98/2007

Raport Badawczy

Research Report

RB/64/2007

Modele przepływów pasażerów i ładunków w komunikacji transportowej (transporcie)

M. Bereziński, Z. Uhrynowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Jan W. Owsiński

Warszawa 2007

Modele przepływów pasażerów i ładunków w komunikacji transportowej (transporcie)

Mirosław Bereziński
Zygmunt Uhrynowski

1. Uwagi wstępne

Właściwą transportowi formą świadczenia usług przewozowych jest celowe przemieszczanie się pojazdów na sieciach drogowych. Przemieszczające się pojazdy tworzą strumienie ruchu. Umiejętność przewidywania czasoprzestrzennych własności strumieni stanowi istotę współczesnej teorii i inżynierii ruchu komunikacyjnego w transporcie. Metodą wspomagającą te przewidywania jest modelowanie matematyczne przepływów na sieciach transportowych.

Dziedzina ta jest wciąż zdominowana przez myślenie o przepływach na sieciach w kategoriach teorii grafów ważonych oraz twierdzenia o minimalnym przekroju sieci i maksymalnym przepływie (Ford i Fulkerson 1962; Potts 1972)). Praktyka ruchowa pokazała, że wskutek nieumiejętnego korzystania z tego twierdzenia, podjęto w wielu regionach świata niewłaściwe decyzje inwestycyjne w zakresie technicznej infrastruktury transportu. Okazało się, na przykład, że nie zawsze usunięcie wąskiego gardła sieci w jednym miejscu prowadzi do poprawy jakości sieci jako systemu. Znane i udokumentowane są przykłady zrealizowanych w ostatnich dekadach inwestycji transportowych (odcinki dróg samochodowych lub kolejowych, lokalizacja portów lotniczych itp.), które nie mogły być oddane do eksploatacji ze względu na zagrożenie dla środowiska. Aby uniknąć takich sytuacji konieczne jest wcześniejsze analizowanie możliwych do zaistnienia przepływów pasażerów i ładunków w skalach lokalnej, regionalnej, międzyregionalnej, krajowej i międzynarodowej. U podstaw tych analiz leżą modele strumieni ruchu.

Badania nad modelowaniem strumieni ruchu w transporcie są w kraju bardzo zaniedbane. Literatura obcojęzyczna jest słabo znana, natomiast istniejące pozycje krajowe powstały przeszło trzy dekady temu i są przestarzałe (np.: Wolszczan 1970; Węgierski 1971). Brak jest oryginalnych prac naukowych nawiązujących do takich klasyków teorii i inżynierii ruchu, jak Adams (1936), Wardrop (1952), Lighthill i Whitham (1955a, 1955b), Chandler, Herman i Montroll (1958), Gazis, Herman i Potts (1959), Miller (1961a, 1961b, 1962), Edie (1961), Newell (1961), Tanner (1961), Haight (1963), Ashton (1966), Potthoff (1970, 1972, 1975), Herman i Prigogine (1979), Drew (1983) i wielu innych. Kamieniami milowymi historii teorii i inżynierii ruchu komunikacyjnego we transporcie są niewątpliwie wybitne monografie z tej dziedziny (Gostkowski, 1883; Wątorek 1936, Haight 1963; Ashton 1966; Drew 1968; Potthoff 1970; Prigogine i Herman 1971; Potts 1972).

Głównym celem pracy jest systematyzacja i przedstawienie podstawowych rodzajów modeli przepływu pojazdów na sieciach transportowych.

2. Podstawowe kategorie modeli

Istnieje wiele modeli strumienia ruchu, a w miarę coraz głębszego przenikania matematyki do teorii i inżynierii ruchu oraz w miarę wzrostu natłoku na drogach powstaje ich coraz więcej. Istnieją wśród nich modele stosunkowo proste, oparte na zasadach klasycznej mechaniki układu swobodnych lub nieswobodnych punktów materialnych. Budowanie takich modeli wymaga znajomości mechaniki teoretycznej oraz rachunku różniczkowego i całkowego wraz z teorią równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych oraz równań całkowych. Istnieją też modele oparte na analogiach między przepływem strumieni ruchu komunikacyjnego a przepływem ośrodków ciągłych (strugą cieczy lub gazów). Konstruowanie takich modeli wymaga bardzo dobrej znajomości mechaniki płynów oraz sprawnego posługiwania się stosowanym w niej aparatem teorii pól skalarnych, wektorowych i tensorowych, a także zaawansowanego poziomu znajomości teorii równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych i całkowych. Istnieją wreszcie modele probabilistyczno-statystyczne, opisujące strumień pojazdów jako proces stochastyczny. Tworzenie takich modeli wymaga głębokiej znajomości rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Podejmuje się próby konstruowania modeli opartych na idei automatów komórkowych, sieci neuronowych, rozmytości itp.

W tym gąszczu modeli wprowadzenie jakiejkolwiek obiektywnej klasyfikacji wydaje się na pozór niemożliwe. Jest jednak konieczne. Z tego powodu, przez analogię do podziału modeli stosowanych w fizyce, wynikającego ze stopnia szczegółowości badania zjawisk fizycznych, w teorii ruchu komunikacyjnego uznano za podstawowy podział modeli na mikroskopowe, mezoskopowe i makroskopowe.

Mikroskopowe modele strumieni ruchu (mikromodele) odwzorowują charakterystyki poszczególnych pojazdów wchodzących w skład strumienia oraz oddziaływania ruchowe między pojazdami (a zwłaszcza przyśpieszanie, zwalnianie, zmiany pasma ruchu, manewry wyprzedzania). Mają one postać równań różniczkowych , różnicowych lub różniczkowo-różnicowych, opisujących w języku klasycznej mechaniki newtonowskiej dynamikę każdego z pojazdów, z uwzględnieniem jego wzajemnych oddziaływań z innymi pojazdami. Z matematycznego punktu widzenia modele te są więc układami równań opisujących trajektorie ruchu poszczególnych pojazdów w warunkach określonych ograniczeń, wynikających z warunków techniczno-eksploatacyjnych drogi.

Modele mezoskopowe strumienia ruchu (mezomodele) też opisują ruch poszczególnych pojazdów, ale zależności jakie zachodzą między pojazdami są w nich odwzorowywane w sposób całościowy, a nie w odniesieniu do każdej oddziałującej na siebie pary pojazdów.

Modele makroskopowe strumienia ruchu (makromodele) opisują całościowe zachowanie się strumienia pojazdów w kategoriach parametrów zagregowanych, przede wszystkim średniej prędkości, intensywności i gęstości (koncentracji) strumienia. Są konstruowane na podstawie analogii między strumieniem pojazdów, a dynamiką ośrodków ciągłych. Nie zwraca się w nich uwagi poszczególne pojazdy i na wzajemne odddziaływania między nimi. Przyjmuje się, że podstawowymi obserwowanymi makrozmiennymi są gęstość (liczba pojazdów na jednostkę długości na pas ruchu) i prędkość strumienia. Modele mają postać układów równań różniczkowych cząstkowych. Najczęściej są to trzy równania, z których jedno wyraża zasadę zachowania masy, drugie zasadę zachowania pędu (ilości ruchu), a trzecie ma charakter fenomenologiczny.

Ponieważ przepływy komunikacyjne są zjawiskiem dynamicznym, więc we wszystkich tych klasach modeli zdecydowanie dominuje podejście dynamiczne, chociaż zdarzają się również modele statyczne (przedstawiające stan strumienia pojazdów w ustalonej chwili). W każdej z klas występują modele deterministyczne i probabilistyczno-statystyczne (stochastyczne), modele dyskretne i ciągłe, analityczne i numeryczne (w tym symulacyjne). Ogólnie trzeba stwierdzić, że obecnie podstawowy trend badań nad modelowaniem przepływów na sieciach charakteryzuje się odchodzeniem od modeli statycznych, liniowych i deterministycznych do modeli dynamicznych, nieliniowych i stochastycznych.

3. Modele mikroskopowe

3.1. Ogólna idea modeli

Idea tych modeli wywodzi się z zasad klasycznej mechaniki układu swobodnych lub nieswobodnych punktów materialnych. Jak wiadomo, ogólnym sformułowaniem ruchu takich układów jest zasada d'Alemberta. Zakłada się, że w pewnej chwili t ($t \in T$) na drodze jednopasmowej znajduje się strumień złożony z N pojazdów i że można jednoznacznie określić położenie $x_n(t)$ i prędkość $v_n(t)$ każdego z nich, tzn. $n = 1,2,\ldots,N$. Zakłada się, że strumień ma kształt kolumny, czyli że pojazdy przemieszczają się jeden za drugim bez wykonywania manewrów wyprzedzających, zachowując między sobą odległości wymagane przepisami bezpieczeństwa ruchu. Ten sposób przemieszczania się pojazdów nazywa się jazdą za liderem.

U podstaw modeli jazdy za liderem leży fakt empiryczny, że istnieje silna korelacja między reakcją kierowcy i względną prędkością prowadzonego przez niego pojazdu oraz pojazdu bezpośrednio go poprzedzającego. Zakłada się, że chociaż każdy kierowca reaguje w sobie tylko właściwy sposób na zmiany w zachowaniu się innych pojazdów, to jednak reakcja każdego z nich na bodźce zewnętrzne wyraża się formułą

$$\text{Reakcja} = \text{Wrażliwość} \times \text{Bodziec}.$$

Reakcję kierowcy wyraża się w kategoriach zmiany przyśpieszenia jego pojazdu. Wrażliwość charakteryzuje się za pomocą rozmaitych współczynników, których wartość liczbową lub postać funkcyjną określa się w sposób empiryczny. Rolę bodźca pełni zazwyczaj względna prędkość pojazdu.

3.2. Model jazdy za liderem – wersja liniowa

Idea liniowych modeli jazdy za liderem pochodzi od Chandlera, Hermana i Montrolla (1958). Zakłada się, że pojazdy przemieszczają się w kolumnie w ślad za pierwszym pojazdem, który pełni rolę lidera. Pojazdy są ponumerowane za pomocą liczb naturalnych, przy czym pojazdowi znajdującemu się na czele kolumny jest przyporządkowana liczba 1, a każdy z pozostałych pojazdów ma numer odpowiadający jego położeniu w kolumnie.

Wchodzą w grę dwie podstawowe możliwości: strumień może być gęsty (duża koncentracja pojazdów na jednostkowym odcinku drogi), lub rzadki (mała koncentracja pojazdów na jednostkowym odcinku drogi). Rozpatrzymy pierwszym z nich, ponieważ jest bardziej użyteczny teoretycznie i bardziej odpowiada rzeczywistości ruchowej. Jeżeli strumień jest gęsty, wtedy między tworzącymi go pojazdami zachodzą silne wzajemne oddziaływania.

Zakładany, że wszystkie pojazdy mają taką sam długość L i że przyśpieszenie pojazdu o numerze $n+1$ jest wprost proporcjonalne do różnicy prędkości tego pojazdu i prędkości pojazdu bezpośrednio go poprzedzającego, czyli

$$x_n - x_{n+1} = L + S\dot{x}_n$$

gdzie S jest współczynnikiem proporcjonalności. Stąd otrzymujemy

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\tau)=\frac{1}{S}[\dot{x}_n(t)-\dot{x}_{n+1}(t)].$$

Wyrażenie

$$\alpha=\frac{[\ddot{x}_{n+1}(t+\tau)]^m}{[\dot{x}_n(t)-\dot{x}_{n+1}(t)]^l},$$

gdzie α ($\alpha>0$) jest współczynnikiem reakcji kierowcy, τ - czasem reakcji kierowcy w systemie kierowca-pojazd. Wartości parametrów m i l szacuje się na podstawie wyników pomiaru ruchu.

Liniowy model jazdy za liderem pozwala analizować zjawisko propagacji drobnych zaburzeń ruchu oraz analizować stabilność strumienia, tj. jego odporność na małe zakłócenia, których źródłem jest otoczenie strumienia.

3.3. Model jazdy za liderem - wersja nieliniowa

Stwierdzono, że nawet w warunkach stanu ustalonego zależność między średnią prędkością pojazdów i średnim odstępem między pojazdami jest nieliniowa (Gazis, Herman i Rothery 1961). Ponieważ liniowe modele jazdy za liderem nie odwzorowują tego faktu, konieczne jest konstruowanie modeli nieliniowych. Ogólną postacią takich model jest (Gazis, Herman i Rothery, 1959; Newell 1961)

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\tau)=\alpha[\dot{x}_{n+1}(t+\tau)]^m\frac{\dot{x}_n(t)-\dot{x}_{n+1}(t)}{[\dot{x}_n(t)-\dot{x}_{n+1}(t)]^l}$$

gdzie, jak w przypadku liniowym, α ($\alpha>0$) jest współczynnikiem reakcji kierowcy, τ - czasem reakcji kierowcy w systemie kierowca-pojazd, zaś wartości parametrów m i l szacuje się na podstawie wyników pomiaru ruchu.

4. Modele mezoskopowe

Prace nad konstruowaniem modeli mezoskopowe trwają od niedawna. Koncepcja tych modeli została wymuszona przez potrzeby praktyki przepływów strumieni pojazdów pasażerskich i towarowych w transporcie. Okazało się bowiem, że mikroskopowe modele strumieni – mimo całej szczegółowości – nie odwzorowują całościowych (systemowych) własności ruchu, zaś modele makroskopowe nie uwzględniają powiązań całościowych własności ruchu z zachowaniem się poszczególnych pojazdów. Powstała więc potrzeba opracowania modeli, które stanowiłyby ogniwo pośrednie między modelami mikroskopowymi i makroskopowymi. Modele te powinny opisywać ruch odrębnych pojazdów – tak jak ma to miejsce w modelach mikroskopowych, a także odwzorowywać zależności zachodzące między pojazdami w sposób całościowy – tak jak ma to miejsce w modelach makroskopowych.

5. Modele makroskopowe

5.1 Ogólna idea modeli

Modele makroskopowe buduje się zarówno dla dróg jednopasmowych, jak i wielopasmowych. Zadaniem tych modeli jest odwzorowanie całościowych własności dynamicznych strumienia w kategoriach trzech zmiennych zagregowanych: Koncentracji (gęstości) pojazdów na drodze - $\rho(x,t)$, średniej prędkości strumienia, $V(x,t)$ oraz średniej intensywności ruchu (natężenia ruchu) - $v(x,t)$.

Koncepcja modeli wywodzi się z podobieństwa procesu przemieszczania strumienia pojazdów do procesu przepływu ściśliwego ośrodka ciągłego (płynu lub gazu). Podstawową formułą matematyczną w tych modelach jest równanie zachowania liczby pojazdów (równanie ciągłości), które ma postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = v(x,t),$$

gdzie wyraz $v(x,t)dx$ jest intensywnością wchodzenia lub wychodzenia pojazdów z odcinka drogi o długości dx (tj. opuszczania drogi za pośrednictwem łącznic wjazdowych bądź wyjazdowych. Istnieje spora grupa makromodeli, przy czym podstawową różnicą między nimi jest równanie dla średniej prędkości pojazdu $V(x,t)$.

5.2. Model Lighthilla-Whithama

Najbardziej znaną i wciąż podstawową postacią modelu makroskopowego jest model skonstruowany przez Lighthilla i Whithama (1955a, 1955b). Model ten stanowi aproksymację gęstego strumienia ruchu drogowego za pomocą strumienia cieczy.

Parametrami strumienia pojazdów są: intensywność strumienia, q, wyrażona w liczbie pojazdów na jednostkę czasu oraz gęstość strumienia, $\rho(x,t)$, wyrażona w liczbie pojazdów na jednostkę długości w punkcie x w chwili t. Podstawowym równaniem modelu jest równanie ciągłości (zachowania liczby pojazdów)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

które wyraża fakt, że na modelowanym odcinku drogi nie powstają nowe pojazdy, ani nie giną te, które już się tam znajdują.

Podobne równanie ma miejsce w hydrodynamice i w kinetycznej teorii gazów (zob., np., Landau i Lifshitz 1959). Ale dynamika strumienia ruchu drogowego istotnie różni się od dynamiki cieczy, przede wszystkim tym, że zakłada się, że istnieje funkcjonalna zależność między intensywnością i gęstością strumienia

$$\rho\bar{v} = q(\rho).$$

Przyjmuje się, że ta funkcjonalna zależność jest prawdziwa nawet dla sytuacji zależnych od czasu i przestrzeni. W konsekwencji, pierwsze z tych równań można zapisać w postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

gdzie

$$V = \frac{\partial (\rho \overline{v})}{\partial v} .$$

W ten sposób, otrzymaliśmy równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu, którego rozwiązaniem jest

$$\rho = \rho(x - Vt) .$$

W konsekwencji, niejednorodność strumienia, jaką jest – na przykład – fala pojazdów, będzie przenosiła się w tył strumienia z prędkością V, która jest na ogół inna niż średnia prędkość $\overline{v}$. Lighthill i Whitham nazwali to zjawisko powstawaniem fali kinematycznej, a wielkość V - prędkością fali kinematycznej.

Z analizy kształtu krzywej odwzorowującej zależność intensywności strumienia od jego koncentracji wynika, że prędkość fali kinematycznej nigdy nie przekracza $\overline{v}$. Fakt ten wyraża się nierównością

$$V = \overline{v} + v \frac{\partial \overline{v}}{\partial \rho} \leq \overline{v} ,$$

która wynika z tego, że $\frac{\partial \overline{v}}{\partial \rho} \leq 0$. W granicy, przy małej koncentracji ruchu, $V \to \overline{v}$. Dla koncentracji odpowiadającej maksymalnej intensywności strumienia mamy $V = 0$. Dla jeszcze wyższych wartości koncentracji $V < 0$. W miarę jak ze wzrostem koncentracji maleje prędkość fali kinetycznej, mogą pojawiać się kolejne fale, przy czym mogą one wywoływać nieciągłość strumienia. Przez analogię do dynamiki płynów, termin fale kinetyczne nazywa się również falami udarowymi.

5.3. Model Prigogine'a-Hermana

Prigogine i Herman (1961) spojrzeli na drogę transportową z czysto fizycznego punktu widzenia. Przyjęli, że każdej chwili t, przy danej prędkości strumienia istnieje funkcja rozkładu prawdopodobieństwa $f(x,v,t)$. Za pomocą tej funkcji liczba dN pojazdów znajdujących się w chwili t na odcinku drogi między punktami x i $x+dx$ i mających prędkości z przedziału v i $v+dv$ jest określona wzorem

$$dN = f(x,v,t)dxdv.$$

Ponieważ każdy kierowca zachowuje wybraną przez siebie prędkość, więc zmieniać się może tylko położenie pojazdów. Pokażemy, że dla jakiejkolwiek wartości początkowej gęstości strumienia $\rho(x,t=0)$, dla wystarczająco długiego okresu czasu mamy

$$\rho(x,t) = \text{const.}, \quad t \to \infty.$$

Innymi słowy, z upływem czasu, strumień staje się coraz bardziej jednorodny (nazywa się to homogenizacja strumienia) – jest to konsekwencją swobodnej jazdy pojazdów. Można to opisać na wiele sposobów (zob., np., Weiss i Herman 1962).

Zwróćmy uwagę, że w przypadku braku jakichkolwiek oddziaływań między pojazdami funkcja $f(x,v,t)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Odwzorowuje ono fakt, że zmiana liczby pojazdów na drodze na elemencie przestrzeni $dxdv$ jest równa różnicy między liczbą pojazdów, które wjechały na ten element drogi oraz tych, które go opuściły. Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$f(x,t,v) = f(x - vt, v, t = 0).$$

Można to sprawdzić przez zróżniczkowanie. Rozkład prędkości w chwili t w punkcie x jest równy temu rozkładowi przy w pewnej chwili początkowej $t = 0$ i w miejscu $x - vt$.

Istotą modelu Prigogine'a i Hermana jest znalezienie równania, jakie musi spełniać funkcja rozkłady gęstości $f(x,v,t)$. Przez analogię do fizyki statystycznej Prigogine i Herman nazwali je równaniem kinetycznym. Założyli, że droga jest nieskończenie długa, że każdy pojazd przemieszcza się z wybraną przez kierowcę, ale stałą prędkością oraz że wyprzedzanie jest zawsze możliwe, lecz odbywa się bez zmiany prędkości. Nie ma więc odddziaływań między pojazdami. Istotą idei Prigogine'a i Hermana (1961) jest wykorzystanie równania Boltzmanna, zaczerpniętego z kinetycznej teorii cieczy, do opisu makroskopowych kinetycznych własności strumienia pojazdów.

5.4. Model Payne'a-Whithama i model Rascle'a

Model (zob. Kerner, Klenov i Konhauser 2003) opiera się na analogii strumienia ruchu drogowego do strumienia gazu. Model ma postać układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych: równania zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

i równania zachowania pędu (ilości ruchu)

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}p'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{1}{\tau}[V(\rho)-v]+v\frac{\partial^2 v}{\partial x},$$

gdzie $\frac{1}{\tau}$ - stała nieujemna (czas relaksacji strumienia), zaś v – współczynnik liczbowy, którego wartość wyznacza się z danych empirycznych. W powyższym równaniu $V(\rho)$ jest prędkością w stanie równowagi, malejącą względem ρ, np. (przy odpowiedniej normalizacji) $V(\rho)=1-\rho$.

Model Rascle'a (Rascle 2002) jest szczególnym przypadkiem modelu Payne'a-Whithama. Rascle dostrzegł, że jeżeli stała $\frac{1}{\tau}$ w modelu Payne'a-Whithama spełnia warunek $\frac{1}{\tau}=v=0$, to jest to równoważne dopuszczeniu fizycznie bezsensownej sytuacji, że strumień pojazdów może zacząć przemieszczać się do tyłu. Przyjął więc, że musi być spełniony warunek $v\neq 0$.

5.5. Modele oparte na idei automatów komórkowych

W odróżnieniu do modeli makroskopowych w modelach opartych na idei automatów komórkowych przyjmuje się, że droga transportowa, czas i zbiór stanów są dyskretyzowane. Zakłada się, że droga jest podzielona za pomocą regularnej siatki prostokątnej na obszary zwane komórkami, przy czym długość komórki wynika z warunków bezpieczeństwa ruchu na danej drodze. W każdej chwili każda z komórek może znajdować się w dokładnie jednym spośród skończonego zbioru stanów. Bieżący stan komórki zależy jedynie od jej stanu w chwili poprzedniej oraz od stanów komórek bezpośrednio z nią sąsiadujących w chwili poprzedniej. W dziedzinie ruchu drogowego modele komórkowe znajdują się w pierwszej fazie rozwoju, chociaż trzeba przyznać, że fascynacja nim jest bardzo duża. Nie negując w niczym przydatności tych modeli, zwłaszcza w kontekście organizowania tzw. inteligentnych systemów transportowych, trzeba jednocześnie przypomnieć, że – jak w przypadku wszystkich innych modeli matematycznych – zakres ich zastosowań i dokładność przybliżania nimi rzeczywistości ruchowej są ograniczone.

6. Modele probabilistyczno-statystyczne

6.1. Ogólne zasady podejścia probabilistyczno-statystycznego

W naturze strumienia ruchu pojazdów leży losowość, przy czym wchodzą w grę rozmaite jej rodzaje, niesprowadzalne jeden do drugiego. Losowość rozumiana w sensie klasycznego rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej jest tylko jednym z nich. Tymczasem w modelowaniu probabilistyczno-statystycznym strumieni ruchu z góry zakłada się, że wszystkie rodzaje losowości właściwej strumieniowi pojazdów dają się scharakteryzować za pomocą klasycznego pojęcia prawdopodobieństwa teoretycznego lub empirycznego. Chociaż przyjęcie tego założenia pozwala konstruować modele strumieni pojazdów w formie różnorakich procesów stochastycznych i wykorzystać systemy masowej obsługi jako modele funkcjonowania układów obsługujących ruch, to trzeba wyraźnie powiedzieć, że w tej dziedzinie zastosowań popełniono i popełnia się wiele elementarnych błędów metodologicznych, wskutek czego duża część probabilistyczno-statystycznych opisów strumieni ruchu jest po prostu błędna. Przykładem może być modelowanie gęstego strumienia pojazdów na skończonym odcinku drogi za pomocą stochastycznego procesu Poissona (Potthoff 1965, 1970; Wolszczan 1970; Węgierski 1971). W gęstym strumieniu pojazdów występują silne wzajemne oddziaływania między pojazdami, podczas gdy u podstaw modelu poissonowskiego leży założenie o pełnej niezależności tworzących go zdarzeń. Pojazdy mają określone wymiary fizyczne, podczas gdy zdarzenia tworzące proces Poissona mają charakter punktowy. Odstępy czasu między zdarzeniami w procesie Poissona mają rozkład wykładniczy, podczas gdy odstępy czasowe między pojazdami w rzeczywistym strumieniu ruchu nie spełniają tego założenia. Podobnych niekonsekwencji wynikających z niewłaściwego stosowania metod probalilistyczno-statystycznych do modelowania strumieni pojazdów można podać wiele. Dążenie do ich wyeliminowania stało się ważnym impulsem do rozwoju modeli odwzorowujących zależności między pojazdami i uwzględniających niepunktowość pojazdów.

6.2. Model Millera – droga jednopasmowa z ruchem jednokierunkowym

Miller (1961a, 1961b, 1962) skonstruował stochastyczny model jednokierunkowego ruchu pojazdów na dwupasmowej drodze szybkiego ruchu. W takim układzie pojazdy mają możliwość zmiany pasa ruchu oraz wykonywania manewrów wyprzedzania. Odwzorowanie tych elementów w modelu matematycznym jest niezwykle trudne. Trzeba więc szukać akceptowalnego kompromisu między rzeczywistością ruchową, a matematyczną abstrakcją. Miller przyjął, że pojazdy na drodze przemieszczają się w grupach, których liczebności, prędkości i położenia na drodze w danej chwili są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmiany prędkości pojazdów odbywają się natychmiastowo i mają miejsce tylko w przypadku podjęcia manewru wyprzedzania. Pomija się długości pojazdów, wskutek czego ich kolejki też są zdarzeniami punktowymi (tzn. są pozbawione długości). Wyprzedzania występują w chwilach przypadkowych i niezależnie od wcześniejszych manewrów tego rodzaju. Gdy pojawia się możliwość wyprzedzenia pojazd lub grupa pojazdów wykonują ten manewr równocześnie. W modelu wielkość grupy jest próbkowana z rozkładu $p_n^*(u)$, gdzie u jest prędkością wyprzedzanej grupy pojazdów. Miller przyjął, że rozkład ten jest identyczny z rozkładem wielkości grup dołączających do tej grupy. Intensywność procesu wyprzedzeń wynosi $\lambda(u)$, gdzie u jest prędkością wyprzedzanej grupy pojazdów. Prędkość u wyprzedzającego pojazdu jest próbkowana z rozkładu o funkcji gęstości $h^*(u,u')$, gdzie u' jest prędkością wyprzedzanej grupy pojazdów. Przyjęto, że rozkład ten jest taki sam jak rozkład prędkości grup dołączających do wyprzedzanej grupy.

Przyjęcie tych założeń pozwoliło Millerowi znaleźć stan równowagi systemu ruchowego, ale nie poszczególnych pojazdów. Aby znaleźć stan równowagi dla poszczególnych pojazdów trzeba by dodatkowo przyjąć założenie dotyczące dyscypliny organizacji kolejki: jeżeli grupa pojazdów dogania grupę jadącą wolniej, to musi ją wyprzedzić jako cała grupa i to z taką prędkością, z jaką ją dogoniła.

Miller skorzystał z twierdzenia Jacksona (1954) dotyczącego poissonowsko-wykładniczych sytemów masowej obsługi z jednym kanałem obsługi, które orzeka, że warunkiem stacjonarności takich systemów jest, by współczynnik ich wykorzystania (tzn. stosunek intensywności napływu zgłoszeń do intensywności obsługi) był mniejszy od jedności. W modelu Millera wolna grupa pojazdów odpowiada kanałowi obsługi z klasycznej teorii masowej obsługi. Szybsze grupy pojazdów dołączają do niej losowo (manewr dołączania) i losowo ją wyprzedzają (manewr wyprzedzania).

W pierwszym przypadku ważna jest tylko odległość między grupami pojazdów (tj. kolejkami), a w drugim czas, w którym pojazd lub grupa pojazdów pokona drogę od punktu obecnego położenia do czoła grupy wyprzedzanej. Intensywności strumienia oraz koncentracje pojazdów wynikające z modele są jednak różne od rzeczywistych. Zależność między koncentracją pojazdów w modelu i w systemie rzeczywistym może być ustalona w następujący sposób. Załóżmy, że średnia rzeczywista odległość między kolejnymi pojazdami w kolejce jest b. Jeżeli więc w rzeczywistym strumieniu znajduje się n pojazdów na odcinku drogi długości X, to w modelu, w którym są zachowywane odległości między kolejkami musi znajdować się N pojazdów na długości $X-Nb$. Jeżeli teoretyczna koncentracja pojazdów (wynikająca z modelu) modelu wynosi k, a rzeczywista k', to ma miejsce zależność

$$k=\frac{N}{X-Nb}=\frac{N/X}{1-Nb/X}=\frac{k'}{1-k'b}.$$

Wobec tego $k'=\frac{k}{1+kb}$. Zauważmy, że ciągły model strumienia pojazdów wymagałby przyjęcia założenia o nieskończonej koncentracji pojazdów na drodze. Zwróćmy też uwagę, że istotnym nierealistycznym założeniem modelu jest przyjęty w nim mechanizm wykonywania manewru wyprzedzania. Z drugiej strony trzeba też pamiętać, że każdy model jest kompromisem między prostotą i realizmem.

6.3. Model Tannera – droga dwupasmowa z ruchem dwukierunkowym

Tanner (1961) rozpatruje drogę dwupasmową bez skrzyżowań, z ruchem dwukierunkowym. Osią drogi jest prosta. Każdy pojazd, o ile nie jest zatrzymywany przez inne, może przemieszczać się z wybraną przez kierowcę prędkością. Gdy dogania wolniejszy pojazd, wtedy – o ile istnieje wystarczająco duża luka w strumieniu pojazdów jadących z przeciwnej strony – natychmiast go wyprzedza. Jeżeli pojazd jadący przed nim znajduje się na końcu kolejki kolejki, to luka ta musi być tak duża, aby cała kolejka mogła być wyprzedzona w jednym manewrze wyprzedzania. Jeżeli luka jest zbyt mała, wtedy pojazd dołącza do kolejki lub daje początek nowej kolejce (złożonej z jednego lub wielu pojazdów).

Pojazdy przemieszczają się wzdłuż osi drogi w obu kierunkach. Przyjmijmy, że natężenie ruchu w jednym kierunku wynosi q pojazdów na jednostkę czasu, a w drugim Q. Wszystkie pojazdy jadące w jednym kierunku mają taką samą prędkość równą – odpowiednio – v i V. W obu strumieniach odstępy między pojazdami są wybierane przez kierowców w sposób losowy, przy czym musi być spełniony warunek utrzymania minimalnej odległości, wynikający z konieczności zachowania bezpieczeństwa ruchu. Będziemy zakładać, że każdy pojazd zachowuje co najmniej tę minimalną odległość. Oznaczmy ją przez b w odniesieniu do pierwszego strumienia i przez B – w odniesieniu do drugiego. Tak więc w pierwszym przypadku każdy strumień może być rozpatrywany jako wyjście z kolejki o losowych wejściach i stałym czasie obsługi b/v, a w drugim jako wyjście z kolejki o losowych wejściach i stałym czasie obsługi B/V. Zakłada się, że układy drogowe obsługujące oba strumienie są zamknięte (nie ma dopływu i odpływu pojazdów) i nie występują opóźnienia. Innymi słowy, muszą być spełnione warunki $bq < v$ oraz $BQ < V$.

Rozpatrzmy dwie grupy pojazdów jadących w tym samym kierunku, przy czym pierwsza przemieszcza się z prędkością v, druga z prędkością u. Pojazdy należące do pierwszej z nich będziemy nazywać pojazdami typu v, a należące do drugiej - pojazdami typu u. Załóżmy, że liczba pojazdów jadących w pierwszym kierunku zwiększy się o jeden. Jeżeli jego ruch nie zostanie zatrzymany, to będzie on przemieszczał się ze stałą prędkością u, większą niż v. Gdy chce wyprzedzić pojazd typu v, lub grupę takich pojazdów, postępuje według następujących reguł:

- Grupa złożona z n pojazdów typu v, tj. pojazdów oddzielonych minimalną odległością b, z większymi odstępami na każdym końcu, jest wyprzedzana w jednym manewrze. Pojazd typu u może wejść w lukę między każdymi dwiema grupami, ale nie może wejść do żadnej z tych grup ani też nie może zbliżyć się na odległość mniejszą niż b od czoła tylnego pojazdu w grupie.
- Jeżeli w chwili, gdy pojazd typu u osiągnie koniec kolejki złożonej z n pojazdów, istnieje w strumieniu jadącym w przeciwnym kierunku luka o długości co najmniej $d_n = d + \frac{nb(u+V)}{u-v}$, to manewr wyprzedzania jest wykonywany bez zwalniania.
- Jeżeli rzeczywisty dystans jest mniejszy od d_n, to pojazd zwalnia do prędkości v (tj. jedzie jak najbliżej ostatniego pojazdu w grupie), czeka dopóki w strumieniu jadącym w przeciwnym kierunku nie pojawi się luka o długości co najmniej $D_n = d_n + (v+V)t$, czeka jeszcze przez czas t, gwałtownie przyśpiesza do prędkości u i wykonuje manewr wyprzedzania.

Druga i trzecia z tych reguł wymagają objaśnienia. Długość grupy n pojazdów wynosi nb i wobec tego pojazd typu u potrzebuje $\frac{nb}{u-v}$ czasu dla przejścia z końca na czoło grupy. W tym czasie pojazd ten pokonuje odległość $\frac{nb(u+V)}{u-v}$ patrząc pod prąd strumienia przeciwnego. Tak więc, reguła druga mówi, że w chwili, gdy pojazd typu u opuszcza grupę pojazdów typu v, to w strumieniu jadącym w przeciwnym, kierunku musi istnieć luka o długości co najmniej d. Podobnie jest w przypadku trzeciej reguły. Wskutek tego sformułowane warunki odnoszą się też do przypadku, gdy zdolność przyśpieszania pojazdu pojazd typu u jest ograniczona. Podczas wyprzedzania pojazd osiąga prędkość u, przy czym dociera do czoła grupy w czasie o t późniejszym niż miałoby to miejsce w przypadku, gdyby nie musiał hamować. Po upływie czasu t czoło grupy będzie znajdowało się w odległości o $(v+V)t$ większej w stosunku do niego. Pojazd typu u opuszcza więc grupę zachowując odległość co najmniej d w stosunku do grupy nadjeżdżającej z przeciwka.

Określimy teraz średnią prędkości $\bar{u}$ osiąganą przez pojazd typu u w przypadku, gdy czas przejazdu drogą jest odpowiednio długi. Pojęcie oczekiwania dotyczy długości czasu, w którym pojazd typu u jedzie za pojazdem typu v ze zredukowaną prędkością v. Nie nazywa się go opóźnieniem (delay), ponieważ nie wyraża on pełnej straty czasu. Łatwo zauważyć, że jeżeli czas oczekiwania wynosi T, to opóźnienie jest równe $\frac{T(u-v)}{u}$.

Przemieszczanie się pojazdu typu u wzdłuż drogi składa się z odcinków swobodnej jazdy z prędkością u, rozdzielonych odcinkami, w których dokonuje się wyprzedzeń, przy czym przed manewrem wyprzedzania pojazd może, ale nie musi tracić czasu na oczekiwanie. Zauważmy, że średnia długość grupy pojazdów typu v wynosi $\frac{bv}{v-bq}$ i że średnia luka między grupami wynosi $\frac{v}{q}$. Zatem, średni czas trwania swobodnego przebiegu z prędkością u, między dwoma kolejnymi wyprzedzeniami, włączając w to czas wyprzedzania, wynosi

$$\frac{1}{u-v}\left(\frac{bv}{v-bq}+\frac{v}{q}\right)=\frac{v^2}{q(u-v)(v-bq)}.$$

Jeżeli czas oczekiwania, uśredniony po liczbie wszystkich wyprzedzeń, włączając te, których czas wykonywania wynosi zero, jest $\bar{w}$, to średnia prędkość pojazdu typu u wynosi

$$\bar{u}=\frac{uv^2+q(u-v)(v-bq)v\bar{w}}{v^2+q(u-v)(v-bq)\bar{w}}.$$

Czas oczekiwania w przy każdym wyprzedzaniu zależy od długości n grupy, która ma być wyprzedzona, oraz od położenia zbliżającej się grupy pojazdów typu v.

7. Modele oparte na zasadach mechaniki układu punktów materialnych

Rozpatrzmy strumień pojazdów przemieszczających się drogą jeden za drugim, bez możliwości wyprzedzeń. Niech n będzie liczbą pojazdów, m_i - masą pojazdu i, $x_i(t)$ - położeniem pojazdu i na drodze w chwili t, $v_i(t)$ - prędkością pojazdu i w chwili t, $f_i(t)$ - siłą pociągową pojazdu i w chwili t, $g_i[v_i(t)]$ - siłą oporu ruchu działającą na pojazd i w chwili t. Zakładamy, że jest ona jedynie funkcją prędkości pojazdu.

Ruch pojazdu i jest więc całkowicie opisany za pomocą takiego układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = v_i(t),$$

$$m_i\frac{d}{dt} = f_i(t) - g_i[v_i(t)],$$

gdzie $i = 1,2,...,n$. Funkcja $g_i[v_i(t)]$ jest nieliniowa. Ponieważ kierunek działania siły oporu jest zawsze przeciwny do kierunku działania siły prędkości, więc funkcja $g_i[v_i(t)]$ ma własności: $g_i(0) = 0$, $v_i(t)g_i[(v_i(t)] \geq 0$.

W normalnych warunkach ruchu można przyporządkować wymagana odległość między dwoma kolejnymi pojazdami i wymaganą średnią prędkość strumienia, tj. prędkość, która jest taka sama dla każdego pojazdu w strumieniu. Niech $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$ będzie wymaganą odległością między pojazdami i oraz $i+1$ zaś v – wymaganą średnią prędkością strumienia.

Wybór odległości Δ_i zależy od warunków bezpieczeństwa jazdy i od zdolności przepustowej drogi. Wielkość ta musi być większa niż minimalny dystans potrzebny do zatrzymania się pojazdu $i+1$ w razie niebezpieczeństwa.

Jeżeli każdy pojazd przemieszcza się z taką samą prędkością v, to istnieje stała siła F_i wymagana do pokonania siły oporu działającej na pojazd i. Jaśniej, wobec konieczności spełnienia równań ruchu, ta siła ma postać

$$F_i = g_i(v).$$

Nawet w normalnych warunkach ruchu mają miejsce mniejsze lub większe odchylenia od dystansu bezpieczeństwa i od średniej prędkości. Niech

$$\delta w_i(t) = x_i(t) - x_i(t) - \Delta_i, \quad (i = 1,2,...,n-1), \qquad (*)$$

będzie odchyleniem od pożądanego położenia,

$$\delta v_i(t) = v_i(t) - v, \quad (i = 1,2,...,n), \qquad (**)$$

odchyleniem od średniej prędkości strumienia, zaś

$$\delta f_i(t) = f_i(t) - F_i, \quad (i = 1,2,...,n), \qquad (***)$$

odchyleniem rzeczywistej siły od siły F_i.

Aby dostosować się do prędkości średniej i do wymaganego dystansu każdy pojazd musi dokonywać odpowiednich korekt wartości parametrów jazdy.

Jeżeli przyjąć, że odchylenia prędkości są małe (fluktuacje), to nieliniowy człon charakteryzujący siłę oporu można zlinearyzować i otrzyma się wtedy układ niezależnych od czasu równań różniczkowych. Dla prostoty wprowadźmy tzw. współczynniki oporu w stanie ustalonym strumienia, tak zdefiniowane

$$\alpha_i = \frac{\partial g_i[v_i(t)]}{\delta v_i(t)}\bigg|_{v_i(t)=v}.$$

Różniczkując (*) względem t i wykorzystując równania ruchu otrzymamy równanie

$$\frac{d}{dt}\delta w_i(t) = v_i(t) - v_{i+1}(t),$$

które wobec (**) sprowadza się do

$$\frac{d}{dt}\delta w_i(t) = \delta v_i(t) - \delta v_{i+1}(t).$$

Z kolei, różniczkując (**) i wykorzystując równania ruchu otrzyma się

$$m_i \frac{d}{dt}\delta v_i(t) = -g_i[\delta v_i(t) + v] + f_i(t).$$

Rozwijając człon nieliniowy w szereg Taylora otrzymuje się

$$g_i[\delta v_i(t) + v] \approx g_i[v] + \alpha_i \delta v_i(t).$$

Pomijając wyrazy wyższego rzędu, pamiętając o tym, że $F_i = g_i(v)$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}\delta v_i(t) = -\frac{\alpha_i}{m_i}\delta v_i(t) + \frac{1}{m_i}\delta f_i(t).$$

A zatem, odchylenia $\delta w_i(t)$ od wymaganego dystansu Δ_i oraz odchylenia $\delta v_i(t)$ od wymaganej średniej prędkości strumienia v są opisane za pomocą takiego układu równań różniczkowych

$$\frac{d}{dt}\delta w_i(t) = \delta v_i(t) - \delta v_{i+1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\delta v_i(t) = -\frac{\alpha_i}{m_i}\delta v_i(t) + \frac{1}{m_i}\delta f_i(t)$$

8. Uwagi końcowe

Powszechnie przyjmuje się, że początki obecnej teorii ruchu komunikacyjnego przypadają na lata 50. dwudziestego wieku. Za podstawową pozycję uważa się pracę Lighthilla i Whitmama (1955), w której został przedstawiony makroskopowy model kinematyki strumienia ruchu oparty na analogii do kinematyki przepływu cieczy. Nie jest to w pełni słuszne, ponieważ prace nad teorią ruchu były prowadzone dużo wcześniej. Przykładem może być praca Adamsa (1936), poświęcona wykorzystaniu teorii szeregów czasowych do modelowania dynamiki przemieszczania się pojazdów na drogach samochodowych.

Niewątpliwym mankamentem dotychczasowego sposobu przedstawiania historii rozwoju teorii ruchu komunikacyjnego jest ograniczanie się do prac autorów pochodzących z krajów nazywanych tradycyjnie zachodnimi. W niewielu z nich można znaleźć odwołania do dorobku autorów z państw, które wówczas leżały za tzw. żelazną kurtyną. Niestety, nawet po przemianach politycznych, jakie zaszły w latach 90. dwudziestego wieku niewiele się zmieniło - literatura ruchowa tych krajów nadal jest w świecie nieznana. Nie można tego tłumaczyć tylko istnieniem bariery językowej. Jest to bowiem często wynikiem swoistej nonszalancji naukowej. A przecież dorobek ówczesnych specjalistów z dziedziny ruchu komunikacyjnego w transporcie w tych krajach był ogromny.

W tym rozgardiaszu zwłaszcza polscy teoretycy i inżynierowie ruchu powinni pamiętać i przypominać o wielkim dorobku polskich specjalistów w tej dziedzinie. Trzeba pamiętać o tym, że pierwszą w historii świata naukową pozycją poświęconą teorii ruchu kolejowego i jej zastosowań była monografia R. Gostkowskiego z 1883 r. Nazwisko tego profesora Politechniki Lwowskiej i organizatora pierwszej w historii katedry ruchu kolejowego nie może być zapomniane. Stworzył on szkołę, z której wyszło wielu specjalistów z dziedziny teorii i inżynierii ruchu kolejowego, których nazwiska wpisały się w historię kolejnictwa w wielu krajach świata. Wybitnymi przedstawicielami i kontynuatorami tej szkoły byli zwłaszcza profesorowie Wątorek i Wyrzykowski – światowej sławy eksperci w dziedzinie kolejnictwa.

Teoria ruchu kolejowego wyprzedziła w czasie i to o bez mała osiemdziesiąt lat powstanie teorii ruchu drogowego. Zaciążyło to na rozwoju samodzielnych podejść do modelowania strumieni ruchu w komunikacji pasażerskiej i towarowej w transporcie samochodowym. Modele uwzględniające specyfikę transportu drogowego pojawiły się stosunkowo późno (lata 50. dwudziestego wieku). Niestety zostały one zdominowane przez podejście deterministyczne i w większości przypadków stanowiły imitacje modeli opisujących mechanikę układu punktów materialnych. W latach 60. i 70. dwudziestego wieku teoria ruchu drogowego przeżywała okres burzliwej matematyzacji. W tym okresie bezkrytycznie przeniesiono na jej grunt szereg koncepcji i modeli z teorii masowej obsługi i teorii sieci masowej obsługi. Błąd był tym większy, że te koncepcje i modele przenoszono pośrednio, zwłaszcza z rozwijającej się wtedy bardzo dynamicznie teorii sieci komputerowych. Wskutek tego powstało wiele modeli, które tylko z nazwy były modelami strumieni ruchu drogowego bądź układów ruchowych, bo faktycznie stanowiły przeniesienie na grunt teorii i inżynierii ruchu drogowego własności ruchu teleinformatycznego.

W pracy dokonano przeglądu podstawowych klas modeli przepływu pojazdów pasażerskich i towarowych w transporcie. Szczególną uwagę zwrócono na zalety i mankamenty stosowanych podejść. Podkreślono konieczność intensyfikacji prac naukowych nad modelowaniem przepływów na poziomie mezoskopowym. W literaturze krajowej jest wyraźnie odczuwalny brak prac przeglądowych, ale krytycznie oceniających dorobek rozmaitych szkół w dziedzinie modelowania ruchu drogowego. Niniejsza praca nie wypełnia tej luki, ale niewątpliwie jest przyczynkiem do dalszych działań w tym kierunku.

Literatura dołączona do pracy jest obszerniejsza niż bezpośrednio cytowane pozycje podstawowe. Zrobiono to celowo, ponieważ w przygotowaniu jest znacznie szersza wersja przeglądu metod modelowania przepływów na sieciach transportowych, uwzględniająca konieczność zsynchronizowania modeli rozwijanych w Polsce z modelami rozwijanymi w krajach, z którymi łączy nas sieć paneuropejskich korytarzy transportowych.

Literatura

Adams W.F. (1936). Road traffic considered as a random series. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, **4**, 121-128.

Ashton W.D. (1966). The theory of road traffic flow. Methuen, London.

Beneŝ V.E. (1963). General stochastic processes in the theory of queues. Addison Wesley, Reading.

Bereziński M. (1984). Podstawy tworzenia matematycznych modeli ruchu kolejowego. *Eksploatacja Kolei*, **7**, 216-222.

Chandler R.E., Herman R., Montroll E.W. (1958). Traffic dynamics: studies in car following. *Operations Research*, **6**, 165-184.

Chinczin A.Ja. (1955). Matiematiczeskije mietody teorii massowowo obsłuziwanija. *Trudy Matematiczeskowo Instituta im. W.A. Stiekłowa*, **49**, Izdatielstwo Akademii Nauk SSSR, Moskwa.

Chinczin A.Ja. (1960). Mathematical methods in the theory of queueing. Charles Griffin and Co., London.

Drew W.R. (1968). Traffic flow theory and control. McGraw-Hill, New York.

Edie L.C. (1961). Caf-following and steady-state theory for noncongested traffic. *Operations Research*, **9**, 66-76.

Ford L.R., Fulkerson D.R. (1962). Flows in networks. Princeton University Press, Princeton.

Gazis D.C., Herman R., Potts R.B. (1959). Car following theory of steady state traffic flow. *Operations Research*, **7**, 499-505.

Gazis D.C., Herman R., Rothery R.W. (1961). Non-linaer follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*, **9**, 545-567.

Gniedenko B.W., Kowalenko I.N. (1966). Wwiedenije w teoriju massowowo obsłużiwanija. Izdatielstwo „Nauka", Moskwa.

Gostkowski R. (1883). Teorya ruchu kolejowego zastosowana do praktyki. Gubrynowicz i Szmidt, Lwów.

Greenberg H. (1959). An analysis of traffic flow. *Operations Research*, **7**, 79-85.

Gronowski M. (1948). Eksploatacja kolei żelaznych. Część I. Wydział Wydawniczy Stowarzyszenia Bratniej Pomocy Studentów Wydziałów Politechnicznych Akademii Górniczej w Krakowie, Kraków.

Haight F.A. (1963). Mathematical theories of traffic flow. Academic Press, New York.

Haight F.A. (1967). Handbook of Poisson distriobution. John Wiley, New York.

Herman R., Montroll E.W., Potts R.B., Rothery R.W. (1959). Traffic dynamics: analysis of stability in car following. *Operations Research*, **7**, 86-106.

Herman R., Prigogine I., (1979). A two fluid approach to town traffic. *Science*, **204**, 148-151.

Jackson R.R.P. (1954). Queueing systems with phase type service. *Operational Research Quarterly*, **5**, 109-120.

Jacyna W. (1930). Zagadnienia budowy i eksploatacji dróg żelaznych. Akademia Nauk Technicznych, Warszawa.

Karlin S. (1968). A first course in stochastic processes. Academic Press, New York.

Kerner B.S., Klenov S.L. Konhauser P. (2003). Payne-Whitham traffic flow model. *Transportation Research*, **B37**, 207-223.

Kleinrock L. (1975) Queueing systems. Vol. I: Theory. Wiley-Interscience, New York.

Landau L.D., Lifshitz E.M. (1959). Fluid mechanics. Addison-Wesley, Reading.

Leszczyński J,. (1973). Modelowanie symulacyjne w transporcie kolejowym. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.

Lighthill M.H., Whitham G.B. (1955a). On kinematic waves I: flood movement on long rivers. *Proceedings of the Royal Society of London*, **229A**, 281-316.

Lighthill M.H., Whitham G.B. (1955b). On kinematic waves II: a theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London*, **229A**, 317-345.

Miller A.J. (1961a). A queueing model for road traffic flow. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B23**, 64-75.

Miller A.J. (1961b). Road traffic flow treated as a stochastic process. W: Symposium on the Theory of Traffic Flow. Elsevier, Amsterdam, - .

Miller A.J. (1962). Road traffic considered as a stochastic process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **58**, 312-325.

Newell G.F. (1961). Nonlinear effects in the dynamics of car following. *Operations Research*, **9**, 209-228.

Palm C. (1943). Intensitätsschwankungen in Fernsprechverkehr. *Ericsson Technics*, **44**, 1-189.

Prigogine I., Herman R. (1971). Kinetic theory of vehicular traffic. American Elsevier, New York.

Potthoff G. (1965). Die Bedienungstheorie im Verkehrswesen. Transpress, Berlin.

Potthoff G. (1970). Verkehrsströmungslehre. Band 1. Die Zugfolge auf Strecken und in Bahnhöfen. Transpress, Berlin.

Potts R.B. (1972). Flows in transportation networks. Academic Press, New York.

Richards P.I. (1956). Shock waves on the highway. *Operations Research*, **4**, 42- .

Saaty T. (1961). Elements of queueing theory with applications. McGraw-Hill, New York.

Syski E. (1960). Congestion theory. John Wiley, New York.

Takács L. (1962). Introduction to the theory od queues. Oxford University Press, New York.

Tanner J.C. (1961). Two papers on applications of stochastic processes to road traffic problems. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B23**, 38-63.

Wardrop J.G. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, 325-378.

Wątorek K. (1924). Budowa kolei żelaznych. Bibljoteka Polska, Warszawa.

Weiss G., Herman R. (1962). Statistical properties of low-density traffic. *Quart. Appl. Math.*, **20**, 121-134.

Węgierski J. (1971). Metody probabilistyczne w projektowaniu transportu szynowego. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.

Wolszczan J. (1970). Zastosowania teorii masowej obsługi w transporcie samochodowym. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.

Wyrzykowski W. (1965). Ruch kolejowy. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.