względną prędkość ruchu, stan nawierzchni, stan techniczny swego pojazdu, czas reakcji na bodźce zewnętrzne itp., świadomie reguluje wielkość odstępu przestrzennego między swoim pojazdem i pojazdem jadącym bezpośrednio przed nim. Elementami mikroskopowych modeli strumieni pojazdów powinny więc być nie tylko zmienne i parametry charakteryzujące czasoprzestrzenną strukturę strumieni, ale także wielkości charakteryzujące reakcję kierowców na bodźce pochodzące z otoczenia.

Zazwyczaj na sieci znajduje się równocześnie bardzo dużo pojazdów. Z punktu widzenia mechaniki teoretycznej, ich zbiorowości odpowiada układ punktów materialnych. Skonstruowanie dla niego układu równań ruchu jest praktycznie niemożliwe, bo technicznie niemożliwe jest monitorowanie zmian położenia każdego pojazdu na sieci w trybie nadążnym za tym procesem. W tej sytuacji tracą sens próby opisywania ruchu dużych zbiorowości pojazdów w języku mechaniki teoretycznej. Prowadzi to bowiem do otrzymania tak dużych układów równań, że ich rozwiązywanie – nawet przy możliwościach współczesnej techniki komputerowej i współczesnych metod numerycznych – byłoby pozbawione jakiejkolwiek użyteczności praktycznej. Fakt ten bardzo ogranicza zakres stosowalności podejścia mikroskopowego. Zasadniczo można z niego korzystać jedynie w przypadku niebyt złożonych układów drogowych i niezbyt dużej liczby znajdujących się w nich pojazdów. Modele mikroskopowe konstruuje się najczęściej dla odcinków dróg jednopasowych.

Podstawowe znaczenie dla praktyki ruchu drogowego mają matematyczne modele przepływu strumieni pojazdów na drodze jednopasmowej, bez możliwości wyprzedzania. W takich warunkach pojazdy jadą jeden za drugim, przy czym zmieniają się jedynie czasowe i przestrzenne odległości między nimi, ale w ramach ograniczeń wynikających z konieczności przestrzegania zasad bezpieczeństwa ruchu. Strumień pojazdów ma kształt kolumny. Pojazdy są ponumerowane licząc w kolejności od pojazdu stanowiącego czoło kolumny. Pojazd jadący bezpośrednio przed innym pojazdem zajmuje względem niego pozycję lidera. Z tego powodu modele odwzorowujące mechanikę przemieszczania się kolumny pojazdów nazywa się modelami jazdy za liderem.

Modele jazdy za liderem stanowią główną kategorię mikroskopowych modeli strumieni ruchu drogowego. W modelach tych każdy pojazd jest rozpatrywany odrębnie a jego zachowanie się w strumieniu w chwili następnej (przyśpieszenie) jest wyrażane w postaci funkcji jego prędkości w chwili obecnej – $v_n(t)$, prędkości i przyspieszenia jego lidera w chwili obecnej – $v_{n-1}(t)$, $\dot{v}_{n-1}(t)$ oraz odległości między tymi pojazdami w chwili obecnej – $d_n(t)$, tzn.

$$\dot{v}_n(t+T) = f\left(v_n(t), d_n(t), \dot{v}_{n-1}(t), v_{n-1}(t)\right), \qquad (n = 1.2....), \qquad (1)$$

lub

$$\ddot{x}_n(t+T) = f\left(\dot{x}_n(t), d_n(t), \ddot{x}_{n-1}(t), \dot{x}_{n-1}(t)\right), \qquad (n = 1.2....),. \qquad (2)$$

gdzie zmienna $x_n(t)$ - położenie pojazdu n na drodze w chwili t.

Istnieje wiele szczególnych rodzajów tego modelu, ale każdemu z nich brak cechy uniwersalności. Każda droga i każdy strumień ruchu są obiektami unikatowymi i z tego powodu wciąż konstruuje się nowe modele. Z matematycznego punktu widzenia różnią się one wyborem postaci funkcji f. Najstarszym a równocześnie jednym z najbardziej użytecznych jest model Newella (1961). Ma on postać następującego układu równań:

$$\ddot{x}_n(t+T) = \lambda[\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_{n-1}(t)], \qquad (n = 1.2....), \tag{3}$$

gdzie T jest czasem reakcji kierowcy, zaś λ – współczynnikiem kalibracyjnym. Model ten jest wciąż punktem wyjścia do konstruowania innych, dokładniejszych modeli. W literaturze z teorii ruchu drogowego istnieje pewna liczba pozycji zawierających przeglądy mikroskopowych modeli ruchu (zob., np.: May 1990; Klar i Küne 1996; McShane 1997). W zdecydowanej większości są to przeglądy niepełne i pozbawione elementu krytyki naukowej. Wciąż dominuje błędne przekonanie, że o poprawności i użyteczności modelu świadczy przede wszystkim zgodność otrzymanych za jego pomocą wyników z wynikami obserwacji ruchu, o ile tylko jest potwierdzona przynajmniej jednokrotnym użyciem odpowiedniego testu statystycznego. Na powszechność popełniania tego błędu w wielu dziedzinach zastosowań rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej zwraca uwagę wielu matematyków (zob., np. Rao 1994; Kubik 1998). Istnieje więc potrzeba dokonania krytycznego przeglądu mikroskopowych modeli ruchu z punktu widzenia poprawności korzystania w nich z procedur wnioskowania statystycznego.

4.2. Podejście makroskopowe

Ograniczoność podejścia mikroskopowego zmusiła teoretyków ruchu do poszukiwania innych możliwości opisania własności strumieni. Ponieważ ruch drogowy jest zjawiskiem masowym – a każde zjawisko masowe ma charakter statystyczny – więc w naturalny sposób nasunęła się koncepcja wyrażenia podstawowych własności ruchu w kategoriach statystycznych. Wydawało się, że wystarczy skorzystać z aparatu fizyki statystycznej, ale i to podejście szybko okazało się niepłodne. Aby bowiem wyznaczyć wartości średnie już choćby samych tylko podstawowych parametrów ruchu, tj. prędkości i pędu, należało w każdej chwili dysponować danymi o masach i prędkościach wszystkich pojazdów znajdujących się wtedy na sieci. Ponieważ taka informacja jest nieosiągalna, więc i to podejście stało się nierealne. Wyznaczyło ono jednak nowy kierunek myślenia: należało szukać innych sposobów charakteryzowania średnich własności ruchu i dążyć do skonstruowania modeli odwzorowujących dynamikę tych średnich. Doprowadziło to do koncepcji makroskopowego modelowania ruchu. Wymagała ona zmiany optyki patrzenia na zjawisko przemieszczania się pojazdów na sieci. Trzeba było odejść od teoretycznie poprawnej, ale praktycznie nierealizowalnej idei konstruowania modelu na podstawie danych o masie oraz prędkości każdego z pojazdów i spojrzeć na zjawisko ruchu w sposób całościowy. Skorzystano więc z makroskopowego podobieństwa zjawiska ruchu pojazdów na drogach do zjawiska przepływu ośrodków ciągłych, przyjmujących w stanie spoczynku kształt naczynia, w którym się znajdują. Ośrodki takie nazywają się płynami i obejmują ciecze i gazy. Badaniem własności płynów zajmuje się mechanika płynów, która jest częścią mechaniki ośrodków ciągłych (zob., np.: Prosnak 1970, 2006; Landau i Lifszyc 1994; Gryboś 1998).

Podobnie jak wszelkie inne modele matematyczne, tak i modele konstruowane w ramach mechaniki płynów przyjmują pewne upraszczające założenia co do badanych ośrodków. Przede wszystkim zakłada się, że każdy płyn zachowuje się zgodnie z:

- zasadą zachowania masy,
- zasadą zachowania pędu,

* hipotezą ciągłości ośrodka.

Konieczność spełnienia zasad zachowania masy i pędu wynika z praw mechaniki ogólnej. Jeśli chodzi o hipotezę ciągłości, to postuluje ona przyjęcie założenia, że – mimo, iż rzeczywiste płyny składają się z cząsteczek trwających w nieustannym chaotycznym ruchu – płyny są ośrodkami ciągłymi, tzn. nieskończonymi, nieprzeliczalnymi i spójnymi zbiorami punktów materialnych. Zakłada się też, że wszystkie własności tak rozumianego płynu (gęstość, ciśnienie, prędkość, temperatura itd.) mają sens średnich statystycznych i zmieniają się w sposób ciągły.

Modele makroskopowe są najbardziej ogólne i mają postać układów zależności matematycznych opisujących całościowe, systemowe własności strumieni pojazdów, w kategoriach zmiennych zagregowanych. Zmiennymi tymi są najczęściej intesywność, gęstość i średnia prędkość strumienia.

W makroskopowych modelach strumieni ruchu pomija się indywidualną odrębność pojazdów. Strumień ruchu jest traktowany jako ośrodek ciągły, którego całościowe własności wyraża się w kategoriach trzech wielkości zagregowanych:

* gęstości pojazdów na drodze, czyli liczby pojazdów przypadających na jednostkę długości drogi,
* prędkości przemieszczania się strumienia,
* natężenia ruchu, czyli liczby pojazdów wchodzących lub opuszczających drogę w jednostce czasu,

o których zakłada się, że są funkcjami dwóch zmiennych, położenia pojazdów na sieci oraz czasu. Wielkości te będziemy oznaczać – odpowiednio – symbolami: $r(x,t)$, $V(x,t)$ i $q(x,t)$. Wszystkie one mają sens średnich statystycznych.

Rozpatrzmy funkcję $r(x,t)$, czyli gęstość pojazdów w punkcie x w chwili t. W pierwszym przybliżeniu należy przyjąć, że r jest funkcją ciągłą oraz że prędkość V pojazdów zależy jedynie od ich gęstości, tzn.

$$V = V(r), \tag{4}$$

przy czym $\frac{dV}{dr} < 0$.

Rozpatrzmy teraz odcinek drogowy $[x, x+dx]$ i załóżmy, że obserwujemy go w przedziale czasu $[t, t+dt]$. Liczba pojazdów na tym odcinku zmienia się zgodnie z następującą zależnością:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_x^{x+dx} r(x,t)dx &= V(r(x,t))\cdot r(t,x) - V(r(x,t+dx))\cdot r(t,x+dx) = \\ &= -\int_x^{x+dx}\left[\frac{\partial}{\partial x}V(r)\cdot r\right]dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Ponieważ zależność (5) zachodzi dla każdego x, więc otrzymujemy następujące równanie, wyrażające zasadę zachowania liczby pojazdów,

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[V(r)\cdot r] = 0, \tag{6}$$

lub

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

gdzie

$$q(r) = V(r) \cdot r. \tag{8}$$

Równanie (6) jest skalarnym równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu typu hiperbolicznego (Bressan 2000; Dafermos 2000). Równanie (8) jest zależnością empiryczną. Otrzymaliśmy więc układ dwóch równań niezależnych o trzech niewiadomych. Aby móc go rozwiązać w sposób jednoznaczny, trzeba go uzupełnić trzecim równaniem niezależnym. W zależności od tego, jaką postać nadaje się temu równaniu, otrzymuje się różne modele makroskopowe.

Historycznie pierwszy makroskopowy model strumienia pojazdów został sformułowany niezależnie przez Lighthilla i Whithama (1955) oraz Richardsa (1956). W literaturze przedmiotu oznacza się go akronimem LWR. W modelu tym zakłada się, że prędkość przemieszczania się strumienia oraz natężenie ruchu pojazdów są funkcjami gęstości strumienia:

$$V(x,t) = V^*(r(x,t)), \tag{9}$$

$$q(x,t) = q^*(r(x,t)) = r(x,t)\, V^*(r(x,t)), \tag{10}$$

gdzie V^* jest prędkością strumienia w stanie równowagi. Zależność między gęstością, prędkością i natężeniem strumienia nazywa się podstawowym diagramem ruchu. Zakłada się, co jest zgodne z naturą ruchu, że prędkość strumienia jest monotonicznie malejącą funkcją gęstości, zaś funkcja natężenia jest wypukła.

Po podstawieniu do równania (7) formuły (10), wykonaniu różniczkowania i wyłączeniu wspólnego czynnika poza nawias otrzymuje się:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + [V^{*} + r\frac{dV^{*}}{dr}]\frac{\partial r}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$C(r) = \frac{dq^{*}}{dr} = V^{*} + r\frac{dV^{*}}{dr}, \tag{12}$$

to równanie (11) przyjmie postać:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + C(r)\frac{\partial r}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Wielkość $C(r)$ nazywa się prędkością fali kinematycznej (zob., np., Feynman, Leighton i Sands 1971). Stwierdzamy więc, że prędkość fali kinematycznej powstającej w ruchu drogowym jest funkcją gęstości strumienia pojazdów. Zauważmy, że ponieważ $\frac{dV^{*}}{dr} < 0$, więc $C(r) < V^{*}$. Znaczy to, że fale kinematyczne zawsze rozchodzą się w kierunku przeciwnym do kierunku przemieszczania się strumienia. Krzywe $dx(t) = C(r)dt$ nazywają się krzywymi charakterystycznymi. W przypadku, gdy $\frac{\partial}{\partial x}C(r(x,0)) < 0$, wtedy krzywe charakterystyczne przecinają się i powstaje fala uderzeniowa. W przeciwnym razie mają miejsce fale rozrzedzeniowe. Prędkość fali uderzeniowej określa się z warunków Rankine'a-Hugoniota (Bressan 2000; Dafermos 2000). Wynosi ona

$$C_u = \frac{q_2 - q_1}{r_2 - r_1}. \tag{14}$$

Równanie to stwierdza, że prędkość C_u fali uderzeniowej jest równa stosunkowi zmiany lokalnego natężenia ruchu do zmiany gęstości ruchu. Znak wielkości C_u zależy od znaku zmiany natężenia ruchu.

Równanie (13), opisujące sposób powstawania i rozchodzenia się fal uderzeniowych w ruchu drogowym jest przykładem równania, dla którego nie istnieje rozwiązanie klasyczne (tj. rozwiązanie będące funkcją różniczkowalną). Czoło fali uderzeniowej jest krzywą, wzdłuż której rozwiązanie nie jest ciągłe. Fala musi więc zostać wygładzona. Można to zrobić przez wprowadzenie po prawej stronie równania (13) dodatkowego składnika drugiego rzędu. Otrzymuje się:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + C(r)\frac{\partial r}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}. \tag{15}$$

W równaniu tym ε oznacza czynnik dyfuzyjny, który powoduje wygładzenie czoła fali uderzeniowej. Chociaż zabieg ten formalnie rozwiązuje problem fali uderzeniowej, to jednak przydatność modelu (15) jest też ograniczona. Nie obejmuje on bowiem sytuacji nierównowagowych, które występują w obszarach spływu (łącznice wjazdowe) i rozpływu (łącznice wyjazdowe) strumieni pojazdów, w miejscach zwężania się drogi (zmniejszania się liczby pasm ruchu), w miejscach występowania zatorów ruchowych, lub ruchu typu stop-and-go itp. Aby odwzorowywać takie sytuacje trzeba do modelu wprowadzić równanie opisujące dynamikę średniej prędkości strumienia. W zależności od jego postaci otrzymuje się różne rodzaje makroskopowych modeli ruchu. Najbardziej znanymi z nich są model Payne'a (1971), Philipsa (1979), Kernera i Konnhäusera (1993) i Helbinga (1997). W teorii ruchu drogowego przyjęło się nazywać model Lighthilla-Whithama-Richardsa modelem pierwszego rzędu, modele Payne'a, Philipsa oraz Kernera i Konnhäusera modelami drugiego rzędu, zaś model Helbinga – modelem trzeciego rzędu. Z formalnego punktu widzenia są to nazwy niepoprawne, bowiem odniesiono je do liczby równań w modelu, a nie do rzędu pochodnej.

W modelu Payne'a dynamika średniej prędkości strumienia pojazdów jest opisana za pomocą następującego równania różniczkowego, opartego na modelu Newella jazdy za liderem (Newell 1961):

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\underbrace{V\frac{\partial V}{\partial x}}_{\text{konwekcja}}=\underbrace{-\frac{C(r)}{r}\frac{\partial r}{\partial x}}_{\textit{antycypacja}}+\underbrace{\frac{V^{*}(r)0-V}{\tau}}_{\textit{relaksacja}}. \tag{16}$$

W równaniu tym występują trzy charakterystyczne człony: człon konwekcyjny, człon antycypacyjny i człon relaksacyjny. Człon konwekcyjny opisuje zmiany średniej prędkości $V(x,t)$ spowodowane wjazdem pojazdów na odcinek $[x,x+dx]$ i ich wyjazdem z tego odcinka. Człon antycypacyjny charakteryzuje reakcję kierowców na warunki ruchu w dole strumienia. Człon relaksacyjny wyraża dążenie kierowców do sprowadzenia strumienia pojazdów do stanu ruchowej równowagi. Parametr τ jest czasem relaksacji, $V^{*}(r)$ jest prędkością równowagową (zakłada się, że jest ona funkcją monotonicznie malejącą gęstości strumienia), $C(r)$ jest czynnikiem antycypacyjnym, określonym za pomocą następującego równania:

$$C(r)=-\frac{1}{2}\frac{dV^{*}}{dr}. \tag{17}$$

Jednym z mankamentów modelu Payne'a jest jego stabilność, tj. odporność na małe zakłócenia, w przypadku liniowej aproksymacji rozwiązania stacjonarnego, przy czym własność ta zachodzi dla wszystkich wartości gęstości. Tymczasem z obserwacji ruchu wynika, że – w rzeczywistości – przy dużych gęstościach strumienia ruch staje się niestabilny, tzn. małe zakłócenia mogą prowadzić do powstawania zatorów lub pojawiania się fal typu *stop-and-go*. Aby usunąć tę niedogodność Philips (1979) wprowadził pojęcie ciśnienia ruchu i zdefiniował je tak:

$$C(r) = \frac{dP^*}{dr}, \tag{18}$$

gdzie $P^* = r\Theta^*$. W wyrażeniu tym, P^* jest ciśnieniem ruchu, które odwzorowuje mechanizm przewidywania (antycypacji) przez kierowców warunków ruchu panujących w dole strumienia, zaś Θ^* – zależną od gęstości strumienia wariancją średniej prędkości określoną w następujący sposób:

$$\Theta^* = \Theta_0\left(1 - \frac{r}{r_{max}}\right), \quad (\Theta_o > 0), \tag{19}$$

przy czym wartość stałej Θ_o trzeba oszacować na podstawie odpowiednich danych ruchowych.

Po podstawieniu wyrażenie (18) do równania (13) otrzymamy następujące uogólnienie modelu Payne'a, znane jako model Philipsa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{V^*(r) - V}{\tau}. \tag{20}$$

Analiza stabilności stacjonarnych rozwiązań tego modelu prowadzi do stwierdzenia, że istnieje taka gęstość krytyczna r_{kr}, której przekroczenie sprawia, że model staje się wrażliwy na małe zakłócenia. Dzięki tej własności można opisywać takie zjawiska wywołane małymi zakłóceniami warunków ruchu, jak zatory ruchu lub ruch typu *stop-and-go*, ale otrzymane modele nie będą odporne na zakłócenia. Z analizy modelu wynika, że ciśnienie ruchu jest tym większe, im większa jest gęstość pojazdów. Byłoby to jednak sprzeczne z logiką i praktyką ruchu, ponieważ oznaczyłoby, że w obszarze drogi objętej natłokiem pojazdy mogą zwiększać prędkość. Poważną wadą modelu jest też możliwość otrzymania ujemnych prędkości pojazdów.

Uogólnieniem modelu Philipsa jest model Kernera-Konhäusera (1993). Jego idea polega na wygładzeniu czoła fali uderzeniowej przez wprowadzenie po prawej stronie równania (20) członu drugiego rzędu, charakteryzującego lepkość płynu. Autorzy przyjęli za punkt wyjścia równanie Naviera-Stokesa dla płynu ściśliwego, wyrażające zasadę zachowania pędu. Inaczej mówiąc, równanie Naviera-Stokesa opisuje wpływ sił wywołujących ruch płynu newtonowskiego (tj. płynu spełniającego hydrodynamiczne prawo Newtona: naprężenie ścinające w płynie jest wprost proporcjonalne do szybkości ścinania, przy czym współczynnik proporcjonalności, zwany lepkością, jest charakterystycznym parametrem danego płynu) na dynamikę ruchu. Model Kernera-Konhäusera ma postać:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\Theta_0}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\eta_0}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{V^*(r) - V}{\tau}, \qquad (21)$$

gdzie η_0 jest współczynnikiem lepkości.

Model Kernera-Konhäusera jest stabilny dla małych i dużych gęstości strumienia pojazdów, ale jest niestabilny w obszarze gęstości pośrednich. Zaletą modelu jest to, że dzięki uwzględnieniu lepkości odwzorowuje on proces formowania się w strumieniu skupisk pojazdów. Podstawową wadą modelu jest – jak w modelu Kernera-Konhäusera – możliwość otrzymania ujemnych prędkości pojazdów.

Wspólną cechą przedstawionych makroskopowych modeli strumienia ruchu drogowego, opartych na idei modelu Payne'a, jest występowanie w nich równania empirycznego, wiążącego średnią prędkość strumienia z jego gęstością.

5. Podejście mezoskopowe

Mezoskopowe modelowanie strumienia pojazdów drogowych jest etapem pośrednim między modelowaniem mikroskopowym i makroskopowym. Podstawową właściwością tego podejścia jest odejście od opisywania mechanizmów rządzących zmianami struktury strumienia w kategoriach deterministycznych i przejście na opisy w kategoriach probabilistyczno-statystycznych. Modele mezoskopowe będą więc miały postać układów zależności matematycznych, opisujących zachowanie się strumieni w kategoriach łącznego rozkładu prawdopodobieństwa współrzędnych położenia pojazdów na drodze i ich prędkości, a więc w kategoriach przestrzeni fazowej.

Mezoskopowe modele strumienia ruchu powinny – z jednej strony – jak najdokładniej odwzorowywać ziarnistą strukturę strumieni pojazdów i ich podstawowe cechy mikroskopowe, a z drugiej – powinny wskazywać sposób obliczenia średnich całościowych własności strumienia, tj. własności obserwowanych na poziomie makroskopowym. Przedstawimy propozycję metodologii mezoskopowego modelowania gęstego strumienia pojazdów kierując się podobieństwem jego przepływu do przepływu strumienia gazu w naczyniu zamkniętym.

W modelach ruchowych, w których dąży się do osiągnięcia wysokiej zgodności z rzeczywistością, każdy pojazd jest opisywany za pomocą własnego układu równań ruchu. Modelami strumienia pojazdów są więc olbrzymie układy równań, których czas rozwiązywania i wymagania co do pamięci operacyjnej komputera rosną proporcjonalnie do liczby pojazdów w strumieniu. Model takie reguły nie nadążają za dynamiką zmian zachodzących w strumieniu, nie mogą więc by stosowane w trybie nadążnym. Można je jednak wykorzystywać do mikroskopowych symulacji ruchu w sytuacjach nie wymagających nadążania za dynamiką strumienia (do analizowania dynamiki zlewania się głównego strumienia ruchu ze strumieniami pochodzącymi z łącznic wjazdowych, dynamiki rozpływu ruchu w strefach łączni wyjazdowych, do oceny zmian rozkładu prędkości w funkcji gęstości strumienia, do analizy rozkładów długości odstępów między sąsiednimi pojazdami i innych danych empirycznych). W odniesieniu do bardziej złożonych układów drogowych (długie drogi, sieci dróg itp.) trzeba – niestety – konstruować mniej dokładne mikroskopowe modele symulacyjne. Modele takie na ogół odwzorowują podstawowe właściwości przepływu strumieni pojazdów, ale z reguły mają bardzo małą zdolność predykcyjną. Z tego powodu bardziej preferuje się modele makroskopowe, w których nie rozpatruje się odrębnie każdego z pojazdów, lecz traktuje się strumień ruchu w sposób całościowy, charakteryzując jego właściwości w miejscu r i w chwili t w kategoriach pojęć makroskopowych. Najczęściej są nimi średnia gęstość strumienia na pasmo ruchu – $\rho(r,t)$ i średnia prędkość strumienia – $V(r,t)$, a czasem, dodatkowo, wariancja prędkości $\Theta(r,t)$. W tym przypadku czas trwania symulacji i potrzebny zasób pamięci nie zależą od liczby pojazdów N, lecz przede wszystkim od sposobu dyskretyzacji Δr i Δt przestrzeni i czasu. Z tego powodu makroskopowe modele ruchu nadają się i są stosowane do symulacji w czasie rzeczywistym. Jakość i niezawodność wyników symulacji zależą głównie od poprawności użytych równań makroskopowych i metody całkowania numerycznego. Niestety, na sprawy te wciąż zwraca się zbyt mało uwagi. Wskutek tego, wiele symulacyjnych modeli ruchu drogowego nie ma praktycznej użyteczności. Co więcej, praktyka zarządzania ruchem drogowym wciąż dostarcza przykładów tego, że nawet najbardziej zaawansowane obecnie makroskopowe symulacyjne modele ruchu mają wciąż poważne usterki. Ich główną przyczyną są błędy popełniane na etapie konstruowania modelu teoretycznego, te zaś wynikają przede wszystkim z niedoceniania dziedziny fizyki ruchu drogowego. Ponadto, zbyt pochopnie, bez należytej ostrożności i koniecznego krytycyzmu, przenosi się na grunt teorii ruchu drogowego modele makroskopowe opracowane dla innych zjawisk (np. ekonomicznych lub społecznych), powołując się na przesłanki czysto heurystyczne i całkowicie pomijając logiczną analizę zjawisk ruchowych w drogownictwie.

W przeciwieństwie do tych podejść w tym rozdziale przedstawiamy propozycję wyprowadzenia makroskopowych równań strumienia ruchu wychodząc z gazokinetycznej aproksymacji strumienia. Jak już powiedzieliśmy, w gazokinetycznym modelu strumienia ruchu zachowanie się pojazdów i kierowców należy opisywać w sposób bardziej zagregowany niż w modelach mikroskopowych. Można to zrobić traktując podstawowe charakterystyki strumienia jako wielkości losowe, a więc reprezentowane przez odpowiednie funkcje rozkładu prawdopodobieństwa. Na dynamikę tych rozkładów mają wpływ takie procesy związane z przepływem strumienia pojazdów, jak przyśpieszanie i zwalnianie, interakcje między pojazdami, zachowanie się kierowców, manewry wyprzedzania lub zmiany pasma ruchu itp.

Gazokinetyczne modele strumienia pojazdów muszą więc opierać się na analizie zmian gęstości przestrzeni fazowej, w której opisuje się ruch. Zmiany te można scharakteryzować w kategoriach dynamiki funkcji rozkładu prawdopodobieństwa prędkości pojazdów wchodzących w skład strumienia. Niech $\rho(x,v,t)$ będzie gęstością przestrzeni fazowej. Będziemy ją interpretować w następujący sposób: średnia liczba pojazdów, które w chwili t znajdą się na małym odcinku drogi $[x, x+dx]$ i będą miały prędkości należące do przedziału $[v, v+dv]$ jest równa $\rho(x,v,t)dxdv$. Przyjmijmy, przez analogię do kinetycznej teorii gazów, że zmiany gęstości $\rho(x,v,t)$ spowodowane przemieszczaniem się pojazdów są równe sumie zmian spowodowanych zmianami ich przyśpieszenia i dążeniem do osiągnięcia stanu ruchowej równowagi strumienia (czyli tzw. relaksacją). Faktowi temu odpowiada równanie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{v\frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\text{konwekcja}} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{interakcje}} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{relaksacja}} . \tag{22}$$

Składowa konwekcyjna opisuje ciągłe zmiany gęstości spowodowane wchodzeniem pojazdów na mały odcinek drogi $[x, x+dx]$ i wychodzeniem z tego odcinka w przedziale czasu $[t, t+dt]$. Składowa relaksacyjna opisuje ciągłe zmiany gęstości spowodowane dążeniem kierowców do osiągnięcia prędkości odpowiadającej stanowi ruchowej równowagi strumienia. Składowa interakcyjna opisuje nieciągłe zmiany gęstości spowodowane wzajemnymi oddziaływaniami między pojazdami szybkimi i wolnymi (gdy pojazd szybszy dogania wolniejszy, to – aby uniknąć zderzenia – musi przyhamować lub go wyprzedzić).

Niech v będzie prędkości pojazdy szybszego, w – prędkością pojazdu wolniejszego. Przyjmijmy, że:

- fizycznymi modelami pojazdów są punkty materialne,
- pojazd dochodzący w żaden sposób nie wpływa na zachowanie się pojazdu wolniejszego,
- pojazd dochodzący po dojściu do wolniejszego zwalnia momentalnie, o ile nie podejmuje manewru wyprzedzania,
- w przypadku wyprzedzania pojazd dochodzący nie zmienia prędkości,
- nie ma korelacji między pojazdami,

- istotne są oddziaływania tylko między tymi parami pojazdów, które bezpośrednio ze sobą sąsiadują – wszystkie inne oddziaływania między pojazdami są pomijalnie małe.

Niech p będzie prawdopodobieństwem wyprzedzania. Oznaczmy przez $f(x,t,v,w)$ funkcję gęstości rozkładu par pojazdów. Jeżeli uwzględnimy powyższe założenia, to składowa interakcyjna w równaniu (22) przyjmie postać:

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{interakcje}} = (1-p)\int_{v}^{\infty}(w-v)f(x,t,v,w)dw - (1-p)\int_{0}^{v}(v-w)f(x,t,v,w)dw. \tag{23}$$

Ponieważ przyjęliśmy, że nie ma korelacji między pojazdami, więc

$$f(x,t,v,w) = \rho(x,v,t)\rho(x,w,t). \tag{24}$$

Po uwzględnieniu tej zależności w równaniu (23) otrzymamy:

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{interakcje}} = (1-p)\rho(x,v,t)\int_{v}^{\infty}|w-v|\rho(x,w,t)dw - (1-p)\rho(x,v,t)\int_{0}^{v}|v-w|\rho(x,v,t)dw. \tag{25}$$

Zależność ta odwzorowuje fakt, że intensywność interakcji pojazdów szybszych o prędkości w z pojazdami wolniejszymi o prędkości v wynosi $|w-v|\rho(x,v,t)\rho(x,w,t)$. Innymi słowy, określa ona, jak często pojazdy o prędkościach w i v spotykają się w punkcie x w chwili t. Jeśli pojazd szybszy nie może wykonać manewru wyprzedzania, to zwalnia do prędkości pojazdu wolniejszego i kontynuuje jazdę za nim. Proces hamowania pociąga za sobą zwiększenie gęstości $\rho(x,v,t)$ – sytuacji temu odpowiada pierwszy składnik po prawej stronie formuły (25). Gdy pojazd o prędkości v dogania pojazd wolniejszy z prędkością w, to – jeśli pojazd szybszy nie może wykonać wyprzedzania – wtedy zwalnia do prędkości w – sytuacji tej odpowiada drugi składnik po prawej stronie formuły (25). Proces ten pociąga za sobą zmniejszenie gęstości.

Aby uszczegółowić postać składowej relaksacyjnej oznaczmy przez $V_{max}(v\,|\,x,t)$ najbardziej pożądany rozkład prędkości pojazdów i niech τ będzie czasem relaksacji. Przyjmiemy, że

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{relaksacja}} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\rho \frac{V_{max}(v\,|\,x,t) - v}{\tau}\right). \tag{26}$$

Z modelu tego wynika, że przejście od stanu ruchu swobodnego do stanu natłoku następuje wtedy, gdy gęstość strumienia przekroczy pewną wartość krytyczną. Stan natłoku nie oznacza, że strumień przestaje się przemieszczać. Część pojazdów trwa w bezruchu, ale niekoniecznie wszystkie.

Dla skonstruowania powyższego modelu przyjęliśmy szereg założeń nie tylko upraszczających obraz rzeczywistości ruchowej, ale również ułatwiających prowadzenie rozważań matematycznych. Model wymaga więc dalszych studiów zmierzających w kierunku jego większego urealnienia.

Załóżmy, że na podstawie powyższego modelu mezoskopowego została zidentyfikowana funkcja gęstości $\rho(x,v,t)$. Funkcję tę można wykorzystać do określenia makroskopowych własności strumienia pojazdów, takich jak średnia prędkość, średnie natężenie i inne. Aby to zrobić, skorzystamy z probabilistyczno-statystycznej metody momentów (zob., np. Plucińska i Pluciński 2000). Istota tej metody polega na przyjmowaniu za oszacowanie nieznanych momentów lub funkcji momentów rozpatrywanej cechy strumienia zaobserwowanych wartości momentów empirycznych lub funkcji momentów empirycznych. Zgodnie z metodą momentów makroskopowe charakterystyki strumienia mogą być wyrażone za pomocą momentów gęstości przestrzeni fazowej. Moment rzędu k $(k = 0,1,2,...)$ tej gęstości wyraża się wzorem:

$$m_k(x,t) = \int_0^\infty v^k \rho(x,v,t)dv. \tag{27}$$

W szczególności. dla $k = 1$ oraz $k = 2$ otrzymuje się, odpowiednio:

$$m_1(x,t) = \int_0^\infty v\rho(x,v,t)dv, \tag{28}$$

$$m_2(x,t) = \int_0^\infty v^2 \rho(x,v,t)dv. \tag{29}$$

Wróćmy teraz do równania (22). Pomnóżmy obie jego strony przez v^k, a następnie scałkujmy obie strony względem v w przedziale $[0,\infty)$. Po wykonaniu tych działań otrzymamy następujące równanie różniczkowe dla momentu rzędu k:

$$\frac{\partial m_k}{\partial t} + \frac{\partial m_{k+1}}{\partial x} = -k\frac{m_k - m_{0k}}{\tau} + (1-p)(m_1 m_k - r m_{k+1}), \quad (k = 0,1,2,...) \tag{30}$$

gdzie $m_{0k} = rV_{\max}\langle v^{k-1}\rangle$, $\langle \cdot \rangle$ – symbol operacji uśredniania.

Zauważmy, że dla $k = 0$ równanie to przechodzi w równanie zachowania. Dla $k = 1$ otrzymujemy równanie dynamiki średniej prędkości pojazdów. Dla $k = 2$ otrzymujemy równanie dynamiki wariancji prędkości. Relacja między makroskopowymi i mezoskopowymi charakterystykami strumienia wyraża się formułami:

$$V(x,t) = \frac{1}{r(x,t)}\int_0^\infty v\rho(x,v,t)dv, \tag{31}$$

$$\Theta(x,t)=\frac{1}{r(x,t)}\int_{0}^{\infty}(v-V)^2\rho(x,v,t)dv, \qquad (32)$$

gdzie $r(x,t)$ jest gęstością strumienia pojazdów.

6. Zakończenie i wnioski

W teorii ruchu drogowego istnieją dwa podejścia do badania własności strumieni pojazdów przemieszczających się na sieciach: mikroskopowe i makroskopowe. Z punktu widzenia zarządzania ruchem pierwsze jest zbyt szczegółowe, drugie – zbyt ogólne i niezależne od pierwszego. Mikroskopowe charakterystyki strumienia są wielkościami deterministycznymi, makroskopowe – probabilistyczno-statystycznymi. Teoretycznie biorąc, można – za pomocą operacji uśredniania - określić wartości charakterystyk makroskopowych na podstawie danych o ruchu każdego z pojazdów i interakcjach między pojazdami, ale z punktu widzenia potrzeb zarządzania podejście to jest nieużyteczne.

W rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej istnieje metoda określania średnich własności obiektu badań, jeśli tylko jest znana odpowiednia funkcja charakteryzująca jego własności w czasoprzestrzeni fazowej obiektu. Naprowadza to na pomysł znalezienia takiej funkcji dla strumienia pojazdów. Przyjęliśmy, że jest nią funkcja gęstości czasoprzestrzeni fazowej strumienia, charakteryzująca własności strumienia na poziomie pośrednim między mikroskopowym i makroskopowym, tj. na poziomie mezoskopowym. Wprowadziliśmy pojęcie tej funkcji i – przyjąwszy szereg uproszczeń dotyczących własności strumienia – skonstruowaliśmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu opisujące jej dynamikę. Otrzymaliśmy więc mezoskopowy model strumienia. Następnie skorzystaliśmy z tego równania dla wyprowadzenia analogicznego równania różniczkowego, ale opisującego dynamikę momentów rzędu k

funkcji gęstości przestrzeni fazowej strumienia. Zwróciliśmy uwagę, że wartości $k=1$ odpowiada równanie dynamiki średniej prędkości strumienia, a wartości $k=2$ odpowiada równanie dynamiki wariancji prędkości. Podaliśmy wzory wyrażające średnie (makroskopowe) wartości charakterystyk strumienia za pomocą gęstości strumienia, funkcji gęstości jego przestrzeni fazowej oraz jej odpowiednich momentów.

Literatura

Adams W.F. (1936). Road traffic considered as a random series. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, **4**, 121-130.

Bereziński M. (2008). Matematyczne modele ruchu drogowego (przygotowywane do druku).

Bressan A. (2000). Hyperbolic system of conservation laws. The one-dimensional Cauchy problem. Oxford University Press, New York.

Dafermos C.M. (2000). Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Springer Verlag, Berlin.

Duckworth R.A. (1983). Mechanika płynów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Einstein A., Infeld L. (1998). Ewolucja fizyki. Rozwój poglądów od najdawniejszych pojęć do teorii względności i kwantów. Prószyński S-ka, Warszawa.

Euler L. (1755a). Principes generaux du mouvement des fluides. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences et de Belles Lettres,* **9**, 274-315.

Euler L. (1755b). Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences et de Belles Lettres,* **9**, 316-162.

Feynman R. (2000). Charakter praw fizycznych. Prószyński S-ka, Warszawa.

Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. (1971). Feynmana wykłady z fizyki. T. I, Cz. 1. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Gawecki B.J. (1969). Zagadnienie przyczynowości w fizyce. Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa.

Grad H. (1950). Kinetic theory and statistical physics. University of Texas Press, Austin.

Gryboś R. (1998). Podstawy mechaniki płynów. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Helbing D. (1997). Verkehrsdynamik. Springer-Verlag, Berlin.

Herrey E.M.J., Herrey H. (1945). Principles of physics applied to traffic movements and road conditions. *American Journal of Physics*, **13**, 1-14.

Kerner B.S., Konhäuser P. (1993). Cluster effect in initially homogenous traffic flow. *Physical Review,* **E48**, R2335-R2338.

Klar A., Küne R.D., Wegner R. (1996). Mathematical models for vehicular traffic. *Surveys on Mathematics for Industry*, **6**, 215-239.

Kubik L. (1998). Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do wnioskowania statystycznego. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Landau L.D., Lifszyc E.M. (1994). Hydrodynamika. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Lighthill M.J., Whitham G.B. (1955). On kinematic waves. I: Flow movement in long rivers. II: A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh*, **A229**, 281-345.

May A.D. (1990). Traffic flow fundamentals. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

McShane W.R., Roess R.P., Prassas E.S. (1997). Traffic engineering. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Miakiszew G.J. (1976). Prawidłowości dynamiczne i statystyczne w fizyce. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Navier M. (1827). Mémoire sur les lois du movement fluids. *Mémoire de l'Academie Royale des Sciences de l'Institutde France*, **6**, 389-440.

Newell G.F. (1961). A theory of traffic flows in tunnels. W: R. Herman, red., Theory of traffic flow, Elsevier, Amsterdam, 193-206.

Payne H.J. (1971). Models of freeway traffic and control. *Simulation Councils Proceedings*, **1**, 51-61.

Phillips W.F. (1979). A kinetic model for traffic flow with continuum implications. *Transportation Planning and Technology*, **5**, 131-138.

Plucińska A., Pluciński E. (2000). Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Prager W. (1954). Problems in traffic and transportation. W: Proceedings of a Symposium on Operations Research in business and industry. Midwest Research Institute, Kansas City.

Prigogine I. (1965). Sur la théorie mathématique du traffic véhiculaire. *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, 7, 177-193.

Prigogine I., Herman R. (1971). Kinetic theory of vehicular traffic. American Elsevier, New York.

Prigogine I., Herman R., Anderson R.L. (1962). On individual and collective flow. *Bulletin de la Classe des Sciences Académie Royale de Belgique*, **10**, 180-196.

Prosnak W.J. (1970). Mechanika płynów. T. I, II. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Prosnak W.J. (2006). Równania klasycznej mechaniki płynów. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Rao C.R. (1994). Statystyka i prawda. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Richards P.L. (1956). Shock waves on the highways. *Operations Research*, **4**, 42-51.

Stokes G.G. (1845). On the theories of the internal friction of fluids in motion, and the equilibrium and motion of elastic fluids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, 287.

Stróżewski W. (2007). Dialektyka twórczości. Wydawnictwo ZNAK, Kraków.

Pozycje uzupełniające

Adams W.F. (1936). Road traffic considered as a random series. *Journal of the Institute of Civil Engineers*, **4**, 121-130.

Andrews F.C. (1970). A statistical theory of traffic flow on highways. II. Three-car interactions and the onset of queueing. *Transportation Research*, **4**, 367-377.

Awrejcewicz J. (2007). Matematyczne modelowanie systemów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Brackstone M., McDonald M. (1999). Car-following: a historical review. *Transportation Research*, **2F**, 181-196.

Daganzo C.F. (1975). Probabilistic structure of two-lane road traffic. *Transportation Research*, **9**, 339-346.

Gazis D.C. (1974). Traffic science. Jon Wiley, New York.

Keizer J. (1987). Statistical thermodynamics of nonequilibrium processes. Springer-Verlag, New York.

Temple B. (1983). Systems of conservation laws with coinciding shock and rarefaction curves. *Contemporary Mathematics*, **17**, 143-151.

Spis treści