WOLFKE * ABBILDUNG EINES GITTERS BEI KÜNSTLICHER BEGRENZUNG

Kanonowanem Profesorowi Siche[?]
Autor.

Ueber die Abbildung eines Gitters bei künstlicher Begrenzung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht von

Mieczyslaw Wolfke.

Montag, den 22. August 1910, Mittags 11 1/2 Uhr

im Musiksaale der Universität:

Vortrag:

„Ueber die Radioaktivität der Materie"

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1910.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referenten: Prof. Dr. **Lummer** und Prof. Dr. **Pringsheim**.

Die mündliche Prüfung fand am 20. Juli 1910 statt.

Meinen lieben Eltern.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Zwischen der optischen Abbildung selbstleuchtender und nicht selbstleuchtender Objekte besteht ein fundamentaler Unterschied, auf dessen prinzipielle Bedeutung zuerst E. Abbe hingewiesen hat.

Strahlen, die von verschiedenen Punkten eines nicht selbstleuchtenden Objektes ausgehen, sind nämlich kohärent, d. h. sie sind interferenzfähig und geben daher, wenn sie durch ein Linsensystem vereinigt werden, Interferenzerscheinungen. Das Licht dagegen, das von verschiedenen Punkten selbstleuchtender Objekte ausgeht, ist nicht kohärent, d. h. nicht interferenzfähig. Treffen daher zwei solche inkohärente Strahlen in einem Punkte zusammen, so summieren sich dort einfach ihre Intensitäten. Haben wir es dagegen mit Strahlen zu tun, die von kohärenten Erregungszentren ausgehen, so hat man, um am Orte der Beobachtung die resultierende Intensität zu finden, die Amplituden der beiden Einzelstrahlen zu summieren und dann erst in bekannter Weise (durch Quadrierung der resultierenden Amplitude) die Intensität zu bilden. Wenn wir z. B. unter dem Mikroskop ein durchleuchtendes Objekt betrachten, so wird dieses kohärente Strahlen aussenden, die zu ganz verschiedenen Abbildungen führen können, je nach der Art der resultierenden Interferenzerscheinungen. Die Untersuchungen Abbe's führten zu einer systematischen Betrachtung dieser Erscheinungen deren Ergebnis auch schon zum Teil in einigen Lehrbüchern, z. B. der Optik des „Müller-Pouillet“ dargestellt ist.

Die mathematische Theorie dieser Abbildungserscheinungen nach den Vorlesungen Abbe's ist vor kurzem veröffentlicht worden[1]).

In Anbetracht der Wichtigkeit, die diese Untersuchungen haben, ist es wohl von grossem Interesse, die Abbildungserscheinungen am Mikroskop für den typischen Fall eines Gitters im einzelnen genauer zu untersuchen. Dies ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Wie bekannt besteht der Abbildungsvorgang aus zwei Teilen:

1). Durch das beugende Objekt wird ein primäres Beugungsbild hervorgerufen, das bei Beleuchtung des Objekts mit ebenen Wellen in der hinteren Brennebene des Objektivs liegt. (Primäre Abbildung).

2). In der Einstellungsebene kommen die vom Beugungsbild ausgehenden Wellen zur Interferenz und ergeben auf diese Weise das sekundäre Bild oder Abbild.

Die Oeffnung der Frontlinse des Mikroskops lässt jedoch nicht alle wirksamen Strahlen zur Interferenz gelangen, sondern blendet einen Teil ab; stellt z. B. in Fig. 1, O das Objekt dar, BB' die Blende mit der beugenden Oeffnung, so wird das primäre Beugungsbild sich über die ganze Halbkugel abc ausbreiten, aber nur derjenige Teil dieses Beugungsbildes gelangt zur Wirkung und Interferenzerzeugung, der zwischen b und b' liegt. Es ist also klar, dass die Grösse dieses Winkels bOb' d. h. der Apertur einen bestimmten Einfluss auf das sekundäre Bild ausüben muss.

Es sei in Fig. 2, OO' die Objektebene, AA' die zur Objektebene in Bezug auf das optische System konjugierte Ebene der Aufpunkte die wir kurz die „Aufebene“ nennen wollen, SS' die sogenannte „Zwischenfläche“ sei die mit dem Radius e um die Mitte O des Objekts beschriebene Kugelfläche. Es seien die Dimensionen des Objektes im Verhältnis zum Radius e klein. Ein Punkt des Objekts sei bestimmt

---

[1]) E. Abbe, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop. Bearbeitet und herausgegeben von O. Lummer und F. Reiche. Verlag Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1910 (108 Seiten).

durch seine Kordinaten X und Y. Der zum Aufpunkt konjugierte Punkt in der Objektebene habe die Kordinaten x und y. $\xi\eta$ seien die Kordinaten eines Elementes der Zwischenfläche. Statt der Kordinaten ξ und η selbst werden in der Arbeit die anguläre Höhe $\xi' = \xi/e$ und die anguläre Breite $\eta' = \eta/e$ verwendet. Die Lichtbewegung S_1 in einem Punkte $\xi\eta$ der Zwischenfläche ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben[1]).

$$S_1 = \frac{K}{\lambda^2}\iint\limits_{\text{Objekt}} dX dY \varphi(XY) \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \psi(XY) + \frac{\xi' X + \eta' Y}{\lambda}\right]; \ldots [1]$$

wobei K eine konstante ist, λ die Wellenlänge, $\varphi(XY)$ der Durchlässigkeitskoeffizient des Objektes, $\psi(XY)$ die Phasenverzögerung der Wellen bei Durchgang durch die Objektschicht, t die Zeit und T die Schwingungsdauer ist. Die Integration soll über das ganze Objekt erstreckt sein.

Die Lichtbewegung S_2 in dem zu xy konjugierten Punkte des sekundären Bildes ist durch folgende Formel gegeben[2]).

$$S_2 = \frac{K}{\lambda^2}\iint\limits_{\text{Apertur}} d\xi' d\eta' \iint\limits_{\text{Objekt}} dX dY \varphi(XY) \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \psi(XY) - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda}\right]; \ldots [2]$$

wobei die Integration nach XY über das ganze Objekt, die Integration nach $\xi'\eta'$ über die ganze Apertur zu erstrecken ist. Diese beiden obigen Gleichungen bilden die Grundlage für die Untersuchung der Abbildung eines Gitters bei verschiedner künstlicher Abblendung.

I. Kapitel.

Die symmetrische Abblendung.

§ 1. Allgemeine Intensitätsgleichungen für symmetrische Objekte.

Das symmetrisch zu den Axen gelegene Objekt erstreckt sich längs der X-Achse von X = − A bis X = + A und längs der Y-Achse von Y = − B bis Y = + B. Wir wollen

[1]) Loc. cit. Seite 89, Formel (72).

[2]) Loc. cit. Seite 90, Formel (73).

jetzt die Intensitätsverteilung des Lichtes für das primäre und das sekundäre Bild bestimmen.

Die Lichtbewegung S_1 in einem Punkte $\xi\eta$ des primären Bildes ist nach der Gleichung [1]

$$S_1 = \frac{K}{\lambda^2}\int_{-B}^{+B} dY \int_{-A}^{+A} dX\varphi(XY)\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \psi(XY) + \frac{\xi'X + \eta'Y}{\lambda}\right]$$

wo die Bezeichnungen dieselben sind wie in der Einleitung. Da es sich in dieser Arbeit um ein Gitter handelt, so können wir annehmen, dass die Funktion φ d. h. der Durchlässigkeitskoeffizient sich nur längs der X-Achse verändert, dass er aber längs der Y-Achse in dem Integrationsgebiete konstant bleibt. Wir nehmen an, dass in dem Objekt keine Phasenverzögerungen stattfinden, da wir voraussetzen wollen, dass das Licht senkrecht auf das Gitter trifft. Alsdann wird die Lichtbewegung für das primäre Bild angegeben durch die Formel:

$$S_1 = \frac{K}{\lambda^2}\int_{-B}^{+B} dY \int_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} + \frac{\xi'X + \eta'Y}{\lambda}\right]; \ldots [3]$$

die Funktion φ ist eine symmetrische und grade Funktion. In dem Ausdruck [3] zerlegen wir den Sinus und erhalten:

$$S_1 = \frac{K}{\lambda^2}\int_{-B}^{+B} dY\cos\frac{2\pi\eta'Y}{\lambda}\int_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} + \frac{\xi'X}{\lambda}\right] +$$

$$+ \frac{K}{\lambda^2}\int_{-B}^{+B} dY\sin\frac{2\pi\eta'Y}{\lambda}\int_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\cos 2\pi\left[\frac{t}{T} + \frac{\xi'X}{\lambda}\right];$$

Wir führen die Integration nach der Variable Y aus und bekommen folgende Formel:

$$S_1 = \frac{2K}{\lambda^2}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi\eta'B}{\lambda}}{\frac{2\pi\eta'}{\lambda}}\int_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} + \frac{\xi'X}{\lambda}\right].$$

Jetzt zerlegen wir den Sinus unter dem Integralzeichen, wodurch dann die Gleichung für die Lichtbewegung folgende Form annimmt.

$$S_1 = A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T}; \ldots [4]$$

wobei die Koeffizienten A_1 und B_1 durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$A_1 = \frac{2K}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{\frac{2\pi\eta'}{\lambda}} \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi\xi' X}{\lambda};$$

$$B_1 = -\frac{2K}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{\frac{2\pi\eta'}{\lambda}} \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi\xi' X}{\lambda};$$

Da die Funktion $\sin \frac{2\pi\xi' X}{\lambda}$ symmetrisch und ungrade ist, so wird B_1 verschwinden, da die Integrationsgrenzen symmetrisch zu Null liegen. In Folge dessen wird die Intensität S_1 des primären Bildes gegeben durch folgende Formel:

$$I_1 = A^2_1 = \frac{4K^2}{\lambda^4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{\left(\frac{2\pi\eta'}{\lambda}\right)^2} \left[\int_{-A}^{+A} d\, X\, \varphi\, (X) \cos \frac{2\pi\xi' X}{\lambda}\right]^2 \ldots [5]$$

das ist die allgemeine Gleichung für die Intensität des primären Bildes bei symmetrischem Objekt.

Jetzt gehen wir über zur Untersuchung des sekundären Bildes. Wir nehmen an, dass die Abblendung im ganzen oder in den einzelnen Teilen symmetrisch zu den Koordinatenachsen liegt.

Es sei α' und β' die anguläre Höhe und Breite der Begrenzung. Dann haben wir für S_2 d. h. die Lichtbewegung in dem sekundären Bilde, folgenden Ausdruck.

$$S_2 = \frac{K}{\lambda^2} \int_{-\beta'}^{+\beta'} d\eta' \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-B}^{+B} dY \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda}\right] \ldots [6]$$

Wir zerlegen diesen Ausdruck ebenso wie den Ausdruck [3] und integrieren nach der variablen Y. Dadurch erhalten wir:

$$S_2 = \frac{2K}{\lambda^2}\int_{-\beta'}^{+\beta'} d\eta' \frac{\cos\frac{2\pi\eta' y}{\lambda} \cdot \sin\frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{\frac{2\pi\eta'}{\lambda}} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX\varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda}\right] +$$

$$+ \frac{2K}{\lambda^2}\int_{-\beta'}^{+\beta'} d\eta' \frac{\sin\frac{2\pi\eta' y}{\lambda} \cdot \sin\frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{\frac{2\pi\eta'}{\lambda}} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX\varphi(X) \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda}\right].$$

Wir sehen, dass der zweite Teil der Formel verschwindet, da die Funktion $\dfrac{\sin\frac{2\pi\eta' y}{\lambda} \sin\frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{\frac{2\pi\eta'}{\lambda}}$ eine ungrade symmetrische ist und die Integrationsgrenzen symmetrisch zu Null liegen. Führen wir als neue Variable die Grösse u ein, wobei $u = \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}$ ist, so wird das Integral über η' gleich:

$$\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi B\beta'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi B\beta'}{\lambda}} du \frac{\sin u}{u} \cdot \cos(y/B \, . \, u)$$

Nehmen wir $B\beta'$ im Verhältnis zur Wellenlänge λ als sehr gross an, so können wir die Grenzen des obigen Integrals durch $-\infty$ und $+\infty$ ersetzen. Dann wissen wir, dass das Integral gleich π ist, wenn $+1 > \frac{y}{B} > -1$; dass es gleich Null ist, wenn $+1 < \frac{y}{B} > -1$ ist und dass es gleich $\frac{\pi}{2}$ wird für $y = \pm B$.

In unserem Falle wird das obige Integral zwischen den Grenzen $+B > y > -B$ einen konstanten Wert haben. Ausserhalb dieser Grenzen aber wird es gleich Null sein.

Den Teil der Objektebene zwischen den beiden Parallelen $y = +B$ und $y = -B$ nennen wir die „Gitterzone" Dementsprechend können wir sagen, dass die Lichtbewegung nur innerhalb der Gitterzone von Null verschieden ist, ausserhalb dieser Zone herrscht vollständige Dunkelheit.

Nach obigen Betrachtungen wird die Lichtbewegung in der Gitterzone durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$S_2 = \frac{K}{\lambda}\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda}\right];$$

Durch Zerlegen des Sinus erhalten wir folgende Form:

$$S_2 = A_2 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 2\pi \frac{t}{T} \ldots [7]$$

wobei die Koeffizienten A_2 und B_2 folgende Werte haben:

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{K}{\lambda}\displaystyle\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}; \\ B_2 = \dfrac{K}{\lambda}\displaystyle\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}; \end{cases}$$

Wir sehen sofort, dass B_2 verschwindet, da die Funktion $\sin \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}$ in Bezug auf ξ' ungrade und symmetrisch ist und die Integrationsgrenzen $+\alpha'$ und $-\alpha'$ symmetrisch zu Null liegen. Dementsprechend wird die Intensität des sekundären Bildes:

$$I_2 = A_2^2 = \frac{K^2}{\lambda^2}\left[\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}\right]^2 \ldots [8]$$

Die beiden Gleichungen [5] und [8] sollen in den folgenden Betrachtungen auf das Gitter angewandt werden.

§ 2. Das primäre Bild bei symmetrischem Gitter.

Das betrachtete Gitter habe die Spaltzahl N. Die Breite eines Spaltes sei 2a und die Breite eines Gitterstabes, d. h.

des Zwischenraumes zwischen zwei benachbarten Spalten sei 2Δ. Dann wird die Gitterkonstante $\gamma = 2\ (a + \Delta)$. Die Randkordinaten des i^{ten} Spaltes bezeichnen wir mit p_i und q_i, dann wird die Funktion $\varphi(X)$ d. h. der Durchlässigkeitskoeffizient zwischen den Rändern p_i und q_i des Spaltes gleich 1 sein. Zwischen den Rändern q_i und p_{i+1} des Gitterstabes aber wird dieser Koe ffizient gleich Null sein. Die Integration nach X brauchen wir also nur zwischen den Spaltkoordinaten auszuführen und die Summe über sämtliche Spalte zu bilden. Daher wird die Gleichung [5] für die Intensität des primären Bildes sich folgender Massen gestalten:

$$I_1 = \text{const.}_1 \left[\sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi\xi' X}{\lambda} \right]^2$$

wo wir den konstanten Faktor mit const._1 bezeichnet haben.

Wir berechnen die einzelnen Integrale und können für $q_i - p_i$, das die Spaltbreite ist, 2a einsetzen. Dann erhalten wir durch einfache Rechnung:

$$I_1 = \text{const.}_1 \frac{4 \sin^2 \frac{2\pi\xi' a}{\lambda}}{\left(\frac{2\pi\xi'}{\lambda}\right)^2} \left[\sum_{i=1}^{i=N} \cos \frac{2\pi\xi' \cdot \frac{p_i + q_i}{2}}{\lambda} \right]^2 ; \ldots [9]$$

Die Summe der Randkoordinaten eines Spaltes kann so dargestellt werden:

$$p_i + q_i = p_i + p_i - p_i + q_i = 2(p_i + a).$$

Da das Gitter symmetrisch zur Y-Achse liegt, so wird p_1 d. h. der Rand des ersten Spaltes im negativen Bezirke durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$p_1 = - \frac{N\gamma}{2} + \Delta$$

und daraus:

$$p_i = - \frac{N\gamma}{2} + \Delta + \gamma(i - 1);$$

daraus folgt:

$$p_i + q_i = 2(\gamma i - \frac{N+1}{2}\gamma)$$

Die Summe in dem Ausdruck [9] erhält dann folgende Form:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \cos\frac{2\pi\xi'.\frac{p_i+q_i}{2}}{\lambda} = \cos\frac{2\pi\xi'\frac{(N+1)\gamma}{2}}{\lambda}\sum_{i=1}^{i=N}\cos\frac{2\pi\xi'\gamma i}{\lambda} +$$

$$+ \sin\frac{2\pi\xi'.\frac{(N+1)\gamma}{2}}{\lambda}\sum_{i=1}^{i=N}\sin\frac{2\pi\xi'\gamma i}{\lambda}. \qquad [10]$$

Wir sehen, dass die Summen [10] die Gestalt $\Sigma\sin\varepsilon i$ und $\Sigma\cos\varepsilon i$ haben, deren Summation uns bekannt ist, und zwar ist:

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=N}\cos\frac{2\pi\xi'\gamma i}{\lambda} &= \frac{\sin\frac{N}{2}\cdot\frac{2\pi\xi'\gamma}{\lambda}\cdot\cos\frac{N+1}{2}\cdot\frac{2\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi\xi'\gamma}{\lambda}}; \\ \sum_{i=1}^{i=N}\sin\frac{2\pi\xi'\gamma i}{\lambda} &= \frac{\sin\frac{N}{2}\cdot\frac{2\pi\xi'\gamma}{\lambda}\cdot\sin\frac{N+1}{2}\cdot\frac{2\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi\xi'\gamma}{\lambda}}; \end{aligned}\right. \qquad [11]$$

Setzen wir jetzt die in [11] erhaltenen Summen in den Ausdruck [10] ein, so bekommen wir für die Summe in dem Ausdruck [9] folgende Formel:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\cos\frac{2\pi\xi'\cdot\frac{p_j+q_i}{2}}{\lambda} = \frac{\sin\frac{N\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin\frac{\pi\xi'\gamma}{\lambda}}.$$

Die Intensität des primären Bildes ergibt sich dann aus folgender Gleichung:

$$I_1 = \text{const.}_1\cdot\frac{4\sin^2\frac{2\pi\xi' a}{\lambda}}{\left(\frac{2\pi\xi'}{\lambda}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{N\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin^2\frac{\pi\xi'\gamma}{\lambda}}.$$

In dieser Formel führen wir eine neue Variable ω ein

$$\omega = \frac{2\pi\xi' a}{\lambda}$$

dann ergibt sich die bekannte Formel:

$$I_1 = \text{const.}_1 \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin^2 \frac{\gamma\omega}{2a}} \ldots [12]$$

Wie wir sehen, besteht die Formel für die Intensität I_1 aus dem Produkte der beiden Funktionen $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$, und $\frac{\sin^2 \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin^2 \frac{\gamma\omega}{2a}}$.

Der Verlauf der ersten Funktion ist in Fig. 3 dargestellt. Sie hat bei $\omega = 0$ den Wert 1 und nimmt ab bis $\omega = \pm \pi$, wo die ersten Minima liegen. Die Minima liegen im allgemeinen in den Punkten $\omega = \pm \varkappa \pi$, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet.

Die Funktion $\frac{\sin^2 \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin^2 \frac{\gamma\omega}{2a}}$ ist die bekannte Gitterfunktion.

Diese Funktion besitzt an den Stellen

$$\omega = \frac{2\varkappa\pi a}{\gamma}, \; (\varkappa = 0,1,2\ldots)$$

Hauptextremalstellen, von denen je zwei aufeinanderfolgende durch N - 1 Nullstellen getrennt sind, die in den Punkten

$$\omega = \frac{2\varkappa\pi a}{N\gamma}, \; (\varkappa = 1,2,3\ldots)$$

liegen. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen liegt eine Nebenetxremalstelle der Funktion, sodass sich zwischen zwei Hauptextremalstellen N - 2 Nebenextremalstellen befinden. Diese Funktion wird also die in Fig. 4 angedeutete Form haben. Da die Periode der Funktion $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$ gleich π ist und die Abstände der Hauptextremalstellen der Gitterfunktion gleich $\frac{2\pi a}{\gamma}$, so werden mehr oder weniger Hauptextremalstellen der Gitterfunktion in eine Periode der Funktion $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$ fallen, je nachdem Verhältnis $\frac{2a}{\gamma}$.

Die Figuren Fig. 5 und Fig. 6 stellen die Intensitätsverteilung des primären Bildes dar für die Fälle $\frac{2a}{\gamma} = \frac{2}{3}$ und $\frac{2a}{\gamma} = \frac{2}{9}$.

Die Hauptextremalstellen sind die Lichtmaxima, die man in dem Beugungsbilde des Gitters sieht.

Im allgemeinen hat man bis jetzt angenommen, dass die Nebenmaxima in dem Beugungsbilde sehr klein sind in dem Verhältnis zu dem Hauptmaximis und zwar um so kleiner, je grösser die Zahl N ist. Das ist aber nicht der Fall. Um dies zu beweisen, wollen wir die untere Grenze eines i^{ten} Nebenmaximums, das in der Nähe eines Hauptmaximums liegt, berechnen.

Trotzdem die Nebenmaxima nicht genau in der Mitte des Intervalles zwischen zwei Nullstellen liegen, können wir mit grosser Annäherung jedoch den Wert der Gitterfunktion für die Mitte dieses Intervalles anwenden. Dieser Wert wird dem Wert des Nebenmaximums sehr nahe liegen, wird aber auf jeden Fall kleiner sein. Der Wert des von einem beliebigen Hauptmaximum an gerechnet i^{ten} Nebenmaximums ergibt sich zu

$$I_1 = \text{const.}_1 \frac{\sin^2\omega_0}{\omega^2_0} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{(2i+1)\pi}{2N}};$$

wo

$$\omega_0 = \varkappa\pi + \frac{(2i+1)\pi}{2N}$$

Setzen wir i als klein gegen N voraus und nehmen N als sehr gross an, so können wir schreiben

$$I_1 = C \cdot \frac{4N^2}{(2i+1)^2\pi^2}.$$

Da aber der Wert des I_2^{ten} Hauptmaximums gleich CN^2 ist, so ist das Verhältnis des i^{ten} Nebenmaximums zum Hauptmaximum gleich $\frac{4}{(2i+1)^2\pi^2}$.

Dieser Wert ist von der Zahl N unabhängig und beträgt für das erste Nebenmaximum ungefähr $\frac{1}{22}$. Wir finden also, dass die Nebenmaxima doch nicht verschwindend klein werden im Verhältnis zu den Hauptmaximis selbst, wenn N sehr gross wird.

§3. Das sekundäre Bild bei symmetrischer Abblendung

Die Intensität I_2 hat nach Gleichung [8] folgende Form:

$$I_2 = \frac{K^2}{\lambda^2}\left[\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX\varphi(X) \cos\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}\right]^2 \quad \ldots [13a]$$

Eine analoge Ueberlegung wie im vorigen Paragraph führt zu folgendem Resultat:

$$\int_{-A}^{+A} dX\varphi(X) \cos\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi\xi' a}{\lambda}}{\frac{2\pi\xi'}{\lambda}} \sum_{i=1}^{i=N} \cos\frac{2\pi\xi'\left(x - \frac{p_i+q_i}{2}\right)}{\lambda}.$$

Dieselbe Rechnung wie in dem erwähnten Paragraph ergibt

$$\sum_{i=1}^{i=N} \cos\frac{2\pi\xi'\left(x-\frac{p_i+q_i}{2}\right)}{\lambda} = \frac{\sin\frac{N\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin\frac{\pi\xi'\gamma}{\lambda}} \cdot \cos\frac{2\pi\xi' x}{\lambda};$$

daher wird die Intensität I_2 angegeben durch die Formel:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left[\int\limits_{-\frac{2\pi a\alpha'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi a\alpha'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2 ; \ldots [13b]$$

wo ω den Wert $\omega = \frac{2\pi\xi' a}{\lambda}$ hat.

Da die zu integrierende Funktion grade und symmetrisch ist, kann man schreiben

$$I_2 = 4\,\text{const.}_2 \left[\int\limits_{0}^{\frac{2\pi a\alpha'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2$$

oder

$$I_2 = 4\,\text{const.}_2\, I^2. \qquad \ldots [13]$$

wo das obige Integral mit I bezeichnet worden ist.

§ 4. Nur das Centralbild gelangt zur Wirkung.

In diesem Falle wird die Intensität I_2 mit folgenden Formeln ausgedrückt:

$${}'_2 = 4\,\text{const.}_2 \left[\int\limits_{0}^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2$$

Das Integral I nimmt also folgende Form an:

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos\frac{x\omega}{a} ; \ldots [14]$$

Da in dem kleinen Integrationsintervall $\frac{2\pi a}{N\gamma}$ die Funktion $\frac{\sin\omega}{\omega}$ nahezu konstant ist, kann man sie vor das Integrationszeichen setzen und ihren Wert gleich 1 annehmen. Ferner sind in dem Integrationsintervall des Integrals I die Werte von ω sehr nahe Null, deswegen setzen wir statt $\sin\frac{\gamma\omega}{2a}$ das Argument selbst, so nimmt das Integral folgende endgültige Form an:

$$I = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega} \cdot \cos\frac{x\omega}{a} \ldots [15]$$

Um den Verlauf dieses Integrals als Funktion von x zu bestimmen, bilden wir seine erste Ableitung nach x. Da die Funktion unter dem Integralzeichen stetig ist, ergibt sich:

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -\frac{2}{\gamma}\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \sin\frac{N\gamma\omega}{2a} \cdot \sin\frac{x\omega}{a} = -4aN \cdot \frac{\sin\frac{2\pi x}{N\gamma}}{N^2\gamma^2 - 4x^2}.$$

Die zweite Ableitung wird dementsprechend sein:

$$\frac{\delta^2 I}{\delta x^2} = -\frac{4aN}{(N^2\gamma^2-4x^2)^2}\left[\frac{2\pi}{N\gamma}(N^2\gamma^2-4x^2)\cos\frac{2\pi x}{N\gamma} + 8x . \sin\frac{2\pi x}{N\gamma}\right]$$

Wie man sieht, ist die erste Ableitung $\frac{\delta I}{\delta x}$ für den Punkt $x = 0$ gleich Null. Die zweite Ableitung $\frac{\delta^2 I}{\delta x^2}$ aber ist in diesem Falle negativ, das Integral hat hier also ein Maximum. Lässt man x von dem Wert $x = 0$ bis zum $x = \pm\frac{N\gamma}{2}$ variieren, so bleibt stets $\frac{\delta I}{\delta x}$ negativ, d. h. das Integral nimmt vom Maximum an beständig ab.

Für $x = \pm \frac{N\gamma}{2}$ ist

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -\frac{2\pi a}{N\gamma^2}$$

Für $x = \pm \frac{N\gamma}{2} \mp \Delta$ d. h. für den Gitterrand wird es

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -4aN \cdot \frac{\sin\left(\pi - \frac{2\pi\Delta}{N\gamma}\right)}{N^2\gamma^2 - 4\left(\frac{N\gamma}{2} - \Delta\right)^2} = -aN \frac{\sin\frac{2\pi\Delta}{N\gamma}}{N\gamma\Delta - \Delta^2};$$

oder da $\frac{\Delta}{N\gamma}$ sehr klein ist

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -aN \frac{\frac{2\pi\Delta}{N\gamma}}{N\gamma\Delta\left(1 - \frac{\Delta}{N\gamma}\right)} = -\frac{2a\pi}{N\gamma^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{N\gamma}}$$

also negativ.

Erst ausserhalb des Gitters wird für

$$x = \pm \varkappa \cdot \frac{N\gamma}{2};\ (\varkappa = 2, 3, 4 \ldots)$$

$\frac{\delta I}{\delta x} = 0$; und zwar ist die zweite Ableitung an den Stellen $x = \pm \varkappa N\gamma$ $(\varkappa = 1, 2, 3 \ldots)$ positiv, d. h. dass an diesen Stellen das Integral Minima hat. An den Stellen $x = \pm \frac{2\varkappa + 1}{2} . N\gamma$, $(\varkappa = 1, 2, 3 \ldots)$ ist die zweite Ableitung negativ das Integral hat also an diesen Stellen Maxima. Mit wachsendem x wird die erste Ableitung $\frac{\delta I}{\delta x}$ immer kleiner und nähert sich allmählich dem Null. Die periodischen Schwankungen des Integrals um die x-Achse werden immer kleiner, sodass das Integral schliesslich im Unendlichen Null wird.

Einige spezielle Werte von I ergeben sich auf folgende Weise:

$$I_{(x=0)} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\cdot\sin\omega' =$$

$$= \frac{2a}{\gamma}\cdot 1{,}85 = 3{,}7 \cdot \frac{a}{\gamma}$$

Ferner ist mit grosser Annäherung:

$$I_{\left(x=\frac{N\gamma}{2}-\Delta\right)} = I_{\left(x=\frac{N\gamma}{2}\right)} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\cdot\cos\frac{N\gamma\omega}{2a} =$$

$$= \frac{a}{\gamma}\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{a}}{\omega} = \frac{a}{\gamma}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega' = 1{,}43\frac{a}{\gamma}\ ;$$

Endlich ist

$$I_{(x=N\gamma)} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\,.\cos\frac{N\gamma\omega}{a} = \frac{a}{\gamma}\left\{\int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}}\frac{d\omega}{\omega}\,.\sin\frac{3N\gamma\omega}{2a} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}}\frac{d\omega}{\omega}\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}\right\} = \frac{a}{\gamma}\left\{\int_0^{3\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\cdot\sin\omega' - \int_0^{\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\cdot\sin\omega'\right\} =$$

$$= \frac{a}{\gamma}\left\{1{,}66 - 1{,}85\right\} = -\,0{,}79\cdot\frac{a}{\gamma}\cdot$$

Bilden wir die Verhältnisse der verschiedenen Werte des Integrals I zu seinem Wert bei $x = 0$, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{array}{l} I_{\left(x=\frac{N\gamma}{2}-\Delta\right)} = I_{\left(x=\frac{N\gamma}{2}\right)} = \frac{1{,}4}{3{,}7}\cdot I_{(x=0)} = 0{,}4\ I_{(x=0)} \\ I_{(x=N\gamma)} = -\frac{0{,}8}{3{,}7}\, I_{(x=0)} = -\ 0{,}2\ I_{(x=0)}\cdot \end{array}\right.$$

Da in dem Ausdrucke für die Intensität I_2 das Integral im Quadrat steht, so werden die Intensitätsverhältnisse folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{cases} I_{\left(x=\frac{N\gamma}{2}-\Delta\right)} = I_{\left(x=\frac{N\gamma}{2}\right)} = 0{,}16\, I_{(x=0)} \\ I_{(x=N\gamma)} = 0{,}04\, I_{(x=0)} \end{cases}$$

Der Verlauf des Integrals I als Funktion von x ist in Figur 7 dargestellt. In dieser Figur stellt die punktierte Curve das Integral oder die ihm proportionelle Amplitudenverteilung dar. Die stark ausgezogene Kurve gibt die Intensitätsverteilung. Wir erhalten daher das Resultat:

Blendet man im primären Beugungsbilde des Gitters alle seitlichen Maxima ab und lässt nur das ungebeugte Zentralbild zur Wirkung gelangen, so zeigt das sekundäre Abbild des Gitters eine etwas verbreiterte strukturlose Fläche, deren Helligkeit von der Mitte nach den Rändern dauernd abnimmt. An den beiden Seiten der strukturlosen Fläche treten Nebenmaxima von sehr geringer Helligkeit $\left(\frac{1}{25}\right)$ auf.

§ 5. Einfluss der Nebenmaxima.

Da wir in dem § 2 gezeigt haben, dass die dem Hauptmaximum naheliegenden Nebenmaxima nicht verschwindend klein sind, im Verhältnis zu den Hauptmaximis, so wollen wir jetzt den Einfluss dieser Nebenmaxima näher untersuchen.

Zu diesem Zwecke fügen wir zum nullten Hauptmaximum noch zwei Nebenmaxima rechts und zwei Nebenmaxima links hinzu. Dann wird die Intensität I_2 durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$I_2 = 4\,\text{const.}_2 \left[\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma}{2a}\omega}{\sin\frac{\gamma}{2a}\omega} \cdot \cos\frac{x\omega}{a}\right]^2 \quad \ldots .[16]$$

Das Integral des obigen Ausdrucks bezeichnen wir mit J. Ebenso wie bei dem früher diskutierten Integral I können wir auch hier die Funktion $\frac{\sin \omega}{\omega}$ vor das Integrationszeichen setzen und für $\sin \frac{\gamma\omega}{2a}$ das Argument $\frac{\gamma\omega}{2a}$ einführen. So ergibt sich:

$$J = \frac{2a}{\gamma} \int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \ldots . [17]$$

Um den Verlauf dieses Integrals als Funktion von x näher zu untersuchen, bilden wir die erste und zweite Ableitung nach x.

Die erste Ableitung ist

$$\frac{\delta J}{\delta x} = -\frac{2}{\gamma} \int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \sin \frac{N\gamma\omega}{2a} \cdot \sin \frac{x\omega}{a} = -4aN \cdot \frac{\sin \frac{6\pi x}{N\gamma}}{N^2\gamma^2 - 4x^2}.$$

Die zweite Ableitung wird

$$\frac{\delta^2 J}{\delta x} = -2 \frac{4aN}{(N^2\gamma^2 - 4x^2)^2} \left[\frac{6\pi}{N\gamma} (N^2\gamma^2 - 4x^2) \cos \frac{6\pi x}{N\gamma} + 8x \cdot \sin \frac{6\pi x}{N\gamma}\right];$$

Die erste Ableitung wird an den Stellen

$$x = \varkappa \cdot \frac{N\gamma}{6}; \quad (\varkappa = 0,1,2 \ldots)$$

gleich Null; die zweite Ableitung ist an diesen Stellen gleich

$$\frac{\delta^2 J}{\delta x^2} = -\frac{24\pi a}{N^2\gamma^3\left(1 - \frac{\varkappa^2}{9}\right)} \cos \varkappa\pi;$$

Die zweite Ableitung wird also innerhalb des Gitters für $x = 0$ und $x = \pm \frac{N\gamma}{3}$ negativ, und für $x = \pm \frac{N\gamma}{6}$ positiv.

Ausserhalb des Gitters wird die zweite Ableitung bei $x = \frac{2}{3} N\gamma; N\gamma; \frac{4}{3} N\gamma$ positiv und bei $x = \frac{5}{6} N\gamma; \frac{7}{6} N\gamma; \frac{9}{6} N\gamma \ldots$ negativ.

Das Integral J hat also in dem Gitterintervall 3 Maxima bei

$$x = 0; \text{ und } x = \pm \frac{N\gamma}{3};$$

und zwei Minima bei

$$x = \pm \frac{N\gamma}{6}.$$

Bei $x = \pm \frac{N\gamma}{2}$ d. h. etwa bei den Punkten der Bildebene, die den Gitterrändern entsprechen, hat die erste Ableitung einen endlichen und zwar negativen Wert, die zweite dagegen ist unendlich gross. An dieser Stelle hat also das obige Integral einen Wendepunkt.

Ausserhalb des Gitters liegen abwechselnd Maxima und Minima, und zwar fangen die Schwankungen des Integrals am Gitterrande mit einem Minimum an. Die Schwankungen des Integrals werden mit wachsendem x immer kleiner, da die erste Ableitung mit wachsendem x dem Null zustrebt. Einzelne Werte des Integrals finden wir folgendermassen:

$$J_{(x=0)} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega} = -\frac{2a}{\gamma}\int_0^{3\pi} d\omega' \cdot \frac{\sin\omega'}{\omega'} = \frac{2a}{\gamma}\cdot 1{,}67 = 3{,}34\cdot\frac{a}{\gamma}.$$

Ferner haben wir

$$J_{\left(x=\pm\frac{N\gamma}{6}\right)} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\cdot\cos\frac{N\gamma\omega}{6a} = \frac{a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{2N\gamma\omega}{3a}}{\omega} +$$

$$\frac{a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{3a}}{\omega} = \frac{a}{\gamma}\int_0^{4\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega' + \frac{a}{\gamma}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega' = \frac{a}{\gamma}(1{,}50+1{,}42) = 2{,}92\cdot\frac{a}{\gamma};$$

und ausserdem

$$J_{\left(x=\pm\frac{N\gamma}{3}\right)} = \frac{2a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\cdot\cos\frac{N\gamma\omega}{3a} = \frac{a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{5N\gamma\omega}{6a}}{\omega} +$$

$$\frac{a}{\gamma}\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{6a}}{\omega} = \frac{a}{\gamma}\int_0^{5\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega' + \frac{a}{\gamma}\int_0^{\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega' = \frac{a}{\gamma}(1{,}63+1{,}85) = 3{,}48\cdot\frac{a}{\gamma}$$

Für den Rand gilt mit grosser Annäherung

$$J_{\left(x=\pm\frac{N\gamma}{2}\mp\Delta\right)}=J_{\left(x=\pm\frac{N\gamma}{2}\right)}=\frac{2a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\,.\,\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\,.\cos\frac{N\gamma\omega}{2a}=$$

$$=\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\,.\,\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{a}}{\omega}=\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{6\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega'=1{,}55\,.\,\frac{a}{\gamma}\,.$$

Ausserhalb des Gitters erhalten wir für das erste Minimum

$$J_{\left(x=\pm\frac{2N\gamma}{3}\right)}=\frac{2a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\,.\,\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\,.\cos\frac{2N\gamma\omega}{3a}=\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\,.\,\frac{\sin\frac{7N\gamma\omega}{6a}}{\omega}-$$

$$-\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\,.\,\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{6a}}{\omega}=\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{7\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega'-\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega'=\frac{a}{\gamma}(1{,}54-1{,}85)=-0{,}31\,.\,\frac{a}{\gamma};$$

und für das erste Maximum

$$J_{\left(x=\pm\frac{5N\gamma}{6}\right)}=\frac{2a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\cdot\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega}\cdot\cos\frac{5N\gamma\omega}{6a}=\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\cdot\frac{\sin\frac{4N\gamma\omega}{3a}}{\omega}-$$

$$-\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}}d\omega\,.\,\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{3a}}{\omega}=\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{8\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega'-\frac{a}{\gamma}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\omega'}{\omega'}\sin\omega'=\frac{a}{\gamma}(1{,}53-1{,}42)=0{,}11\,.\,\frac{a}{\gamma}\,.$$

Die Verhältnisse der Werte des Integrals zu seinem Werte bei $x=0$ sind

$$\left\{\begin{array}{lll} J_{(x=\pm\frac{N\gamma}{6})} & = & 0{,}87\,.\,J_{(x=0)} \\ J_{(x=\pm\frac{N\gamma}{3})} & = & 1{,}04\,.\,J_{(x=0)} \\ J_{(x=\pm\frac{N\gamma}{2}\mp\Delta)} & = & 0{,}46\,.\,J_{(x=0)} \\ J_{(x=\pm\frac{2N\gamma}{3})} & = & -\,0{,}09\,.\,J_{(x=0)} \\ J_{(x=\pm\frac{5N\gamma}{6})} & = & 0{,}03\,.\,J_{(x=0)} \end{array}\right.$$

Die Intensitäten sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\left\{\begin{array}{ll} I_{(x=\pm\frac{N\gamma}{6})} & = 0{,}76\,.\,I_{(x=0)} \\ I_{(x=\pm\frac{N\gamma}{3})} & = 1{,}08\,.\,I_{(x=0)} \\ I_{(x=\pm\frac{N\gamma}{2}\mp\Delta)} & = 0{,}21\,.\,I_{(x=0)} \\ I_{(x=\pm\frac{2N\gamma}{3})} & = 0{,}008\,.\,I_{(x=0)} \\ I_{(x=\pm\frac{5N\gamma}{6})} & = 0{,}001\,.\,I_{(x=0)} \end{array}\right.$$

Die Figur 8 zeigt uns den Verlauf des Integrals und der Intensität, und zwar stellt die punktierte Curve die Amplitudenverteilung und die stark ausgezogene Curve die Intensitätsverteilung dar.

Wenn man die kleinen Schwankungen der Intensität in der Mitte, die im Verhältnis zur gesamten Intensität gering sind, vernachlässigt, so ergibt sich, dass der Einfluss der hinzugefügten Nebenmaxima sich hauptsächlich dadurch zu erkennen gibt, dass der Abfall der Intensität an den Rändern des Gitters viel rapider ist wie bei alleiniger Wirksamkeit des Hauptmaximums.

§ 6. Die beiderseitigen i^{ten} Hauptmaxima.

Wir wollen jetzt die Form des Bildes nntersuchen, für den Fall, das alle Maxima abgeblendet sind ausser dem i^{ten}

Maximum rechts und dem i^{ten} Maximum links. Da wir kaum imstande sind, die unmittelbar an ein Hauptmaximum sich anschliessenden Nebenmaxima vollständig abzublenden, wollen wir zu jedem der beiden i^{ten} Hauptmaxima noch zwei Nebenmaxima rechts und zwei links mit in Rechnung ziehen.

Die Mitte des i^{ten} Hauptmaximums befindet sich in dem Punkte $\omega = \frac{2\pi ai}{\gamma}$, woraus folgende Werte für die Integrationsgrenzen sich ergeben:

$$\frac{2\pi a}{N\gamma}\,(Ni-3) \text{ und } \frac{2\pi a}{N\gamma}\,(Ni+3).$$

Die Intensität I_2 wird also durch folgende Formel angegeben:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left[\int\limits_{-\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}}^{-\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a} + \int\limits_{+\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{+\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2$$

Da die beiden Maxima symmetrisch liegen und die Funktion unter dem Integralzeichen grade und und symmetrisch ist, kann man setzen

$$I_2 = 4\text{const.}_2 \left[\int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2$$

Da die Periode der Funktion $\frac{\sin\omega}{\omega}$ sehr gross ist im Verhältnis zum Integrationsintervall, so kann man die Funktion in diesem Gebiet als konstant betrachten. Es folgt

$$I_2 = 4\text{const.}_2 J_i^2; \ldots [18]$$

wo

$$J_i = \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a}\,;$$

ist.

Wir führen in das Integral eine neue Variable ω_1 ein, wobei

$$\omega_1 = \pi i - \frac{\gamma\omega}{2a};$$

dann hat das Integral die Form

$$J_i = \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \cdot \frac{\sin N(\pi i - \omega_1)}{\sin(\pi i - \omega_1)} \cdot \cos\frac{2x(\pi i - \omega_1)}{\gamma}.$$

Da aber folgende Beziehungen bestehen

$$\begin{cases} \sin N(\pi i - \omega_1) = (-1)^{Ni+1} . \sin N\omega_1 \\ \sin(\pi i - \omega_1) = (-1)^{i+1} . \sin\omega_1 \end{cases}$$

so wird das Integral

$$J_i = (-1).^{(N-1)i} \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \frac{\sin N\omega_1}{\sin\omega_1} \cdot \cos\frac{2x(\pi i - \omega_1)}{\gamma}.$$

ω_1 ist in dem ganzen Integrationsgebiet sehr klein, wir können also statt $\sin\omega_1$ das Argument selbst setzen; weiterhin zerlegen wir den Cosinus und erhalten:

$$J_i = (-1).^{(N-1)i} \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \left[\cos\frac{2\pi xi}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \cdot \frac{\sin N\omega_1}{\omega_1} \cdot \cos\frac{2x\omega_1}{\gamma} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{2\pi xi}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \cdot \frac{\sin N\omega_1}{\omega_1} \cdot \sin\frac{2x\omega_1}{\gamma} \right].$$

Da die unter dem Integrationszeichen stehende Funktion im zweiten Integral symmetrisch und ungrade ist und die Integrationsgrenzen symmetrisch zu Null liegen, so verschwindet dies Integral und es bleibt

$$J_i = (-1).^{(N-1)i} \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} . \frac{2a}{\gamma} . \cos\frac{2\pi x i}{\gamma} \int\limits_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 . \frac{\sin N\omega_1}{\omega_1} . \cos\frac{2x\omega_1}{\gamma} .$$

Als neue Variable führen wir ein

$$\omega_2 = \frac{2a}{\gamma}\,\omega_1 ;$$

und erhalten nach der Transformation

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} . \frac{2a}{\gamma} . \cos\frac{2\pi x i}{\gamma} \int\limits_{-\frac{6\pi a}{N\gamma}}^{+\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega_2 . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega_2}{2a}}{\omega_2} . \cos\frac{x\omega_2}{a} ;$$

oder, da die unter dem Integrationszeichen stehende Funktion symmetrisch ist:

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} . 2 . \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi x i}{\gamma} . \frac{2a}{\gamma} \int\limits_{0}^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega_2 . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega_2}{2a}}{\omega_2} . \cos\frac{x\omega_2}{a} .$$

Das obige Integral ist identisch mit dem Integral J der Formel [17]. Wir können also schreiben

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} . \frac{2 . \sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi x i}{\gamma} . J_x$$

wo J_x der Wert des Integrals für den Punkt x ist. Die Intensität I_2 ist also

$$I_2 = 16\,\mathrm{const.}_2 \left(\frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 . \cos^2\frac{2\pi x i}{\gamma} . J^2_x \ldots . [19]$$

Setzen wir in dem Ausdruck [19] statt x, $\gamma + x$, so erhalten wir

$$I_2 = 16\,\text{const.}_2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 . \cos^2 \frac{2\pi x i}{\gamma} . J^2_{\gamma + x} .$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem vorherigen nur in dem Wert, für das Integral J. Da wir aber voraussetzen können, dass dies Integral in dem Intervall γ einen nahezu konstanten Wert hat, so folgt daraus, dass die Intensität I_2 in jedem γ-Intervall denselben Verlauf hat.

Durch den Faktor $\cos^2 \frac{2\pi x i}{\gamma}$ ist also der Verlauf der Intensität in einem γ-Intervall bedingt, woraus wir sehen, dass die Intensität in den Punkten

$$x = \varkappa . \frac{\gamma}{2i}; \; (\varkappa = 0,1,2, \ldots)$$

Maxima von der Grösse

$$\text{Max.}I_2 = 16\,\text{const.}_2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 . J^2$$

besitzt. Und in den Punkten

$$x = \frac{2\varkappa + 1}{2} . \frac{\gamma}{2i}; \; (\varkappa = 0,1,2 \ldots)$$

Minima hat und gleich Null wird. In einem γ-Intervall sind daher 2i Maxima vorhanden.

Auf diese Weise ergibt sich ein unähnliches Abbild des Objektes, denn an Stelle der wirklich vorhandenen N-Gitterstriche sehen wir deren 2Ni auftreten. Der Intensitätsabfall vom Maximum zum Minimum folgt dem Gesetze $\cos^2 u$ wie wir aus [19] ersehen.

Die Lage der Maxima ist ganz unabhängig davon, ob N eine grade oder ungrade Zahl ist.

Figur 9 zeigt den Verlauf der Intensität für den Fall i = 1.

§ 7. Die beiden i^{ten} Hauptmaxima und das Centralbild.

Wir untersuchen jetzt den Fall, dass die beiden i^{ten} Maxima und das nullte Maximum zur Wirkung kommen.

Auch in diesem Falle fügen wir zu jedem Hauptmaximum noch zwei unmittelbar darauf folgende Nebenmaxima rechts und links hinzu. Folgende Gleichung gibt mithin die Intensität.

$$I_2 = 4\text{const.}_2 \left[\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} + \int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2$$

In diesem Ausdruck sind uns die beiden Integrale schon bekannt, und wir bekommen

$$I_2 = 4\text{const.}_2 \left[1 + (-1)^{i(N-1)} . 2 \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi x i}{\gamma} \right]^2 . J^2 \ldots [20]$$

Um den Ausdruck näher zu untersuchen, betrachten wir den Faktor A:

$$A = 1 + (-1)^{(N-1)i} . 2 . \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos\frac{2\pi x i}{\gamma} \ldots [21]$$

Die Maxima und Minima dieses Ausdruckes liegen bei

$$x = \pm \varkappa \frac{\gamma}{2i} ; (\varkappa = 0, 1, 2 \ldots)$$

und zwar sind sie gleich

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Max. } A &= 1 + 2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} ; \\ \text{Min. } A &= 1 - 2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} ; \end{aligned} \right.$$

Der Abstand zweier Maxima ist $\frac{\gamma}{i}$ d. h. in dem γ-Intervall sind i Maxima enthalten. Da aber der Faktor A in dem Ausdrucke für die Intensität I_2 im Quadrat steht, so kann es vorkommen, dass die negativen Minima bei der Quadrierung zu Maximis der Intensität werden. Dies tritt ein, wenn

$$1-2\,\frac{\sin\dfrac{2\,\pi ai}{\gamma}}{\dfrac{2\,\pi ai}{\gamma}}<0\,;$$

oder

$$\frac{\sin\dfrac{2\,\pi ai}{\gamma}}{\dfrac{2\,\pi ai}{\gamma}}>{}^1/_2\,;$$

Die endgültige Bedingung ist also

$$0{,}6>\frac{2\,ai}{\gamma}>0.$$

In diesem Falle würden in dem γ-Intervall 2i Maxima vorhanden sein.

Aus dem Ausdruck (21) ersehen wir, dass bei gradem i die Lage der Maxima unabhängig von der Zahl N ist. Ob N grade oder ungrade ist, die Maxima liegen immer in den Punkten

$$x=\pm\varkappa\,.\,\frac{\gamma}{i}\,,\ (\varkappa=0{,}1{,}2\ldots)$$

Die Minima oder eventuelle Zwischenmaxima liegen in den Punkten

$$x=\pm\,\frac{2\,\varkappa+1}{2}\cdot\frac{\gamma}{i}\,;\ (\varkappa=0{,}1{,}2\ldots.)$$

Ist i ungrade, so ist die Lage der Maxima abhängig von der Zahl N. Bei gradem N liegen die Maxima bei

$$x=\pm\,\frac{2\varkappa+1}{2}\,.\,\frac{\gamma}{i}\,;\ (\varkappa=0{,}1{,}2\ldots)$$

und die Minima bei

$$x=\varkappa.\frac{\gamma}{i}\,;\ (\varkappa=0{,}1{,}2\ldots)$$

Da das Gitter symmetrisch zu y-Achse liegt, so liegt in dem hier betrachteten Falle (N grade) bei $x=0$ ein Gitterstab; die Mitten der Spalten liegen bei

$$x = \pm \frac{2\varkappa + 1}{2} \cdot \frac{\gamma}{i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots)$$

die Mitten der Stäbe dagegen bei

$$x = \pm \varkappa \cdot \frac{\gamma}{i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots)$$

Wir sehen daraus, dass immer in der Mitte jedes Gitterstabes ein Minimum der Intensität liegt und in der Mitte jedes Spaltes ein Maximum.

Ist dagegen N ungrade, so liegen die Maxima bei

$$x = \pm \varkappa \cdot \frac{\gamma}{i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots)$$

und die Minima bei

$$x = \pm \frac{2\varkappa + 1}{2} \cdot \frac{\gamma}{i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots)$$

Da aber in diesem Falle (N ungrade) bei $x = 0$ ein Spalt liegt, fallen die Maxima wieder mit den Spaltmitten und die Minima mit den Stabmitten zusammen. Der Intensitätsabfall zwischen Maximum und Minimum ist cosinusförmig, und zwar wird er genau angegeben durch die Formel $I = (1 + C \cos u)^2$.

W e n n w i r a l s o z u d e n b e i d e n i^{ten} M a x i m a s n o c h d a s C e n t r a l b i l d z u f ü g e n, z e i g t d a s A b b i l d e i n e S t r u k t u r. D i e A n z a h l d e r G i t t e r s t r i c h e i m A b b i l d e i s t g l e i c h Ni, d e r A b f a l l v o m M a x i m u m z u m M i n i m u m i s t a l l m ä h l i c h u n d d i e M a x i m a u n d M i n i m a e r s c h e i n e n g l e i c h b r e i t. A u s s e r d e m t r e t e n u n t e r U m s t ä n d e n i n d e n M i t t e n d e r M i n i m a n o c h s e k u n d ä r e M a x i m a a u f.

Die Figuren 10 und 11 geben den Intensitätsverlauf für $i = 1$.

§ 8. Die beiderseitigen i^{ten} und $2i^{ten}$ Hauptmaxima.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass alle Maxima ausser dem i^{ten} und $2i^{ten}$ abgeblendet sind. Wie im vorigen Paragraph fügen wir zu jedem Hauptmaximum noch rechts und links zwei Nebenmaxima hinzu. Die Lichtintensität wird also durch folgende Gleichheit gegeben.

$$I_2 = 4\text{const.}_2 \left[\int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} + \int\limits_{\frac{2\pi a(2Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(2Ni+3)}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2$$

Indem wir die im § 6 ausgeführten Transformationen auf die beiden Integrale anwenden, bekommen wir

$$I_2 = 4\text{const.}_2 \left[(-1)^{i(N-1)} . 2 . \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} + 2 . \frac{\sin\frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{4\pi xi}{\gamma} \right]^2 . J^2.$$

Wir untersuchen zur Diskussion des Intensitätsverlaufs den Faktor A:

$$A = (-1)^{i(N-1)} . 2 . \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} + 2 . \frac{\sin\frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{4\pi xi}{\gamma}; \quad \ldots [22]$$

Die ersten beiden Ableitungen des Faktors A sind:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{a}\left[(-1)^{i(N-1)} . \sin\frac{2\pi ai}{\gamma} . \sin\frac{2\pi xi}{\gamma} + 2\sin\frac{4\pi ai}{\gamma} . \sin\frac{4\pi xi}{\gamma}\right] =$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{a} . \sin\frac{2\pi ai}{\gamma} . \sin\frac{2\pi xi}{\gamma}\left[(-1)^{i(N-1)} + 8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma}\right];$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{2\pi i}{a\gamma} . \sin\frac{2\pi ai}{\gamma}\left[(-1)^{i(N-1)} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} + 8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma} . \cos\frac{4\pi xi}{\gamma}\right];$$

Die Extremalstellen werden also durch folgende Gleichungen gegeben.

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\frac{2\pi xi}{\gamma} = 0; \\ &(-1)^{i(N-1)} + 8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} = 0 \end{aligned}\right. \quad \ldots [23]$$

Die erste von diesen Gleichungen ergibt eine Reihe von Extremalstellen in den Punkten

$$x = \pm \varkappa . \frac{\gamma}{2i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots) \; [23a]$$

Diese Extremalstellen nennen wir Extremalstellen der ersten Art. Die zweite Gleichung kann auffolgende Form gebracht werden.

$$\cos\frac{2\pi xi}{\gamma} = -(-1)^{i(N-1)} \cdot \frac{1}{8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma}}. \quad \ldots [23b]$$

Die Extremalstellen, die aus dieser Gleichung folgen, nennen wir Extremalstellen der zweiten Art.

Die Bedingung dafür, dass die zweite Gleichung reelle Wurzeln hat, ist

$$\left|\frac{1}{8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma}}\right| \leqslant 1.$$

oder

$$\left|8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma}\right| \geqslant 1. \quad \ldots [24]$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} \frac{0{,}46}{i} > \frac{2a}{\gamma} > \frac{1{,}54}{i} \\ \frac{1{,}46}{i} > \frac{2a}{\gamma} > \frac{0{,}54}{i} \end{cases}$$

Im Falle, wo

$$\left|8\cos\frac{2\pi ai}{\gamma}\right| = 1,$$

dann koinzidieren die Extremalstellen der zweiten Art mit denen der ersten.

Wenn man mit $\varphi\pi$ eine von den Lösungen der Gleichung [23b] bezeichnet, wobei $\varphi < 1$, dann ergeben sich folgende Werte für die Abscissen der Extremalstellen der zweiten Art.

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\varphi + 2\varkappa)\frac{\gamma}{2i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots) \\ x_2 = \pm(-\varphi + 2\varkappa)\frac{\gamma}{2i}; \quad (\varkappa = 0,1,2\ldots) \end{cases}$$

Daraus ersehen wir, dass wir es in diesem Fall mit zwei Serien von Extremalstellen zweiter Art zu tun haben. Der Abstand je zweier Extremalstellen ist bei beiden Serien

$\frac{\gamma}{i}$ und wir bekommen also in jedem γ-intervall 2i Extremalstellen der zweiten Art. Wie wir aus [23a] gesehen haben, fallen in jedes γ-Intervall auch 2i Extremalstellen der ersten Art.

Wir werden jetzt gesondert folgende Fälle betrachten:

1.) Extremalstellen der zweiten Art sind nicht vorhanden.

Aus der Gleichung [24] ersehen wir, dass in diesem Falle

$$\left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| < 1$$

Die zweite Ableitung $\frac{\delta^2 A}{\delta x^2}$ ist dabei abwechselnd positiv und negativ, d. h. die Extremalstellen sind abwechselnd Minima und Maxima, und zwar haben die Maxima den Wert

$$\text{Max.}A = \frac{\gamma}{\pi a i} \left| \sin \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| + \frac{\gamma}{2\pi a i} \left| \sin \frac{4\pi a i}{\gamma} \right| ; \ldots [25a]$$

die Minima

$$\text{Min.}A = - \frac{\gamma}{\pi a i} \left| \sin \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| + \frac{\gamma}{2\pi a i} \left| \sin \frac{4\pi a i}{\gamma} \right| ; \ldots [25b]$$

Die Minima sind, wie wir aus [25b] ersehen, negativ, da aber der Ausdruck A in Quadrat vorkommt, werden sie zu neuen Maximas der Intensität sich gestalten.

Da die absoluten Werte der Minima kleiner sind als die der Maxima, so werden auch die neu entstehenden Maxima der Intensität kleiner sein als die ursprünglichen.

Die Lage der Maxima ist von N unabhängig, wenn i grade ist, dagegen abhängig im Falle dass i ungrade ist, sie ist auch davon abhängig, in welchen Quadraten der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ liegt.

Das Abbild zeigt in diesem Falle eine Struktur und zwar sehen wir in jedem γ-Intervall 2i Maxima, die gleich weit voneinander entfernt sind, aber abwechselnd heller und dunkler hervortreten.

Die Figuren 12 und 13 stellen diesen Fall dar für $i = 1$ und $i = 2$.

2). Die Extremalstellen der zweiten Art sind vorhanden.

Aus Gleichung [24] folgt

$$\left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| > 1.$$

In diesem Falle hat die zweite Ableitung in den Punkten der ersten Extremalstellen ein konstantes Vorzeichen, sie ist entweder für alle diese Stellen positiv oder negativ. Das Vorzeichen hängt davon ab, in welchem Quadranten der Winkel $\frac{2\pi a}{\gamma}$ liegt.

Fällt er in den ersten oder dritten Quadranten, so ist die Ableitung negativ, fällt er in den zweiten oder vierten, so ist sie positiv. Im ersten Falle werden die Extremalstellen der ersten Art alle Maxima sein; die Extremalstellen der zweiten Art sind dann alle Minima. Im zweiten Falle ist es umgekehrt.

Wenn der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ in dem ersten oder dritten Qudraten liegt, so ist die Grösse der Maxima

$$\text{Max. } A = 2 \left| \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right| \left(\pm 1 + \left| \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| \right).$$

Die Maxima sind, wie sich aus diesem Ausdruck ergibt, abwechselnd positiv und negativ. Die zwischen je zwei Maximis liegenden Minima sind immer negativ. Je zwei Minima liegen symmetrisch zu den zwischen ihnen liegenden Maximum. Sie liegen aber nicht in der Mitte zwischen den Maximis, sondern ihre Entfernung von den Maximis, die durch die Eormel

$$x = \pm \varkappa . \frac{\gamma}{2i}; \; (\varkappa = 0,2,4,6 \ldots)$$

gegeben werden, ist $\frac{\varphi\gamma}{2i}$, von den Maximis der Formel

$$x = \pm \varkappa . \frac{\gamma}{2i}; \quad (\varkappa = 1,3,5\ldots)$$

ist die Entfernung $\frac{\gamma}{2i}$ $(1-\varphi)$.

Da der Ausdruck A im Quadrat vorkommt bei dem Intensitätsausdrucke, so werden die beiden Minima zu neuen Maximis der Intensität und das negative Maximum wird sich als ein Minimum der Intensität gestalten. Wir erhalten also das folgende Ergebnis:

Liegt der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ im ersten oder dritten Quadranten, so zeigt das Abbild eine Struktur, und zwar, als ob in jedem γ-Intervalli gleichstarke und gleichweit von einander entfernte Maxima werden. Zu beiden Seiten eines jeden Maximums liegen noch symmetrisch zwei kleine Nebenmaxima. In der Mitte zwischen je zwei Nebenmaximis liegt ein schwaches Minimum, das kleiner ist als die Minima, die das Hauptmaximum von dem Nebenmaximum trennen.

Die Figuren 14 und 15 stellen diesen Fall dar für $i = 1$, und $i = 2$.

Liegt dagegen der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ in dem zweiten oder vierten Quadranten, dann sind, wie schon erwähnt, Extremalstellen der ersten Art alle Minima und die Extremalstellen zweiter Art werden Maxima. Die Minima werden durch folgende Formel gegeben:

$$\text{Min.A} = 2. \left| \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right| \left(\pm 1 - \left| \cos\frac{2\pi a i}{\gamma} \right| \right).$$

Die Minima sind abwechselnd positiv und negativ. Da die Maxima immer grösser sein müssen wie das Minimum, das zwischen ihnen liegt, so werden alle Maxima positiv sein. Die negativen Minima werden sich in dem Ausdruck für die Intensität in Maxima verwandeln. Es ergibt sich also, dass die Struktur des Bildes ähnlich gestaltet sein wird wie oben.

Die Figuren 16 und 17 stellen diese Erscheinung dar für i = 1 und i = 2.

§ 9. Die beiderseitigen i^{ten} und $2i^{ten}$ Maxima und das Centralbild.

Im folgenden untersuchen wir das Abbild für den Fall, dass alle Maxima abgeblendet sind, ausser den beiderseitigen i^{ten}, $2i^{ten}$ und dem nullten Maximum.

Die Lichtintensität ist dann

$$I_2 = 4\mathrm{const.}_2 \left[\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} + \int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{2\pi a(2Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(2Ni+3)}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2 .$$

oder nach Ausführung der Rechnung

$$I_2 = 4\mathrm{const.}_2 \left[1 + (-1)^{i(N-1)} . 2 \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} + 2 . \frac{\sin\frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{4\pi xi}{\gamma} \right]^2 J^2 .$$

Der für den Verlauf der Intensität massgebende Faktor A ist:

$$A = 1 + (-1)^{i(N-1)} . 2 \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} + 2 . \frac{\sin\frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{4\pi xi}{\gamma} ; \quad \ldots [26]$$

Die Ableitungen dieses Faktors sind identisch mit den Ableitungen des Faktors A im vorherigen Paragraphen. Die Extremalstellen werden also entsprechend dem vorigen Paragraphen durch dieselben Gleichungen angegeben.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\dfrac{2\pi xi}{\gamma}=0 \\ (-1)^{i(N-1)}+8\cos\dfrac{2\pi ai}{\gamma}\,.\,\cos\dfrac{2\pi xi}{\gamma}=0 \end{array}\right. \quad \ldots[27]$$

Wir bekommen aus den beiden vorherigen Gleichungen wieder Extremalstellen der ersten und zweiten Art.

Im Falle, dass die Extremalstellen der zweiten Art unmöglich sind, werden Extremalstellen erster Art abwechselnd Maxima und Minima sein. Die Minima sind

$$\text{Min.}A=1-2\,.\left|\frac{\sin\dfrac{2\pi ai}{\gamma}}{\dfrac{2\pi ai}{\gamma}}\right|+2\,.\left|\frac{\sin\dfrac{4\pi ai}{\gamma}}{\dfrac{4\pi ai}{\gamma}}\right|;$$

Jetzt sind dann negative Minima möglich, wenn

$$\left|\frac{\sin\dfrac{2\pi ai}{\gamma}}{\dfrac{2\pi ai}{\gamma}}\right|>\frac{1}{2\left(1-\left|\cos\dfrac{2\pi ai}{\gamma}\right|\right)}$$

Diese Ungleichung kann nicht allgemein gelöst werden, und man kann nur für bestimmte Werte von i das Verhältnis $\dfrac{2a}{\gamma}$ berechnen.

Das Abbild zeigt jetzt wieder eine Struktur, und zwar sind in jedem γ-Intervall i Streifen vorhanden. Es können aber auch unter Umständen Zwischenstreifen auftreten.

Die Figuren 18, 19, 20, 21 zeigen diesen Fall für i = 1 und i = 2.

Sind aber die Extremalstellen zweiter Art möglich, und liegt dabei der Winkel $\dfrac{2\pi ai}{\gamma}$ im ersten oder dritten Quadranten, so werden ebenso wie im vorigen Paragraphen die Extremalstellen der ersten Art alle Maxima und die der zweiten Art Minima. Die Maxima sind

$$\mathrm{Max.A} = 1 + 2 \cdot \left| \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right| \left(\pm 1 + \left| \cos\frac{2\pi ai}{\gamma} \right| \right).$$

Zum Unterschied gegen den im vorigen § behandelten Fall werden hier die Maxima immer positiv. Daraus ersehen wir, dass dann auf jedes γ-Intervall 2 i Maxima kommen. Sie sind abwechselnd grösser und kleiner, und es kann sich auch ereignen, dass negative Minima von A sich zu neuen Zwischenmaximis der Intensität gestalten.

Die Figuren 22, 23, 24 und 25, zeigen den Verlauf der Intensität für i = 1 und für i = 2.

Liegt der Winkel $\frac{2\pi ai}{\gamma}$ im zweiten oder vierten Quadranten, so werden die Extremalstellen der ersten Art zu Minimis und die der zweiten Art zu Maximis der Intensität Veranlassung geben. Die Minima haben folgende Grösse

$$\mathrm{Min.A} = 1 + 2 \left| \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right| \left(\pm 1 - \left| \cos\frac{2\pi ai}{\gamma} \right| \right).$$

Die Minima können, wie wir sehen, in diesem Falle auch negativ sein und in dem Ausdruck für die Intensität sich in neue Maxima verwandeln.

In jedem γ-Intervall sind also 2i Maxima vorhanden. Unter Umständen gibt es jedoch auch Zwischenmaxima.

Die Figuren 26 und 27 stellen den Intensitätsverlauf dar für i = 1.

Kapitel II.

Die asymmetrische Abblendung.

§ 10. Das sekundäre Bild bei asymmetrischer Abblendung.

Erfolgt die Abblendung nicht wie in dem vorhergehenden Kapitel symmetrisch, zu y-Achse, so sind die Integrationsgrenzen der Variablen ξ' in dem Ausdrucke [6] nicht symmetrisch zu Null. Die Integrationsgrenzen der Variablen η' mögen jedoch symmetrisch bleiben. Dann wird der Ausdruck B_2 in der Formel [7] nicht verschwinden und die Intensität wird durch folgende Form angegeben:

$$I_2=A^2_2+B^2_2=\frac{K^2}{\lambda^2}\left\{\left[\int\limits_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\xi'\int\limits_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\cos\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}\right]^2+\left[\int\limits_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\xi'\int\limits_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\sin\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}\right]^2\right\}.$$

Das erste Integral dieses Ausdruckes kommt schon in der Formel [13a] vor und wurde dann auf die Form [13b] gebracht. Das zweite Integral wird auf folgende Weise berechnet.

$$\int\limits_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\xi'\int\limits_{-A}^{+A} dX\varphi(X)\sin\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}=\int\limits_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\xi'\sum_{i=1}^{i=N}\int\limits_{p_i}^{q_i} dX\sin\frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda}=$$

$$=\int\limits_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\xi' 2.\frac{\sin\frac{2\pi\xi' a}{\lambda}}{\frac{2\pi\xi'}{\lambda}}\sum_{i=1}^{i=N}\sin\frac{2\pi\xi'\left(x-\frac{p_i+q_i}{2}\right)}{\lambda}=$$

$$=\int\limits_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\xi' 2\frac{\sin\frac{2\pi\xi' a}{\lambda}}{\frac{2\pi\xi'}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{N\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin\frac{\pi\xi'\gamma}{\lambda}}.\cos\frac{2\pi\xi' x}{\lambda}=c.\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega.\frac{\sin\omega}{\omega}.\frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}}.\sin\frac{x\omega}{a}.$$

Die Intensität I_2 ist daher

$$I_2 = \text{const.}_2 \left\{ \left[\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2 + \left[\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \sin\frac{x\omega}{a} \right]^2 \right\}$$

Wir nehmen jetzt an, dass eine Reihe von unsymmetrischen Maximis zur Wirkung kommt, und zwar das i^{te}, k^{te}, l^{te} . . .; jedes von ihnen besitzt noch rechts und links je zwei Nebenmaxima. Dann wird die Intensität:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left\{ \left[\sum_{j=i,k,l\ldots} \int\limits_{\frac{2\pi a(Nj-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Nj+3)}{N\gamma}} d\omega \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{j=i,k,l\ldots} \int\limits_{\frac{2\pi a(Nj-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Nj+3)}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \sin\frac{x\omega}{a} \right]^2 \right\} \ldots [28]$$

Wir führen bei beiden Integralen die bekannte Transformation aus und erhalten:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left\{ \left[\sum_{j=i,k,l\ldots} \left((-1)^{(N-1)j} \,.\, 2 \frac{\sin\frac{2\pi aj}{\gamma}}{\frac{2\pi aj}{\gamma}} \,.\, \cos\frac{2\pi xj}{\gamma} \right) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{j=i,k,l\ldots} \left((-1)^{(N-1)j} \,.\, 2 \frac{\sin\frac{2\pi aj}{\gamma}}{\frac{2\pi aj}{\gamma}} \,.\, \sin\frac{2\pi xj}{\gamma} \right) \right]^2 \right\} .J.$$

In der ersten Klammer kommen nach der Quadratur Glieder von folgender Form vor:

$$A_1 \cos^2\frac{2\pi xj}{\gamma}; \quad \text{und} \quad A_2 \cos\frac{2\pi xk}{\gamma} \,.\, \cos\frac{2\pi xl}{\gamma};$$

in der zweiten

$$B_1 \sin^2 \frac{2\pi x j}{\gamma}; \quad \text{und} \quad B_2 \sin \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \sin \frac{2\pi x l}{\gamma};$$

Wir sehen sofort, dass die Glieder unverändert bleiben, wenn man x durch (— x) ersetzt.

Folglich ist das Abbild symmetrisch zum Nullpunkt.

Geht man vom Punkte x zum Punkt (γ—x), so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l}
A_1 \cos^2 \frac{2\pi j}{\gamma}(\gamma - x) = A_1 \cos^2\left(2\pi j - \frac{2\pi j x}{\gamma}\right) = A_1 \cos^2 \frac{2\pi j x}{\gamma}; \\
A_2 \cos \frac{2\pi k}{\gamma}(\gamma - x) \cdot \cos \frac{2\pi l}{\gamma}(\gamma - x) = A_1 \cos\left(2\pi k - \frac{2\pi k x}{\gamma}\right) \cos\left(2\pi l - \frac{2\pi l x}{\gamma}\right) = A_2 \cos \frac{2\pi k x}{\gamma} \cos \frac{2\pi l x}{\gamma}. \\
B_1 \sin^2 \frac{2\pi j}{\gamma}(\gamma - x) = B_1 \sin^2\left(2\pi j - \frac{2\pi j x}{\gamma}\right) = B_1 \sin^2 \frac{2\pi j x}{\gamma}. \\
B_2 \sin \frac{2\pi k}{\gamma}(\gamma - x) \cdot \sin \frac{2\pi l}{\gamma}(\gamma - x) = B_2 \sin\left(2\pi k - \frac{2\pi k x}{\gamma}\right) \sin\left(2\pi l - \frac{2\pi l x}{\gamma}\right) = B_2 \sin \frac{2\pi k x}{\gamma} \cdot \sin \frac{2\pi l x}{\gamma}.
\end{array}\right.$$

Auch jetzt bleiben die Glieder unverändert. Folglich ist das Abbild in jedem γ-Intervalle zur Mitte des Intervalls symmetrisch.

Diese nach der Theorie gefundene Symmetrie hat aber das Experiment nicht bestätigt, vielmehr ergab sich bei asymmetrischer Abblendung in jedem Intervall ein asymmetrisches Abbild. Ich untersuchte eingehend den Einfluss der Art der Beleuchtung und des Lichtes und der Lage des Objekts, d. h. des Gitters. Es zeigt sich, dass diese Faktoren keinen Einfluss auf die Asymmetrie haben. Es ist mir bis jetzt nicht gelungen, den Grund dieser Abweichung der Theorie vom Experiment zu erklären. Trotzdem seien im folgenden die rechnerischen Resultate für einen Fall angegeben:

§ 11. Ein i[tes] Maximum und das Centralbild.

Im folgenden wird die Wirkung des nullten und des i[ten] Maximums rechts betrachtet.

Nach Gleichung [28] ergibt sich für die Intensität:

$$I_2 = \mathrm{const.}_2 \left\{ \left[2\int\limits_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} + \int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \cos\frac{x\omega}{a} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\int\limits_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega . \frac{\sin\omega}{\omega} . \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} . \sin\frac{x\omega}{a} \right]^2 \right\} .$$

Das Integral mit $\sin \frac{x\omega}{a}$ verschwindet für das nullte Maximum, da die Integrationsgrenzen in dem Falle symmetrisch zu Null liegen.

Nach der bekannten Transformation bekommen wir :

$$I_2 = 4\mathrm{const.}_2 \left[\left(1 + (-1)^{(N-1)i} . \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left((-1)^{(N-1)i} . \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \sin\frac{2\pi xi}{\gamma} \right)^2 \right] . J^2 =$$

$$= 4\mathrm{const.}_2 \left[1 + \left(\frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right)^2 + (-1)^{(N-1)i} . 2 . \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} \right] J^2 .$$

Um den Verlauf der Intensität näher zu untersuchen, betrachten wir den Faktor A:

$$A = 1 + \left(\frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right)^2 + (-1)^{(N-1)i} . 2 . \frac{\sin\frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} . \cos\frac{2\pi xi}{\gamma} .$$

Die erste Ableitung $\frac{\delta A}{\delta x}$ dieses Faktors ist:

$$\frac{\delta A}{\delta x} = -(-1)^{(N-1)i}.2.\frac{\gamma}{2\pi i}\,\frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}}.\sin\frac{2\pi x i}{\gamma}.$$

Die Intensität verläuft cosinusartig und in den Punkten:

$$x = \varkappa.\frac{\gamma}{2i};\ (\varkappa = 0,1,2\ldots)$$

befinden sich die Extremalstellen. Die Maxima sind:

$$\text{Max.}I_2 = 4\text{const.}_2\left[1+\frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}}\right]^2;$$

die Minima

$$\text{Min.}I_2 = 4\text{const.}_2\left[1-\frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}}\right]^2.$$

In jedem γ-Intervall wird das Abbild also i Maxima haben. Die Lage der Maxima ist unabhängig von N, wenn i grade ist, aber abhängig von N, wenn i ungrade ist.

Jetzt hat also das Abbild dieselbe Form, wie in dem Falle, dass beiderseits die i^{ten} Maxima zum nullten Maximum hinzukommen. Nur sind in dem obigen Falle keine Zwischenmaxima möglich.

Die Figur 28 zeigt den Verlauf der Intensität für $i = 2$.

Schluss.

Wir fassen kurz die Resultate dieser Arbeit zusammen:

Wenn wir in die Objektebene eines optischen Systems (Mikroskop) ein Gitter von der Spaltzahl N bringen, so besteht, wie schon bekannt, das primäre Beugungsbild aus einer Reihe von Hauptmaximis zwischen denen eine Anzahl (N—2) Nebenmaxima liegen (siehe Fig. 5, 6).

Das Verhältnis der Intensität eines nahe an einem Hauptmaximum liegenden Nebenmaximums zum Hauptmaximum strebt mit wachsendem N bei konstanter Breite des Gitters einem bestimmten Grenzwert zu, der für das i^te^ Nebenmaximum gleich $\frac{4}{(2i+1)^2\pi^2}$ ist.

Das sekundäre Abbild ist abhängig von der Abblendung des primären Bildes und kann bei verschiedener Abblendung durchaus verschiedene Formen annehmen.

Folgende Fälle wurden genauer betrachtet:

I. Alle seitlichen Maxima im primären Beugungsbilde eines Gitters werden abgeblendet und das ungebeugte Centralbild kommt allein zur Wirkung. In diesem Falle stellt sich das sekundäre Abbild des Gitters als verbreiterte strukturlose Fläche dar, deren Helligkeit nach den Rändern von der Mitte aus immer mehr abnimmt. Zu beiden Seiten der hellen Fläche finden wir Nebenmaxima von ganz geringer Intensität. Fig. 7.

II. Wenn wir zu dem Centralbilde noch einige Nebenmaxima rechts und links hinzufügen, so ergeben sich Intensitätsschwankungen in der eben erwähnten Fläche und der Intensitätsabfall an den Rändern wird steiler. Fig. 8.

III. Lassen wir bei der Bilderzeugung das Centralbild fort, sodass nur die beiden i^{ten} Hauptmaxima zur Wirkung kommen, so ergibt sich ein unähnliches Abbild des Gitters. Wir sehen 2Ni Striche auftreten, während in Wirklichkeit das Objekt nur N Gitterstäbe besitzt. Der Intensitätsabfall vom Maximum zum Minimum erfolgt nach dem Gesetz $\cos^2 u$. Fig. 9.

IV. Kommt zu den beiden i^{ten} Maximis noch das Nullte hinzu, so bekommt das Abbild eine Struktur, und zwar ist die Anzahl der Gitterstriche im Abbild gleich Ni und die Maxima und Minima erscheinen gleich breit. Vom Maximum zum Minimum ist der Lichtabfall allmählich. In der Mitte der Minima gibt es unter Umständen noch sekundäre Maxima. Fig. 10, 11.

V. Kommen nur die i^{ten} und $2i^{ten}$ Maxima zur Wirkung und besteht die Ungleichung

$$1 > \left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right|$$

so sehen wir in jedem γ-Intervall 2i Maxima, die gleich weit von einander entfernt sind, die aber abwechselnd heller und dunkler erscheinen. Fig. 12, 13.

Besteht aber die Ungleichung

$$1 < \left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right|$$

und liegt der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ im ersten oder dritten Quadranten so zeigt das Abbild des Gitters in jedem γ-Intervall i gleich starke und gleich von einander entfernte Maxima. Zu beiden Seiten eines jeden Maximums liegen noch symmetrisch zwei kleinere Nebenmaxima. In der Mitte von je zwei Nebenmaximis liegt ein schwaches, unvollkommenes Minimum, Fig. 14, 15.

Liegt der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ im zweiten oder vierten Quadraten, dann ist das Abbild ähnlich gestaltet wie oben. Fig. 16, 17.

VI. Lassen wir die beiden i^{ten} und die beiden $2i^{ten}$ Maxima mit dem Nullten zusammenwirken und besteht die Ungleichung.

$$1 > \left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right|$$

So sind in jedem Gitterintervall i Haupt-Streifen vorhanden. Unter Umständen gibt es auch noch Zwischenstreifen. Fig. 18, 19, 20, 21.

Besteht dagegen die Ungleichung

$$1 < \left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right|$$

und liegt dabei der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ im ersten oder dritten Quadranten, so finden sich in jedem γ-Intervall 2i Maxima. Sie sind abwechselnd stärker und schwächer, und auch hier können Zwischenmaxima auftreten. Fig. 22, 23, 24, 25.

Liegt bei bestehender Ungleichung $1 < \left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right|$ der Winkel $\frac{2\pi a i}{\gamma}$ aber im zweiten oder vierten Quadranten, so gibt es 2 i Maxima in jedem Intervall, je nach den Umständen erscheinen auch Zwischenmaxima. Fig. 26, 27.

VII. Blenden wir unsymmetrisch ab und zwar alle Maxima bis auf das nullte und i^te^, so hat das Abbild i Maxima in jedem Gitterintervall. Der Unterschied dieses Falles von dem Falle, wo beide i^te^ mit dem nullten Maximum zusammenwirken, besteht nur darin, dass jetzt Zwischenmaxima unmöglich und die minima nicht vollständig sind. Fig. 28.

Bei der asymmetrischen Abblendung soll der Theorie nach das Abbild im γ-Intervall symmetrisch sein zu der Mitte dieses Intervalls. Doch zeigt das Experiment asymmetrische Bilder. Diese Asymmetric ist, wie das Experiment gezeigt hat, unabhängig von der Art des Lichtes und der Beleuchtung.

Am Schluss meiner Arbeit möchte ich Herrn Professor Dr. Lummer meinen besonderen Dank aussprechen für die Anregung zu der vorhergehenden Arbeit und für das grosse Interesse, das er wie auch Herr Professor Dr. Pringsheim für diese Untersuchung gezeigt hat.

Ebenso hat Herr Dr. Reiche mich in liebenswürdiger Weise bei der Arbeit unterstützt. Es sei mir daher gestattet ihm auch an dieser Stelle für die wertvollen Ratschläge zu danken, die er mir hat zu Teil werden lassen.

Lebenslauf.

Ich, Mieczyslaw Wladyslaw Wolfke, bin am 29. Mai 1883 in Lask (Russisch-Polen), als Sohn des Kreis-ingenieurs Karl Wolfke und seiner Frau Lucyna v. Kosminska, geboren. Ich bin russischer Staatsangehöriger, römisch-katholischer Konfession. Vom Jahre 1892 bis 1899 besuchte ich das philologische Gymnasium zu Czenstochowa (Russisch-Polen), von da an bis zum Jahre 1901 die Oberrealschule in Sosnowice, wo ich das Zeugnis der Reife erhielt. Nachdem ich daselbst noch Ergänzungsklasse durchgemacht habe, und das Examen abgelegt habe, welches zum Eintritt in alle Universitäten berechtigt, habe ich mich im Jahre 1902 bei der Fakultät „Faculté des Sciences“ in Liège immatrikulieren lassen, wo ich bis zum Jahre 1904 studierte und die Examina der „Candidature“ abgelegt habe. Während dieser Zeit arbeitete ich in dem physikalischen Laboratorium des Herrn Prof. De-Heen. In den Jahren 1904—1907 habe ich an der Pariser Universität Vorlesungen gehört und in Laboratorien gearbeitet und war dort bis zum Jahre 1908 immatrikuliert. In dieser Zeit veröffentlichte ich eine Arbeit: „L'électron considéré comme un centre des pressions dans l'éthèr“. Seit dem Jahre 1907 habe ich am hiesigen physikalischen Institut bei Herrn Prof. Dr. O. Lummer gearbeitet und mich im Jahre 1908 hier bei der Philosophischen Fakultät immatrikulieren lassen.

Während meines gesamten Studienganges hörte ich die Vorlesungen folgender Herren Professoren:

Andoyer, Appell, Bouty, Curie †, Goursat, De-Heen, Langevin, De Locht, Lippmann, Lummer, Meurice, Moissan †, Neuberg, Le Paige, Painlèvè, Perrin, Pellat, Spring.