GEOMETRYA

DLA

SZKÓŁ NARODOWYCH.

Część II.

W WILNIE

NAKŁADEM i DRUKIEM JÓZEFA ZAWADZKIEGO

IMPERATORSKIEGO UNIWER. WIL. TYPOG.

1816.

CZĘŚĆ DRUGA

O Bryłach.

WSTĘP.

W części piérwszéy samémi tylko zatrudnialiśmy się liniiami i powiérzchniami; lubo iakażkolwiek *rozległość* (extensio) będzie rzeczy iakiéy, nie iest ona ani samą liniią, ani samą powiérzchnią; ale się rozciąga wdłuż, w szérz i w głąb. I tak, pokóy naprzykład, ma swoię długość, ma szérokość i wysokość, czyli grubość. Tarcica, choćby naycieńszá, ma także długość, szérokość i grubość. Nie byłoby powierzchni téy tarcicy, toiest nie byłoby rozległości iéy, uważanéy co do długości tylko i szérokości, gdyby nie było tarcicy uważanéy co do wszystkich iéy wymiarów. Powiérzchniá ograniczá rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiéy rozległości była w saméy rzeczy, trzeba, ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powiérzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mówiąc przez podobieństwo lubo dalekié) nie byłoby koloru naprzykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobém, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiéy rozległości, (cośmy nazywali liniią), nié masz iednak téy długości, ieżeli nié masz powierzchni, którą ona kończy, lub na któréy może być w rzeczy saméy ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powiérzchni; a że nie będzie powiérzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącéy trzy wymiary, więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzéma wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w sobie zamyka, w takim razie mówi się, iż się bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum).

Geometryá nie uważa inaczéy ciała, tylko ile to rozciągnioné iest w dłuż, w szérz, i w zwyż albo w głąb: innémi zaś własnościami iego cale się nie zatrudnia, zostawuiąc ie do uważania Fizykóm. Lubo zaś zdaie się, iż sobie ściśłé nader w uważaniu ciała założyli granice Jeometrowie, maią iednak obszérné i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych, których wiadomość po większéy części koniecznie iest potrzebna chcącému w Fizyce postąpić.

Nie sami tylko Jeometrowie, uważaiąc ciała, iednę sobie w nich własność, toiest rozległość za cél wystawuią. Jest to, a przynaymniey być powinien; powszechny postępowania sposób, że gdy kto rzecz iaką zgruntu chce poznać i poiąć: po części naprzód iéy własności uważa, a dopiéro łączy ie razém, i dokładnieyszéy o rzeczy całéy nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto iest ograniczony, aby wiele pospołém nieznanych iescze własności mógł dochodzić, a tém bardziéy ie ogarnąć.

Skutek takowégo własności rzeczy z osobna dochodzenia, tym większéy iest wagi, im więcéy rzeczóm taż własność służyć będzie; a taką własnością iest rozległość. Cokolwiek pod zmysły naszé podpada i podpadać może, wszystko to iest rozległém; cokolwiek więc odkryie tym sposobem Jeometra, może to do wszystkich rzeczy przystosować, które tylko pod zmysły nasze podpadaią, lub poddané być mogą. A ztąd się okazuie ważność w wynalazkach geometrycznych, i obfitość w przystosowaniu onychże.

Lubo maiąc wzgląd na słabość poięcia ludzkiégo, iednę tylko własność ciała uważa Jeometra; dla większéy iednak wygody i tę iescze dzieli niciako na części, i w myśli ie osobno stawia, chociaż w rzeczy saméy osobno się nie znayduią. Nié ma względu rolnik na grubość ziemi w tém mieyscu, gdzie rolą swoię uprawia. Dosyć mu na tém, że ta grubość iest dostateczna do przyięcia ziarna, do dostarczania soku i do rozwinienia się tegoż ziarna. Wielkość pola znać osobliwiéy stara się, aby wiedział, ile na niém ziarna posiać może, a zatém powierzchnią swego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piszący, miarkuie wielkość powierzchni papiéru, końcém zmiesczenia na nim tego co ma pisać; nie wchodząc w jego grubość, i dosyć maiąc na tém, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wszelako iednak, ciało to, dwie strony odmienné, przeciwné sobie mieć musi, i iedna z nich odłączyć się w rzeczy saméy może od drugiéy, luboby nie znalazło się sposobné narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc, chociaż naycieńsze, nie może być za iedno brané, co powierzchniá; a zatém nieprawdziwie rzecz wykładaią niektórzy Jeometrowie, gdy mówią: że ciało albo bryła składa się z powierzchni położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warst, z których ciało złożone uważamy, każda iednak w szczególności ta warsta byłaby bryłą a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwne, i mogące się od siebie odłączyć.

Co się zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach twierdzić należy, że nie dla tego są od Jeometrów uważané, iakoby w rzeczy saméy znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak széroká iest droga, którą ma przebyć, dosyć mu na tém, iż się nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawisła od szérokości, ale od saméy długości téy drogi; tę przeto długość szczególniéy uważa.

Niechby była bardzo mała szérokość powierzchni iakiéy, naprzykład równoległoboku, i niechby ta sama tak mała szérokość podzielona była na iak naywięcéy części, przez liniie równoległe do długości, wszelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieysza była odległość dwoch liniy, które tę szczupłą powierzchnią kończą, za iednę iednak liniią wziąć ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iak to wyrażenie iest niedokładné a bardziéy iescze fałszywé; że powierzchniá składa się z liniy położonych iednych przy drugich.

Nakoniec zdarzaią się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całéy linii, ale koniec iéy tylko ieden lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi się, że Jeometra samym się zatrudnia *punktem*. Punktu w saméy istocie nié ma, ieżeli nié ma linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cél swoiéy drogi, iak punkt iaki sobie wystawia, wielkością iego cale się nie zaprzątaiąc, aż póki do niego nie dóydzie, doszedłszy uważa dopiéro obszérność mieysca do którego dążył. Nié masz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwoch liniy ten kąt czyniących. Uwagi nad któremi się zastanawia Geometra, czyli to co do położenia punktów iednych względém drugich, czyli względém linii iakiéy, pochodzą z samégo wystawienia sobie w myśli tych rzeczy w istocie się nie znayduiących, dla łatwieyszégo dóyścia tego, czego szuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względém zmysłów naszych lub względém wielkości ciał, któré nam nayczęściéy pod zmysły podpadaią; wszelako można oddalić myślą tę małość, względém innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby też naymnieyszé, iak gdyby wielkiém bardzo było, a to względém tysiącznéy naprzykład części swoiéy.

Niech będzie iak naymnieyszá liniiá; téy linii koniec ieden, zawsze różnić się będzie od drugiégo. I znowu niechby kto na iak naywięcéy części podzielił iaką liniią, każda z tych części dwa końce odmiénné mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwé iest to wyrażenie, że liniia składa się z punktów przy sobie położonych.

Wystawuiąc sobie Jeometra pod témi różnémi postaciami rozległość, uprzedzać tém samém zdaie się te trudności, które często zwykły bywać zarzucané o prawdziwéy *bytności* (existentia) tych rzeczy, które są celém iego nauki.

Powiérzchniá płaská, czyli płaszczyzna(planum) iest powierzchnia, na któréy ku wszystkim stronóm liniie prosté prowadzić można: i takiémi to liniiami i powiérzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wszystkié części na téyże saméy *płaszczyznie* zostaią (in eodem Plano); w części następuiącéy takié nadto liniie i powiérzchnie zabawiać nas będą, które się na odmiennych płaszczyznach znayduią.

Z dwoiakiémi liniiami mieliśmy iescze do czynienia, z prostémi i z kołowémi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy się, były albo zakończone liniiami prostémi, albo liniią kołową, albo liniiami prostémi i częściami liniy kołowych. W części następuiącéy będziémy nadto zabawiać się różnémi powierzchniami *krzywémi* (curva), które wystawić sobie można, iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płaskich, które iużeśmy roztrząsali. Obaczymy to w szczególności, gdy o każdéy takiéy powierzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *brył*, te dwoiakiégo gatunku zabawiać nas będą: iedne, które są zakończoné powiérzchniami płaskiémi, drugié, które się kończą powiérzchniami krzywémi, albo częścią krzywémi, częścią płaskiémi.

Geometryá więc, iest to nauka, która się zabawia samą rozległością.

Liniie prosté dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwszym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo prosto zaraz, albo przez spólną im miarę, do którey stosowaliśmy każdą z osobna liniią. W drugim względzie, albo liniie z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów i ich podziałów, albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iednéy względém drugiéy iakiékolwiek do upodobania położenie, toiest robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoległą do linii danéy. Wyznaczyliśmy mieysce wierzchołków kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dané, i wiele ztąd użytecznych używań wywiedliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć stosunku okręgu koła do linii prostéy, przybliżyliśmy iak naybardziéy stosunek ten do prawdziwégo. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich nie zawisło od porównania okręgu z liniią.

Co do powierzchni, przytoczyliśmy naprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebie. Widzieliśmy, że to przystawanie zawisło iedynie od wielkości i położenia liniy iednych względem drugich, toiest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i iednakowego położenia. Jedném z nayznamienitszych przystosowań było przeniesienie, czyli przerysowanie iakieykolwiek figury prostokreślney. Widzieliśmy także, iż wielkość figur prostokreślnych nie zawisła od wielkości i położenia ich boków, gdyż troykąty, lub równoległoboki, byleby iednakowe miały podstawy i wysokości, są równe; równe też będą, tak dwa naprzykład troykąty, iak i dwa równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stosunku odwrotnym ich wysokości. Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ troykąt, równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że się równać będzie iakieykolwiek figurze daney postokreślney; może iescze zrównany być z summą lub różnicą figur innych prostokréślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką prostokreślną i zrysować takie koło, któreby mało co różniło się od iednéy lub więcey figur prostokréślnych; dokładnie zaś można mieć koło równé innému danému, lub wielu innym kołóm także danym. Lubo wielkość figury nie iest tém samém wyznaczoná, że wyznaczony iest iéy obwod i położenié boków; podany iednak mieliśmy sposób ieden z naywygodnieyszych, wykreślenia figury prostokréślnéy o ilukolwiek bokach danych, maiąc dany iéy obwód, widzieliśmy oraz granicę, w których przy niepowiększonym obwodzie, powierzchniá figury być może powiększoná; lubo zmnieyszenia iey nié ma żadnych granic.

Z podobieństwa położenia liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków i przystosowań. Szczególniéy zaś wynikało przeniesienie na papier działań na ziemi częstokroć nieréwnéy odprawionych; które to przeniesienie dokładnieyszém i łatwieyszém iescze stawało się, używszy rachunku.

W tém wszystkiém, co się dotąd mówiło, nie wspomniało się tylko o linii prostéy, i o linii kołowéy, o powierzchniach płaskich zakończonych przez liniie proste, albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaskiémi albo krzywémi maiącémi swóy początek od powierzchni płaskich. Ta część Geometryi, nazywa się *Geometryą początkową* (Geometria elementaris), służy ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilszych, z których się składa *Geometryá wyższá* (Geometria sublimis); a w téy rzecz iest o rozmaitych innych liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych, i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasém można, a czasem nie można wyprowadzić z tych ostatnich liniy krzywych, lub z powierzchni niémi zakończonych.

Różni się też Geometryá początkowá od wyższey, i co do sposobu rysowania figur do niéy należących: w Geometryi albowiém początkowéy, dosyć iest na cérklu i linii do wykreślenia figur iéy własnych: każdé przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwoch tylko narzędzi może być rozwiązané, do niéy należy. Jeżeli zaś zagadnienie mogąc być rozwiązané z pomocą saméy linii i cérkla, to iest przez same liniie i łuki koła, rozwiązuie się z użyciem innych iescze narzędzi, albo liniy krzywych, odmiennych od koła, o takowém rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonané sposobém zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak liniy iako i płasczyzn iednych względém drugich.

1. *Twierdz.* 1. Gdy liniiá prosta ma dwa swoie punkta, na iednéy płasczyznie, ma ie oraz i wszystkie na téyże płasczyznie.

Dowod: Liniiá prostá wyznacza się przez dwa punkta; a zatém liniiá prostá poprowadzoná przez dwa punkta dané, na danéy także płasczyznie zéydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz*: Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedna płasczyzna.

Dowod. Wystawmy sobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakákolwiek płasczyzna: niechay ta płasczyzna obraca się około téyże linii, w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą samą płasczyzną któréy szukamy.

Można także i przez dwie liniie przecinaiące się (a)

(a) Mówię *przecinaiące się*, bo wiele iest liniy, których położenie iest takie, że przez nie, nié może razém przechodzić iedna płasczyzna: naprzykład w kostce od grania, tak przeprowadzić płasczyznę: ponieważ płasczyznu przechodząca przez iednę z tych liniy i przez którykolwiek punkt drugiéy, przechodzi razém i przez przecięcie tych dwoch liniy, i przez punkt należący do drugiéy liniy; a zatém i drugá ta liniiá calá iest na téyże płasczyznie.*

Można nakoniec i przez trzy boki troykąta przeprowadzić płasczyznę. Jakož płasczyzna przechodzącá przez dwa boki troykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecina tamté dwa, a zatém i ten trzeci bok na teyże iest płasczyznie.

5. *Twiérdz.* 3. Gdy się dwie płasczyzny przecinaią, tém spólném ich przecięciém iest liniiá prostá.

Dowod. Weźmy na tém spólném przecięciu dwa jakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iednéy z dwoch płasczyzn liniią prostą; ta liniiá będzie miała na drugiey płasczyznie dwa punkta do siebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiéy płasczyznie; a zatém będzie cala na obudwóch płasczyznach, toiest będzie spólném ich przecięciém.

To, co się o płasczyznach powiedziało, można porównać z tém, co się linii tycze, toiest: liniiá prostá wyznacza się przez dwa punkta, płasczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie liniie przecinaiące się. Gdy znowu dwie liniie wzaiém się przecinaią, punkt spólném ich iest przecięciém: gdy zaś przecinaią się dwie płasczyzny, spólném ich przecięciem iest liniiá prostá.

4. *Twierdz.* 4. Gdy liniiá prostá do dwoch innych, które się przecinaią na iednéy płasczyznie, prostopadłą iest w punkcie ich przecięcia, będzie też prostopadłą i do każdéy innéy linii, przechodzącéy przez ten punkt na téyże płasczyznie.

Można to naprzód obiaśnić na karcie przełamanéy. Liniiá prostá, podług którey karta się przełamała, prostopadłą iest do bokow, części dwoch, tey karty przełamanéy. Obracaiąc część iednę złamaną,

---

iest położoné ramie iedno kąta, na iednéy stronie, i bok przeciwny drugiému ramieniu tegož kątá, na inney stronie, że przez te dwie liniie iedna płasczyzna przechodzić nie może.

około złamania, czyli spólnégo przecięcia, bok ieden z dwoch, do którego liniiá przecięcia była prostopadłą, odmieniać będzie położenie, wszelako iednak na iednéy zostanie płasczyznie, i liniiá przecięcia zawsze do niego będzie prostopadłą. Ten przykład prawdę tę zmysłóm dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowod. Niech będą dwie liniie proste, AB i CD, przecinaiące się w P, i niech do obudwóch *Tab. I.* prostopadłą będzie liniiá SP. Na płasczyznie *Fig.* 1. przechodzącéy przez te dwie liniie, przeciągnąwszy przez punkt P. iakąkolwiek liniią EF, do téy linii będzie też prostopadłą liniiá SP.

Weźmy liniie równe: PA i PB, i znowu PC, i PD, także równé. Poprowadźmy BD, AC, spotykaiącé liniią EF, w punktach E i F.

Ponieważ troykąty: APC i BPD, maią dwa boki równe iédne względém drugich, i kąty między témi bokami zawarté, także równé, więc mogą przystać do siebie; a w szczególności kąt PAC, równy iest kątowi PBD. Przeto i troykąty APE i BPF, iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedné względém drugich, mogą też do siebie przystać, a w szczególności, równé są w nich boki PE, PF i AE, BF.

Pociągniymy iescze liniie SA, SB, SC, SD; troykąty prostokątné SPA, SPB, maią bok spólny SP, i boki PA i PB, równe: a zatém mogą do siebie przystać, a w szczególności liniie SA, SB, są równé. Podobnie równé są i liniie SC i SD. Dwa więc troykąty CSA, BSD, których boki wszystkie równé są iedné względém drugich, mogą do siebie przystać, a w szczególności kąty SAC i SBD są równé.

Poprowadziwszy SE, SF; i troykąty: SAE, SBF, maią boki SA i AE, równé względém boków SB i BF, i kąty między témi bokami zawarté, równé: więc mogą do siebie przystać; a w szczególności równé są liniié SE i SF.

Więc w troykątcah SPE i SPF równe są boki w jednym, względém boków drugiego, a zatém i te przystać mogą do siebie; a w szczególności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległémi, czynią razém dwa kąty prosté; każdy z nich przeto

B

będzie kątém prostym; a zatém liniiá SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To twierdzenie bardziéy w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być obiaśnioné przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna i z nici; lub w inny sposób. Toż rozumieć trzeba i względém wszystkich prawie podań w téy części zawartych.

5. *Opisanie.* Gdy liniiá prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iéy spadku przecinaią na płaszczyznie iakiéy, o takiéy linii mówi się, że iest prostopadłą do téy płaszczyzny; a zatém ieżeli liniiá prostopadłą iest do dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyznie, ta liniiá prostopadłą iest i do tey płaszczyzny.

6. *Twierdz. 5. Wzaiemnie*, ieżeli liniiá prosta, prostopadłą iest do trzech innych liniy, które się w jednym iéy punkcie przecinaią; płaszczyzna ta, którá przechodzi przez dwie z tych trzech liniy, przechodzi też i przez trzecią.

Tab. I. Fig. 1. *Dowod.* Niech będzie liniiá SP, prostopadłą do liniy PB, PD, PF, które przechodzą przez sam punkt P, linii SP.

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez liniią SP i PF. Jakażkolwiek będzie liniiá, w któréy ta płaszczyzna przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez liniie PB i PD, wszelako liniiá SP, będzie prostopadłą do tego spólnégo przecięcia, a zatém gdyby liniiá PF, nie była tém spólném przecięciém, tedy liniiá SP byłaby prostopadłą do dwoch liniy leżących na téyże co i ona płaszczyznie, toiest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiéy iescze linii różnéy od PF, przecinaiącéy spólnie dwie płaszczyzny; co być nié może. Liniiá więc PF nie iest różna od spólnégo przecięcia dwoch płaszczyzn SPF i BPD, a zatém, iest tém spólném przecięciém, przeto należy i do drugiéy płaszczyzny BPD, toiest ta płaszczyzna BPD, przechodząca przez liniie PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz.* 6. Dwie liniie prosté prostopadłé do iedney płaszczyzny, są do siebie równoległe.

Tab. I. Fig. 2. Niech będą dwie liniie BA i CD, prostopadłe do iedney płaszczyzny, na którą spadaią w punktach B i C, te dwie liniie do siebie są równoległe.

Dowod. Poprowadźmy liniią BC, a od końca C, spólnégo linii BC, z liniią DC, prostopadłą do płaszczyzny, wyciągniymy na téy płaszczyznie prostopadłą CE, do BC, równą iakieykolwiek długości BA, wziętéy na drugiey linii prostopadłey do téyże płaszczyzny. Poprowadźmy iescze i liniie BE, AC, AE. Dwa troykąty ABC, ECB, maią spólny bok BC, boki także BA, CE, równé, z wykreślenia, i kąty proste: ABC, BCE; więc te troykąty mogą przystać do siebie, a w szczególności liniie BE, AC, są równé. Dwa tedy troykąty, ABE, ECA, maią względém siebie równe wszystkie boki, a zatém przystać mogą do siebie; a w sczególności równe są kąty ABE i ACE: że zaś liniiá AB, prostopadłą iest do linii BE, ponieważ wzięliśmy ią za prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez liniie BC, BE, więc kąt ACE, iest też prosty; a zatém liniiá EC, prostopadłá do dwóch liniy CB i CD, z wykreślenia, iest też prostopadłą i do linii CA. Przeto ta liniiá CA iest na téy samey płaszczyznie, co i liniie BC, CD. Aże płaszczyzna przechodzącá przez liniie AC, CB, przechodzi też i przez liniią AB, więc liniie AB, CD, są na iednéy płaszczyznie; będąc zaś na iednéy płaszczyznie, że są prostopadłémi do linii BC, więc do siebie równoległémi będą.

Przestroga. Aby łatwiéy zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przeciąć figurę 2. w linii AC, tąk, aby część iedna ABCD, téy figury, przypadała prosto nad drugą częścią BEC. Podobnie dopomagać można łatwieyszemu wyobrażeniu i w innych figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaszczyzna.

Uwaga. W piérwszéy części cokolwiek się mówiło o liniiach równoległych, zawsze to było w tém rozumieniu, że te liniie kréślone były na tey samey płaszczyznie, na któréy i każda inna liniiá łączącá dwa ich punkta, leżała.

8. *Twierdz.* 7. Jeżeli dwie liniie są do siebie równoległémi, a iedna z nich prostopadłą iest do iakiéy płaszczyzny, będzie i drugá do teyże płaszczyzny prostopadłą.

Weźmy dwie liniie BA i CD za równoległe; ieżeli iedna z nich nap. CD, iest prostopadłą do iakiey płaszczyzny, będzie do teyże płaszczyzny prostopadłą i drugá BA. *Tab. I. Fig. 2.*

Dowod. Na płaszczyznie, do któréy wzięliśmy za prostopadłą CD, pociągniymy CB; będą do CB prostopadłémi obiedwie liniie AB i CD. Na téyże płasczyznie niech będzie CE, prostopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy iescze AC, AE, i BE. Całe dowodzenie na tém zawisło, aby okazać, że kąt ABE, iest prosty, toiest: że liniiá AB, prostopadłą do linii BC, iest razém prostopadłą i do linii BE, leżącéy na téy saméy płasczyznie, do któréy liniiá CD iest prostopadłą.

Dwa tróykąty prostokątne ABC i ECB, maią ramiona kąta prostego równe iedne względém drugich; a zatém te dwa tróykąty mogą przystać do siebie, a w szczególności liniie AC i BE, są równe. Maią tedy dwa troykąty ABE i ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względém drugich, i mogą zatém przystać do siebie; a w szczególności rowne są kąty ABE i ACE. Płasczyzna przechodzącá przez dwie liniie równoległe AB i CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iak i przez AC, więc liniie DC, BC i AC, na iednéy płasczyznie leżą. A że liniiá CE iest prostopadłą do dwoch liniy CD i BC; będzie też prostopadłą i do trzeciéy linii CA; a zatém kąt ACE iest prosty; a że ten kąt, iest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE iest prosty.

9. *Zagad.* Spuścić prostopadłą do płasczyzny, z punktu nie na niéy danego.

Tab. I. Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego spuścić trzeba prostopadłą na daną płasczyznę.

Rozwiązanie. Na płasczyznie danéy nakreślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi inna płasczyzna, na któréy pociągniymy SD, prostopadłą do AB. Na danéy płasczyznie niech też będzie poprowadzoná DP, prostopadła do AB; a przez liniie SD, DP, niech przechodzi płasczyzna, na któréy niech będzie SP, prostopadłą do linii DP; ta liniiá SP, będzie razém prostopadłą, któréy szukaliśmy.

Wykréślenie służące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniiá EF, równoległá do AB.

Dowodz. Liniie SD, PD, z wykréslenia są prostopadłe do linii AB; więc liniia DB, wzaiémnie iest do obudwoch tych liniy prostopadłą; a zatém prostopadłą iest i do płasczyzny przechodzącéy przez te dwie liniie. Aże liniiá EF, równoległą iest do linii AB, więc liniiá EF, iest też prostopadłą do téyże płasczyzny SDP: a w sczególności prostopadłą iest do linii SP; i liniiá SP, iest wzaiemnie do linii EF prostopadłą. Że zaś liniiá SP, zrobioná była prostopadłą do linii PD, więc liniiá SP, iest razém prostopadłą do liniy EF i PD, które się przy iéy spadku P, przecinaią na danéy płasczyznie, a zatém liniiá SP, prostopadłą iest do téyże płasczyzny.

10. *Zagadn.* 2. Od punktu danego na płasczyznie wynieść prostopadłą do téyże płasczyzny.

Rozwiąz. Spuśćmy do płasczyzny danéy z punktu iakiegokolwiek, nie na niéy będącego, prostopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoległą do téyże prostopadłéy.

11. *Uwaga* 1. Od punktu danego, iednę tylko prowadzić można prostopadłą do płasczyzny.

12. *Uwaga* 2. Gdy liniiá iaka nie iest ani na saméy płasczyznie, ani do niéy prostopadłą; może być albo od niey równoległą, albo tak, iak zechcémy do niéy nachyloną.

Naprzód. Jeżeli, spuściwszy z dwoch punktów linii iakiey dwie prostopadle na płasczyznie, te prostopadłe będą sobie równe; tedy ta liniiá od któréy są spusczone, będzie równoległa do płasczyzny, na którą ie spuściliśmy, toiest: nie spotka nigdzie tey płasczyzny, choćby tak liniiá, iako i płasczyzna naydaléy były przedłużone.

Powtóre. Niech będzie liniiá SD nieprostopadłą do płasczyzny; ale niech spotyka płasczyznę w punkcie naprz. D. Z punktu którégokolwiek téy linii naprz. z S, spuśćmy do téy płasczyzny prostopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP nazywa się kątém *pochyłości* (angulus inclinationis) téy linii SD, do płasczyzny. *Tab. I. Fig. 2.*

Ten kąt iest naymnieyszy z tych wszystkich, które czynić może liniiá SD, z jakąkolwiék inną liniią poprowadzoną na téy płasczyznie przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promiéniem równym linii PD, nakréślony był okrąg koła, wszystkie liniie ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawsze kąt z tą płasczyzną.

Ponieważ te podania są tylko do innych glównieyszych *pomocnicze* (subsidiariae) i łatwe do dowiedzenia, przestaie się tu na samém ich wyrażeniu.

13. *Twierdz.* 8. Gdy dwie linie równoległe są do trzeciéy, która na odmiennéy od nich leży płaszczyznie, te dwie liniie i do siebie równoległe będą.

Tab. I. Fig. 4. Niech będą dwie liniie AB i CD, równoległe do linii EF, będą te dwie liniie i do siebie równoległemi. Od punktu któregokolwiek na linii EF naprzykład G, wyciągniymy dwie do téy linii prostopadłe: GH i GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż liniią EF, i przez AB i CD. Ponieważ liniiá EF, iest prostopadłą, tak do linii GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez te dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB i CB są równoległe do linii EF, więc są obiedwie prostopadłé do płaszczyzny przechodzącéy przez liniie GH i GI, a zatém są do siebie równoległé.

14. *Twierdz.* 9. Gdy dwie liniie proste, które się przecinaią, są równoległe względém dwoch drugich prostych, które się także przecinaią, a na inney leżą płaszczyznie, kąt zawarty między dwiéma piérwszémi liniiami, równy będzie kątowi zawartému między dwiéma drugiémi.

Tab. I. Fig. 5. Niech będą dwie liniie AB i AC, równoległe względém dwoch drugich DE i DF; kąt BAC zawarty między dwiema piérwszémi, równy iest kątowi EDF, zawartému między dwiéma drugiémi.

Weźmy równe liniie AB i DE, równe także liniie AC i DF, pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ liniie AB i ED, są równe i równoległe; czworokąt ABED będzie równoległobokiém, i liniie AD i BE będą równémi i równoległémi.

Podobnie równe są i równoległe liniie AD i CF; więc liniie BE i CF są też równe i równoległe, względém linii AD; a zatém równe są sobie, i do siebie równoległe. Jest tedy czworokąt BEFC, równoległobokiém, a w szczególności równe są liniie BC i EF. Przeto troykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względém drugich, a zatém przystać mogą do siebie, a w szczególności równe są kąty BAC, EDF.

15. *Przystosowanie.* Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaią. Na każdéy z tych płaszczy-

znie wystawmy prostopadłą do spólnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu którego kolwiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiéma témi prostopadłémi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coraz inny na spólném przecięciu punkt wybierać będziémy do wyprowadzenia z niego tych prostopadłych.

Opis. Jest przeto taki kąt zdatny do wymierzenia pochyłości tych dwoch płasczyzn iednéy względém drugiéy. Gdy zatém kąt zawarty między témi dwiéma prostopadłémi, iest prosty, mówi się, że w takim razie *płasczyzna iedna iest prostopadłą do drugiéy*. Gdyby zaś kąt między témi dwiema prostopadłémi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d., w tym razie i dwie płasczyzny zawierałyby kąty: 10°, 20°, 30° i t. d.

Można iescze i w jnny sposób przeświadczyć się, iako pochyłość dwoch prostopadłych, wyciągnionych na dwoch płasczyznach, od iednego punktu linii przecięcia spólnego tych płasczyzn, odpowiada zawsze pochyłości tychże dwoch płasczyzn. Wystawmy albowiem sobie te dwie płasczyzny przystaiące do siebie, i leżące iedna na drugiéy. Niech potém spodniá płasczyzna zostanie na swoiém mieyscu, a wyższá niech się podnosi, i obraca około spólnego przecięcia. Spólné przecięcié, podczas tego obrotu będzie zawsze prostopadłe do dwoch liniy prostopadłych, wyciągnionych na obudwoch płasczyznach, od iednego punktu: a zatém te dwie prostopadłe, zostaiące zawsze każda na swoiéy płasczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu pochyłości dwóch płasczyzn. Gdy naprzykład płasczyzna ruchoma obieży połowę drogi, ktorą iéy obéyść trzeba, aby się znalazła na drugiéy stronie w równi z płasczyzną ruchomą; wtenczas i prostopadłá do spólnego przecięcia, znayduiącá się na płasczyznie ruchoméy, obieży połowę téy drogi, którą ma obéyść, aby się w jednéy równi stykała końcém swoim z drugą liniią prostopadłą, do spólnego przecięcia wyciągnioną na płasczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz.* 10. Gdy iaka prostá liniia prostopadłą iest do płasczyzny, do téyże płasczyzny prostopadłą będzie każdá inná płasczyzna przez tę liniią przechodzącá.

Tab. I. Fig. 6. Niech będzie liniia GP, prostopadłą do iakiéy płasczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inna iakakolwiek płasczyzna; ta prostopadłą będzie do piérwszéy płasczyzny.

Niech liniia AB, będzie spólném tych dwoch płasczyzn przecięciém; od punktu P, przez piérwszą płasczyznę wyciągniymy PC, prostopadłą do tego spólnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzięliśmy za prostopadłą do piérwszéy płasczyzny, więc GP prostopadłą będzie tak do linii AB, iako i do linii PC: bo te dwie liniié przechodzą przez piérwszą płasczyznę; a zatém od punktu któregokolwiek np. P, znayduiącego się na spólném przecięciu dwoch tych płasczyzn, wyciągnąwszy prostopadłe PG, PC, do tegoż spólnego przecięcia, te liniie będą prostopadłe iedna do drugiéy; a ztąd prostopadłe będą do siebie i te dwie płasczyzny.

17. *Wniosek.* Gdy liniiá iaka prostopadłą iest do płasczyzny, a na téyże płasczyznie pociągniémy iakąkolwiek inną liniią, i do téy spuścimy drugą prostopadłą od spodku piérwszéy prostopadłéy: poprowadziwszy potém od któregokolwiek punktu piérwszey prostopadłéy liniią do punktu, w którym drugá prostopadłá spotyká liniią pociągnioną na płasczyznie; ta ostatniá liniiá poprowadzoná, prostopadłą będzie do linii na płasczyznie pociągnionéy.

Tab. I. Fig. 5. Niech będzie SP, prostopadłą do płasczyzny: pociągniymy na téyże płasczyznie liniią AB, i spuśćmy do niéy prostopadłą PD, od spodku P, linii SP. Poprowadziwszy z punktu któregokolwiek, naprzykład S, linii prostopadłéy SP, liniią SD, do punktu D, w którym prostopadłá PD spotyka liniią AB; ta liniiá SD, będzie prostopadłą do AB.

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoległą do AB.

Ponieważ liniiá SP, prostopadłą iest do płasczyzny danéy, będzie też prostopadłą i do linii EF, znayduiącéy się na téy płasczyznie; a wzaiémnie i EF będzie prostopadłą do SP. Taż liniiá EF, iako równoległá do AB, iest też prostopadłą do PD; a zatém będąc prostopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także prostopadłą i do płasczyzny SPD, przechodzącéy przez te dwie liniie; więc i AB, równoległá do EF, będzie też prostopadłą do płasczyzny SPD, a w szczególności będzie prostopadłą do linii SD, znayduiącéy się na téy płasczyznie.

18. *Twierdz.* 11. Gdy płasczyzna iedna prostopadłą iest do drugiéy, a przez którykolwiek punkt iedney z tych płasczyzny pociągniémy prostopadłą do drugiey, ta prostopadłá padnie na spólne przecięcie tych dwoch płasczyzn.

Dowod. Gdyby liniiá SP, nie padała na spólne przecięcie dwoch płasczyzn, tedy, spuściwszy z tegoż samego punktu S, prostopadłą do spólnego przecięcia, ta byłaby oraz prostopadłą i do drugiéy płasczyzny; a zatém dwie prostopadłe z jednego punktu spuszczone byłyby na iednę płasczyznę, co być nie może.

19. *Twierdz.* 12. Gdy dwie płasczyzny prostopadłe są do trzeciéy, spólné przecięcie tychże dwoch płasczyzn, prostopadłé też będzie do téyże trzeciéy płasczyzny.

Dowod. Od punktu, w którym liniia przecięcia dwoch piérwszych płasczyzn, spotyka trzecią płasczyznę, pociągnąwszy tak na iednéy iak i na drugiéy z dwoch piérwszych płasczyzn prostopadłe do dwoch liniy spólnego ich przecięcia z trzecią płasczyzną, te dwie prostopadłe, prostopadłemi też będą do trzeciéy płasczyzny; a zatém, gdyby te dwie prostopadłe nie zeszły się w jednę, i nie były w rzeczy samey iedną liniią, która iest spólném przecięciém dwoch piérwszych płasczyzn, tedy od iednego punktu możnaby do iednéy płasczyzny dwie prostopadłe wyprowadzić: to zaś być nie może.

20. *Twierdz.* 13. Gdy iedna liniia prostopadłą jest do dwoch płasczyzn, te dwie płasczyzny nigdzie się z sobą nie zéydą, choćby naydaléy były przedłużone.

Dowod. Gdyby te dwie płasczyzny mogły się spotkać z sobą, tedy troykąt zrobiony z téy prostopadłéy, i z dwoch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na spólném przecięciu dwoch tych płasczyzn, do punktów w których prostopadłá spotyka też płasczyzny, miałby dwa kąty proste, co być nie może.

Opis. Dwie płasczyzny, które nawet przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywaią się *równoległémi.*

21. *Twierdz.* 14. Gdy dwie liniie proste, są ró-

wnoległe względém dwoch drugich prostych na innéy płaszczyznie leżących, płaszczyzna przechodzącá przez dwie piérwsze liniie, będzie równoległą do płaszczyzny przechodzącéy przez dwie drugie liniie.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniie AB i AC równoległe względém dwoch drugich DE i DF; płaszczyzna przechodzącá przez liniie AB i AC, równoległą będzie do płaszczyzny przechodzącéy przez liniie DE i DF.

Dow. Z wierzchołka A, kąta zawartego między dwiéma piérwszémi liniiami, spuśćmy prostopadłą AG, do płaszczyzny przechodzącéy przez drugie dwie liniie, i od spodku G, téy prostopadłéy poprowadźmy na téyże saméy płaszczyznie liniie GH, GI, równoległe względem liniy DE, DF.

Liniiá AG, prostopadłá do drugiéy płaszczyzny, iest też prostopadłą i do liniy GH i GI: a że liniie AC, GI, są obiedwie równoległe do linii DE, więc i do siebie są równoległemi; a zatém liniia AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobém pokazać można, że liniia AG, iest też prostopadłą i do linii AB. Więc ta liniia AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey przez liniie AB, AC; a zatém i dwie płaszczyzny przechodzące, iedna przez liniie AB, AC, drugá przez liniie DE, DF, są obiedwie prostopadłe do téyże saméy linii AG, a przeto są do siebie równoległe.

22. *Twierdz.* 15. Gdy dwie płaszczyzny równoległe do siebie, przecina trzeciá płaszczyzna, ich spólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też do siebie równoległe.

Dowodz. Gdyby te spólne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą; tedy punkt przecięcia tych dwoch przecięć należąc tak do iednego, iak i do drugiego spólnego przecięcia dwoch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do iednéy, iak i do drugiéy z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią; a zatém dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to iest nie byłyby iak są równoległe.

23. *Twierdz.* 16. Gdy dwie płaszczyzny są do siebie równoległe; liniiá, którá iest prostopadłą do iednéy z tych płaszczyzn, będzie prostopadłą i do drugiéy.

Niech będą dwie płasczyzny równoległe: BAC, EDF: liniiá AG prostopadłá do iednéy z tych płasczyzn, naprzykład do piérwszéy, prostopadłą będzie i do drugiéy płasczyzny. *Tab. I. Fig.* 7.

Jeżeli liniiá AG, nie iest prostopadłą do któréykolwiek linii takiéy, iak GH, przeciągnionéy przez spodek G, téyże linii AG, który iest na płasczyznie EDF; tedy przeciągnąwszy przez liniie GH i AG, płasczyznę, któráby przecięła płasczyznę BAC, w linii AB: liniiá AG będzie prostopadłą do linii AB; więc liniie AB i GH, z których iedna iest, a drugá nie iest prostopadłą do linii AG, leżącéy na téyże saméy, co one, płasczyznie, spotkać się mogą z sobą; a przeto i płasczyzny, na których leżą spotkać się też z sobą mogą, i nie będą równoległe: co iest przeciwko warunkowi.

24. *Twierdz.* 17. Gdy dwie liniie leżące albo nieleżące na iednéy płasczyznie, przecięte są przez trzy równoległe do siebie płasczyzny, te liniie będą od tych płasczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB, CD, leżące, albo nie, na iednéy płasczyznie: niech trzy płasczyzny równoległe przecinaią piérwszą liniią w punktach: B, F, A, a drugą w punktach, C, G, D; będzie BF : AF = CG : DG.

Dow. Poprowadźmy liniią BD, spotykaiącą płasczyznę średnią w punkcie E.

Liniie EF, AD, są spólnémi przecięciami płasczyzny BAD, z dwiema płasczyznami równoległémi; więc te dwie liniie są do siebie równoległe; a zatém podobne są troykąty: BFE, BAD; przeto BF : AF = BE : ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą i troykąty BDC, EDG, a zatém BE : ED = CG : GD. Więc też będzie BF : AF = CG: GD.

Uwaga. W tym razie tylko liniie BC, AD są równoległe, i oraz liniie FE, EG iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże saméy płasczyznie znayduią się.

ROZDZIAŁ II.

O kątach bryłowych.

Opis. Wykréślmy iakikolwiek wielokąt na płasczyznie: od każdego wiérzchołka kąta w tym wielokącie wyciągniymy liniie do iednego punktu, nie na téy płasczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów płaskich znayduiących się na odmiennych płasczyznach, ile wielokąt naprzód wykreślony miał boków. Mieysce nieograniczoné zawarté między płasczyznami tych kątów, nazywa się *kątem bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wiérzchołkiém wszystkich kątów płaskich, nazywa się *wiérzchołkiem* tego kąta bryłowégo. Płasczyzny, na których się znáyduią kąty płaskie, które ten wiérzchołek czynią, nazwać można *ścianami* (parietes albo facies): a zaś spólne tych płasczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes*).

Przestroga. W tém wszystkiém, co się tu o kątach bryłowych powié, wystawiać sobie trzeba nie inne wielokąty, iak tylko te, których krawędzie schodząc się w ich wierzchołkach, same kąty wyskakuiące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym; ściany albo kąty płaskie, które go tworzą, pochyłości wzaiémne tych ścian, i stosunek placu zawartego między témi ścianami, do placu całego około wiérzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposób, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego względém całego placu, około wiérzchołka tegoż kąta, na iednéy z tym placém płasczyznie znayduiącego się. *Obacz niżey, co służy do ostatniéy téy uwagi, w Rozdziale o kuli* (*Sphoera*). Jako wielokąt, w którego wiérzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może być na troykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wiérzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek podzielić można na inné kąty bryłowe, złożone ze trzech tylko kątów płaskich. Przeto Jeome-

---

(b) Obacz o innych kątach bryłowych rozprawę P. Bermanna, pod tytułem; *De angulis solidis dissertatio Vitembergae.* 1764.

trowie naywięcéy się bawią około kątów bryłowych, trzéma kątami płaskiémi określonych, aby doszli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potém wiadome maiąc dostatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który się z tych ścian układa. Część ta Geometryi, w któréy o kątach bryłowych rzecz iest, pod tą, pod którą ie wystawuiémy postacią, nazywa się Trygonometryą *kulistą*, albo sferyczną (Trigonometria spherica). Damy przyczynę tego nazwiską, gdy się o kuli mówić będzie. Jest ta część koniecznie potrzebna Astronomóm. Na daniu piérwszych o niéy początków, tu przestaniémy, i mówić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących się do samychże brył.

25. *Twierdz.* 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, summa dwoch z tych trzech kątów, większa iest od kąta trzeciego.

Niech będzie kąt bryłowy w A, *Tab. II. Fig.* 2. zrobiony z trzech kątów płaskich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyszy iest od summy dwoch innych.

Dow. Jeżeli te trzy kąty są wszystkie równe, już oczywiście dwa, większe są od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap. BAC, większy iest tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wszelako mnieyszy będzie od summy obudwoch.

Zróbmy albowiém na płaszczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap. BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap. B; przez trzy punkta B, D, E, niech przechodzi płaszczyzna przecinaiąca krawędź AC, w punkcie C.

Dwa troykąty: BAD, BAE maią bok spólny AB, boki: AD, AE równe, i kąty między témi bokami zawarte, równe; więc te troykąty mogą przystać do siebie, a w szczególności, linie: BD, BE, są równe. Aże w troykącie BDC, summa boków: BD, CD, większa iest od trzeciego boku BC: więc bok CD, większy iest od linii CE; a zatém troykąty: CAD, CAE, maią bok spólny AC, boki: AD, AE równe; podstawa zaś DC iednego, większa iest od podstawy CE drugiego: więc kąt CAD, w wiérzchołku piérwszego troykąta, większy iest od kąta CAE w wiérzchołku drugiego; więc i summa kątów: BAD, CAD, większa iest od summy kątów: BAE, CAE, toiest większa od kąta BAC.

26. *Twierdz.* 2. W kącie bryłowym, summa wszystkich kątów płaskich, mnieysza iest od summy cztérech kątów prostych (c).

Dowodz. Wiérzchołki wielokąta, na których wspieraią się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oraz wiérzchołkami tylu innych kątów bryłowych zrobionych przez kąty trzy płaskie, ile ten wielokąt ma wierzchołków: gdyż każde dwa z tych kątów płaskich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią się przy podstawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podstawy kąta bryłowego w wierzchołku, toiest: do wielokąta, na którym się wszystkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku wspieraią.

Na każdéy z tych ścian summa trzech kątów iednego w wierzchołku, a dwoch przy podstawie ściany, równa się summie dwoch kątów prostych; a zatém summa wszystkich kątów w wierzchołku i wszystkich kątów przy podstawach ścian, równać się będzie dwóm kątom prostym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwoch kątów przy podstawach ścian, większa iest od kąta trzeciego przy podstawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtémi robi kąt ieden bryłowy przy téy podstawie; a zatém summą wszystkich kątów przy podstawach ścian wszystkich, większa iest od summy wszystkich kątów przy podstawie kąta bryłowego.

Więc summie wszystkich kątów przy podstawach ścian, mniéy nie dostaie do summy dwa razy tylu kątów prostych, ile wielokąt, czyli podstawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli summie wszystkich kątów

---

(c) Trzeba mieć na pamięci, że się tu mówi tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspieraią się na wierzchołkach wielokąta, maiącego same tylko kąty wyskakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe takie, w których summa kątów płaskich, będzie większa od 4 kątów prostych tyle, ile zechcémy. P. Le Sage Geneweńczyk piérwszy tę prawdę odkrył, która też piérwsza i sama iedna zdaie się uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz Historyą Akademii Nauk Paryzkiéy na rok 1756.

wielokąta tego nie dostaie do téyże summy dwa razy tylu kątów prostych, ile ten wielokąt ma boków.

A że summie kątów wszystkich wielokąta, do rzeczonéy summy brakuie 4 kątów prostych, więc summie kątów wszystkich przy podstawach ścian, brakować będzie do téyże summy mniéy niż 4 kąty proste. Ze zaś summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego spełnia ten niedostatek mnieyszy od 4 kątów prostych; więc summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieysza iest od 4 kątów prostych.

To twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów szczególnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap. 3. 4, 5, 6, i t. d. w których to razach, takowaź liczba 3, 4, 5, 6, i t. d. będzie wyrażać boki wielokąta służącego kątowi bryłowemu za podstawę; summa zaś kątów wielokąta będzie ważyć 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych, a zatém summa kątów przy podstawach ścian ważyć będzie więcéy niż 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych. Że zaś summa tych ostatnich kątów, wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach kątów prostych 6, 8, 10, 12; więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mnieysza iest, niż *nadmiar* (excessus) liczb

6, 8, 10, 12, i t. d.
nad liczby - - 2. 4. 6. 8. i t. d.

toiest ta summa kątów przy wierzchołku mnieysza iest od 4 kątów prostych.

Można prawdę tego twierdzenia okazać i w sposób następuiący.

Obierzmy punkt iakikolwiek w pośród wielokąta, i pociągniymy od niego liniie do wszystkich wierzchołków tego wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4 kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę wielokąta, podług ciągu linii prostopadłey do téy płaszczyzny. Jm bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków wielokąta; tym bardziey zmnieyszy się każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonémi do wierzchołków wielokąta; a zatém tém mnieysza będzie summa wszystkich kątów przy tym punkcie od summy pierwszey 4 kątów prostych.

27. *Przystosowanie.* Pięć tylko iest gatunków kątów należących do wielokątów foremnych, z których może się złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym ze trzech kątów troykąta równobocznego, każdy płaski kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta prostego, a zatém summa ich ważyłaby 2 kąty proste.

2. W kącie bryłowym, złożonym ze cztérech kątów troykąta równobocznego, summa takich kątów ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proste.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów troykąta równobocznego, summa takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty prosté.

Sześć kątów troykąta równobocznego waży kątów prostych cztery. Są one zdatne do napełnienia płacu, około punktu iakiego na płaszczyznie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż sześciu takowych kątów, ważyłaby też więcey niż cztéry kąty proste.

4. W kącie bryłowym, złożonym ze trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt byłby kątém prostym, a zatém summa takowych kątów równałaby się summie 3 kątów prostych; summa 4 kątów kwadratu, byłaby summą 4 kątów prostych; a przeto ze 4 takowych kątów składać się nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziey składać się nie może z większey liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym ze trzech kątów pięciokąta foremnego, każdy płaski kąt ważyłby $1\frac{1}{5}$ kąt prosty; a zatém summa ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proste.

Summa cztérech takowych kątów, a tém bardziey więcey niż cztérech, ważyłaby więcey niż cztéry kąty proste.

Summa trzech kątów sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatém żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów sześciokąta foremnego; tém bardziéy zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do wielokątów foremnych, które więcéy niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcéy iak pięć być nie może.

Bryła, któréy każdy kąt bryłowy złożony iest ze trzech kątów troykąta równobocznego, ma 4 ściany, każda iest troykątém równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetràédrum).

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest ze 4 kątów tróykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest troykątém rownobocznym, i 6 kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościaném* (Octòédrum).

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 5 kątów troykąta równobocznego, ma 20 ścian, z których każda iest troykątém równobocznym, i 12 kątów bryłowych. Nazywa się *Dwudziestościaném* (Jcoséédrum).

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest ze 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda iest kwadratém, i 8 kątów bryłowych. Nazywa się *Sześcianém* (Hexàédrum), a zwyczaynie (*Cubus*).

Bryła, któréy każdy kąt złożony iest ze 3 kątów pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda iest pięciokątém foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa się *Dwunastościaném* (Dodecàédrum).

Dosyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obszerne w téy mierze rozwodzenia się, które więcey samey ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszystkie kąty maią równe, i wszystkie ściany foremne, i mogące przystać iedne do drugich, nazywaią się bryłami *foremnémi.*

Gdybyśmy w kącie bryłowym pomieszać chcieli różne kąty wielokątów foremnych, końcém złożenia kąta bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększoną.

28. *Twierdz.* 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są ze trzech kątów płaskich, równych iednych względém drugich: pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych, równe też są iedne względém drugich.

Niech będą dwa kąty bryłowe. ABCD, abcd złożone z równych kątów względém siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względém drugich; nap. pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa iest pochyłości płaszczyzny bad do bac. *Tab. II. Fig.* 2.

Wykreśl. Weźmy równe linije AB ab, na płaszczyznach: BAD, bad; wynieśmy do AB prostopadłą BD, a do ab prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac wyprowadźmy do tychże liniy AB, ab

D

prostopadłe BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD BAC i bad, bac, a zatém dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd są równe.

Dowodz. Dwa troykąty DBA, dba, są prostokątne w B i b, maią równe kąty BAD, bad i boki: AB, ab, równe; więc mogą przystać do siebie; a w szczególności, liniie: BD, bd, są równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla téyże przyczyny i troykąty BAC, bac przystać do siebie mogą, a w szczególności liniie BC, bc, są równe, iako też i liniie AC, ac.

Więc troykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad, także równe, a maiąc oprócz tego i kąty między témi bokami zawarte, równe, przystać do siebie mogą; w szczególności zaś liniie CD, cd są równe.

Więc troykąty: CBD, cbd, maią wszystkie boki równe, iedne względém drugich, a zatém do siebie przystać mogą; a w szczególności kąty: CBD, cbd, są równe.

29. *Twierdz* 4. Gdy dwa kąty bryłowe, składaią się ze trzech kątów płaskich, które równe są iedne względém drugich, takie kąty bryłowe mogą przystać do siebie.

Niech będzie kąt bryłowy w A, złożony ze trzech kątów płaskich: BAD, BAC, DAC, równych względém kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się składa kąt drugi bryłowy w a; te dwa kąty bryłowe mogą przystać do siebie.

Dowod. Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przeniesiony, tak, aby wierzchołek a, przypadł na wierzchołek A; liniia zaś ab, aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty BAD, bad, wzięte są za równe, liniia więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

A że trzy kąty płaskie w a, równe są trzém kątom w A; równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyzn bad bac, a zatém płaszczyzna bac, leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, liniia ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniia ad leży na linii AD, iak i ac na AC; a zatém płaszczyzna cad, przystanie do płaszczyzny CAD; przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

30. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzéma kątami płaskiemi, iuż tém samém iest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby też pokazać że ze trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy, maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te iednak ostatnie podania, iż nie służą do naszego zamiaru, przeto dosyć iest tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn.* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaskie, z których ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego ze 3 kątów płaskich, następuiący sposób, zdaie się być naywygodnieyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: CAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta bryłowego. Wystawmy sobie myślą, iż ten kąt iuż iest zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi nap. AC, i od tego punktu, spuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, liniie prostopadłe: CB, CD, a znowu do punktów B i D, na płasczyznie BAD, poprowadźmy do teyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE, które się przetną w punkcie E. Pociągniéymy nakoniec liniie CE, AE. *Tab. II. Fig. 3.*

Ponieważ liniie CB, EB, są prostopadłe do linii AB, liniia więc AB iest prostopadłą do płasczyzny CBE, a zatém płasczyzna BAD, która przechodzi przez liniią AB, iest też prostopadłą do płasczyzny CBE, a wzaiemnie, i ta płasczyzna iest do tamtéy prostopadłą. Dla téyże przyczyny, płasczyzna CDE prostopadłą iest do płasczyzny BAD; więc obiedwie płasczyzny CBE, CDE, prostopadłe są do płasczyzny BAD; a zatém spolne ich przecięcie CE, iest także prostopadłé do płasczyzny BAD; i płasczyzna CAE, iest także prostopadłą do teyże płasczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po obudwoch stronach linii ac, przy punkcie a, nakreślmy kąty: cab, cad, równe względém kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek téyże linii ac, nap. od c spuśćmy na dwa drugie ramiona, ab, ad, liniie prostopadłe: cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwszy od wierzchołka A, liniie AB, AD, równe względém linii ab, ad. Od punktów B i D, wyprowadźmy prostopadłe do linii AB, AD, przecinaiące się w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC do płaszczyzny BAD. Niech przez liniie EC i AE przechodzi inna płaszczyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniém równym odległości ac nakreślmy łuk koła, który przetnie prostopadłą w EC, w punkcie C. Naostatek przez punkt C, i liniie AB, AD, niech przechodzą dwie płaszczyzny te, wraz z płaszczyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego szukamy.

Inaczey iescze punkt C, będzie wyznaczony na prostopadłey EC; gdy taką liniią EC, weźmiemy, aby kwadrat iéy równał się różnicy kwadratów: linii ac, i AE albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: bc i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykreślenia, można łatwo dowieść następuiące Twierdzenie, na którém się zasadza Trygonometrya kulista, toiest, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym ze trzech kątów płaskich, wstawa iednego kąta płaskiégo, iest do wstawy drugiego płaskiego, iak wstawa kąta pochyłości przeciwnego piérwszému kątowi, do wstawy kąta pochyłości przeciwnégo drugiému kątowi, toiest: iak wstawa kąta pochyłości płaszczyzn dwoch ścian pod piérwszym kątém będących, do wstawy kąta pochyłości dwoch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż liniie: CD, CB, są wstawami, piérwsza kąta CAD, druga kąta CAB, wziąwszy za promień liniią AC; a zatém te dwie liniie tak się do siebie maią, iak wstawy tych dwoch kątów.

Aże w tróykącie ECD prostokątnym w E;

CD : CE = Promień : wst.CDE,

A w troyk. EBC; CE : CB = wst.CBE : Promienia.

Więc złożywszy te proporcye, będzie: - - - CD : CB = wst.CBE : wst. CDE,

toiest: wstawa kąta CAD, tak się ma do wstawy kąta CAB, iak wstawa kąta pochyłości dwoch płaszczyzn BAD, BAC, do wstawy kąta pochyłości dwoch płaszczyzn BAD, CAD.

33. *Zagadn* 2. Maiąc dane trzy kąty płaskie, z których się ma składać kąt bryłowy, wyrachować,

iaka ma być pochyłość płasczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Sposób 1. W czworokącie ABED, kąty przeciwne B i D są proste: więc czworokąt ten może być w koło wpisanym, a zatém kąty (w tymże samym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawszy tedy w troykącie BAD kąt ADB, iuż tém samém znaydziemy i kąt AEB równy tamtemu.

Stosunek boku BC do BE, toiest stosunek wstawy całéy czyli promienia, do dostawy kąta pochyłości CBE, składa się ze stosunków boków: BC do AB i AB do BE.

Bo iest BC : AB = stycz. BAC : wst. całey.
i - AB : BE = wsta. cała : dostycz. AEB
więc BC : BE = stycz. BAC : dosty. AEB
w tr. CBE, BC : BE = Promień : dostawy CBE
a ztąd sty. BAC : dosty. AEB = Pr. : dosta. CBE.

Sposób 2. Wyciągnąwszy od punktu iednego nap. B znayduiącego się na któréykolwiek krawędzi kąta bryłowego, prostopadłe: BD, BC do téy krawędzi, a na dwoch płasczyznach, których spólném przecięciém iest ta krawędź, niech te dwie prostopadłe spotykaią dwie drugie krawędzie w punktach C i D: Liniie BC, BD będą stycznémi, a liniie BC, AD będą siecznémi względém kątów BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniie mogą być wyrachowane na miarę linii stałéy AB, czyli promienia. W troykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty, możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W troykącie zatém CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możémy wyznaczyć kąt CBD, który iest kątém pochyłości dwoch płasczyzn: BAD, BAC. Innych też kątów pochyłości łatwo wyznaczymy podług uwagi poprzedzaiącéy.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnoszeniu iakichkolwiek liczb do sześcianu, i o wyciąganiu z nich pierwiastku sześciennego.

Przed następuiącémi rozdziałami kładzie się nauka o podnoszeniu liczb do sześcianu, i o wyciąganiu pierwiastku sześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przystosować.

34. Sześcian liczby iakiéy robi się, gdy tę liczbę przez nię samę raz mnożymy, i tak rozmnożoną, iesćze raz przez nię mnożymy, albo co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożymy przez iéy kwadrat. I tak sześciany dziewięciu liczb pierwszych:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
są: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10, 20, 30, 40, - - - 90,
są: 1000, 8000, 27000, 64000, - - 729000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - - 900,
są: 1000000, 8000000, 27000000 - 729000000.

35 Sześciany więc liczb maiących iednę tylko cyfrę, a resztę zera, są te same, co i sześciany tychże cyfr samych przez się, przydawszy im trzy razy tyle zer, ile ich było w liczbie, z któréy się sześcian robi.

Wyraz ten *sześcian*, wzięty iest z Geometryi, w któréy, aby mieć bryłowatość iakiego sześcianu, rozmnaża się liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez siebie.

Sześcian każdéy liczby znaleść można, mnożąc iéy kwadrat przez nię samę; podamy tu iednak inny sposób zrobienia sześcianu z liczby danéy, a ten sposób pomoże nam do przeciwnego działania, toiest do wyciągania pierwiastku sześciennego z liczby iakiéykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwoch części, może być rozłożony na cztéry części następuiące.

1. Na sześcian piérwszéy części.
2. Na kwadrat piérwszéy części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.
3. Na kwadrat drugiéy części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część pierwszą.
4. Na sześcian drugiéy części.

I tak liczbę 5 rozłożywszy na dwie części nap. 1 i 4; można uważać iéy sześcian, iakoby złożony ze cztérech części: 1, 12, 48, 64, których summa iest 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwoch części 2 i 3; iéy sześcian mógłby się był rozłożyć na cztéry części: 8, 36, 54, 27.

37. Niechby potrzeba znaleść sześcian liczby nap. 47. Ponieważ iéy kwadrat (podług reguły iuż nam wiadoméy) składa się z kwadratu piérwszéy części 40, z téyże części 40, dwa razy wziętéy, przez drugą 7 rozmnożonéy, i z kwadratu drugiéy części 7; mnożąc cały ten kwadrat iescze raz przez 40 i przez 7, sześcian ze 47 składać się będzie: 1od (biorąc 7 za liczbę mnożącą) z kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7; ze 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z sześcianu téyże liczby 7; 2re (biorąc 40 za liczbę mnożącą) z sześcianu liczby 40; ze 7 rozmnożonych przez kwadrat liczby 40, dwa razy wzięty; i ze 40 rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razém to wszystko zebrawszy, składać się będzie z sześcianu liczby 40, z kwadratu téyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z sześcianu liczby 7. Co uczyni summę 103823, która iest sześcianém liczby 47.

Ponieważ zaś nie można iescze dowieść tego algebraicznie, trzeba przynaymniéy będzie z Geometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc: że sześcian linii złożonéy ze dwoch części, może być w rzeczy saméy rozłożony na sześciany każdéy z tych dwoch części, i na 6 równoległościanów, z ktorych trzy mieć będą za podstawę kwadrat iednéy części, a za wysokość część drugą: trzy zaś inne mieć będą za podstawę kwadrat drugiéy części, a za wysokość część piérwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na sześcianie z drewna lub z papiéru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Náywygodniéy iest, rozłożyć liczbę na iedności, dziesiątki, sta i t. d. które w sobie zawiera.

Niech będzie liczba nap. 12. Podzielmy ią na dwie części, 10 i 2, sześcian iéy składać się będzie z części następuiących:

1000 sześcian dziesiątku
600 kwadrat dziesiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.
120 kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dziesiątek rozmnożony.
8 sześcian dwoch iedności.

1728 sześcian ze 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80 i 4; sześcian iéy mieć będzie części następuiące:

512000 sześcian dziesiątków,
76800 kwadrat dziesiątków trzy razy wzięty, przez iedności rozmnożony.
3840 kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dziesiątki rozmnożony.
64 sześcian z iedności.

592704 sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć sześcian piérwszéy części, rozłożmy ią na części 300 i 20.

27000000 sześcian set.
5400000 kwadrat set potróyny przez dziesiątki rozmnożony.
360000 kwadrat dziesiątków potróyny przez sta rozmnożony.
8000 sześcian dziesiątków.
1228800 kwadrat ze 320 potróyny rozmnożony przez iedności.
15360 kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64 sześcian iedności.

34012224 sześcian ze 324.

Niechby trzeba zrobić sześcian z 8421.

512000000000 sześcian z 8000.
76800000000 kwadrat z 8000 potróyny, rozmnożony przez 400.
3840000000 kwadrat ze 400 potróyny rozmnożony przez 8000.
64000000 sześcian ze 400.
4233600000 kwadrat z 84000 potróyny rozmożony przez 20.
1008000 kwadrat ze 20 protróyny rozmnożony przez 8400.
8000 sześcian ze 20.
212689200 kwadrat z 8420 potróyny rozmnożony przez 1.
25260 kwadrat z 1 potróyny rozmnożony przez 8420.
1 sześcian z 1.

597160402461 sześcian z 8421.

39. Widzimy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbiór, każda część następuiąca sześcianu mniéy ma iedném zerém, od części, która ią poprzedziła; i że iako piérwsza część sześcianu iest zawsze sześcianém, a po nim następuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu, iednéy części rozmnożonego przez część drugą; tak i daléy tymże porządkiém idą i dalsze wyrazy części składaiących sześcian.

40. Można było opuścić zera, kładąc tylko cyfry znaczące, a w każdéy części następuiącéy występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części sześcianu mogły być w ten sposób wypisane.

```
27
 54
  36
   8
12288
  1536
    64.
-------
34012224.
```

41. Ten sposób postępowania, pokazuie nam, że liczba wyrażaiąca sześcian iedności, kończy się na ostatniéy po prawéy ręce cyfrze, że sześcian dziesiątków kończy się na czwartéy od prawéy ręki cyfrze, liczba sześcianu set kończy się na siódméy cyfrze od teyże strony rachuiąc i t. d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących pierwiastek sześcianu danego, trzeba od prawéy strony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kréskami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie się znaydowało w pierwiastku. Oddział piérwszy po lewéy stronie może mieć trzy, dwie, a czasém i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiącé okazuią. I tak pierwiastki sześcienne liczb 1331; 6892 1; 884636; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331 wyciągnąć pierwiastek sześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w swoim pierwiastku, bo dwa w niéy uczynić można oddziały, tym sposobém 1,331. Náywiększa liczba dziesiątków tego pierwiastku taka być powinna, aby iéy sześcian nie był większy od 1; a zatém będzie tylko ieden dziesiątek w pierwiastku. Sześcian z 10, iest 1000; który sześcian odiąwszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności rozmnożony przez dziesiątek, i sześcian tychże iedności. Aże w szczególności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potróyny dziesiątka rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sam potróyny kwadrat z 10, toiest 300. Wieloraz ze 331 przez 300 podzielonych, iest 1, więc iedność będzie w pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a te od 331 odiąwszy, zostanie 31. Ta reszta ma iescze w sobie zamykać potróyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, toiest 30; i sześcian iedności, toiest 1, a ze wszystkiém 31, które odiąwszy od ostatniéy reszty nic nie zostanie; a zatém pierwiastek sześcienny liczby 1331, iest 11.

Wyciągniéymy pierwiastek sześcienny z liczby 68921. Pierwiastek téy liczby ma dwie cyfry. Liczba dziesiątków taka być powinna, aby sześcian iéy odiąć można od piérwszego podziału 68. Aże z tablicy dziewięciu piérwszych sześcianów (34), którą uczniowie umieć na pamięć powinni, sześcian náybliższy 68, iest 64, a tego pierwiastek iest 4; więc w pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian ze 40, iest 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma w szczególności zawierać w sobie potróyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, toiest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921 przez 4800 wypada 1 na wieloraz, więc będzie w pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921 kwadrat potróyny 4800 rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma iescze w sobie zawiérać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, toiest 120, i sześcian iedności, toiest 1, a ze wszystkiém 121; które odiąwszy od ostatniéy reszty, nic nie zostanie: a zatém pierwiastek zupełny będzie 41.

Wyciągniéymy pierwiastek sześcienny z liczby 884,636. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884, iest 729, którego pierwiastkiém iest 9; więc pierwiastek będzie miał 9 dziesiątków. Sześcian z 90, iest 729000, który odiąwszy od 884736, zostanie 155736. Kwadrat z 90, iest 8100, potróyny będzie 24300. Dzieląc przez 24300, resztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc pierwiastek mieć będzie 6 iedności. Rozmnożywszy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiąwszy od 155736, zostanie 9946. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dziesiątków, będzie 9720, odiąwszy go od 9936, zostanie 216, nakoniec sześcian z 6, iest 216; a zatém pierwiastek zupełny będzie 96. Jakoż sześcian z 96, iest 884736.

Wyciągniéymy pierwiastek sześcienny z liczby 590589719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba set w pierwiastku taka być powinna, aby iéy sześcian nie przechodził 590. Z dziewięciu piérwszych sześcianów, naybliższy liczby 590 iest sześcian 512, którego pierwiastek iest 8; a zatém 8 set będzie w pierwiastku. Odiąwszy 512000000 od sześcianu danego, zostanie 78589719. Kwadrat potróyny set 8, albo 800, toiest 1920000 znáyduie się razy 40 w téy reszcie; mogłoby więc zdawać się, iż 4 dziesiątki pierwiastek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odiąć dwoch innych części, toiest kwadratu potróynego dziesiątków rozmnożonego przez sta i sześcianu dziesiątków; nie można przeto więcéy dać pierwiastkowi, iak 3 dziesiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30, toiest 57600000 odiąwszy od 78589719, zostanie 20989719; od téy reszty odiąwszy znowu kwadrat potróyny 3 dziesiątków, przez sta rozmnożonych, toiest 2160000, zostaie 18829719, a po odięciu sześcianu dziesiątków toiest 27000, będzie w reszcie 18802719, kwadrat potróyny części pierwiastku znalezioney, toiest liczby 830, iest 2066700; przez ten dzieląc resztę 18802719, wypadnie 9 iedności na wieloraz. Odiąwszy od téy reszty liczbę 2066700, rozmnożoną przez 9, toiest 18600300, zostanie 202419; zkąd znowu odiąwszy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, toiest 201690, zostaie 729. Naostatek sześcian z 9 iest 729; a zatém pierwiastek, którego szukaliśmy, będzie 839.

Wzór działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.

1331 | 10.
1000 |
300 | 331 | 1.
| 300 |
31
30
1
1
0

Przykład 2.

68921 | 40
64000 |
480 | 4921 | 1
| 4800 |
121
120
1
1
0

Przykład 3.

884736 | 90
729000 |
243000 | 155736 | 6
| 145800 |
9936
9720
216
216
0

Przykład 4.

590 589 719 | 800
512 000 000 |
1920000 | 78 589 719 | 30
| 57 600 000 |
20 989 819
2 160 000
18 829 719
27 000
2066700 | 18 802 719 | 9
| 18 600 300 |
202 419
201 690
729
729
0.

Więcéy takowych przykładów należy podać uczniom, nie używaiąc iescze żadnego skrócenia.

43. Pierwsze skrócenie na tém zawisło, aby opuszczać zera w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach: maiąc iednak zawsze uwagę na mieysca, które zastępować przypada cyfrom znaczącym. Wszczególności zaś co do wielorazów, będzie ten z opuszczania zer pożytek, że zaraz przy sobie kłaść będzie można cyfry wyrażaiące pierwiastek, którego szukamy.

Drugie skrócenie, związane z pierwszém na tém się zasadza, aby do każdego następuiącego dzielenia, tylo tylko cyfr z sześcianu przyłączać do reszty pozostałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie: daremna albowiem byłaby praca, przy każdém odeymowaniu, wszystkie pozostałe sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ ostatnie zwłascza cyfry przez większą część działania nienaruszone zostaią.

Trzecie skrócenie na tém zawisło, aby za iednym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część następuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część pierwszą znalezioną, i sześcian tey części drugiey. To zaś wykona się dodaiąc razém te trzy liczby odeymować się maiące, i tak dodane odeymuiąc od sześcianu, z którego pierwiastek wyciągamy. Zawsze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potém ich summę odeymować mamy, zachowane było mieysce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfry tych, od których inne odeymować przypada.

Przystosowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać pierwiastek sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy. Naywiększy sześcian zawarty we 257, iest 216, którego pierwiastek iest 6, odiąwszy ten sześcian od 257, zostanie 41. Do tey reszty przyłączmy następuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czasem względu na ostatnie dwie cyfry 59, dzielmy 412 przez potróyny kwadrat z 6, toiest przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz summę trzech liczb: 324 162 toiest kwadratu potróynego z 6 set rozmożonego 27 przez 3 dziesiątki, kwadratu potróynego ze 3 dziesiątków rozmnożonego przez 6 set i sześcianu ze 3 dziesiątków. Summę 34047 odeymiéymy od 41259, zostanie 7212; przy których przypisawszy ostatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czasem na ostatnie dwie cyfry, dzielmy 72124 przez kwadrat potróyny z części pierwiastku znalezioney, toiest przez 11907, wypadnie 6 na wieloraz. Weźmy summę trzech liczb: 71442 6804 toiest kwadrat potroyny części pierwszey znalezioney, 216 rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny ze 6 iedności rozmnożony przez część pierwey znalezioną, i sześcian z 6 iedności. Summa 7212456 równa się reszcie ostatniey: co znakiem iest, że pierwiastek, którego szukaliśmy, ani mnieyszy ani większy iest, iak 636.

To działanie bardziey długie niż trudne wyciąga od uczniów częstego w niém ćwiczenia się.

44. Aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ułamku, którego tak licznik, iako i mianownik iest sześcianem; trzeba go osobno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak pierwiastek sześcienny z $\frac{125}{216}$, iest $\frac{5}{6}$, pierwiastek z $\frac{64}{343}$ iest $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby mieszaney, trzeba ią pierwey zamienić na ułamek. I tak pierwiastki sześcienne liczb mieszanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, są te same co i ułamków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$ toiest: $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$.

45. Co się o pierwiastku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom. § 128) ściąga się i do pierwiastku sześciennego, toiest: że ieżeli nie można mieć pierwiastku sześciennego liczby całkowitey w liczbach całkowitych; tedy go i w ułamkach nie znaydziemy. Dowodzi się to ogólnie tymże samym, iak względem pierwiastku kwadratowego sposobem (d).

46. Pierwiastek sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Sposób nayogólnieyszy iest, używaiąc do tego ułamków dziesiętnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć pierwiastek sześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząstkach tysiącznych. Wyciągamy ten pierwiastek, sposobem dopiero podanym, z liczby 2,000,000,000, a ostatnie trzy tego pierwiastku cyfry połóżmy za dziesiętne. Pierwiastek sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych nay bliższych wyrażony, iest 1259; a zatém pierwiastek sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tysiącznych iedności, będzie 1,259. Jakoż sześcian z 1259 iest 1,995,616,979. mnieyszy od 2, a sześcian 126, iest 2,259575, większy od 2.

47. Chcąc pierwiastek sześcienny liczby nap. 2. przybliżyć do prawdziwego, w ułamkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwsze dziewięć sześcianów liczb

---

(d) Otoż i drugi rodzay ilości niespółmiernych. Pierwszego rodzaiu ilości niespółmierne można Geometrycznie wyrazić, lecz wyrażenie tych drugich, wyższey nad początkową nauki potrzebuie.

naturalnych 1,2,3,4. i t. d. uważać należy (podobnie iako się o przybliżeniu pierwiastku kwadratowego w części I. powiedziało): ieżeli między temi sześcianami podwoionemi, nie znayduie się taki, któryby bliski bardzo był sześcianu zupełnego. Znaydziemy nap. że 64 podwoione, toiest 128 mało się co różni od 125 toiest od sześcianu liczby 5; a zatém 2 które równa się cale $\frac{128}{64}$, będzie też prawie rowne $\frac{125}{64}$; przeto i pierwiastek sześcienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten piérwszy mniéy dokładny pierwiastek sześcienny, podzielimy różnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, toiest: $\frac{3}{64}$, przez kwadrat potróyny, tego pierwszego pierwiastku, toiest przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do pierwiastku $\frac{5}{4}$. Summa $\frac{126}{100}$, będzie pierwiastkiem bardziey przybliżonym. Jakoż sześcian z $\frac{126}{100}$ iest, $2\frac{416}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby iescze zmnieyszyć podobnym iak wyżey sposobem.

Niechby z liczby 3 trzeba wyciągnąć pierwiastek sześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa się zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele się różni od $\frac{1000}{343}$; zatém pierwiastek sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, poprawuiąc to pierwsze uchybienie, pierwiastek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48. Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułamku, nie iest sześcianem: trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu, mianownik stał się sześcianem; potém dopiero wyciąga się pierwiastek z licznika przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli się przez pierwiastek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć pierwiastek sześcienny z $\frac{1}{4}$, zamieniam ten ułamek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwszy z 2 przez przybliżenie pierwiastek sześcienny 1,259,-biorę iego połowę 0,629--, toiest dzielę go przez pierwiastek sześcienny mianownika 8. Podobnie pierwiastek sześcienny z $\frac{5}{12}$, ten sam iest, co i pierwiastek sześcienny z $\frac{90}{216}$, toiest $\frac{1}{6}$ pierwiastku sześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach prostokątnych (e).

49. *Opis.* Gdy bryła iaka zakończona iest sześcią ścianami prostokątnemi, taka bryła nazywa się *Równoległościanem prostokątnym* (Parallelopipedum rectangulum).

50. *Twierdz.* 1. W każdym równoległościanie prostokątnym, ściany naprzeciwko siebie stoiące, są równe i równoległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą iest do każdey ze czterech innych ścian, które z nią spólny maią bok ieden.

Tab. II. Fig. 4. *Dow.* Niech będzie ABCDEFGH, równoległościan prostokątny, spólne dwoch ścian GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłé iest do dwoch innych boków BC, BA należących do tychże ścian, więc to przecięcie iest też prostopadłé i do płaszczyzny przechodzącey przez liniie AB, BC, toiest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatém ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spólne przecięcie GB, są do ściany ABCD prostopadłe. Toż mówić i o dwoch drugich ścianach, których spólném przecięciem iest liniia ED: a zatém cztéry ściany równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym.

Dowiedliśmy, że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie dowiesćby można, że taż liniia iest prostopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany są prostopadłe do iedney linii GB, a zatém są do siebie równoległe.

Naostatek w prostokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH, są równe; iako też i liniie BC, FG, a zatém dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przystać do siebie.

51. *Uwaga.* Ponieważ w równoległościanie pro-

(e) Częste używanie równoległościanów prostokątnych, iest nam pobudką do mówienia o nich w szczególności, tém bardziey, że przez to przysposobią się Uczniowie do zamienienia z większą łatwością innych nieprostokątnych równoległościanów na prostokątne.

prostokątnym ze czterech ścian otaczaiących ten równoległościan, każda ma ieden bok spólny z bokiem iedney ściany z dwoch pozostałych; przeto można wystawić sobie *rodzenie się* (generatio albo formatio) równoległościanu prostokątnego, w sposób następujący.

Niech będzie prostokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszystkich wystawione są prostopadłe do iego płaszczyzny wszystkie równe. Niech ten prostokąt posuwa się równolegle do pierwszego swego położenia, i tak aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy prostopadłych wznosiły się. Mieysce to, które takowém posuwaniem się przeydzie prostokąt, będzie równoległościanem prostokątnym.

52. *Opis.* Równoległościan prostokątny, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Łacińskiego, *Kubusem.*

Sześcian więc, iest to bryła zakończona sześcią kwadratami. Wypływa zaś z twierdzénia poprzedzaiącego, że te 6 kwadratów, są równe, że każde z nich dwa, naprzeciwko siebie stoiące, są równoległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące się na czterech bokach kwadratu iednego z dwoch kwadratów pozostałych są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie równoległościan prostokątny iako zbudowany na iedney ze ścian swoich, prostopadła spuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa się *wysokością* tego równoległościanu. Ta zaś wysokość równa iest spólnemu przecięciu dwoch ścian zbudowanych na dwoch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twierdz.* 2. Gdy podstawy dwoch równoległościanów prostokątnych mogą przystać do siebie, a ich wysokości są równe, te dwa równoległościany, mogą też przystać do siebie, to iest nie różnią się od siebie tylko mieyscem.

Dowodz. Wszystkie ściany tych dwoch równoległościanów, podobnie położone, mogą przystać do siebie; wszystkie też tych równoległościanów kąty bryłowe, składaią się ze trzech kątów prostych, a zatém wszystkie te kąty bryłowe mogą przystać do siebie. Przeniósłszy tedy myślą ieden z tych równoległościanów, tak, aby ieden z kątów iego bryłowych, przystał do iednego z kątów bryłowych równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwszego kąta, które mogą przystać do ścian drugiego, w samey rzeczy do niego przystały, wszystkie końce krawędzi pierwszego kąta, przystaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwszego równoległościanu, które są przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego równoległościanu, będące przy końcach tychże ścian odpowiadaiących pierwszym; zatém i te kąty bryłowe przystaną iedne do drugich.

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wysokość iakiego równoległościanu prostokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszystkie punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoległe do podstawy, równoległościan podzielony będzie na tyle równoległościanów mnieyszych, które przystać do siebie mogą, na ile części była podzielona wysokość: będą albowiem miały te wszystkie równoległościany mnieysze, iednakową wysokość, a takie podstawy, z których każda przystać może do podstawy wielkiego równoległościanu.

55. *Twierdz.* 3. Dwa równoległościany prostokątne, wystawione na teyże samey podstawie, lub na podstawach mogących przystać do siebie, tak się maią ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz. 1. Gdyby wysokość iednego równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego, pierwszy równoległościan, mógłby się podzielić na 2, 3, 4, i t. d. równoległościany mogące przystać do drugiego; a zatém ten pierwszy równoległościan byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t. d. razy. Co przystosować można; i w innych przypadkach, gdzieby tylko wysokość iednego równoległościanu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego równoległościanu zawierała nap. 3. takich części, iakich 5 zawiera wysokość drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoległe do podstawy, podzielilibyśmy pierwszy równoległościan na 3, a drugi na 5 równoległościanów iednakowey wysokości, i których podstawy

przystaćby mogły do siebie; a zatém pierwszy równoległościan takby się miał do drugiego, iak 3 do 5, toiest jak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do innego iakiegokolwiek stosunku.

Na koniec to, co się powiedziało w przypadkach społmiernych, przystosować można i do przypadków niespółmiernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaskich, w części 1.

Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwoch równoległościanów prostokątnych, zbudowanych na teyże samey podstawie, albo na podstawach mogących do siebie przystać; i niech te wysokości będą niespółmierne; wszelako dwa takie równoległościany mieć się do siebie będą, iak ich wysokości. *Tab. II. Fig. 5.*

Gdyby albowiem stosunek tych dwoch równoległościanów nie był równy stosunkowi ich wysokości; tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości stosunków. Niechże więc, ieżeli to być może, stosunek pierwszego równoległościanu do drugiego, będzie równy stosunkowi linii AE (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB, tyle razy, ile można, ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniosłszy daley ku E, iednę iescze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Równoległościany maiące iednakowe podstawy, a wysokości spółmierne CD i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

A że (przez przypuszczenie) rownoległościan, którego wysokością iest AB, tak się ma do równoległościanu, którego wysokością iest CD, iak się ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) równoległościany, ktorych wysokościami są AB i AF, miałyby się do siebie, iak liniie AE i AF. Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy iest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od swego następnika, więc proporcya ta nie ma mieysca, a zatém stosunek równoległościanów, których AB i CD, są wysokościami, nie iest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyraża: niech będą oznaczone przez R. AB, R. AF, R. CD, równoległościany maiące iednakowe podstawy, wysokości zaś AB, AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

R. AB : R. CD = AE : CD.
tedy ponieważ iest, - - R. CD : R. AF = CD : AF.
byćby powinno - - R. AB : R. AF = AE : AF.

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może, więc ani pierwsza.

56. *Twierdz.4.* Dwa równoległościany prostokątne, maiące iednakowe wysokości, są do siebie iak ich podstawy.

Przenieśmy ieden z tych równoległościanów tak, *Tab. II. Fig.* 6 aby podstawa iego stykała się w wierzchołku spólnym z drugą podstawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podstaw, a drugą EBGF. Dopełniymy prostokąta, CBGH przedłużywszy boki DC, FG, aż do ich spólnego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie w myśli równoległościan trzeci stoiący na podstawie CBGH, dawszy mu wysokość równą wysokości iednakowey dwoch danych równoległościanów. Równoległościan, którego podstawa iest ABCD, i ten, którego podstawa iest CBGH, wystawuiąc ie sobie iąk gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia CB, a drugim, wysokość spólna obudwoch danych równoległościanów; te mówię równoległościany są do siebie iak ich wysokości AB i BG, albo iak prostokąty ABCD i CBGH.

Podobnie równoległościany, których CBGH i BEFG są podstawami, uważane, iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia BG, a drugim spólna wysokość dwoch danych równoległościanów, są także do siebie iak ich wysokości BC, BE, albo iak prostokąt CBGH do prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) równoległościan, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiey.

Krócey to samo.

Niech równoległościany, których podstawami są prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następuiącemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

R ABCD : R.CBGH = ABCD : CBGH.

2. proporcya,

R.CBGH : R.BEFG = CBGH : BEFG.

więc - - - - - - - - - - - - - - -

R.ABCD : R.BEFG = ABCD : BEFG.

57. *Wniosek* 1. Dwa równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ieżeli równe dwa równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokosci; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamienić albo w myśli zamienionym sobie wystawić równoległościan ieden prostokątny, na drugi iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał prostokąt, z jednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę równoległościanu danego na prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa równoległościany są równe, będą podstawy ich w stosunku odwrotnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość równoległościanu iednego prostokątnego; drugiego zaś równoległościanu niech będzie podstawa BEFG, a wysokość BL. *Tab. II. Fig.* 6.

1. Niech zachodzi ta między podstawami i wysokościami proporcya:

ABCD : BEFG = BL : BI, tedy te równoległościany będą równe.

Wystawmy sobie drugi równoległościan, iakoby zamieniony na inny teyże samey wysokości BL, a maiący za ieden bok swoiey podstawy, bok nap. BC, należący do podstawy piérwszego równoległościanu, i niech będzie tego nowego równoległościanu podstawa CBMN.

Będzie zatém podstawa ABCD do podstawy BEFG; iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili ABCD:

BEFG = BL : BI, więc będzie AB : BM = BL : BI, a zatém prostokąt maiący za boki AB, BI, równy będzie prostokątowi maiącemu za boki BM, BL. Że zaś piérwszy i trzeci równoległościan maią za podstawy te dwa równe prostokąty, i spólną przytém maią wysokość BC, więc są sobie równe. Aże trzeci równoległościan równy iest drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech równoległościan, którego ABCD iest podstawą, a BI wysokością, będzie równy równoległościanowi, którego podstawą iest BEFG, a wysokością BL; idzie zatém, że ABCD : BEFG = BL : BI.

Zrobmy to samo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc piérwszy i trzeci równoległościan, iako maiące za wysokość spólną BC, będzie piérwszy do trzeciego, iak prostokąt AB X BI do prost. BM X BL. Aże te dwa równoległościany są (przez przypuszczenie, albo wykréslenie) równe drugiemu, więc i sobie są równe, więc AB X BI = BM X BL; a zatém AB : BM = BL : BI. Że zaś AB : BM = ABCD, CBMN = ABCD : BEFG; więc ABCD : BEFG = BL : BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego, co się powiedziało, wynika sposób znalezienia dwoch liniy, któreby były do siebie w stosunku dwoch równoległościanów, zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany sześcian i równoległościan prostokątny, znaleść liniią taką, aby stosunek sześcianu do równoległościanu równy był stosunkowi boku sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok sześcianu, P, Q, R, boki trzy równoległościanu. Zamieńmy naprzód prostokąt, którego bokami są P i Q, na inny któryby miał za bok ieden bok sześcianu, toiest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, P i Q; niech będzie L tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki S, L, R; a zatém stosunek sześcianu do równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do prostokąta L X R. Zamieńmy znowu ten drugi równoległościan równy danemu na inny, któryby znowu miał S za bok ieden, to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, L i R. Niech będzie M tą czwartą proporcyonalną równoległościan drugi, a zatém, i pierwszy dany, iemu równy, równać się będzie trzeciemu, któryby miał za boki S, S, M; więc stosunek sześcianu do równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do prostokąta $S \times M$, toiest stosunkowi S do M.

Aby tedy znaleść w liniiach stosunek sześcianu do równoległościanu prostokątnego, trzeba 1° do boku sześcianu i do dwoch boków równoległościanu szukać czwartey proporcyonalney; 2° trzeba znowu do tegoż boku sześcianu, do trzeciego boku równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiéro znalezioney, szukać inney czwartey proporcyonalney; a stosunek boku sześcianu do tey ostatniey linii, równy będzie stosunkowi sześcianu do równoległościanu.

Idzie zatém, że ieżeli mamy dwa równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stosunek, szukaiąc w liniiach stosunku tychże równoległościanów do iakiego sześcianu: wziąwszy albowiem bok tego sześcianu, za poprzednika, każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniiach tych dwoch równoległościanów.

61. *Uwaga.* Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze geometryczney równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebném równoległościanów.

Przykład. Niech iedność wyraża bok sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki równoległościanu, który chcemy do sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok sześcianu kilka razy oznaczone przez liczby nap. 5, 7 i 9. Czwarta proporcyonalna do boku sześcianu i do dwoch pierwszych boków rownoległościanu wyrazi się przez liczbę 35, to iest zawierać będzie bok sześcianu, razy 35, czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku sześcianu, do trzeciego boku równoległościanu i do pierwszey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315, to iest zawierać ta będzie bok sześcianu razy 315. A zatém równoległościan, zawierać będzie w sobie sześcian razy 315, to iest: wziąwszy sześcian za iedność albo spólną miarę, ten równoległościan wyrazi się przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5, 7 i 9.

62. *Opis.* Gdy cztéry takie mamy liniie, że stosunki, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey są równe, o takich liniiach mówi się, że są ciągło (continué) proporcyonalne.

Przykłady liczebne. Cztéry liczby 1, 2, 4, 8, nazywaią się ciągło proporcyonalnemi, a cztéry liniie, któreby tak się do siebie miały, iak te cztéry liczby, nazywałyby się też ciągło proporcyonalnemi. Toż mówić i o liczbach: 8, 12, 18, 27, z których każda zawiera w sobie poprzedzaiącą ieden raz i pół i t. d.

Stosunek pierwszey z tych liniy do czwartey, składa się ze stosunku pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey, (a to przez opisanie stosunku złożonégo). Że zaś wszystkie te sczególne stosunki są równe; więc stosunek piérwszéy téy linii do czwartey składa się ze 3 stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *tróymnożnego* (ratio triplicata), i piérwsza ta liniia do czwartey, będzie w stosunku tróymożnym.

63. *Przystosowanie.* Niechby równoległościan, który wymierzać mamy przez sześcian wzięty za iedność, był i on sam sześcianem.

Tab. II. Fig. 7. Niech będzie AB bok sześcianu maiącego służyć za miarę; AC, bok sześcianu, który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB i AC trzeciey proporcyonalney AE, (kreśląc tróykąt prostokątny ABC, maiący AB za iedno ramie kąta prostego, a AC za przeciwprostokątną; i wystawuiąc do linii AC, w punkcie C, prostopadłą CE, aż do iey spotkania się w E, z liniią AB przedłużoną). Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcyonalnéy, AF (wyprowadzaiąc od punktu E, linii AE, prostopadłą EF aż do iey spotkania się w punkcie F z liniią AC przedłużoną). Piérwszy sześcian, wzięty za miarę, tak się będzie miał do sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB do linii AF, toiest: iak liniia piérwsza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwszych dwoch iedna iest bokiem sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatém stosunek piérwszego sześcianu do drugiego iest tróymożnym stosunku ich boków.

I tak, ieżeli bok sześcianu iakiego trzy razy zawiera w sobie bok sześcianu wziętego za miarę, sześcian pierwszy będzie do drugiego, iak $3 \times 3 \times 3$ do 1, albo iak 27 do 1, to iest: ieżeli liniia AC zawiera w sobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie razy 3 liniią AC, a zatém 9 razy liniią AB, a liniia AF zawierać będzie 3 razy liniią AE, a tém samém 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleźć sześcian, któryby do drugiego był w stosunku danym, i takim, któryby się równał stosunkowi boku sześcianu tego drugiego, do linii daney; bok sześcianu, którego szukamy, ma być drugą liniią ze cztérech ciągło wielorazowo proporcyonalnych, między ktoremi piérwsza z czwartą, są w danym stosunku, to iest: bok ten szukany, ma być liniią piérwszą ze dwoch środnich ciągło wielorazowo proporcyonalnych między piérwszą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez geometryą początkową, chyba trafunkiem przez doświadczanie i szukanie niepewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami ostrokrężnemi* (sectiones conicae), o których się potém namieni. I toćto zagadnienie o znalezieniu dwoch środnich wielorazowo proporcyonalnych, pierwszym powodem być musiało geometrom, do uważania tych liniy krzywych, dopiero wspomnionych, i do uczynienia pierwszego kroku w wyższey geometryi. Gdy się w *Delos* radzono wyroczni, coby za sposób był zjednania bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza, niszczącego państwo Attyckie, miał się dać głos słyszeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur altaria). Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleźć bok sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za spólną miarę, toiest: iż trzeba było wynaleźć piérwszą ze dwoch środnich wielorazowo proporcyonalnych między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w sobie zamykałaby drugą.

65 W arytmetyce, gdy stosunek dany, iest stosunkiem liczby iedney sześcienney, do drugiey także sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap. gdyby dwa sześciany miały być do siebie, iak 1 do 8, albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27

i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1 do 2, albo iak 1 do 3, albo iak 2 do 3 i t. d.

Ale gdy stosunek dany nie iest stosunkiem dwoch liczb sześciennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy sześcian ieden, ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwszy bok tego drugiego za iedność, bok piérwszego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, którey sześcianem iest 2; a zatém pierwiastek sześcienny liczby 2, wyrażałby ten bok: pierwiastek zaś ten przybliżony, iest 1, 26, toiest bok mnieyszego sześcianu, takby się miał do boku sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1 do 1, 26, albo iak 100 do 126, albo iescze dokładniey iak 23 do 29.

66. *Uwaga.* Gdy stosunek dwoch liniy iest dany; dany iest tém samém i stosunek ich sześcianów.

Tak albowiem mieć się będą do siebie te sześciany, iak liniia piérwsza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwszy za piérwszé dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie, których stosunek iest dany.

Zkąd wypada wniosek następuiący:

67. Gdy cztéry liniie są w proporcyi, ich sześciany w proporcyi też będą, toiest gdy stosunek dwoch pierwszych liniy równa się stosunkowi dwoch drugich; stosunek też sześcianów ze dwoch piérwszych liniy, równać się będzie stosunkowi sześcianów ze dwoch drugich liniy.

W arytmetyce: cztery licz. 2, 3, 8, 12, składaią proporcyą; ich sześciany: 8, 27, 512, 1728, składaią także proporcyą.

68. *Uwaga.* Podanie zamknięte w tym wniosku, iest tylko wyszczególnieniem podania następuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztéry takie równoległościany prostokątne: aby krawędzie piérwszego równoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwszych stosunków, krawędzie drugiego, trzema następnikami tychże trzech pierwszych stosunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami trzech drugich stosunków, a krawędzie czwartego, trzema następnikami tychże trzech drugich stosunków; stosunek pierwszych dwoch równoległościanów, równy będzie stosunkowi dwoch ostatnich.

Trzeba naprzód to podanie obiaśnić na przykładach liczebnych:

W ogólności zaś niech będą trzy iakiekolwiek proporcye: $A : B = C : D.$
$a : b = c : d.$
$\mathit{a} : \mathit{b} = \mathit{c} : \mathit{d}.$

Zamieńmy stosunek A do B na inny b do czwartey linii *E*: zamieńmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *e*.

Będą podstawy drugiego i czwartego równoległościanu równe prostokątóm $B \times b$, i $D \times d$; a zatém podstawy dwoch pierwszych równoległościanów będą się miały do siebie, iak a do *E*, a podstawy zaś dwoch drugich równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki: A do B, b do *E*, C do D, d do *e* są wszystkie równe,

więc - - $b : E = d : e.$
Ze zaś - - $a : b = c : d.$
więc - - $a : E = c : e.$

A zatém stosunek podstaw równoległościanów dwoch pierwszych, równy iest stosunkowi równoległościanów dwoch drugich.

Jest też z przypuszczenia
- - - - $\mathit{a} : \mathit{b} = \mathit{c} : \mathit{d}$
więc prostokąty a*a*, E*b*, c*c*, e*d* składaią proporcyą; a zatém cztery równoległościany, któreby te prostokąty miałyby za podstawy, i z których dwa pierwsze miałyby spolną wysokość A, dwa zaś drugie wysokość C, byłyby także z sobą w proporcyi. Aże pierwszy z tych równoległościanów miałby za krawędzie trzy liniie: A, a *a*, drugi zaś równałby się temu, któryby miał za krawędzie trzy liniie: B, b, *b*; a to dla tego, że są równe prostokąty: $B \times b$ i $A \times E$; trzeci z tych równoległościanów miałby za krawędzie trzy liniie: C, c, *c*, a czwarty równałby się temu, któryby miał za krawędzie, trzy liniie: D, d, *d*; więc te cztery równoległościany byłyby w proporcyi.

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nieprostokątnych.

69. *Opis*: Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległemi nazywa się *Równoległościanem* a

zatém równoległościany prostokątne, o których w rozdziale poprzedzaiącym mowa była, są pewnym gatunkiem równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W równoległościanie, wszystkie ściany są równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne mogą przystać do siebie.

Tab. III. Fig. 1. Niech będzie równoległościan ABCDEFGH; wszystkie iego ściany są równoległobokami a ściany przeciwne nap. ABCD, EFGH mogą do siebie przystać.

Dowodz. Ponieważ płaszczyzny równoległe ABCD, GHFE są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich spólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoległe. Także pokazać można, że liniie HE, GF są równoległe, i liniie HG, EF równoległe, a zatém że ściana HGFE iest równoległobokiem. Podobnie i wszystkie inne ściany są także równoległobokami.

W szczególności zaś, liniie BA, GH, i liniie BC, GE, są do siebie równoległemi; więc równe są kąty ABC, HGF. Aże te liniie BA, GF i BC, GF są równe; więc równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przystać do siebie. Toż mówić o każdey inney parze ścian przeciwnych.

71. Ztąd też wystawić sobie można każdy równoległościan, iakoby utworzył się następuiącym sposobem.

Niech będzie iakikolwiek równoległobok; a od iednego z jego wierzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z iego płaszczyzną kąt iakikolwiek; wyciągniymy potém i przez drugie wierzchołki liniie równoległe do pierwszey, i zrobmy wszystkie sobie równemi. Niech nakoniec ten równoległobok posuwa się równolegle do pierwszego swego położenia, i niech wierzchołki iego nie schodzą nigdy z liniy równoległych, mieysce od równoległoboków, tym sposobem przebyte, będzie równoległościanem.

72. *Twierdz.* 2 Dwa równoległościany mogą przystać do siebie, gdy i wszystkie ich odpowiadaiące sobie ściany przystać do siebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także sobie odpowiadaiące, robią się z kątów równych należących do tychże ścian.

Tab. III. Fig. 1 *i* 2. Niech będą dwa równoległościany: AF, af, których wszystkie ściany odpowiadaiące sobie w jednym i drugim równoległościanie, mogą przystać do siebie, i których kąty bryłowe także sobie odpowiadaiące nap. A i a, robią się z równych kątów tychże ścian; te dwa równoległościany przystać do siebie mogą.

Dowodz. Ponieważ kąty bryłowe, A i a, robią się z równych względem siebie kątów płaskich, więc przystać do siebie mogą. Przeniosłszy tedy równoległościan af, tak, aby kąt bryłowy a, przystał w rzeczy samey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaskie, z których się te bryłowe robią, przystaią iedne do drugich sobie równych; a liniie ab, ad, ah, są równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h, przystaną do punktów: B, D, H, i ściany także czyniące dwa kąty bryłowe a i A, przystaną iedne do drugich; a zatém i punkta: c, g, e, przystaną do punktów odpowiadaiących sobie C, G, E; a w szczególności liniie: bc, bg, przystaną do liniy: BC, BG. Więc i płaszczyzna przechodząca przez liniie: bc, bg, leżeć będzie na płaszczyznie przechodzącey przez liniie BC, BG. Że zaś przypuściliśmy iż ściana befg, przystać może do ściany BCFG, więc punkt f, przystanie do punktu F.

Tymże sposobem okazać można, że i wszystkie inne ściany i kąty równoległościanu af przeniesionego, przystaną do innych ścian i kątów równoległościanu AF, a zatém te dwa równoległościany przystać do siebie mogą.

73. *Uwaga.* Tymże całe sposobem dowodzi się, że dwie iakiekolwiek bryły przystać mogą do siebie, gdy wszystkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące sobie, przystać także do siebie mogą, i gdy ściany iedney bryły, przystać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey bryle.

74. *Opis.* Uważaiąc równoległościan iakoby zbudowany na iedney ze ścian swoich, ta ściana nazywa się *podstawą* iego; a prostopadła od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, do tey spuszczona, nazywa się *wysokością* tego równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podstawy, są do niey prostopadłemi, taki równoległościan nazywa się *prostym* (Parallelopipedum rectum). Równoległościany prostokątne są gatunkiem równoległościanów prostych, w których podstawa nawet sama iest prostokątem.

75. *Twierdz.* 3. Dwa równoległościany równe są w *bryłowatości* (soliditas), gdy maią iednakową wysokość i na teyże samey są zbudowane podstawie, a dwie ich ściany, na iedney płaszczyznie znayduiące się, stoią na tymże samym boku podstawy.

Tab. III. Fig. 3. Niech będą dwa równoległościany ACGE i ACLI zbudowane na teyże samey podstawie AC: i niech dwie ich ściany, AG, AL znayduią się na teyże samey płaszczyznie; te dwa równoległościany, są równe w bryłowatości.

Dowodz. Dwie bryły ADIENM BCKFGL, maią takie wszystkie ściany odpowiadaiące sobie, iż iedne do drugich przystać mogą; wszystkie podobnie kąty ich bryłowe przystać mogą do siebie. Jakoż tróykąt HAM, może przystać do tróykąta GBL, a w szczególności kąty HAM, GBL, są równe. Równoległobok HADE przystać może do równoległoboku GBCF sobie przeciwnego, w pierwszym równoległościanie, a w szczególności kąty HAD, GBC, są równe; równoległoboki także MADI, LBCK przeciwne sobie, w drugim równoległościanie, mogą do siebie przystać, a w szczególności kąty MAD, LBC są równe, więc kąty bryłowe A, B, i ściany tych kątów mogą przystać do siebie. Toż mówić i o wszystkich innych kątach bryłowych, i o wszystkich innych tych dwoch brył ścianach. Zaczém te dwie bryły przystać mogą do siebie i są równe sobie w bryłowatości. Aże od całey bryły ACLE, odiąwszy pierwszą z brył wyżey wyrażonych ADIEHM, zostaie się równoległościan ACLI, a odiąwszy od teyże całey bryły ACLE, drugą bryłę BCKFGL, zostaie się równoległościan ACGE; więc te dwa równoległościany są równe (f).

76. *Twierdz.* 4. Dwa równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, chociaż żadna z ich ścian stoiących na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Tab. III. Fig. 4. Niech będą dwa równoległościany ACGF i ACLI, na teyże samey podstawie AC, z je-

(f) To dowodzenie iest ogólne, i rozciąga się do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt G, czyliby się znaydował między G i H, czyli nakoniec byłby na linii HG przedłużoney.

dnaką wysokością, i niech inne ich ściany na odmiennych znayduią się płasczyznach; te dwa równoległościany są równe.

Dowodz. Przedłużmy liniie KI, HE tak daleko, aż się znidą z sobą w punkcie O. Niech iescze i liniia LM, przedłużona, przecina HE, w N, liniia GF także przedłużona niech przecina IK w P, i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF i LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy liniie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

Równoległościan ACQO, ma tę samę, co tamte dwa, podstawę AC.

Ma ściany AO na płasczyznie ściany AE, należącey do równoległościanu ACGE, więc temu równoległościanowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płasczyznie ściany AL, należącey do równoległościanu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu równoległościanowi.

Więc równoległościan ACQO równy iest także równoległościanowi ACGE, iako i równoległościanowi ACLI; a zatém i te dwa równoległościany są też sobie równe.

— 77. *Twierdz.* 5. Dwa równoległościany są równe, gdy iednaką maią wysokość i równe podstawy z jednym spólnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże samym boku spólnym wystawione, znayduią się na teyże samey płasczyznie.

Niech będą dwa równoległościany: ACGE, ICOQ iednakiey wysokości, a podstawy ich równe AC, IC, niech maią bok spolny CD, na którym wystawione są dwie ściany DF, DP, na teyże samey płasczyznie znayduiące się; te dwa równoległościany są równe. *Tab. III. Fig.* 5.

Wykreśl. Przez punkta I i L, poprowadźmy na płasczyznie AG, czyli AO, liniie IN, LM, równoległe do AH, albo BG, i niech te równoległe spotykaią w N i M, liniią HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła ICME będzie też równoległościanem.

Dowodzenie. Równoległościan ICME, ma też samę podstawę IC, i tę samę wysokość, co i równoległościan ICOQ, a zatém są sobie równe.

Tenże równoległościan ICME, i równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę spólną DF, iak podstawę, maią też iednaką wysokość, a zatém są sobie równe. Więc równoległościan ICME, równy iest tak iednemu, iak i drugiemu równoległościanowi: ACGE i ICOQ, a zatém i te dwa równoległościany są równe.

Tab. III. Fig. 5. 78. *Twierdz.* 6. Dwa równoległościany są równe, gdy maią iednaką wysokość i gdy ich podstawy maiące bok ieden spólny, są równe.

Niech we dwoch równoległościanach iednakiey wysokości będą dwie podstawy; AC i IC równe, i maiące spólny bok CD; te dwa równoległościany będą równe.

Wykreśl. Na podstawie IC, iednego z tych równoległościanów, który nazwiemy pierwszym, postawmy trzeci równoległościan teyże samey wysokości, tak aby ściana iego stoiąca na boku CD, znaydowała się na płasczyznie ściany drugiego równoległościanu, stoiącey na tymże boku.

Ten trzeci równoległościan, iako maiący z pierwszym spólną podstawę i wysokość, będzie mu równy. Tenże trzeci równoległościan, będzie równy i drugiemu; bo maią równe podstawy IC, AC, ze spólnym bokiem CD, i ściany ich stoiące na boku CD, znayduią się na teyże samey płasczyznie.

Więc ten trzeci równoległościan równy iest tak pierwszemu iak i drugiemu, a zatém i one sobie równe będą.

W szczególności. Równoległościan każdy równy iest równoległościanowi prostokątnemu, który ma tę samę, co i tamten wysokość, podstawę równą podstawie iego i bok ieden spólny obudwom podstawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek się powiedziało o równoległościanach prostokątnych, wszystko to do iakichkolwiek innych można przystosować; kładąc zamiast każdego z nich, równoległościan prostokątny, teyże samey wysokości i podstawy równey, a maiącey bok ieden spólny z podstawami równoległościanów nieprostokątnych. I tak:

1. Dwa równoległościany, maiące równe podstawy i wysokości, są równe; bo równoległościany prostokątne iednakiey wysokości, i maiące z tamtemi równoległościanami równe podstawy, a w nich spólny bok ieden, są równe.

2. Dwa równoległościany są też równe, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości.

3. Dwa równoległościany, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Wszystko to, co się powiedziało o zamienianiu stosunku dwoch równoległoscianów prostokątnych, na stosunek dwoch liniy, i o mierze liczebney dwoch równoległościanów prostokątnych, przystosować można do miary równoległościanów nieprostokątnych; używaiąc do tego, boku iednego podstawy, wysokości iey względem tego boku, i wysokości równoległościanu.

80. *Przestroga.* Gdyby ścisłe i prawdziwe geometryczne dowodzenie wyżey położone przytrudné się zdawało uczniom do poięcia, mimo wystawione im przed oczy figury, z drewna, lub papieru wyrobione, można im to będzie łatwiey do poięcia podać w sposób następuiący.

Niechay dwa równoległościany z równemi podstawami i wysokościami stoią na teyże samey płasczyznie. Niech inna iakakolwiek płasczyzna równoległa do pierwszey, przecina te dwa równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podstawom, a zatém i sobie rowne będą; i gdziekolwiek te dwa równoległościany przetniemy płasczyzną równoległą do ich podstaw, równe zawsze będą te przecięcia. Zadney więc nie masz przyczyny, dla któreyby ieden z tych równoległościanów nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak ostrzedz zaraz uczniów, iż tym sposobem słabo się w rzeczy samey dowodzi równość dwoch równoległościanów. Bo chociażby iak naywięcey było tych przecięć równoległych do podstaw równoległościanów, to iest: chociażby iak naymnieysza była odległość każdego z tych przecięć, od drugiego naybliższego, wszelako części równoległościanów zawarte między takiemi dwoma przecięciami, są iescze równoległościanami, które tak się względem siebie maią, iak się maią całe równoległościany, których tamte są częściami. Aby więc wnieść można równość równoległościanów, z równości ich części, trzebaby pierwey dowieść równości tych części.

Może się imaginacya nasza tak daleko zapuścić, że przez nię wystawimy sobie dwoch równoległościanów przecięcia tak bliskie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą się zdawały nie różnić od podstaw tychże równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem, że małość lub wielkość iakiey rzeczy, nie iest w sobie małością lub wielkością, ale się albo za małość bierze względem inney rzeczy większey, albo za wielkość względem inney mnieyszey; i nie można nigdy bryły choćby też naycieńszey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to iest, że im większa będzie liczba przecięć, dwoch równoległościanów przez płaszczyzny równoległe do ich podstaw, tém mnieysza będzie różnica małych dwoch ich części zawartych między dwiema naybliższemi płaszczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iakakolwiek iest choćby też naymnieysza, ta różnica, tedy wielekroć powtórzona może uczynić różnicę wielką w dwoch równoległościanach, których równości chcemy dowodzić z równości ich cząstek, czyli małych równoległościanów, z których się składaią.

Ta sama trudność do rozwiązania zostaie, gdyby kto równości dwoch równoległościanów maiących iednaką podstawę i wysokość, a z których ieden byłby naprzykład prosty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoszenia się w górę ich podstaw w równey zawsze od pierwszego położenia odległości, ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieysca od podstaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w samey rzeczy punkt każdy tych podstaw przebył; (bo do iednakiey wysokości postępuiąc, więcey mieysca przeydzie punkt nap. skrayny równoległościanu ukośnego, niż tego, który iest prosty) ale to mieysce od podstaw równoległościanów przebyte, powinno się wymierzać wzdłuż linii prostopadłey do teyże podstawy, ponieważ ta tylko liniia mierzy odległość, w którey podstawa podnoszeniem się swoiém oddaliła się od pierwszego swego położenia.

Następuiące porównywanie może iakożkolwiek służyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znosi cale.

Gdy dwa równoległoboki zrobione na teyże samey podstawie, i z równą wysokością, przetniemy liniią równoległą do podstawy, obadwa przecięcia równe będą podstawie. Wszystkie też inne takowe przecięcia tych dwoch równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w jednym, co i w drugim równoległoboku. Toż mówić i o dwoch tróykątach, których przecięcia równoległe do podstawy spólney byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe równoległoboki, lub tróykąty nie miałyby sobie być równe? Ponieważ tedy tym sposobem dochodzimy względem powierzchni płaskich, tey samey prawdy, którey doszliśmy ścisłém pierwéy dowodzeniem; iuż ten sam skutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można zatém przystosować go i do brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potém gdy mówić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis).

81. *Twierdzenie 7.* W jakimkolwiek równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney ze ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie równoległościanu przez tę płaszczyznę, będzie równoległobokiem, i podzieli równoległościan na dwie części, które przystać do siebie mogą.

Niech będzie równoległościan ACGE; *Tab. III.* przez krawędź AH, i przez przekątną HF *Fig.* 5. niech przechodzi płaszczyzna; liniie AH, CF są równoległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH, HF, przechodzi też i przez CF. Że zaś liniie AH, CF są równe i równoległe, więc czworokąt ACFH, iest oraz i równoległobokiem.

Dwie bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *równoległoboczne* (parallelogrammicae) są ścianami przeciwnemi w równoległościanie: ściany zaś ich tróykątne iak nap. ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2. Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; nap. kąt bryłowy w A iedney bryły, robi się ze trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey bryły.

Więc te dwie bryły mogą przystać do siebie, a w szczególności są sobie równe.

ROZDZIAŁ V.

O graniastosłupach.

82. *Twierdz. przybrane.* Niech będą dwie prostokréślne figury równe i podobne, wykréślone na dwoch równoległych płaszczyznach; niech iescze i boki ich równe będą równoległe ieden względem drugiego: czworokąty, których bokami przeciwnemi będą boki równe tych figur, są równoległobokami.

Dowodz. We wszystkich takowych czworokątach, boki dwa przeciwne są równe i równoległe; a zatém i inne boki są też równe i równoległe.

83. *Opis.* Niech będzie bryła iaka zakończona dwiema figurami prostokréślnemi równemi, podobnemi i równoległemi, a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoległe, i tylą równoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwoch figur, ile każda z tych figur ma boków, ta bryła nazywa się *graniastosłupem* (prisma). I tak równoległościany, o których w poprzedzaiących rozdziałach mówiliśmy, są pewnemi graniastosłupów gatunkami. Jedna z tych figur równych i równoległych, na którey wystawiamy sobie, iakoby zbudowany graniastosłup, nazywa się iego *podstawą*, a prostopadła spusczona na tę podstawę z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney, nazywa się *wysokością* tego graniastosłupa. Graniastosłup albo iest *prosty*, albo *ukośny*; *prosty*, gdy ściany iego stoią do pionu względem podstawy; *ukośny*, gdy też ściany są do podstawy nachylone.

Różne także nazwiska przybiera graniastosłup, podług rozmaitey liczby boków podstawy swoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa się *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *sześciokątnym*, gdy podstawa iego iest tróykątém, czworokątém, pięciokątém, sześciokątém i t. d.

84. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy gdziekolwiek graniastosłup płaszczyzną równoległą do iego podstawy, przecięcie to będzie figurą równą i podobną podstawie.

Dowodz. Przecięcie iedney któreykolwiek ściany poboczney, przez tę płaszczyznę, równoległé będzie do tego boku podstawy, na którym ta ściana stoi; i te dwie liniie będą bokami przeciwnemi równoległoboku, który za dwa inne boki ma części dwoch innych boków teyże ściany, zawarte między podstawą i płasczyzną przecinaiącą; więc te dwie linije będą równe.

Przecięcia więc przez tę płasczyznę dwoch ścian przyległych, będą równoległe względem boków sobie przeciwnych należących do podstawy, a zatém kąt, który te spólne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podstawy.

Będzie tedy mieć przecięcie graniastosłupa przez tę płasczyznę, wszystkie swoie boki i wszystkie kąty równe względem boków i kątów podstawy graniastosłupa, i dla tego przecięcie to przystać może do podstawy.

85. Można sobie wystawić graniastosłup, iakoby zrobiony przez posuwanie się w górę iego podstawy, w sposób następuiący:

Niech będzie figura iaka prostokréślna, odrysowana na płasczyźnie. Od wierzchołka kąta któregokolwięk tey figury, wyciągniymy liniią prostą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płasczyzną. Niech się potém wznosi do góry ta figura, w równey zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nie schodzi z linii od niego wyprowadzoney; bryła, która się takim ruchem utworzy, będzie graniastosłupem.

86. *Twierdz.* 2. Graniastosłup tróykątny, iest połową równoległościanu takiego, któryby za podstawę miał równoległobok dwa razy większy od podstawy tego graniastosłupa, z dwoma bokami równaiącemi się bokom podstawy tegoż graniastosłupa tróykątnego.

Niech będzie graniastosłup tróykątny *Tab.IV.* ABCDEF, którego podstawą iest tróykąt ABC. *Fig.* 1. Dokończmy równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami są AB i BC; na tym równoległoboku dokończmy równoległościanu ACEH, któryby miał spólne dwie ściany AE i BD z graniastosłupem tróykątnym.

Dwa graniastosłupy tróykątne ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przystać, bo są dwiema częściami oddzielonémi przez płasczyznę przekątną ACDF; a zatém ieden z nich, nap. graniastosłup ABCDEF, iest połową równoległościanu ACEH.

87. *Wniosek.* Cokolwiek się powiedziało o równoległościanach względem ich wielkości, wszystko

to przystosować można do graniastosłupów tróykątnych, które tych równoległościanów są połowami.

1. Dwa graniastosłupy tróykątne, równey wysokości i podstawy, równaią się i w bryłowatości.

2. Dwa graniastosłupy tróykątne, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa graniastosłupy tróykątne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa graniastosłupy tróykątne, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa graniastosłupy tróykątne, równe w bryłowatości, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

6. Co się powiedziało o porównywaniu liczebném dwoch równoległościanów, to twierdzić można i o porównywaniu dwoch graniastosłupów tróykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podstawy graniastosłupa tróykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wysokości.

7. Maiąc wiadomą podstawę graniastosłupa tróykątnego, kąty dwoch ścian iego, które z kątem podstawy czynią ieden kąt bryłowy i krawędzie, można wyznaczyć graniastosłup tróykątny i iego wysokość, a zatém i bryłowatość tymże samym sposobem, iak się czyniło względem rownoległościanów.

8. Graniastosłupy tróykątne, maiące spólny kąt ieden bryłowy, są do siebie iak równoległościany prostokątne, maiące te same trzy krawędzie; w rachunku zaś tak są do siebie, iak liczby trzy ciągłe iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz.* 3. Graniastosłup nietróykątny może być rozłożony na graniastosłupy tróykątne teyże co on wysokości, za podstawy zaś maiące tróykąty, na które rozdzielona iest iego podstawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podstawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Tab. IV. Fig. 2. Niech będzie ABCDE, podstawa nap. pięciokątna graniastosłupa ABCDEedcba. Od iey wierzchołka nap. A, poprowadźmy przekątne AD, AC; te rozdzielą podstawę na trzy tróykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podstawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadźmy przekątne ad, ac.

Liniie Aa, Dd, są obiedwie równoległe do linii Ee i oney równe; więc i względem siebie będą równoległemi i równemi, a przeto czworokąt ADda, iest równoległobokiem, a zatém bryła ADEeda, iest graniastosłupem tróykątnym. Tymże sposobem okazuie się, że i bryły ACDdca, ACBbca, są graniastosłupami tróykątnemi.

89. *Twierdz.* 4. Dwa iakiekolwiek graniastosłupy maiące równą wysokość, tak się do siebie maią, iak ich podstawy.

Jakoż graniastosłupy ADEeda, ADCcda, ACBbca i t. d. maią się do siebie iak ich podstawy: ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap. graniastosłup ADEeda, tak się ma do summy wszystkich, to iest: do graniastosłupa pięciokątnego; iak podstawa tróykątna piérwszego, do summy podstaw wszystkich, to iest: do podstawy graniastosłupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny graniastosłup iednakiey wysokości, takby się miał do graniastosłupa tróykątnego ADEeda, iak podstawa iego, do podstawy tróykątney ADE.

Więc (złożywszy stosunki) będzie stosunek iakiegokolwiek graniastosłupa do graniastosłupa ABCDEedcba, równy stosunkowi podstawy pierwszego graniastosłupa, do podstawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wysokości tych dwoch graniastosłupów są równe.)

W szczególności zaś, gdy równoległościan i graniastosłup iakikolwiek równe mieć będą podstawy i wysokości; bryłowatość iednego, równa będzie bryłowatości drugiego.

A zatém cokolwiek się o równoległościanach powiedziało, można to i do graniastosłupów iakichkolwiek przystosować, co do wielkości ich, ile te zawisły od ich podstaw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek graniastosłupów przystosować wnioski, co do graniastosłupów tróykątnych w szczególności, które po twierdzeniu 2giém tego rozdziału następuią.

ROZDZIAŁ VI.

O piramidach albo ostrosłupach.

90. *Opis.* Niech punkt iaki znayduie się nad płasczyzną figury iakieykolwiek prostokréślney; przez ten punkt i przez wszystkie boki figury, niechay przechodzą płasczyzny, zrobi się ztąd bryła kończąca się z jedney strony na tey figurze, a z jnnych stron, na tylu tróykątach maiących spólny wierzchołek w owym punkcie, ile ta figura ma boków. Bryła ta nazywa się *ostrosłupem* (Pyramis). Powierzchnią ostrosłupa można sobie wystawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego się nad płasczyzną figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącéy się około obwodu teyże figury. Figura prostokréślna, którey boki służą za podstawy tróykątów kończących ostrosłup, nazywa się *podstawą* ostrosłupa, te tróykąty nazywaią się iego *ścianami*; punkt, który iest wierzchołkiem spólnym wszystkich ścian ostrosłupa, nazywa się *wierzchołkiem* iego; prostopadła spusczona od tego wierzchołka na płasczyznę podstawy, zowie się *wysokością* ostrosłupa.

Ostrosłup różne przybiera nazwiska, podług wielości boków podstawy swoiéy. Nazywa się tróykątnym, czworokątnym, pięciokątnym, sześciokątnym i t. d., gdy podstawa iego iest tróykątem, czworokątem, pięciokątem, sześciokątem i t. d.

Ten ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, którego podstawą iest figura prostokréślna mogąca się na kole opisać; i gdy prostopadłéy spusczonéy od wierzchołka tego ostrosłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim ostrosłupie wysokość wszystkich ścian iest iednakowa, i tych ścian płasczyzny równie są nachylone do płasczyzny podstawy.

W ostrosłupie, którego podstawą iest figura prostokréślna mogąca się wpisać w koło, a którégo wysokość wychodzi od środka tego koła, wszystkie krawędzie ścian są równe, a zatém wszystkie te ściany są tróykątami równoramiennémi. Ale że środek koła opisanégo na podstawie, może czasem za tę podstawę wychodzić, dla tego takowego ostrosłupa nié można nazywać prostym.

Żeby iednak nazwisko to ostrosłupa prostégo (zle do tych czas zwyczaynie określoné) ogólnieyszé uczynić, przydamy następuiący warunek.

Gdy w figurze prostokréślnéy znayduie się taki punkt, przez który ciągnione linie, a po obudwoch stronach na obwodzie figury zakończone, dzielą się w tym punkcie na dwie równe części; ten punkt nazywa się środkiem figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w równoległoboku, iest tego równoległoboku środkiem. Jeżeli tedy figura prostokréślna maiąca taki środek, służy za podstawę ostrosłupowi, i ieżeli prostopadła od wierzchołka iego spuszczona przypada na ten środek figury, taki ostrosłup nazwiemy prostym.

Ostrosłup nazywa się *foremnym*, gdy za podstawę ma figurę prostokréślną foremną.

91. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy iego, przecięcie to będzie figurą podobną do podstawy.

Niech będzie ostrosłup SABCDDE, maiący wierzchołek w punkcie, a którego podstawą iest figurą prostokréślną ABCDE. Niech ten ostrosłup przecina płaszczyzna równoległa do podstawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podstawy. *Tab. IV. Fig. 3.*

Dowodz. Ponieważ płaszczyzna podstawy równoległa iest do płaszczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, spólne z temi płaszczyznami, równoległe iedne względem drugich; więc wszystkie boki przecięcia nap. ab, bc równoległe będą względem boków AB, BC podstawy; a zatém i wszystkie kąty przecięcia, równe będą względem kątów podstawy, nap. kąt abc, równy będzie kątowi ABC. Jest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Tróykąty SAB, sab są podobne, więc Sb : SB = ab : AB.

Tróykąty też, Sbc, SBC podobne: więc Sb : SB = bc : BC; a zatém ab : AB = bc : BC.

Więc przecięcie i podstawa maią około kątów względem siebie równych, boki proporcyonalne, a zatém przecięcie podobne iest do podstawy.

W szczególności zaś, przecięcie takie i podstawa, maią się do siebie w stosunku dwumnożnym boków

Także różnice dwoch par graniastosłupów następuiących, równe są graniastosłupom, teyże co one wysokości, maiącym za podstawy czworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3b^4c^4$.

Ostatni zaś graniastosłup opisany, równa się graniastosłupowi teyże, co on wysokości, maiącemu za podstawę tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między summą wszystkich graniastosłupów opisanych, a summą wszystkich graniastosłupów wpisanych, równa będzie summie wszystkich graniastosłupów teyże co one wysokości, któreby stały na czworokątach BCc^1b^1, $b^1c^1c^2b^2$, $b^2c^2c^3b^3$, $b^3c^3c^4b^4$, i na tróykącie Ab^4c^4, to iest: równa będzie graniastosłupowi tróykątnemu teyże co one wysokości, a maiącemu za podstawę tróykąt ABC. Ta więc różnica równa się w samey rzeczy pierwszemu graniastosłupowi opisanemu.

95. *Wniosek.* Pierwszy ten graniastosłup opisany na ostrosłupie SABC, którego podstawa ABC nie odmienia się, będzie tém mnieyszy, im mnieyszą damy mu wysokość, to iest: im liczba przecięć ostrosłupa będzie większa. Można zaś uczynić ten graniastosłup mnieyszym od iakiegokolwiek graniastosłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten ostatni graniastosłup na inny, któryby miał za podstawę tróykąt ABC, i dzieląc wysokość iednostayną ostrosłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieysza od wysokości tego graniastosłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany ostrosłup, można weń wpisać, i opisać na nim sposobem wyżey wyrażonym, tyle graniastosłupów, aby różnica dwoch summ, mnieysza była od iakiegokolwiek graniastosłupa naznaczonego, a tém bardziey, aby różnica ostrosłupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa ostrosłupy maiące równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdyby te dwa ostrosłupy nie były równe, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich różnica zamieniona była na graniastosłup maiący równą z témi ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych ostrosłupa na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego graniastosłupa. Wpiszmy w ten ostrosłup i opiszmy na nim graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącém twierdzeniu przybraném. Toż uczyńmy i na drugim ostrosłupie: wszystkie graniastosłupy wpisane i opisane, na tych dwoch ostrosłupach, będą równe iedne względem drugich (87, 88); a zatém summa graniastosłupów wpisanych nap: w jeden ostrosłup będzie równa summie graniastosłupów wpisanych w drugi ostrosłup. Ze zaś zrobiliśmy różnicę dwoch summ graniastosłupów wpisanych i opisanych na pierwszym ostrosłupie, mnieyszą od różnicy mniemaney dwoch ostrosłupów, więc tém bardziey różnica tego ostrosłupa od summy wszystkich graniastosłupów weń wpisanych, mnieyszą będzie od różnicy mniémaney tych dwoch ostrosłupów; a zatém i różnica piérwszego ostrosłupa, od summy graniastosłupów wpisanych w drugi ostrosłup, mnieysza będzie, niż różnica piérwszego ostrosłupa od drugiego. Summa tedy graniastosłupów wpisanych w ten drugi ostrosłup, byłaby większa od tego drugiego ostrosłupa, co być nie może; a przeto te dwa ostrosłupy nié mogą sobie być nie równe.

97. *Twierdz.* 3. Graniastosłup troykątny, może zawsze być rozłożony na trzy ostrosłupy troykątne równe, z których dwa mieć będą tę samę podstawę i wysokość, co i graniastosłup.

Niech będzie graniastosłup tróykątny ABCDEF, można go rozłożyć na trzy ososłupy tróykątne równe, z których dwa, tę samę, co on mieć będą podstawę i wysokość. *Tab. VI. Fig.* 5.

Dowod. Przez bok AC, podstawy ABC, graniastosłupa, i przez koniec F, krawędzi tego graniastosłupa nie przechodzącey przez punkta A i C, przeciągniymy płaszczyznę ACF; odetnie ona od graniastosłupa, ostrosłup tróykątny FABC, maiący za wierzchołek punkt F, a za podstawę troykąt ABC; a zatém ten ostrosłup, tę samę co i graniastosłup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podstawie, i przez punkt C przeciągniymy płaszczyznę ECF; odetnie ona od graniastosłupa, ostrosłup tróykątny CEDF, maiący za wierzchołek punkt C, a za podstawę troykąt DEF, równy tróykątowi ABC, a zatém i ten drugi ostrosłup ma tę samę także, co i graniastosłup, podstawę i wysokość.

Więc dwa ostrosłupy: FABC, CDEF równe maią wysokości, i podstawy, a zatém są równe (96). Zostanie iescze po tych dwoch przecięciach ostrosłup CFEA, zakończony czterema tróykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystawmy sobie, ten ostatni ostrosłup iako maiący za podstawę tróykąt, nap. ACE, a za wierzchołek, punkt F, ostrosłup zaś CDEF, iakoby miał za podstawę, tróykąt CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa tróykąty, które przystać do siebie mogą: więc te dwa ostrosłupy maią podstawy równe, ACE, DEC, i na iedney płaszczyznie znayduiące się; a oprócz tego, maią spólny wierzchołek w punkcie F, a zatém i wysokość równą, więc są równe; wszystkie tedy ostrosłupy, na które graniastosłup był podzielony, są równe.

Wzaiemnie. Ostrosłup tróykątny, można zawsze sobie wystawić, iako trzecią część graniastosłupa maiącego, tę samę co i ostrosłup podstawę i wysokość.

Niech będzie ostrosłup tróykątny ABCF, ktorego podstawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podstawie ABC, wystawmy sobie iakoby zbudowany graniastosłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby się na tych samych płaszczyznach, na których znayduią się dwie ściany ostrosłupa, i krawędź im spolna BF. Podług twierdzenia poprzedzaiącego, ten graniastosłup iest trzy razy tak wielki, iak ostrosłup; więc też i ten ostrosłup iest trzecią częścią tego graniastosłupa. A że wszystkie graniastosłupy maiące równe podstawy i wysokości, są równe; więc ostrosłup tróykątny iest trzecią częścią graniastosłupa iakiegokolwiek, maiącego taką samę, iak on podstawę i wysokość.

98. *Twierdz.* 4. Ostrosłup iakikolwiek iest trzecią częścią graniastosłupa maiącego tę samę, co on podstawę i wysokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podstawa ostrosłupa, poprowadźmy na niéy przekątnych tyle do wszystkich kątów, ile można. Przez te wszystkie przekątne, i przez wierzchołek ostrosłupa niech przechodzą płaszczyzny; ostrosłup będzie przez te płaszczyzny podzielony na tyle ostrosłupów tróykątnych, na ile tróykątów podstawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych ostrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią graniastosłupa maiącego taką samę, iak on podstawę i wysokość; a zatém summa wszystkich tych ostrosłupów troykątnych, to iest cały iakikolwiek ostrosłup z nich się składaiący, równać się będzie trzeciey części summy wszystkich tych graniastosłupow, albo co na iedno wychodzi, równać się będzie trzeciey części graniastosłupa maiącego tę samę podstawę i wysokość, co i ostrosłup.

99. *Wnioski.* Cokolwiek się o stosunku graniastosłupów powiedziało, toż mówić można i o stosunku ostrosłupów, które, maiąc takie same iak te graniastosłupy, podstawy, i wysokości, są trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa ostrosłupy iakiekolwiek (proste, lub ukośne foremne, lub nieforemne) z równemi wysokościami, tak się do siebie maią iak ich podstawy.

2. Dwa ostrosłupy z równemi podstawami, tak się do siebie maią, iak ich wysokości.

3. Dwa ostrosłupy są równe, gdy ich podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Dwa ostrosłupy równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, i wyraz liczebny bryłowatości ostrosłupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecia część mnogości ze dwoch liczb, z których iedna znaczyłaby wielkość powierzchni podstawy tego ostrosłupa, a druga wielkość iego wysokości.

100. *Uwaga.* Maiąc dane w liczbach, sześć krawędzi iakiego ostrosłupa tróykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego ostrosłupa.

Jakoż złożywszy tróykąt ze trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podstawę ostrosłupa; a na trzech bokach tey podstawy, zrobiwszy trzy tróykąty, na teyże samey, co i podstawa płaszczyznie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie ze trzech pozostałych; te tróykąty będą ścianami ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta tróykąta wziętego za podstawę, i ze dwoch kątów ścian dwoch przy podstawie. Ponieważ zaś te kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a w szczególności będzie można wyrachować stosunek wysokości ostrosłupa, do spólnego przecięcia tych dwoch ścian; a że to spólne przecięcie iest dane co do wielkości, więc dóydziemy i wysokości ostrosłupa, a zatém i iego bryłowatości, która zawisła od wysokości ostrosłupa i powierzchni iego podstawy.

101. *Uwaga* 2. Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako się to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga* 3. Gdy ostrosłup iest foremny, a zatém wszystkich ścian iego krawędzie są równe; kwadrat wysokości ostrosłupa, równa się różnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podstawie opisanego; a przeto ta wysokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś sposób postępowania przystosować można do wszystkich ostrosłupów foremnych, iakażkolwiek byłaby liczba ich boków w podstawie.

Przykład 1. Wyznaczyć bryłowatość bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraëdrum).

Bok ieden troykąta równobocznego naznaczywszy przez liczbę 2, kwadrat wysokości tego tróykąta wyrazi się przez liczbę 3. Promień koła opisanego iest $\frac{2}{3}$ tey wysokości, więc kwadrat tego promienia iest $\frac{4}{9}$ kwadratu wysokości tróykąta, a zatém kwadrat tego promienia iest $\frac{12}{9}$ Ze zaś kwadrat wysokości tego ostrosłupa iest $4-\frac{12}{9}=\frac{24}{9}=\frac{4\times6}{9}$, więc sama wysokość będzie $=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Powierzchnia tróykąta służącego za podstawę wyrazi się przez $\sqrt{3}$, a zatém bryłowatość ostrosłupa będzie wyrażona przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ to iest bryłowatość ostrosłupa tak się ma do bryłowatości sześcianu maiącego równe krawędzie z ostrosłupem iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; albo iak 2 do $12\sqrt{2}$; albo iak 1 do $6\sqrt{2}$; albo nakoniec iak 1 do $\sqrt{72}$; który to stosunek bliski iest stosunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało różni się od stosunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość ośmiościanu foremnego.

Można sobie ośmiościan wystawić w myśli, iakby złożony ze dwoch ostrosłupów prostych kwadratowych, stykaiących się z sobą równemi podstawami.

Wyraziwszy krawędź iednę ośmiościanu tego przez 2, kwadrat promienia koła opisanego na podstawie iednego z tych dwoch ostrosłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego ostrosłupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, to iest 4, i 2, to iest będzie $=4-2=2$. Wysokość zaś tego ostrosłupa wyrazi się przez $V2$; więc bryłowatość iednego tego ostrosłupa będzie oznaczona przez $\frac{4V2}{3}$, a zatém bryłowatość ośmiościanu przez $\frac{8V2}{3}$. Jest tedy bryłowatość ośmiościanu foremnego do bryłowatości sześcianu maiącego równe krawędzie z ośmiościanem iak $\frac{8V2}{3}$ do 8, albo iak $V2 : 3$. który to stosunek bliski iest stosunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni się od stosunku 33 do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany ostrosłupa są powierzchniami płaskiemi i to iescze tróykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy ostrosłup iest foremny, powierzchnia iego (oprócz podstawy) równa będzie tróykątowi, któryby miał za podstawę, obwód podstawy ostrosłupa; a wysokość równą wysokości ściany któreykolwiek (ponieważ wszystkie są równe).

Wyboczenie (Digressio) *o sposobie wyczerpania nazwanego po łacinie* Methodus exhaustionis, *maiące służyć za wstęp do rozdziałów następuiących.*

104. Sposób, którego się użyło dla dowiedzenia równości dwoch ostrosłupów, których podstawy i wysokości są równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych ostrosłupów zawarty iest między dwiema ilościami, których różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to iest, że każdy ostrosłup iest zawarty między summą graniastosłupów na nim opisanych i summą graniastosłupów weń wpisanych; i że tych dwoch summ różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tém bardziey każdego z tych ostrosłupow różnica, od iedney z tych summ, może być mnieysza, niż iakakol-

wiek ilość naznaczona. Zkąd można było ostrosłupom porównywanym do siebie przystosować to wszystko, cokolwiek się powiedziało o stosunku iedney z tych summ, nap. summy graniastosłupów opisanych na iednym ostrosłupie, do drugiey z tych summ, to iest do summy graniastosłupów w iednakiey liczbie, opisanych na drugim ostrosłupie. Że zaś, gdy ostrosłupy miały równe podstawy i wysokości, te dwie summy graniastosłupów były równe; więc też i ostrosłupy, których różnica od tych dwoch summ może być mnieysza niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa ostrosłupy miały tylko wysokości równe, a podstawy nierówne; możnaby tymże samym prawie sposobem okazać, że są do siebie, iak ich podstawy; a to ztądby się wniosło, że w tymże samym stosunku byłyby do siebie summy graniastosłupów opisanych na każdym z tych ostrosłupow; i że każdy z tych ostrosłupów może się różnić od każdey z tych summ, odpowiadaiących sobie, ilością mnieyszą, niżeli iest iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten sposób wnoszenia stosunku dwoch ilości, które bezśrednie z sobą porównywać iest trudno, będzie bardzo często używany w rozdziałach następuiących, przeto nie zawadzi okazać iescze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potém nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, który zawsze iest iednakowy.

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa równoległoboki maiące równe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba iescze dowieść, że i dwa tróykąty, których równe są wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy. W tém zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że tróykąt iest połową równoległoboku, teyże co on podstawy i wysokości.

Tab.IV. Fig. 6. Niech będą dwa tróykąty: ABC, abc. równey wysokości, a z nierównemi podstawami; trzeba dowieść, że się tak maią do siebie, iak ich podstawy; a to ztąd, że i równoległoboki iednakiey wysokości są do siebie, iak ich podstawy.

Podzielmy bok ieden nap. AC. na pewną liczbę części równych. Przez wszystkie punkta podziału poprowadźmy równoległe do podstawy; a na każdey z tych równoległych, wpiszmy i opiszmy tróykątowi ABC, równoległoboki, maiące za wysokość równe oddalenie dwoch nayblizszych równoległych.

Różnica równoległoboków opisanych, od równoległoboków wpisanych, równać się będzie naywiększemu z nich równoległobokowi. Ta zaś różnica może być mnieyszą zrobiona, niż iakikolwiek równoległobok naznaczony, odmieniwszy go na inny równoległobok, któryby tę samę, co i tróykąt miał podstawę, i kąt z nim przy podstawie spólny, a potém podzieliwszy bok AC tróykąta na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od boku, równoległoboku równego naznaczonemu, maiącego równą podstawę z tróykątem.

Gdyby to być mogło, aby dwa tróykąty ABC, abc, nie miały się do siebie, iak ich podstawy; tedy ieden z tych tróykątów, nap. ABC, byłby do uczynienia tego stosunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niech więc, ieżeli to być może, trzeba powiększyć tróykąt ABC, równoległobokiem ABFE, aby się tak miał do tróykąta abc, iak AB do ab.

Podzielmy bok AC, na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od linii AE; wpiszmy potém i opiszmy tróykątowi równoległoboki, w sposób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiększy z nich równoległobok AGHB. Różnica summy równoległoboków opisanych od summy równoległoboków wpisanych, uczyniona iest mnieyszą, niżeli równoległobok ABFE; tém bardziey zaś różnica summy równoległoboków opisanych, na tróykącie ABC, od tegoż tróykąta ABC, mnieysza będzie, niżeli równoległobok ABFE; a zatém summa wszystkich równoległoboków opisanych mnieysza iest od równoległoboku ABFE, wraz wziętego z tróykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile był podzielony bok AC; opiszmy na tym tróykącie równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opisane, na tych dwoch tróykątach, a odpowiadaiące sobie, tak się mieć będą do siebie iak podstawy AB, ab, tychże tróykątów; więc też i summa wszystkich równoległoboków opisanych na tróykącie ABC, tak się mieć będzie do summy równoległoboków opisanych na tróykącie abc, iak podstawa AB, pierwszego tróykąta, do podstawy ab, drugiego; to iest przez przypuszczenie, iak summa, z tróykąta ABC, i z równoległoboku ABFE, do tróykąta abc. Aże zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byćby powinien mnieyszy od drugiego; to iest summa wszystkich równoległoboków opisanych na tróykącie abc, powinna być mnieysza od tróykąta abc, co iednak być nie może; a zatém stosunek podstaw tych dwoch tróykątów, tenże sam iest, co i samych tróykątów.

Podobnym sposobem można by okazać, że i drugi tróykąt abc, nie powinien być powiększony aby miał ten sam do tróykąta ABC, stosunek, co i ich podstawy.

Przykł. 2. Niech tróykąty ABC, abc, wystawnią dwoch ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez prostopadłe spusczone od tych wierzchołków do podstaw ostrosłupów. Niech te obadwa ostrosłupy będą iednakiey wysokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych ostrosłupów, tak się maią do siebie, iak ich podstawy, a to z własności graniastosłupów iednakowey wysokości, które także w takim iak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się iuż wyżey dowiodło.

Okaże się, w podobny sposób, że opisawszy i wpisawszy iednemu z tych ostrosłupów, graniastosłupy, równey wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie naywiększemu graniastosłupowi opisanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieysza była niż iakikolwiek graniastosłup naznaczony; a tém bardziey różnica ostrosłupa od każdey z tych summ mnieysza będzie, niżeli ten graniastosłup.

Wpisawszy i opisawszy drugiemu ostrosłupowi, tyle co i piérwszemu graniastosłupów; summa tych wszystkich graniastosłupów opisanych na piérwszym ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, iak podstawa piérwszego ostrosłupa, do podstawy drugiego. Także i summy graniastosłupów wpisanych, w tym samym stosunku będą, co i podstawy dwoch ostrosłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby stosunek dwoch tych ostrosłupów nie był równy stosunkowi ich podstaw, tedy ieden z tych ostrosłupów, byłby nap. nadto mały na ten stosunek. Przydaymy mu więc tę ilość, którą powiększony zachowa ten stosunek, i zamieńmy tęż ilość na graniastosłup równey z nim podstawy. Temu ostrosłupowi wpiszmy i opiszmy graniastosłupy i iednakiey wysokości, tak iednak małey, aby różnica summ graniastosłupów wpisanych od opisanych, mnieysza była od różnicy naznaczoney; będzie tém bardziey różnica summy graniastosłupów opisanych na tym ostrosłupie, od tegoż ostrosłupa mnieysza, niżeli różnica naznaczona; a zatém summa tych graniastosłupów mnieysza będzie niżeli summa z ostrosłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim ostrosłupie opiszmy tyleż co i na pierwszym graniastosłupów.

Summa wszystkich graniastosłupów opisanych na piérwszym ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy graniastosłupów opisanych na drugim ostrosłupie, iak podstawa piérwszego ostrosłupa, do podstawy drugiego, to iest: iak summa z piérwszego ostrosłupa, i z różnicy iego mniemancy, do drugiego ostrosłupa.

Aże się pokazało, iż piérwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mnieyszy od drugiego, co iednak być nie może.

Więc stosunek dwoch tych ostrosłupów, nie różni się od stosunku ich podstaw.

107. *Uwaga.* Użyliśmy iuż tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w części I. Dowiodłszy albowiem, iż obwody dwoch wielokątów foremnych, z iednaką liczbą boków, wpisanych, lub opisanych, dwom kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu wielokąta wpisanego, lub opisanego, mnieyszą być może od iakieykolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy ztąd proporcyonalność okręgów kol do ich promieni. Dowiedliśmy także równości koła z tróykątem maiącym za wysokość promień iego, a za podstawę okrąg; a to z podobney własności wielokąta na kole opisanego.

W którymkolwiek z tych przykładów nap. w ostatnim, koło iest granicą między wielokątami wpisanemi i opisanemi, do której każdy z nich, tém bardziey się zbliża, im więcey boków mu damy, tak dalece, że przyyść można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tém mniey iescze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwoch kołach opisane, zawsze tę maią własność, że ich obwody są proporcyonalne tychże koł promieniom. Łącząc z sobą te własności, wypadło z nich, że i granice tych wielokątów, to iest koła, tęż samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nie przyydziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę różnicę, która zachodzi między wielokątem a kołem, to iest, abyśmy wielokąt cale na koło iemu równe zamienili.

Ten sposób postępowania nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie nie zdawało, aby liniie krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbiór bardzo wielu powierzchni płaskich małości nadzwyczayney: bryły także krzywe, aby uważać iak *wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę boków maiące.

Po tych, które się tu dały objaśnieniach, obeydzie się w następuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*. Dosyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawarte zawsze są między powierzchniami lub bryłami, o których iuż mówiliśmy, a które mogą się różnić od siebie mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość podana. Gdy zaś przyydzie mówić o ścianach bryl, o ich *warstach* (laminae) i t. d., tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obszérne objaśnienia, dosyć się wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważania bryl, iakoby złożonych z powierzchni usłanych iednych nad drugiemi.

ROZDZIAŁ VII.

O walcach.

108. Niech będą dwa koła równe nakreślone na dwóch płaszczyznach równoległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwoch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spólne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwoch koł; niechay ta liniia końce dwoch promieni łącząca obraca się równym wszystkich iey punktów ruchem, około okręgów tych dwoch kół. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *walcem* (Cylinder). Liniia prosta łącząca środki tych dwoch kół, nazywa się *osią* tego walca (axis). Dwa koła, na których się walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu któregokolwiek iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy dugiey, nazywa się *wysokością* walca. Gdy oś walca, albo liniia łącząca środki dwoch podstaw iego, prostopadłą iest do płaszczyzn podstaw, walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś iest pochyłą do tychże płaszczyzn, wtedy walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek*. Liniia robiąca obrotem swoim powierzchnią walcową, równoległą iest w początkowém swoiém położeniu do osi walca (bo ta liniia z osią czyni dwa boki przeciwne w czworokącie tym, którego dwoma innemi bokami, są dwa promienie kół równe i równoległe). Że zaś ta liniia zawsze iest do piérwszego swego położenia równoległą, więc zawsze będzie równoległą do osi. Wzaiemnie, gdy przez punkt którykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią równoległą do osi, ta liniia zmiesza się z liniią, która obrotem swoim kréśli powierzchnią walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować się będzie na powierzchni walcowey. Liniia równoległa do osi, a przechodząca przez punkt którykolwiek powierzchni walcowey, nazywa się *bokiem* walca; wszystkie zatém boki walca są równe, a w szczególności równaią się osi.

110. *Twierdz*. 1. Przeciąwszy walec płaszczyzną

równoległą do podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Tab. V. Fig. 1. Niech będzie CAac, połową przecięcia walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spólném przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey równoległey do podstawy.

Przecięcie walca przez tę drugą płaszczyznę będzie kołem.

Dowodz. Bok Aa walca iest do osi Cc równoległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwoch płaszczyzn równoległych, są równoległemi, więc czworokąt ACBD iest równoległobokiem, a zatém bok BD równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni walcowey, przez płaszczyznę równoległą do podstawy; a zatém to przecięcie iest kołem, którego środkiem punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a w szczególności równe są podstawie.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposób, którym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek walca, to iest przez ruch koła taki, którymby się to koło w równey zawsze od piérwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktów iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia.

W szczególności zaś walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem równoległoboku prostokątnego, około iednego z boków iego.

112. *Twierdz.* 2. Powierzchnia krzywa (g) walca prostego, równa się prostokątowi, któryby miał za podstawę okrąg podstawy walca, a za wysokość bok walca.

Dowodz. Wpiszmy w podstawę walca, i opiszmy na niey dwa wielokąty foremne, z równą liczbą boków, i na tych wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione graniastosłupy proste, teyże co i walec wysokości; powierzchnie bocznych ścian tych dwoch graniastosłupów równe będą prostokątóm maiącym wysokość walca; podstawy zaś równe obwodóm tych wie-

---

(g) Powierzchnią krzywą walca nazywamy tę, w którą nie wchodzą podstawy walca.

lokątów, a zatém te dwie powierzchnie bocznych ścian graniastosłupów, tak się mieć do siebie będą, iak obwody tychże wielokątów. Tém mniey więc różnić się od siebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym wielokątom do równości, to iest: im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieysza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tém bardziey powierzchnia krzywa, może się mniey iescze różnić od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w rozdziale XIII. części I) powierzchnia krzywa walca prostego, równa się prostokątowi maiącemu wysokość tego walca, a podstawę równą okręgowi podstawy iego.

113. *Wnioski* 1. Powierzchnie krzywe walców prostych iednakiey wysokości, tak się do siebie maią, iak promienie ich podstaw.

2. Powierzchnie krzywe walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała walca prostego, równa się prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy walca, a za wysokość summę z wysokości walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwoch podstaw walca, równa iest prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatém powierzchnia cała walca prostego proporcyonalna prostokątowi, któryby miał za boki, promień podstawy walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia iest iednostayny.)

114. *Uwaga.* Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale, że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey geometryi wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powierzchnia krzywa walca ukośnego.

115. *Twierdz.* 3. Dwa walce równe są w bryłowatości, których tak podstawy iako i wysokości są równe.

Dowodz. Wpisawszy i opisawszy podstawom tych dwoch walców, wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, a zrobiwszy na tych wielokątach, graniastosłupy równey z walcami wysokości, maiące ściany równolegle do osi tych walców; różnica graniastosłupa opisanego na iednym z tych walców, od graniastosłupa w tenże walec wpisanego, równać się będzie graniastosłupowi maiącemu tę samę, co tamte dwa wysokość, a podstawę równą różnicy dwoch ich podstaw. A że różnica tych dwoch podstaw, mnieysza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwoch graniastosłupów, wpisanego i opisanego, można uczynić mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tém bardziey różnica iednego z tych graniastosłupów, od walca może być mnieyszą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Że zaś dwa graniastosłupy podobne, nap. opisane na tych dwoch walcach są równe, więc też i te dwa walce są równe, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podstawami, maią się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twierdz.* 5. Walce z równą wysokością maią się do siebie, iak ich podstawy.

Dowodzenie tych dwoch twierdzeń to samo iest prawie, co i dowodzenie twierdzenia 3; położywszy stosunki nierówności podstaw, lub wysokości, na mieyscu stosunków równości.

118. *Wnioski.* Cokolwiek się powiedziało o porównywaniu graniastosłupów maiących podstawy różnego gatunku, wszystko to przystosować można do porównywania walców z graniastosłupami. Walec równy naprzykład iest iakiemukolwiek graniastosłupowi maiącemu równą z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma do graniastosłupa teyże co on wysokości, iak podstawa tego walca, do podstawy graniastosłupa, a zatém walec tak się ma do graniastosłupa teyże co i on wysokości, a którego podstawa iest wielokątem opisanym na podstawie walca, iak podstawa walca, do podstawy graniastosłupa, toiest iak okrąg podstawy walca, do obwodu podstawy graniastosłupa; nap. walec, którego wysokość równa się średnicy podstawy iego, tak się ma do sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła do teyże średnicy wziętey 4 razy.

Gdy walec równy iest graniastosłupowi w bryłowatości, wysokość ich będzie w stosunku odwrotnym podstaw, i znowu, ieżeli wysokości są w stosunku odwrotnym podstaw, tedy walec równa się graniastosłupowi.

Stosunek dwoch walców, może podobnie, iak i stosunek graniastosłupów, wyłożonym być w liniiach sposobem następuiącym: wyraźmy w liniiach stosunek ich podstaw; znalazłszy trzecią proporcyonalną do promienia walca pierwszego, i do promienia walca drugiego; do wysokości walca piérwszego, do wysokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney szukaymy czwartey proporcyonalney, stosunek promienia walca piérwszego, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi bryłowatości piérwszego walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podstawy drugiego walca trzy razy tak wielki iak promień podstawy piérwszego: wysokość zaś drugiego walca, niech będzie cztéry razy tak wielka, iak wysokość piérwszego; trzecia proporcyonalna do promienia walca piérwszego i do promienia walca drugiego, będzie 9 razy tak wielka, iak promień piérwszego walca: a ponieważ wysokość drugiego walca, 4 razy iest tak wielka, iak wysokość piérwszego; będzie więc czwarta proporcyonalna do wysokości piérwszego walca, do wysokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztéry razy tak wielka, iak trzecia proporcyonalna, to iest 36 razy tak wielka, iak pierwszy promień, a zatém drugi walec zawiera w sobie piérwszy, razy 36. Jakoż, gdyby podstawa drugiego walca zawierała w sobie razy 9 podstawę piérwszego, a wysokość ich była równa; tedy drugi walec byłby 9 razy tak wielki, iak piérwszy: a że nadto wysokość drugiego walca zawiera w sobie razy 4 wysokość piérwszego, będzie więc i z tey miary drugi walec 4 razy tak wielki, iak piérwszy, a z obudwoch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, iak piérwszy.

Co się zaś tycze miary liczebney iakiego walca, ta będzie znaleziona, wyraziwszy naprzód w liczbach, powierzchnią iego podstawy (podług tego co się powiedziało o powierzchni koła), a potém rozmnożywszy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wysokość walca.

119. *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey walca prostego, iako też i całey iego powierzchni, to iest dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią prostą, nap. z kwadratem,

zawisło od skwadrowania koła, a zatém od wyprostowania iego okręgu. Toż mówić i o bryłowatości walca, czyli o dokładném porównywaniu tey bryłowatości z bryłowatością nap. sześcianu.

Wyznaczenie wielkości kawałków walca, maiących za podstawy wycinki lub odcinki koła, zawisło także od wyznaczenia walca: ponieważ te kawałki tak się maią do walca całego, którego są częściami, iak ich podstawy do koła służącego za podstawę temu walcowi (h).

ROZDZIAŁ VIII.

O ostrokręgach.

120. *Opis.* Niech będzie koło nakréślone na iakiéy płaszczyznie, i niech od punktu nad tą płaszczyzną znayduiącego się, wyciągniona liniia lub nitka, obraca się około okręgu tego koła, powierzchnia krzywa obrotem tym linii lub nitki naznaczona, nazywa się *powierzchnią ostrokręgu.* Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około którego nitka się obraca, nazwiemy *ostrokręgiem* (conus), koło, na którém ostrokrąg stoi, nazwiemy *podstawą* iego; *wierzchołkiem* zaś punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołka do środka podstawy prowadzona, nazywa się *osią* ostrokręgu, a prostopadła spuszczona od wierzchołka do płaszczyzny podstawy, nazywa się *wysokością.* Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy ostrokręgu, ostrokrąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, ostrokrąg nazywa się *ukośnym.*

121. *Wniosek.* Poprowadziwszy liniią od wierzchołka ostrokręgu do któregokolwiek punktu okręgu podstawy iego, ta liniia zmiesza się wtedy z nitką rodzącą obrotem swoim powierzchnią ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu

---

(h) Lubo niektóre części powierzchni walcowey same przez się wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich stosunku do całey powierzchni walca. Toż mówić i o częściach walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey iest ciekawa, niż użyteczna, dla tego też dosyć iest o tém namienić.

podstawy; a zatém ta liniia cała będzie na powierzchni krzywey tego ostrokręgu.

Liniia poprowadzona od wierzchołka ostrokręgu powierzchni iego krzywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *bokiém* ostrokręgu.

122. *Twierdz.* 1. Gdy płasczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu iakiegokolwiek przecina go, przecięcie to iest zawsze tróykątem.

Dowodz. Liniie poprowadzone na tey płasczyznie od wierzchołka ostrokręgu, do dwoch punktów okręgu, w których go ta płasczyzna przecina, będą bokami ostrokręgu, i spólnemi powierzchni iego krzywey z tą płasczyzną przecięciami; a zatém przecięcie ostrokręgu przez tę płasczyznę, będzie tróykątem maiącym za podstawę spólne przecięcie tey płasczyzny z płasczyzną podstawy ostrokręgu, a za boki dwie liniie poprowadzone od wierzchołka do punktów przecięcia okręgu, od płasczyzny przechodzącey przez wierzchołek.

123. *Twierdz.* 2. Gdy ostrokrąg przecięty iest przez płasczyznę równoległą do iego podstawy, przecięcie to iest kołem.

Niech tróykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie ostrokręgu od płasczyzny, przechodzącey przez iego oś SC; niech liniia DFE wyraża spólne przecięcie tey płasczyzny i inney równoległey do podstawy. *Tab. V. Fig.* 2.

Tróykąty SCB, SFE są podobne; więc SC : CB = SF : FE. Aże płasczyzna przecinaiąca ostrokrąg równolegle do podstawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy piérwsze wyrazy tey proporcyi są stałe, iakiżkolwiek będzie promień podstawy przez którą, a razem i przez oś, przechodzi płasczyzna; więc też i czwarty wyraz iest stały. Poprowadziwszy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawsze będą, a zatém to przecięcie iest kołem, którego punkt F iest środkiem.

124. *Wnioski.* Te kół powierzchnie tak się do siebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie iest wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy ostrokrąg iest prostym, wtedy wszystkie płasczyzny równoległe do podstawy, są do osi prostopadłemi; a ztąd można uważać ostrokrąg prosty, iakoby zrobiony obrotem tróykąta prostokątnego, około iednego z ramion kąta iego prostego. To ramie będzie osią ostrokręgu, drugie naznaczy powierzchnią podstawy, przeciwprostokątna zaś naznaczy powierzchnią krzywą ostrokręgu.

125. *Twierdz. przybrane* 1. Gdy liniia poprowadzona na płaszczyznie podstawy ostrokręgu, dotyka się tey podstawy, płaszczyzna przez tę liniią i przez bok ostrokręgu do punktu dotknięcia, ciągniony przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za ostrokręgiem, to iest nic spólnego z ostrokręgiem nie będzie miała, oprócz boku, przez który przechodzi.

Tab. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcie ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; płaszczyzna przechodząca przez liniie: SA, AT, będzie miała za ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA.

Dowodz. Niech płaszczyzna iakakolwiek równoległa do podstawy, ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spólném przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przechodzącey; niech iescze *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez liniie SA, AT. Liniie *ca*, *at*, będą równoległe do linii CA, AT; a zatém kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. A że kąt CAT iest prostym, więc prostym także będzie i kąt *cat*; a zatém, oprócz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to iest niżeli odległość punktu na powierzchni ostrokręgu, i oraz na płaszczyznie *cat*, znayduiącego się, od punktu osi, do teyże płaszczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprócz punktu *a*, iest za okręgiém.

126. *Opis.* O tey płaszczyznie mówi się, iż się *dotyka ostrokręgu*, która iednę tylko liniią ma spólną z powierzchnią krzywą ostrokręgu.

127. *Wniosek.* Opisawszy wielokąt na podstawie ostrokręgu, a przez wierzchołek tego ostrokręgu, i przez boki wielokąta przeciągnąwszy płaszczyzny; ponieważ te boki wielokąta opisanego, służyć będą za podstawy ścian ostrosłupa, wierzchołek zaś iego, będzie ten sam, co i wierzchołek ostrokręgu, więc

ściany tego ostrosłupa dotykać się będą powierzchni ostrokręgu. Ostrosłup ten nazywa się opisanym na ostrokręgu: inny zaś, któryby spólny z ostrokręgiem miał wierzchołek, a za podstawę wielokąt wpisany w podstawę ostrokręgu, nazywałby się w ostrokrąg wpisanym.

128. *Twierdz. przybrane* 2. Maiąc dany ostrokrąg prosty, można weń wpisać i opisać na nim dwa ostrosłupy foremne, którychby stosunek powierzchni ściennych bardziey się zbliżał do stosunku równości, niż iakikolwiek naznaczony stosunek nierówności.

Powierzchnie ścienne tych dwoch ostrosłupów, równaią się tróykątom, maiącym za podstawy obwody podstaw ostrosłupów, a wysokości zaś równe wysokościom iedney ze ścian każdego ostrosłupa, a zatém tak się do siebie maią te ostrosłupy, iak te dwa tróykąty. A że podstawy tych dwoch tróykątów tak się maią do siebie, iak prostopadłe spusczone od środka, do dwoch którychkolwiek boków podstaw ostrosłupa, więc te powierzchnie ścienne, tak się też do siebie mieć będą, iak tróykąty równey ze ścianami ostrosłupów wysokości, a maiące za podstawy te prostopadłe; albo iak prostokąty, teyże ze dwiema temi tróykątami podstawy i wysokości. Ze zaś stosunek takich dwoch prostokątów, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierowności, to się tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie ostrokręgu prostego, od płasczyzny przechodzącey przez oś tego ostrokręgu i przez wysokości SA, SB dwoch ścian ostrosłupów foremnych, i maiących za podstawy wielokąty z równą liczbą boków, ieden z tych ostrosłupów niech będzie opisanym na ostrokręgu, a drugi weń wpisanym. *Tab. V. Fig. 4.*

Powierzchnia ścienna ostrosłupa opisanego proporcyonalna iest z prostokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna ostrosłupa wpisanego proporcyonalna iest prostokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoległą do SA. Powierzchnia ścienna ostrosłupa, maiącego za podstawę podstawę ostrosłupa wpisanego, a za wysokość linią CD, takby się miała do powierzchni ścienney ostrosłupa opisanego, iak prostokąt CB $\times$ BD do prostokąta CA $\times$ AS, to iest (dla podobieństwa tróykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podstaw dwoch ostrosłupów. Aże się dowiodło w rozdziale o kwadrowaniu koła w części I, że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, więc też i stosunek powierzchni ściennych, tych dwoch ostrosłupów, bliższy może być stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna ostrosłupa, którego SCA iest przecięciem, mniey się różni od ostrosłupa, którego przecięciem iest SCB, niżeli od ostrosłupa, którego przecięciem iest DCB; więc tém bardziey stosunek powierzchni ściennych dwoch ostrosłupów, iednego wpisanego, drugiego opisanego, mniey się róznić może od stosunku równości, niżeli od tegoż stosunku różni się iakikolwiek dany stosunek nierówności.

129. *Twierdz.* 3. Powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego, rowna się tróykątowi maiącemu za podstawę obwód podstawy ostrokręgu, a za wysokość bok ostrokręgu.

Dowodz. Powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego iest granicą między powierzchniami ściennemi ostrosłupów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. Aże stosunek takich dwoch powierzchni ostrosłupów, może być do stosunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stosunek nierówności; więc tém bardziey stosunek powierzchni ostrokręgu prostego, do powierzchni iednego z tych ostrosłupa, nap. opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli się od tegoż stosunku różni iakikolwiek dany stosunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna ostrosłupa opisanego, równa się tróykątowi maiącemu za wysokość bok ostrokręgu, a za podstawę odwód podstawy tego ostrosłupa; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a w szczególności w rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, równa się tróykątowi maiącemu za podstawę obwód koła, a za wysokość promień iego) powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego, iest równa tróykątowi, któryby miał za podstawę obwód podstawy ostrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego, równa się wycinkowi koła, któreby miało za promień bok ostrokręgu, a któregoł uk równyby

był w długości okręgowi podstawy ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także tróykątowi, maiącemu za wysokość bok ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy ostokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, którey szukamy.

Jakoż, gdyby bok ostrokręgu, był dwa, trzy, i t. d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok ostrokręgu, byłby dwa, trzy i t. d. razy większy od okręgu podstawy; a zatém łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Opis.* Niech będzie ostrokrąg przecięty płasczyzną równoległą do podstawy iego, bryła zakończona z jedney strony podstawą ostrokręgu, a z drugiey tém przecięciem, nazywa się *ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus).

133. *Twierdz.* 4. Powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego ściętego, równa się prostokątowi maiącemu za wysokość, bok tego ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą okręgowi koła takiego, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwoch podstaw ostrokręgu tegoż ściętego należących; to iest średnia różnicowo proporcyonalna między dwoma temi promieniami.

Niech tróykąt SCA, wyraża połowę przecięcia ostrokręgu prostego, od płasczyzny przechodzącey przez oś iego. Niech tenże ostrokrąg będzie iescze przecięty płasczyzną równoległą do podstawy, a spólném tey płasczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie *ca*. Przecięcie CAac, oznaczy przecięcie ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, prostopadłą do boku SA, i równą okręgowi koła, którego promieniem iest CA. Tróykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey ostrokręgu całego: poprowadźmy iescze liniią *ab*, równoległą do AB, i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniia *ab*, będzie też równa okręgowi koła, którego promieniem iest *ca*, a tróykąt Sab, równać się będzie powierzchni krzywey ostrokręgu Sac; będzie zatém czwo- *Tab.* V *Fig.* 5.

rokąt ABba, równy powierzchni krzywey ostrokręgu ściętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie E, i poprowadźmy EF równoległą do AB.

Ta liniia EF, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby się linii ED, to iest średniey różnicowo proporcyonalney między promieniami, CA, i *ca* dwoch podstaw ostrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia czworokąta ABba, równa się prostokątowi AHGa, maiącemu za wysokość bok Aa, ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią EF równą okręgowi średnie różnicowo proporcyonalnemu, między okręgami dwoch podstaw tegoż ostrokręgu.

134. *Uwaga* 1. Wyrażenie następuiące powierzchni krzywey ostrokręgu prostego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mowić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphaera).

Od środku E, linii Aa, wyciągniymy liniią EI prostopadłą do Aa, spotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, równoległą do SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IED, DEa, równa się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie równe; a zatém kąt IED, równa się kątowi AaL. Są tedy podobne dwa tróykąty prostokątne IED, AaL, a zatém boki ich będą proporcyonalne; więc, JE : ED = Aa : aL, (albo Cc) a ztąd i okręgi, maiące za promienie, liniie IE, ED, są też do siebie, iak liniie Aa, Cc; a zatém prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którego liniia IE, byłaby promieniem, równałby się prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miał za promień liniią ED. Aże ten drugi prostokąt równy iest powierzchni krzywey ostrokręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby równy teyże ostrokręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa ostrokręgu ściętego, równa prostokątowi maiącemu wysokość równą wysokości ostrokręgu ściętego, a podstawę równą okręgowi takiego koła, którego promieniem byłaby prostopadła, od środka boku ostrokręgu ściętego wyciągniona, aż do iego osi, która to prostopadła iest czwartą wielorazowo proporcyonalną do wysokości ostrokręgu ściętego, do iego boku, i do średnicy różnicowo proporcyonalney między dwoma promieniami: co wszystko łatwo przystosować można i do ostrokręgu całego.

135. *Uwaga* 2. Wyznaczenie więc dokładne powierzchni ostrokręgu, lub iey części, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze ostrokręgu ukośnego, iescze cięższey iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą niżeli walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatém z nierówności ścian ostrosłupów z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym ostrokręgu.

136. *Twierdz: przybrane.* Bryłowatości dwoch ostrosłupów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość nanaznaczona, to iest: stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

Dowodz. Różnica tych dwoch ostrosłupów, równa się ostrosłupowi teyże, co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. Aże stosunek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż dany iakikolwiek inny stosunek nierówności; więc też i stosunek tych dwoch ostrosłupów, może się zbliżyć do stosunku równości bardziey, niż inny dany iakikolwiek stosunek nierówności. Zamieniwszy różnicę dwoch ostrosłupów na trzeci ostrosłup teyże, co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie ostrokręgu dwa wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby różnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego ostrosłupa, a tém bardziey ieden z ostrosłupów wystawionych na tych wielokątach, równey z ostrokręgiem wysokości, mniey się różnić będzie od ostrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz.* 5. Bryłowatość iakiegokolwiek ostrokręgu, iest trzecią częścią bryłowatości walca równey z ostrokręgiem podstawy i wysokości.

Dowodz. Ostrosłupy i graniastosłupy *iednoimienne* (eiusdem nominis) wpisane, lub opisane, piérwsze na ostrokręgu a drugie na walcu, iednakiey z niemi wysokości, są trzecią częścią piérwsze względem drugich. Aże te ostrosłupy i graniastosłupy mogą się różnić pierwsze od ostrokręgu, drugie od walca, na którym są nap. opisane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania) ostrokrąg iest też trzecią częścią walca.

138. *Wniosek.* Cokolwiek mówiliśmy o porównywaniu walców, zawisłém od ich wysokości i podstaw, można to wszystko i do ostrokręgów przystosować, które trzecią ich są częścią, podobnie iakośmy to, co się mówiło o porównywaniu graniastosłupów, do ostrosłupów przystosowali. I tak:

1. Ostrokręgi, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

2. Ostrokręgi, których wysokości są równe, maią się do siebie iak ich podstawy.

3. Ostrokręgi, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Ostrokręgi, których podstawy maią się do siebie w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stosunek dwoch ostrokręgów w liniiach wyrażony, tak się znayduie: zamienia się stosunek podstawy iednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znayduiąc trzecią wielorazowo proporcyonalną do promienia podstawy pierwszego ostrokręgu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego ostrokręgu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciey proporcyonalney znalezioney do czwartey. Stosunek promienia podstawy pierwszego ostrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi pierwszego ostrokręgu do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości ostrokręgu, znayduiemy, mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podstawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wysokości, a potém tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości ostrokręgu, zawisło od wyznaczenia dokładnego iego podstawy, a zatém od wyprostowania okręgu koła.

Bryłowatość ostrokręgu, równa się bryłowatości iakiegokolwiek ostrosłupa, równey z ostrokręgiem wysokości i podstawy.

139. *Twierdz.* 6. Bryłowatość ostrokręgu prostego, równa się bryłowatości ostrokręgu innego, którego powierzchnia podstawy byłaby równa powierzchni całey ostrokręgu prostego; a wysokość, równa promieniowi koła wpisanego w tróykąt równoramienny, wyrażaiący przecięcie ostrokręgu prostego od płaszczyzny, przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie SC prostopadłą do AB, *Tab. V.* wysokością, czyli osią tego ostrokręgu. Po- *Fig. 6.* dzielmy ieden z kątów przy podstawie AB, nap. kąt A, na dwie równe części, przez liniią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, prostopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie prostopadła DE do SA. Liniie równe DC, DE, będą promieniami koła wpisanego w tróykąt przechodzący przez oś ostrokręgu.

Powierzchnia podstawy ostrokręgu, tak się ma do iego powierzchni krzywey, iak AC do AS; a zatém powierzchnia podstawy, tąk się mieć będzie do całey powierzchni ostrokręgu, iak AC do $AC \times AS$, albo iak AC^2 do $AC\ (AC \times AS)$; więc powierzchnia cała ostrokręgu równa się kołu, maiącemu za promień średnią wielorazowo proporcyonalną między promieniem AC podstawy ostrokręgu; i summą z tego promienia i z boku ostrokręgu. Ażo liniia AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części; więc $AS: AC = SD: CD$, i $AS \times AC: AC = SD \times CD: CD$; a nakoniec $(AS \times AC)\ AC: AC^2 = SC: CD$.

Więc ostrokrąg maiący za promień podstawy średnią wielorazowo proporcyonalną między AC i $(AC \times AS)$ a za wysokość liniią CD, miałby powierzchnią swoię, do powierzchni ostrokręgu podanego, w stosunku odwrotnym wysokości; a zatém te dwa ostrokręgi byłyby równe. Że zaś podstawa pierwszego ostrokręgu iest równa całey powierzchni ostrokręgu podanego; więc bryłowatość ostrokręgu prostego, równa się bryłowatości ostrokręgu innego, maiącego podstawę równą całey prostego ostrokręgu powierzchni, a wysokość równą promieniowi koła wpisanego w tróykąt, który iest przecięciem tego ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. *Opis*: Niechby półkole obracało się około swoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie tym swoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *powierzchnią kulistą* (superficies sphaerica); całe zaś półkole obiegnie mieysce tą powierzchnią krzywą zakończone, które się nazywa *kulą* (sphaera albo globus).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu półkoła, w iednakowey zawsze byłby od iednego środka odległości; a zatém i każdy punkt powierzchni kulistey, w iednakowèy też będzie odległości od tego środka.

Kula więc iest bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, którey wszystkie punkta iednakowo są odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem*.

Odległość środka od punktu któregokolwiek powierzchni kuli, nazywa się *promieniem*. Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obudwoch stronach kończąca się na iey powierzchni, nazywa się średnicą, i dwa razy iest większą od promienia. Ta zaś średnica, około którey obracaiąc się półkole zrobiło kulę, nazywa się *osią* kuli.

Gdybyśmy przecięli kulę płaszczyzną przechodzącą przez iey środek, wszystkie punkta przecięcia powierzchni kulistey, przez tę płaszczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, który na témże iest przecięciu.

Więc takie przecięcie iest kołem, maiącém za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaszczyzny, która przez iey środek przechodzi, nazywa się *wielkiém kołem kuli*.

Dwa takie koła przecinaią się, iedno z drugiém na dwie części równe.

Jakoż spólne ich przecięcie przechodzi przez środek kuli, a zatém i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc iest średnicą obudwoch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią się na dwie części równe.

Gdyby kula przecięta była płaszczyzną nieprzechodzącą przez iey środek, ale prostopadłą do osi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od spólnego przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyzną półkoła, nakreśloném, pod czas obrotu tegoż półkola tworzącego kulę.

Że zaś można sobie wystawić w myśli kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot któregokolwiek półkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powstała iednakowey zawsze iest wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaszczyzną, wszędzie przecięcie iey będzie kołem, ponieważ można wziąć za oś kuli tę iey średnicę, która do tey płaszczyzny iest prostopadłą.

Przecięcie kuli od płaszczyzny nieprzechodzącey przez iey środek, nazywa się *małém kołem.*

Gdy przez koniec promienia kuli przechodzi płaszczyzna prostopadła do tego promienia, wszystkie inne punkta tey płaszczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość którégokolwiek innego punktu tey płaszczyzny, od środka kuli, iest przeciwprostokątną tróykąta prostokątnego, który ma promień za iedno ramie kąta prostego, a za drugie odległość tego punktu do końca promienia. Wszystkie tedy inne punkta tey płaszczyzny są od środka odległe większą ilością, niżeli iest promień, a zatém są za kulą.

O płaszczyznie, niemaiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt spólny z kulą, mówi się, iż się kuli *dotyka.* Ta zaś płaszczyzna powinna być prostopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwszy na tey płaszczyznie iakąkolwiek liniią prostą, ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatém liniia ta będzie styczną z tém kołem, któreby było przecięciem kuli od płaszczyzny przechodzącey przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżey około walców i ostrokręgów prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey części różnych.

141. *Twierdz: przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez którego punkt średni poprowadziliśmy sty-

czną, aż do iey zeyścia się z obudwoch stron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części równe, i przez punkta podziału poprowadźmy znowu dwie styczne aż do ich zeyścia się z promieniami, przeciągnionemi przez końce tych połów.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem i pierwszą styczną, więcey niż dwa razy większa iest od części zawartey między okręgiem i iedną z drugich dwoch stycznych.

Tab. VI. Fig. 1. Niech będzie ADB łuk koła, przez którego punkt średni D, poprowadzona iest styczna spotykaiąca w punktach E i *e*; promienie CB, CA, przedłużone. Przez średnie punkta F i *f*, łuków BD, AD, poprowadźmy styczne GH, Gh, które spotykaią w punktach G, H, h, promienie przechodzące przez końce łuków BD, AD.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy iest większa od linii BH.

Niech liniia CF, spotyka w punkcie L, liniią Ee; tróykąty GDL i CFG mogą przystać do siebie, więc linije DG, albo BH i FL, są równe.

Poprowadźmy cięciwę BD, którą liniia CL, spotyka w punkcie I, i EM równoległą CL.

Tróykąty prostokątne: BDM, JDL, są do siebie podobne: a że BD dwa razy iest większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatém BM, więcey niż dwa razy większa iest od FL, albo BH. Że zaś w tróykącie EBM, kąt M, iest rozwarty, a przeto liniia BE, większa od linii BM; więc tém bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa iest od linii BH.

142. *Wniosek.* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów E, H, B, spuśćmy prostopadłe EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek liniy EB, HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. Aże EB więcey niż dwa razy iest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe 4, 8, 16, 32, i t. d., i przez punkta średnie podziałów, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez

końce każdego w szczególności podziału; gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuścimy prostopadłą EO, na promień CN; różnica między odległością spodku O tey prostopadłey, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB, spuszczoney: ta mówię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatém może się naostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144. *Twierdz.* 1. Niech będzie łuk koła, mnieyszy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca się około promienia prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca spuśćmy prostopadłą na pierwszy promień, to iest na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona tym około osi obrotem łuku, równa się prostokątowi, maiącemu za podstawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk iest częścią; a za wysokość liniią równą odległości środka, od spodku prostopadłey spuszczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy iest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie prostopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. *Tab.VI. Fig.* 1

Poprowadźmy BQ, prostopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca się około promienia CN, iak około osi swoiey. Powierzchnia krzywa, obrotem łuku AB naznaczona, równa się prostokątowi, któryby miał za wysokość liniią CQ, a za podstawę liniią równą okręgowi, którego CA iest promieniem.

Dowodz. Niech styczna Ee, przechodzi przez średni punkt D, łuku AB, i niech spotyka w punktach E i *e*, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daley łuk AB, na części równe: 4, 8, 16, 32 i t. d., a od punktu, w którym ostatnia spotyka promień CB, przy każdym następuiącym podziale, spuszczaymy prostopadłą na promień CN. Różnica między odległością środka, od spodka tey prostopadłey, a liniią CQ, zmnieyszać się będzie więcey niż połową, za każdym następnym podziałem; więc różnica ta, może się naostatek stać mnieyszą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB około linii CN, każda styczna kreśli powierzchnią krzywą ostrokręgu ściętego, równaiącą się prostokątowi maiącemu za podstawę liniią równą okręgowi, którego promieniem iest CN, a za wysokość odległość dwoch prostopadłych spusczonych na oś od końców tey styczney; a zatém summa powierzchni krzywych, zrobionych od wszystkich tych stycznych, równa się prostokątowi, maiącemu tę samę podstawę, a wysokość równą summie wszystkich tych wysokości, to iest równą odległości środka od spodku prostopadłey, spusczoney na oś z punktu tego, gdzie ostatnia styczna spotyka promień CB. Może tedy różnica summy powierzchni krzywych ostrokręgu zrobionych obrotem wszystkich stycznych, mnieysza być od prostokąta z taką iak się wyżey powiedziało podstawą, a z wysokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wszystkich powierzchni krzywych, większa iest zawsze od powierzchni utworzoney obrotem łuku AB; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrotem łuku AB, równa się prostokątowi, maiącemu za podstawę okrąg, którego promieniem iest CA, a za wysokość odległość CQ, środka C, od spodku Q, prostopadłey spusczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mówiąc w szczególności; powierzchnia półkuli (Hemispherium) utworzoney obrotem czwartey części koła ABN, rowna się prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, którego CA iest promieniem, a za wysokość, promień CN.

A zatém powierzchnia krzywa, utworzona obrotem łuku BN, równa się prostokątowi maiącemu wysokość NQ, a podstawę równą okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, równa się prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę okrąg wielkiego iey koła. A że powierzchnia wielkiego koła równa się prostokątowi maiącemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła za podstawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy iest większa od powierzchni wielkiego iey koła, którego promień równa się średnicy kuli.

145. Jdzie zatém, że powierzchnia kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak powierzchnia koła iakiegokolwiek, cztéry razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła. A że powierzchnia koła, iest do powierzchni kwadratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy większey (iako się w rozdziale XIII części I dowiodło); więc powierzchnia kuli tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztéry razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to iest iak okrąg koła do swoiey średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawisło od skwadrowania koła, i od wyprostowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak się ma do powierzchni nakreśloney obrotem łuku NB, iak się ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tey średnicy, do prostokąta z linii NQ i ze średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy do kwadratu linii NB: a zatém, iak koło, któreby miało za promień tę średnicę do koła, któreby miało za promień liniią NB; a że powierzchnia kuli równa się powierzchni pierwszego koła, więc powierzchnia nakreślona obrotem łuku NB, równa się powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA, półkole tworzące obrotem swoim kulę; niech będzie NEDA prostokąt, którego podstawą iest średnica tego półkola, a wysokością promień iego. Podczas obrotu półkola, ten prostokąt utworzy walec prosty, którego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, równać się będzie prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę DE, albo AN, a za podstawę okrąg podstawy tego walca, a zatém ta powierzchnia krzywa, równa się powierzchni kuli. *Tab. VI. Fig. 2.*

147. Podobnie się okaże, iż poprowadziwszy liniią QBP, prostopadłą do osi, powierzchnia krzywa należąca do walca, a zrobiona przez obrot linii EP, równa iest powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem prostokąta ADEN, miałby wysokość równą średnicy podstawy swoiey; do-

tykałby się w punktach A i N kuli, utworzoney obrotem półkoła AFBN; dotykałby się iey także w okręgu, którego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim walcu mówi się, iż iest na kuli opisany. Nazywa się on także i walcem Archimedesa, od nazwiska tego Matematyka, który pierwszy znalazł równość powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego walca, iako też i stosunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney ze dwoch podstaw tego walca, równa się prostokątowi z okręgu tey podstawy, i z połowy iey promienia; a zatém powierzchnia obudwoch razem tych podstaw, równa się prostokątowi z okręgu iedney podstawy i z jey promienia. A że powierzchnia krzywa walca, równa iest prostokątowi z okręgu podstawy iego, i ze średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała walca, równa iest prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatém powierzchnia krzywa tego walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey walca na niey opisanego.

150. *Uwaga*. To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł. Jakaż iest wielkość powierzchni ziemi w milach kwadratowych niemieckich, rachuiąc na stopień mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie ziemi, iedno prostopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, nap. co dziesięć, albo co pięć stopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaszczyzny równoległe do koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwiema nayblizszemi od siebie podstawami.

W szczególności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe iest od *równika* (aequator) na $23^\circ\frac{1}{2}$, a drugie od *biegunu* (polus) także na $23^\circ\frac{1}{2}$.

Tab. VI. Fig. 2. Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBT wyraża czwartą część drugiego koła do niego prostopadłego; niech BQ, bq, będą przecięciami tego koła prostopadłego i dwoch płaszczyzn równoległych do koła pierwszego.

Powierzchnia krzywa pół kuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami CF i BQ, iak się ma promień kuli, do linii CQ, która iest wstawą łuku EF. Podobnie i powierzchnia krzywa półkuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami CF i bq; iak wstawa cała, czyli promień do wstawy łuku bF, to iest do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni półkuli, a zatém i ich różnicę, to iest: część powierzchni zawartey między płaszczyznami BQ i *bq*.

151. *Twierdz.* 2. Bryłowatość kuli równa się $\frac{2}{3}$ bryłowatości walca na tey kuli opisanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca półkulę obrotem swoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opisany na tey czwartey części koła. Ten kwadrat obracaiąc się około CB, utworzy walec opisany na półkuli, który będzie połową walca opisanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż półkula, utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, równa się $\frac{2}{3}$ walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. *Tab. VI. Fig.* 3.

Poprowadźmy przekątną CD; tróykąt BCD utworzy ostrokrąg, którego podstawa wykréślona będzie promieniem BD, a za wysokość tego ostrokręgu będzie BC; to iest będzie ten ostrokrąg równey z walcem podstawy i wysokości.

Od dwoch którychkolwiek punktów nap. P i *p* osi CB wyciągniymy prostopadłe do niey liniie: PQ, pq; te przetną okrąg w M i *m*, a liniią CD w L i *l*; nakréślmy nadto liniie: MN, *mn*, LO, *lo*, równoległe do osi. Kwadrat promienia CM, równa się summie kwadratów z PM i CP: a że liniia PQ równa iest promieniowi, (tak iako BD, CA i CB są równe) i CP równa PL; więc kwadrat z Pq równa się summie kwadratów z PM i z PL.

Że zaś walce utworzone obrotem prostokątów Pq, PN, PO, maiących iednakie wysokości, są do siebie iak ich podstawy, albo iak kwadraty promieni tychże podstaw; więc piérwszy z tych walców będzie równy summie dwoch innych. Podobnym sposobem okazać można, że walec Pq równa się summie walców utworzonych obrotem prostokątów P*m* i P*l*.

Takowe dowodzenie ma mieysce chociaż nie od punktów P i p, ale od którychkolwiek innych będą wywiedzione prostopadłe do osi CB; a zatém podzieliwszy oś na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwszy prostopadłe przecinaiące tak okrąg, iako i liniią CD; summa wszystkich walców składaiących walec ADB, równać się będzie summie wszystkich walców wpisanych w półkulę, wraz z summą wszystkich walców opisanych na ostrokręgu albo summie wszystkich walców opisanych na półkuli, wraz z summą wszystkich walców w ostrokrąg wpisanych. A że summa wszystkich walców wpisanych lub opisanych na półkuli, może się mnieyszą ilością różnić od teyże półkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a wtedy i summa wszystkich walców wpisanych lub opisanych ostrokręgowi, różnić się też od tego ostrokręgu będzie mnieyszą ilością, niż iest ta ilość dana.

Więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania) walec utworzony obrotem kwadratu CABD, równa się summie z półkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z ostrokręgu utworzonego obrotem tróykąta BCD.

A że ostrokrąg utworzony obrotem tróykąta BC, iest $\frac{1}{3}$ walca; więc półkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, iest $\frac{2}{3}$ walca.

A zatém kula, któraby utworzyła się obrotem półkoła, byłaby też $\frac{2}{3}$ walca opisanego na tey kuli, a utworzonego obrotem prostokąta opisanego na półkolu tworzącém kulę.

152. *Wniosek* 1. Stosunek bryłowatości kuli do bryłowatości walca opisanego, ten sam iest, co i stosunek powierzchni kuli, do powierzchni całey walca opisanego (149).

153. *Wniosek* 2. Bryłowatość kuli, równa się bryłowatości ostrokręgu, któryby miał za podstawę koło równe powierzchni kuli, a za wysokość promień teyże kuli. Jakoż ten ostrokrąg maiąc podstawę cztéry razy większą od podstawy walca na kuli opisanego, byłby cztéry razy większy od ostrokręgu innego równey z nim wysokości, a maiącego podstawę równą z walcem. A że ten drugi ostrokrąg, gdyby miał połowę tylko wysokości walca, byłby połową ostrokręgu maiącego równą z walcem wysokość i podstawę, a zatém byłby połową tego ostrokręgu, który iest $\frac{1}{3}$ walca; więc ostrokrąg maiący równą z walcem podstawę,

a wysokość równą promieniowi kuli, iest $\frac{1}{6}$ tego walca; a zatém ostrokrąg maiący za wysokość promień kuli, a podstawę cztéry razy większą od podstawy walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ walca. Że zaś i kula iest $\frac{2}{3}$ tegoż walca, więc kula równa się temu ostrokręgowi.

Można to samo iescze i w ten sposób okazać:

Niech będzie iakikolwiek *wielościan* (Polyedrum), którego wszystkie ściany dotykaią się kuli: uważaiąc każdą z tych ścian, iak podstawę ostrogranu maiącego swóy wierzchołek w środku wielościanu; bryłowatość tego wielościanu, równać się będzie bryłowatości iednego takiego ostrosłupa, któryby miał za wysokość promień kuli, a za podstawę summę podstaw ostrosłupów, na które podzielony był ten wielościan, to iest powierzchnią całą tego wielościanu.

To podanie zawsze iest prawdziwe, iakażkolwiek będzie liczba ścian tego wielościanu; więc (podług tego, co się mówiło o sposobie wyczerpania) możnaby łatwo dowieść, że też i do kuli w szczególności przystosowane to podanie, iest prawdziwé, a zatém, że kula równa się ostrokręgowi, któryby miał za wysokość iey promień, a za podstawę całą iey powierzchnią.

1[illegible] *Wniosek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrotem wy[illegible]a kołowego BCM, równy iest ostrokręgowi maiącemu za wysokość promień tey kuli, a za podstawę koło, równe powierzchni kulistey, utworzoney obrotem łuku BM, to iest koło, którego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatém bryłowatość tego wycinka, tak się ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wysokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wniosek* 4. Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, iest $\frac{2}{3}$ walca utworzonego obrotem prostokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak się ma do powierzchni kuli, iak BP do średnicy kuli; albo iak walec utworzony obrotem prostokąta BPQD do walca opisanego na kuli. Aże kula iest $\frac{2}{3}$ walca na niey opisanego; więc i wycinek kuli, utworzony obrotem wycinka koła BCM, iest też $\frac{2}{3}$ walca utworzonego obrotem prostokąta BPQD.

156. *Wniosek* 5. Podobnie i część kuli utworzona obrotem wycinka ACM, iest $\frac{2}{3}$ walca utworzonego o-

brotem prostokąta CAqP. Aże część kuli, którą to część nazwać można *klocem kulistym* (Truncus sphaericus) utworzony obrotem części kołowey AGPM, iest summą z wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka kołowego ACM, i z ostrokręgu utworzonego obrotem tróykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kulistego, równa się summie z $\frac{2}{3}$ walca teyże z nim wysokości, któryby miał za podstawę koło wielkie kuli i z $\frac{1}{3}$ walca iednakiey także wysokości, a którego podstawa byłaby równa drugiemu kołu, kloc ten kończącemu; a zatém bryłowatość tego kloca, tak się ma do bryłowatości walca utworzonego obrotem prostokąta CAqP, iak $\frac{2}{3}\ CA^2 \times \frac{1}{3} MP^2$ do CA^2.

157. *Wniosek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzoney obrotem odcinka kołowego BMP, uważaymy sobie ten odcinek kulisty, iak różnicę między półkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowey ABC, a klocem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak różnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka BDM, od ostrokręgu utworzonego obrotem tróykąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę walca utworzonego obrotem prostokąta BPQD, od ostrokręgu ściętego, utworzonego obrotem czworokąta BDLP.

ROZDZIAŁ X.

O bryłach podobnych.

158. Dwie bryły samemi tylko płaszczystemi powierzchniami zakończone, i których wszystkie kąty bryłowe, odpowiadaiące sobie, mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadaiące są podobne; te, mówię, dwie bryły nie różnią się, chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiey. Tak nap. dwa sześciany, z których ieden ma bok długi na pół stopy, a drugi na cal ieden, rożnią się samą tylko wielkością. Takie bryły nazywaią się podobnemi.

Przykłady. Dwa równoległościany prostokątne są podobne, gdy ich podstawy i ściany są podobne iedne względem drugich.

Dwa graniastosłupy proste, są podobne, gdy podobne są ich podstawy, i gdy wysokość ich proporcyonalna iednemu z boków tychże podstaw.

Dwa ostrosłupy, maiące kąt bryłowy spólny w wierzchołku, podobne będą, gdy podstawy ich są równoległe.

159. *Uwaga*. Gdy dwie figury prostokréślne, są podobne, wziąwszy punkt iakikolwiek w jedney z tych figur, i poprowadziwszy od tego punktu linije do wszystkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie piérwszemu położony, od którego ciągnąc liniie do każdego tey figury wierzchołka, podzielimy ią na tróykąty podobne względem tróykątów, na które podzielona była piérwsza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz*. 1. Wziąwszy w bryle, zakończoney powierzchniami płaskiemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu ostrogranów, ile ta bryła ma ścian, biorąc też ściany za podstawy; można znaleść i w drugiey bryle podobney, punkt podobnie pierwszemu położony, który wziąwszy także za wierzchołek tyluż, co i w pierwszey bryle ostrosłupów, wszystkie te ostrosłupy będą podobne względem ostrosłupów pierwszey bryły.

Przykład. Weźmy środek sześcianu za wierzchołek sześciu ostrosłupów, maiących za podstawy ściany tego sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek sześcianie, weźmiemy także środek za wierzchołek sześciu ostrosłupów maiących za podstawy ściany tego drugiego sześcianu; te drugie ostrosłupy będą podobne względem piérwszych.

Toż mówić i o innych bryłach foremnych.

Na tém podaniu zasadza się cała nauka o bryłach podobnych; należy więc nad wyłusczeniem iey nieco zabawić się.

Wybrawszy iakikolwiek punkt w bryle za wierzchołek ostrosłupów maiących ściany tey bryły za podstawy, i na te ostrosłupy bryłę podzieliwszy, spuśćmy od tego punktu prostopadłą do iedney ze ścian tey bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey bryle, weźmy punkt podobnie tey ścianie położony, iaki spodek prostopadłey spusczoney na ścianę pierwszey bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey bryły położonego, wyprowadźmy prostopadłą do tey ściany, tak wysoką, aby stosunek iey do pierwszey prostopadłey równał się stosunkowi dwoch krawędzi, odpowiadaiących sobie w obudwoch bryłach. Wierzch

O

tey drugiey prostopadłey weźmy za wierzchołek wszystkich ostrosłupów, na które tę drugą bryłę dzielić mamy. Ostrosłupy tey drugiey bryły, będą podobne względem ostrosłupów, na które podzielona pierwsza bryła.

Dowodz. Odległości dwoch punktów służących za wierzchołki ostrosłupów od wierzchołków odpowiadaiących sobie, w ścianach, do których prostopadłe są ciągnione; te, mówię, odległości, są przeciwprostokątnemi tróykątów prostokątnych podobnych, maiących za boki te prostopadłe, i odległości ich spodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wszystkie ściany tych dwoch ostrosłupów, odpowiadaiące sobie boki, maią proporcyonalne, to iest maią ie w stosunku dwoch krawędzi, odpowiadaiących sobie we dwoch bryłach; a zatém wszystkie te ściany są podobne, i wszystkie ich kąty są równe, iedne względem drugich; a przeto i kąty bryłowe, które się z nich składaią, mogą przystać do siebie; są więc te dwa ostrosłupy podobne. Pochyłości też ścian ostrosłupów do płaszczyzn podstaw są równe iedne względem drugich; aże także równe są pochyłości tych podstaw do płaszczyzn ścian tych, odpowiadaiących sobie w bryłach, które ściany spólną krawędź maią z podstawami tych ostrosłupów; więc i ściany odpowiadaiące sobie w tych dwoch ostrosłupach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących sobie we dwoch bryłach, a które maią spólną krawędź z piérwszemi dwiema ścianami, to iest z podstawami dwoch tych ostrosłupów.

Na ścianach dwoch odpowiadaiących sobie w tych dwoch piérwszych ostrosłupach, spuśćmy od ich wierzchołków prostopadłe do podstaw tychże dwoch ścian; a od spodków tych prostopadłych, poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących sobie w dwoch bryłach, inne dwie prostopadłe do tychże dwoch podstaw, ścian ostrosłupów. Oprócz tego, na płaszczyznie przechodzącey przez dwie w obudwoch bryłach ciągnione prostopadłe, spuśćmy do drugich dwoch prostopadłych, na płaszczyznach ścian odpowiadaiących sobie w bryłach, od tychże co i piérwsze wierzchołków, trzecie dwie prostopadłe; te ostatnie prostopadłe, będą prostopadłemi do płaszczyzn dwoch tych ścian odpowiadaiących sobie, na których ciągnione były dwie drugie prostopadłe: tróykąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w jedney, iak i w drugiey bryle, będą równokątne a zatém i podobne. Aże pierwsze dwie prostopadłe ciągnione na płaszczyznach ścian dwoch piérwszych ostrosłupów, maią się do siebie, iak krawędzie odpowiadaiące sobie w dwoch bryłach; więc też i odległości wierzchołków, tych dwoch ostrosłupów od drugich dwoch ścian także sobie odpowiadaiących, w tych bryłach, będą w tymże samym stosunku, i odległości spodków ich, od dwoch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwie ściany, odpowiadaiące sobie w pierwszych dwoch ostrosłupach, były podobnie położone na dwoch bryl krawędziach odpowiadaiących sobie, a zatém odległości tych spodków od końców odpowiadaiących sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku; a zatém odległości spodków liniy prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich ścian bryl, od końców tychże dwoch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwoch ścianach spodki prostopadłych podobnie są położone. Że zaś i wielkość tych prostopadłych są proporcyonalne krawędziom tych dwoch bryl; więc wierzchołki pierwszych dwoch ostrosłupów, są też podobnie położone względem dwoch ścian drugich, odpowiadaiących sobie w bryłach; a zatém i drugie dwa ostrosłupy, maiące spólny wierzchołek, a te dwie ściany bryl za podstawy, będą do siebie podobne.

Toż mówić i o innych ostrosłupach odpowiadaiących sobie, z których się te dwie bryły składaią (i).

161. *Twierdz.* 2. Powierzchnie bryl podobnych, zakończonych samemi tylko płaskiemi powierzchniami, maią się do siebie, iak kwadraty boków ich od-

(i) To twierdzenie, iest bardziey długie niż trudne, i łatwo poiąć ie można, maiąc figurę przed oczami z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni być uczniowie, aby w myśli samey umieli sobie wystawić figurę pomagaiącą do zrozumienia twierdzenia podanego, a zdatnieyszą do obiaśnienia iego, niżby była figura odrysowana w perspektywie, i przed oczy im stawiona.

powiadaiących sobie, czyli, są w stosunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz. Wszystkie ściany dwoch brył podobnych, po dwie brane są sobie podobne, i tak brane, w jednakowym do siebie są stosunku, to iest w stosunku dwumnożnym dwoch krawędzi odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich ścian kończących iednę bryłę, będzie do summy wszystkich ścian kończących drugą bryłę, w tymże samym stosunku.

162. *Twierdz.* 3. Bryłowatości dwoch brył podobnych, są do siebie w stosunku sześciennym dwoch ich krawędzi odpowiadaiących sobie, czyli, są w stosunku tróymnożnym tychże dwoch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że stosunek iednego sześcianu do drugiego, ten sam iest, co i stosunek boku pierwszego sześcianu, do czwartey linii ciągło wielorazowo proporcyonalney; która się znayduie, szukaiąc naprzód trzeciey ciągło wielorazowo proporcyonalney, do boku sześcianu pierwszego, i do boku sześcianu drugiego; a potém do tychże dwoch boków, i do trzeciey proporcyonalney znalezióney, szukaiąc czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego sześcianu był dwa razy nap. większy od boku sześcianu pierwszego, ta czwarta ciągło wielorazowo proporcyonalna, byłaby ośm razy większa od boku sześcianu pierwszego, a zatém i sześcian drugi byłby ośm razy większy od sześcianu pierwszego.

2. Niech będą dwa równoległościany prostokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych równoległościanów, iest nap. dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego równoległościanu; wszystkie też inne krawędzie pierwszego równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podstawy pierwszego równoległościanu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podstawy drugiego. Aże też i wysokość pierwszego, dwa razy iest większa od wysokości drugiego; więc bryłowatość pierwszego, iest ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przystosować można do wszystkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogólności zaś mówiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego równoległościanu prostokątnego: a zaś, a,b,c, krawędzie drugiego równoległościanu pierwszemu podobnego; będą te trzy stosunki równe, A: a = C: b = C c. Liniiom A i a znaydźmy dwie liniie L i M, ciągło wielorazowo proporcyonalne, tak, aby było A: a = a: L = L: M. Będzie pierwszy równoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc liniie A i a, B i b, iak boki podstaw tych dwoch rownoległościanów, zamieńmy prostokąt z linii a i b, na inny, któryby miał za bok ieden liniią B, a za bok drugi tę liniią, która wypadnie z proporcyi B: b = a: x. Ze zaś stosunek linii B do b, wzięty iest za równy stosunkowi linii A do a, więc też będzie A: a = a: x; azatém ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy, będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i a. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną L. Będzie podstawa drugiego równoległościanu, równą prostokątowi z B przez L, i ten drugi równoległościan, będzie równy równoległościanowi, któryby miał trzy liniie B, c, L, za krawędzie; a zatém stosunek iego do pierwszego równoległościanu, będzie ten sam, co i stosunek prostokątą z liniy c i L, do prostokąta z linii A i C.

Zamieńmy prostokąt z linii c i L, na inny, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi C: c = L: x. Ze zaś stosunek linii C do c, wzięty iest za równy stosunkowi A do a, a stosunek A do a, zrobiliśmy równy stosunkowi a do L; więc też będzie a: L = L: = x; a zatém ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy, będzie w samey rzeczy trzecią wielorazowo proporcyonalną do a i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną M: prostokąty B X M i C X L będą równe. Aże się dowiodło, iż pierwszy równoległościan iest do drugiego w stosunku prostokąta A X C do prostokąta c X L; więc też ten pierwszy równoległościan będzie do drugiego w stosunku prostokąta A X C do prostokąta C X M, to iest w stosunku A do M.

Ze zaś A: a = a: L = L: M; więc stosunek pierwszego równoległościanu do drugiego, równa się stosunkowi linii pierwszey do czwartey ciągło wielorasowo proporcyonalney; która to pierwsza liniia służąca za pierwszy wyraz proporcyi, powinna być krawędzią iednego z tych równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem ma być krawędź drugiego równoległościanu, pierwszemu odpowiadaiący; tak iak iest nap. krawędź A i *a*.

Ale że też i dwa sześciany, maiące krawędzie A i *a*, w tymże samym byłyby stosunku; więc dwa równoległościany podobne, maią się do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi.

163 *Twierdz: przybrane.* Wysokości graniastosłupów podobnych, lub ostrosłupów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące sobie.

Dowodz: Dwoch ścian odpowiadaiących sobie w dwoch graniastosłupach podobnych, pochyłości do podstaw są równe: tychże ścian wysokości, tak się maią do siebie, iak boki, służące im za podstawy. Wysokości tych graniastosłupów, równe są prostopadłym spuszczonym na ich podstawy od punktów którychkolwiek na podstawach przeciwnych, nap. od punktów na bokach odpowiadaiących sobie w tychże podstawach; a zatém te wysokości graniastosłupów, będą służyły za iedno ramie kąta prostego w dwoch troykątach podobnych, które za przeciwprostokątne, maią wysokości dwoch ścian odpowiadaiących sobie. Będą zatém te wysokości dwoch graniastosłupów, tak się mieć do siebie, iak wysokości dwoch ich ścian odpowiadaiących sobie, to iest: iak krawędzie dwoch tychże graniastosłupów, odpowiadaiące sobie. To samo rozumowanie przystosować można i do ostrosłupów.

3. Niech będą dwa iakiekolwiek graniastosłupy podobne, i te także są do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi odpowiadaiących sobie.

Rozumowanie arytmetyczne, któreby mogło służyć za wstęp do ogólnego dowodzenia, to samo iest, co i poprzedzaiące.

Wystawuiąc sobie podstawy tych dwoch graniastosłupów, zamienione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni: ponieważ powierzchnie tych dwoch podstaw, maią się do siebie, iak kwadraty boków ich, odpowiadaiących sobie; więc też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawóm, mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie w tychże podstawach; a zatém i stosunek boków tych dwoch kwadratów, równy będzie stosunkowi boków odpowiadaiących sobie w podstawach dwoch graniastosłupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwoch graniastosłupów; więc równoległościany maiące za podstawy kwadraty, równe podstawóm graniastosłupów, i wysokości równe wysokościóm graniastosłupów, byłyby do siebie podobne; a zatém te dwa równoległościany, takby się do siebie miały, iak sześciany ich krawędzi, albo iak sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w graniastosłupach. Że zaś te równoległościany byłyby równe względem graniastosłupów; więc też i dwa graniastosłupy podobne, maią się do siebie, iak sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek ostrosłupy podobne, stosunek ich równa się stosunkowi sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

Dwa graniastosłupy nap. proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości tych ostrosłupów; te mówię graniastosłupy miałyby wysokości proporcyonalne bokom podstaw swoich; byłyby więc podobne; a zatém takby się do siebie miały, iak sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwoch ostrosłupów; więc i te ostrosłupy są do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskiemi, maią się do siebie iak sześciany ich krawędzi.

Dwie bryły podobne, można rozłożyć na takie ostrosłupy, z których każdy w szczególności należący do iedney bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey bryły. Te ostrosłupy iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich ostrosłupów, z których się składa iedna bryła, będzie do summy wszystkich ostrosłupów, z których się składa druga bryła, w tymże samym stosunku, to iest w stosunku sześciennym ich krawędzi odpowiadaiących sobie.

164. *Opis.* Walce proste podobne do siebie są te, których stosunek wysokości równa się stosunko-

wi promieni ich podstaw; przecięcia zatém tych walców przez osi przechodzące, są podobne, a ztąd podobne są i prostokąty tworzące obrotem swoim te walce.

Co zaś do walców pochyłych, a do siebie podobnych, oprócz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw; przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącey przez ich osi prostopadłe do podstawy powinny być do siebie podobne, to iest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw.

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie walców prostych podobnych, maią się do siebie, iak kwadraty ich *wymiarów* (Dimensio) odpowiadaiących sobie, to iest: iak kwadraty promieni ich podstaw, albo iak kwadraty ich wysokości.

Powierzchnia każdego z tych walców równa się prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z summy wysokości iego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości walców. Aże promienie podstaw, są do siebie (dla podobieństwa walców) iak ich wysokości; więc i summa z tych promieni, iest do summy z tych wysokości, w tym stosunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stosunku maią się do siebie powierzchnie te walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących sobie, nap. iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie walców w tymże samym stosunku, to iest: iak kwadraty promieni ich podstaw.

Tož mówić i o powierzchniach krzywych w walcach, to iest o takich, w których się nie zamykaią podstawy.

166. *Twierdz.* 5. Bryłowatości walców podobnych, tak się maią do siebie, iak sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie, to iest: są do siebie w stosunku tróymnożnym tychże wymiarów, nap. w stosunku tróymnożnym promieni ich podstaw.

Dowodz. Opiszmy na podstawach tych walców, iakiekolwiek wielokąty foremne, podobne: niech te wielokąty będą podstawami graniastosłupów, teyże z walcami wysokości; te graniastosłupy będą podobne, a zatém będą się miały do siebie w stosunku tróymnożnym, nap. promieni ich podstaw.

Walce tak się do siebie maią, iak graniastosłupy na nich opisane. Jakoż każdy walec, iest do graniastosłupa na nim opisanego, w stosunku podstawy tego walca do podstawy graniastosłupa. Aże podobne są dwa wielokąty na podstawach walców opisane; więc tenże sam stosunek będzie każdego walca do graniastosłupa na nim opisanego; a zatém tak się mieć będzie ieden walec, do graniastosłupa na nim opisanego, iak i walec drugi do graniastosłupa na nim także opisanego, tak więc piérwszy walec będzie się miał do drugiego, iak i piérwszy graniastosłup do drugiego.

Aże stosunek tych graniastosłupów, równa się stosunkowi tróymnożnemu promieni podstaw walców, na których są te graniastosłupy opisane; więc i stosunek tych walców, równać się także będzie stosunkowi tróymnożnemu promieni tychże podstaw.

167. Można obiaśnić przykładami liczebnemi to twierdzenie: ma zaś być naprzód przystosowane do samych walców prostych, zkąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych walcach, ten sam stosunek ma mieysce; ponieważ walce ukośne, równey podstawy i wysokości z walcami prostemi, byłyby im równe, a zatém byłyby też do siebie w stosunku tróymnożnym promieni podstaw swoich.

168. *Opis.* Ostrokręgi proste nazywaią się *podobnemi*, gdy tak się maią do siebie ich wysokości, iak i promienie ich podstaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych ostrokręgów są podobne, a zatém podobne są tróykąty, tworzące obrotem swoim te ostrokręgi.

Co zaś do ostrokręgów ukośnych: tych nie tylko wysokości tak się mieć do siebie powinny, iak promienie ich podstaw, ale nadto i osi ich w tymże samym do siebie są stosunku.

169. *Twierdz.* 6. Powierzchnie całe ostrokręgów prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże ostrokręgów.

Dowodzenie tego może być podobne do dowodzenia twierdzenia 4, względem stosunku powierzchni walców podobnych.

Może też być i w sposób następuiący, który także służyćby mógł równie i do walców.

P

W jednym którymkolwiek ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok ostrokręgu, do promienia tey podstawy. Aże i w drugim ostrokręgu podobnym piérwszemu, tenże sam stosunek ma mieysce; więc powierzchnia krzywa iednego ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego ostrokręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego ostrokręgu, do powierzchni iego podstawy; a zatém cała powierzchnia pierwszego ostrokręgu, tak się ma do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podstawy pierwszego ostrokręgu, do powierzchni drugiego, albo iak kwadrat promienia pierwszey podstawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe ostrokręgów podobnych, są w stosunku dwumnożnym promieni podstaw tych ostrokręgów, lub ich boków odpowiadaiących sobie.

170. *Twierdz.* 7. Bryłowatości ostrokręgów podobnych, maią się do siebie, iak sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie, toiest: iak sześciany promieni ich podstaw, albo iak sześciany ich boków i t. d.

Twierdzenie to podobnie się dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości walców; kładąc zamiast graniastosłupów na walcach opisanych, ostrosłupy opisane na ostrokręgach.

171. *Uwaga.* Wszystko to, cokolwiek się powiedziało o stosunku bryłowatości równoległościanów, graniastosłupów, ostrosłupów i ostrokręgów podobnych, na to wypada, że:

W ogólności mówiąc, te bryły są w stosunku złożonym ze stosunku ich podstaw, i ze stosunku ich wysokości.

Ze zaś, gdy te bryły są podobne, stosunek ich podstaw iest dwumnożnym stosunku ich wysokości, więc stosunek złożony ze stosunku ich podstaw, i ze stosunku ich wysokości, składa się ze stosunku dwumnożnego, i ze stosunku poiedynczego ich wysokości; będzie tedy taki stosunek troymnożnym stosunku ich wysokości. Aże stosunek ich wysokości równa się stosunkowi ich boków, którychkolwiek odpowiadających sobie, więc stosunek tych brył, gdy do siebie są podobne, iest też stosunkiem tróymnożnym boków ich, którychkolwiek odpowiadaiących sobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, to iest: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stosunku tróymnożnym ich promieni, to iest: iak sześciany tychże promieni.

Dowodz. Powierzchnie kul, są cztéry razy większe, niżli powierzchnie ich kół wielkich; a zatém, tak się do siebie maią, iak powierzchnie tychże kół, to iest: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, są $\frac{2}{3}$ względem walców na nich opisanych; więc tak się maią do siebie, iak bryłowatości tych walców, to iest: iak sześciany ich promieni.

173. *Uwaga.* Widzieliśmy w sczególności, iż powierzchnia kuli, iest do powierzchni kwadratu iey średnicy w stosunku okręgu koła do iego srednicy, i ten stosunek iest zawsze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, iest do bryłowatości sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła, do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także stosunek nigdy się nie odmienia.

Kule więc zachowuią własności brył podobnych, tak w stosunku ich powierzchni, iako i w stosunku ich bryłowatości. Jakoż, są one w samey rzeczy bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie iest położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; iak iedna, tak i druga, tworzy się obrotem półkola, a te półkola są do siebie podobne.

Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przystosować, co się powiedziało o bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskiemi, względem punktów podobnie położonych w tychże bryłach.

174. *Opis.* Wycinki podobne kul, są te, których kąty we środku są podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobne są te, których promienie podstaw, tak się do siebie maią, iak ich wysokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec są te, które się tworzą podobnych półodcinków kół obrotem.

Tab. VI. Fig. 4. 175. *Twierdz.* 9. Powierzchnie kuliste i powierzchnie całe, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Niech będą ACB, acb, dwa wycinki kół podobne, które obrotem swoim około promieni AC, ac, tworzą podobne kul wycinki.

Naprzód. Powierzchnie kuliste utworzone przez łuki AB, ab, równać się będą powierzchniom kół maiących za promienie liniie AB, ab; więc tak się mieć będą do siebie, iak kwadraty tych liniy AB, ab, albo iak kwadraty promieni AC, ac.

Powtóre. Powierzchnie ostrokręgowe utworzone obrotem promieni CB, bc, maią się też do siebie, iak kwadraty promieni CB, cb, albo CA, ca; więc i powierzchnie całe wycinków podobnych, tak się do siebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i służące za podstawy odcinkóm kuli, utworzonym przez obrot połodcinków kół ABD abd, są także do siebie, iak kwadraty liniy BD, bd, a zatém iak kwadraty promieni CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz.* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku tróymnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Naprzód. Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB koła, tak się maią do swoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE: albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae, to iest: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek acb koła, do kuli swoiey. Więc tenże sam iest stosunek iednego z tych wycinka do swoiey kuli, co i drugiego wycinka do swoiey także kuli; a zatém te wycinki tak się do siebie maią, iak i kule, do których należą. Aże stosunek tych kul, iest stosunkiem tróymnożnym ich promieni; więc i stosunek tych wycinków, iest także stosunkiem tróymnożnym tychże promieni.

Powtóre. Ostrokręgi podobne utworzone obrotem tróykątów, CBD, cbd, są do siebie w stosunku trzymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią się do siebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinków ACB, acb, do kół należących; a zatém i różnicc każdego wycinku kuli, od każdego ostrokręgu, to iest odcinki kul, utworzone przez półodcinki kół, ABD, abd, są do siebie w stosunku równym stosunkowi wycinków kul, to iest w stosunku tróymnożnym promieni: CB, cb.

177. *Twierdz.* 11. Gdy cztery iakie liniie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwsze wyrazy tey proporcyi, są liniiami odpowiadaiącemi sobie, czyli podobnie położonemi w dwoch bryłach podobnych; a dwa ostatnie wyrazy teyże proporcyi, są liniiami odpowiadaiącemi sobie w dwoch innych bryłach podobnych; stosunek dwoch pierwszych brył, będzie równy stosunkowi dwoch brył drugich.

Dowodz. Gdyby te cztery liniie były bokami czterech sześcianów, te cztery sześciany czyniłyby proporcyą: aże stosunek dwoch pierwszych brył, równa się stosunkowi dwoch pierwszych sześcianów, a stosunek dwoch drugich brył, równa się stosunkowi dwoch drugich sześcianów; więc i stosunek dwoch pierwszych brył, równa się stosunkowi dwoch brył drugich.

178. *Uwaga.* Bryłowatości brył podobnych, prędzey rosną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą liniie odpowiadaiące sobie w dwoch bryłach podobnych, dwa razy większe iedne względem drugich; powierzchnia iedney z tych bryły, będzie cztéry razy większa od powierzchni drugiey bryły; a zaś bryłowatość iedney bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości drugiey bryły.

W ogólności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącemi sobie w dwoch bryłach podobnych. Zróbmy tróykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC za przeciwprostokątną. *Tab.VI. Fig.* 5.

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą AD, i natrafiaiącą na liniią AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwoch brył, któreby miały AB i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w którym liniie AB i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bryłowatość drugiey bryły większa iest względem bryłowatości pierwszey bryły, niżli powierzchnia tey drugiey bryły względem powierzchni pierwszey bryły, to iest: bryłowatość drugiey bryły prędzey się powiększa, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących twierdżeniach zasadza się podział *linii bryt* (Linea solidorum) którą znayduiemy na cérklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w sobie zwyczaynie 64 podziały, które się rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (a centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak się maią do siebie, jak

liczby - - - 1, 2, 3, 4, co znaczy, że bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Inne podziały wyznaczone są przez wyciągnienie przybliżone pierwiastków sześciennych. I tak, ponieważ boki dwoch sześcianów, z których ieden dwa razy iest większy od drugiego, tak się blisko maią do siebie, iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami 1, 2, tak się maią do siebie, iak liczby 100 i 126. Używanie dwoch takich liniy, znayduiących się na dwoch ramionach cérkla proporcyonalnego, podobne iest używaniu innych liniy tamże się znayduiących, które w osobnym na to rozdziale iuż się wyłożyło w części I.

K O N I E C.

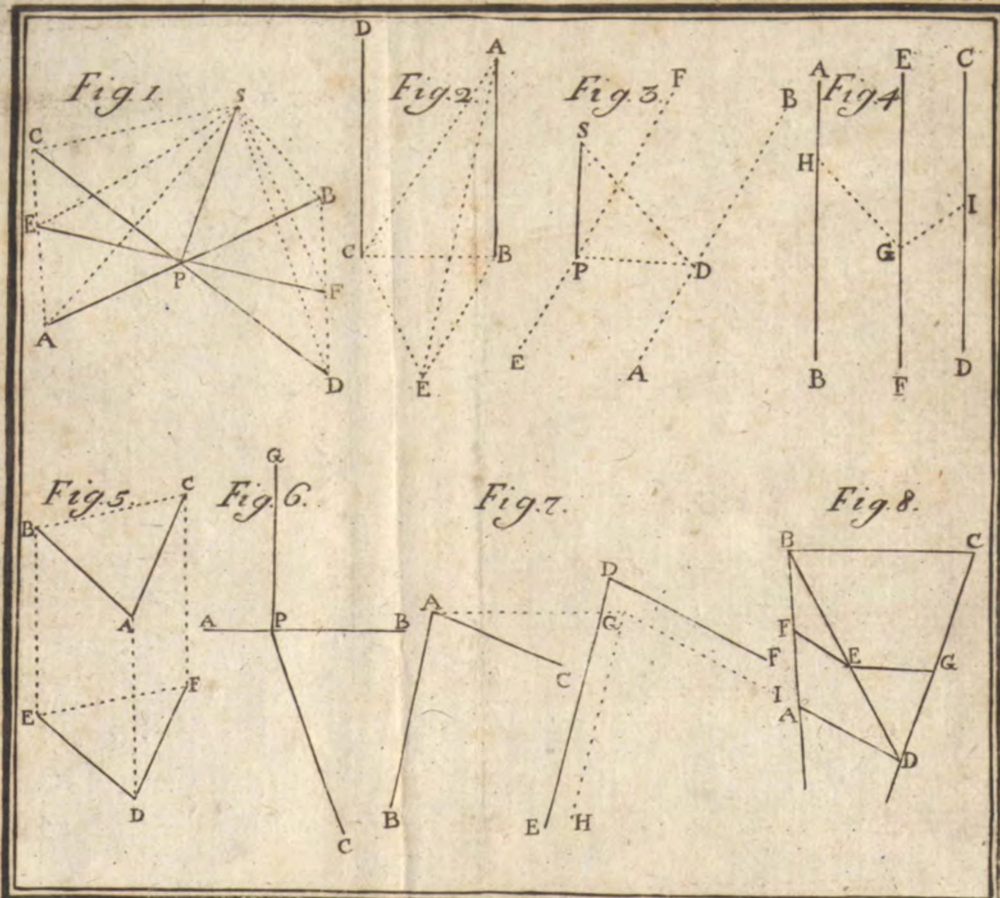
Fig. 1.
S
C
B
E
P
F
A
D
Fig. 2.
D
A
C
B
E
Fig. 3.
F
B
S
P
D
E
A
Fig. 4.
A
E
C
H
I
G
B
F
D
Fig. 5.
C
B
A
F
E
D
Fig. 6.
G
A
P
B
C
Fig. 7.
D
A
G
F
C
I
B
E
H
Fig. 8.
B
C
F
E
G
I
A
D

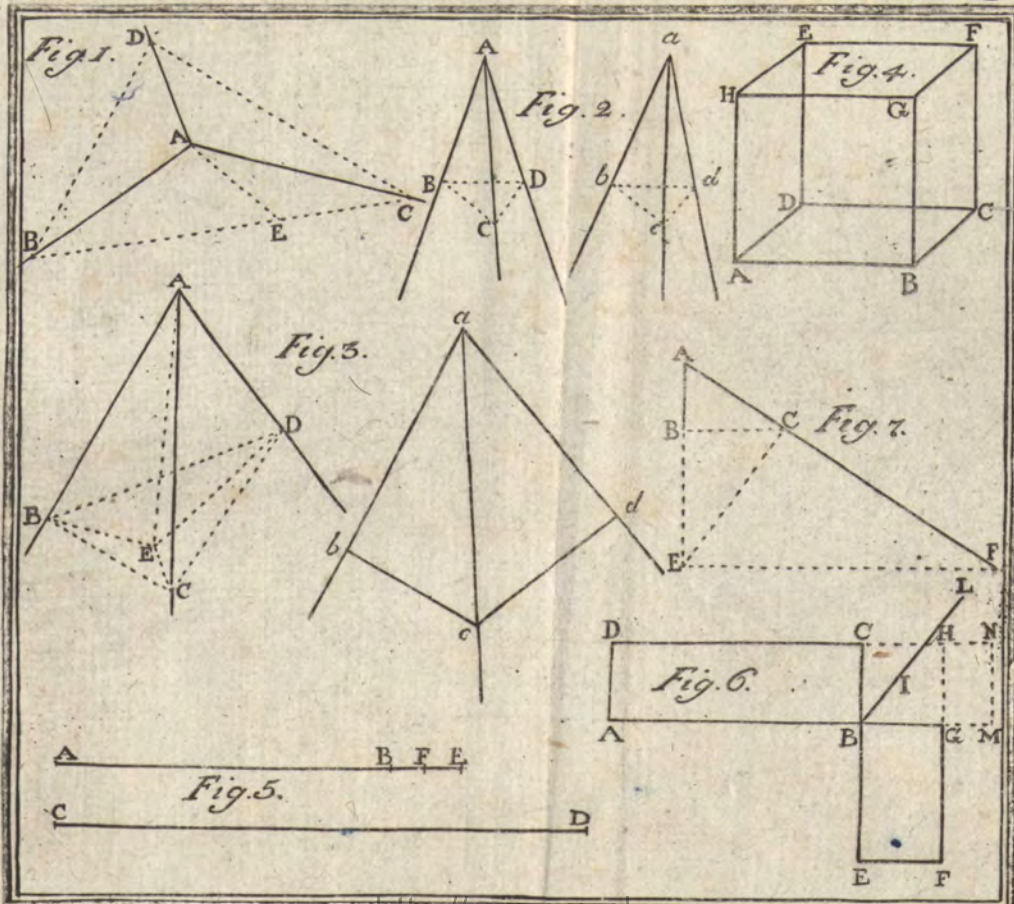
Fig. 1.
D A B E C
Fig. 2.
A B D C
a b d c
Fig. 4.
E F H G D C A B
Fig. 3.
A D B E C
a b d c
Fig. 7.
A B C E F
Fig. 6.
D C H N A B G M L I E F
Fig. 5.
A B F E
C D

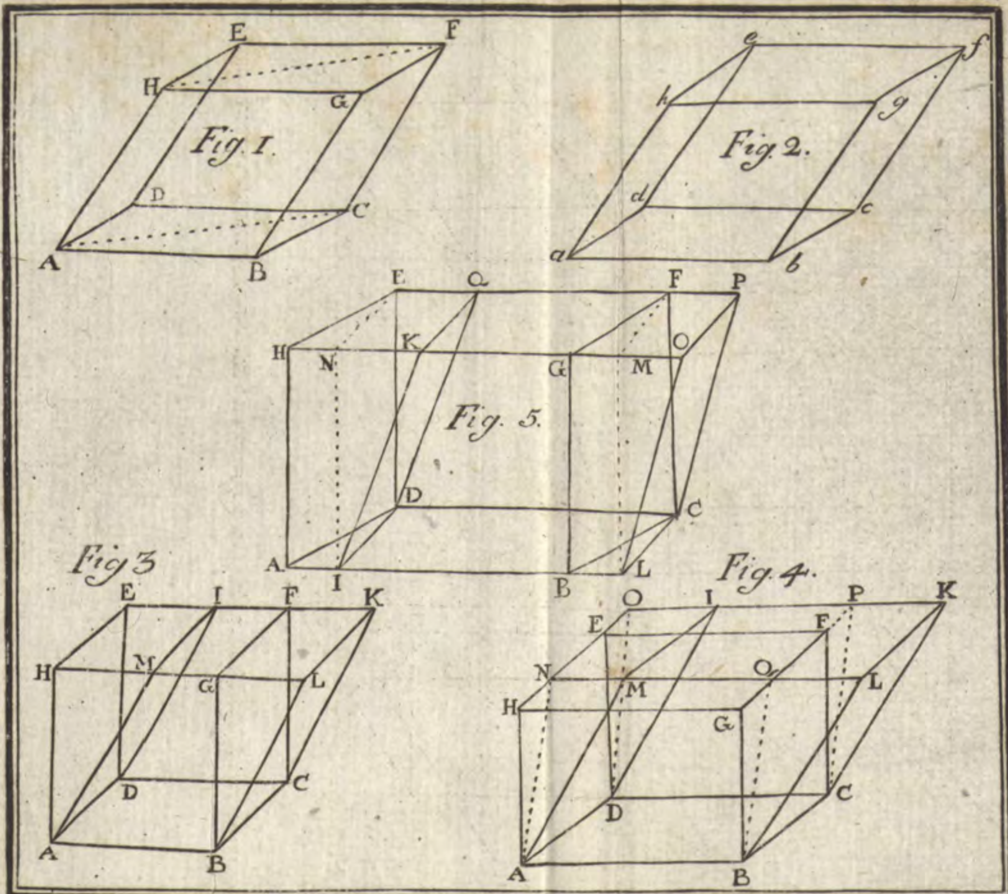
Fig. 1.
E F H G D C A B
Fig. 2.
e f h g d c a b
Fig. 5.
E Q F P H N K G M O D C A I B L
Fig 3
E I F K H M G L D C A B
Fig. 4.
O I P K E F N M Q L H G D C A B

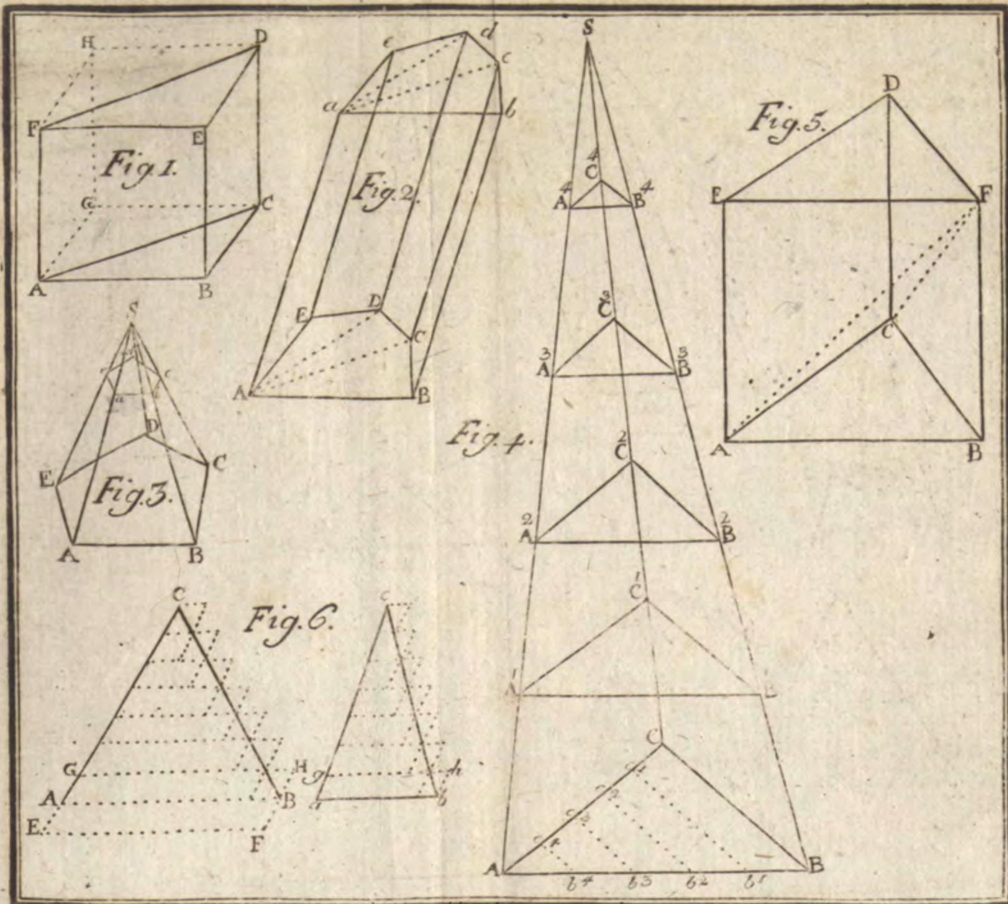
Fig. 1.
H D F E G C A B
Fig. 2.
e d c a b E D C A B
Fig. 3.
S E D C A B
Fig. 4.
S A B C
Fig. 5.
D E F C A B
Fig. 6.
C G A E B F H c g h a b

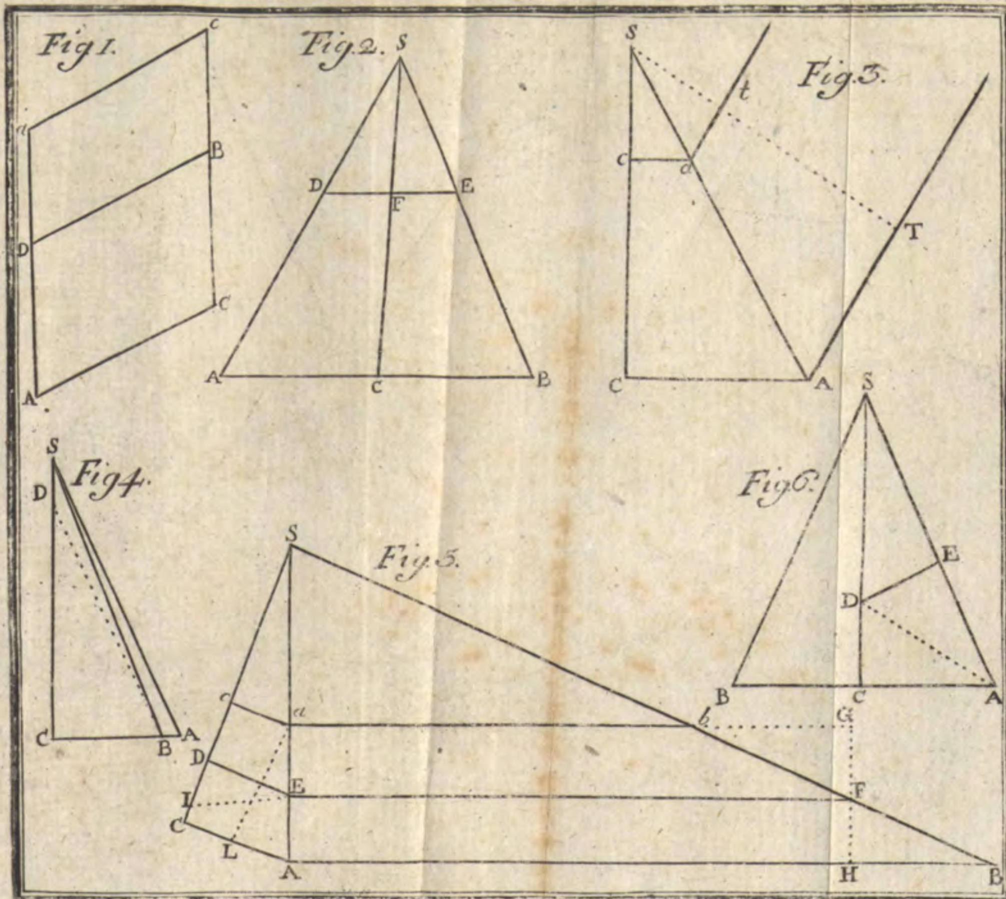
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

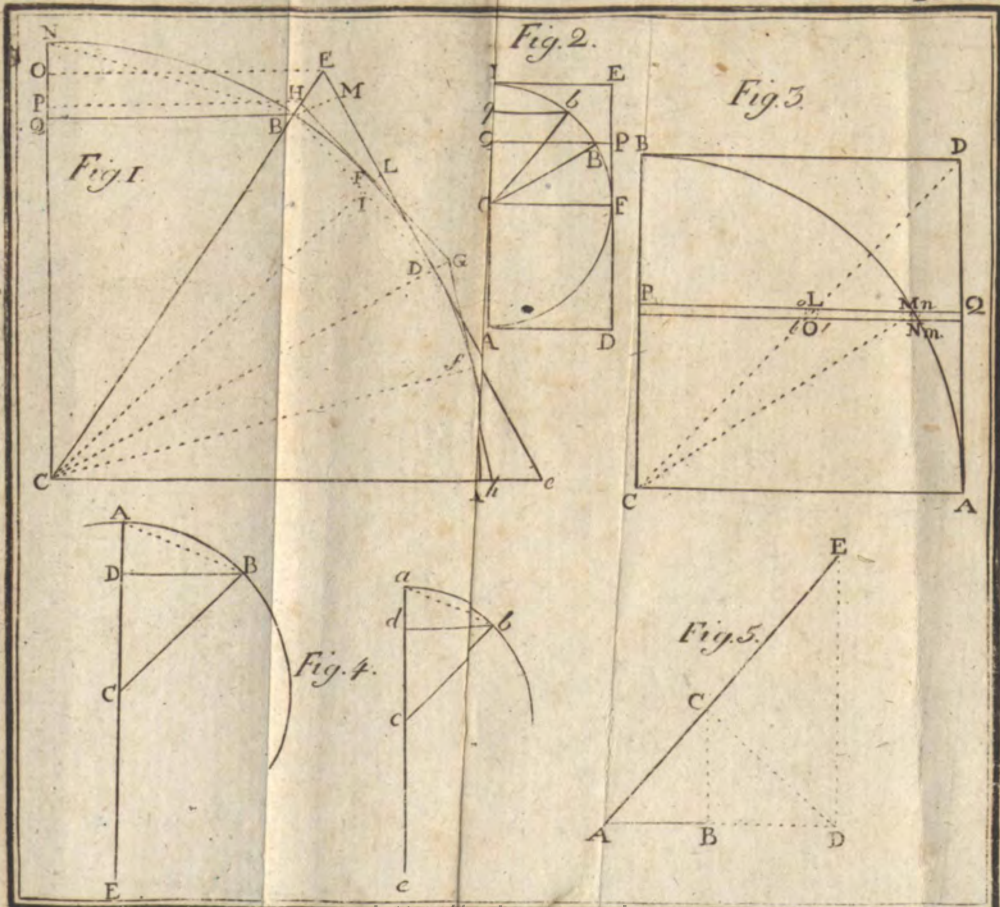
Fig. 1.
N
O
P
Q
E
H
M
B
L
F
I
G
D
f
C
A
h
c
Fig. 2.
I
E
q
b
Q
P
B
C
F
A
D
Fig. 3.
B
D
P
L
Mn
Q
O
Nm
C
A
Fig. 4.
A
D
B
C
E
a
d
b
c
e
Fig. 5.
E
C
A
B
D

GEOMET-
RYA
DLA
SZKÓŁ
NAROD.

CZ. II