M. CANTOR

POLITISCHE ARITHMETIK

ODER

ARITHMETIK

DES TÄGLICHEN LEBENS

CANTOR, POLITISCHE ARITHMETIK

POLITISCHE ARITHMETIK

ODER

DIE ARITHMETIK

DES TÄGLICHEN LEBENS

VON

MORITZ CANTOR

S. Dickstein
Grudzień 1898

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1898

Vorwort.

Seit einer langen Reihe von Jahren halte ich jeden Winter an der Universität Heidelberg eine zweistündige Vorlesung für Kameralisten, welche unter dem Namen der **Politischen Arithmetik** angekündigt wird. Oft befragt, ob ich ein Buch über diesen Gegenstand empfehlen könne, mufste ich immer verneinend antworten, nicht als ob kein Werk über politische Arithmetik im Drucke erschienen wäre, aber weil keines alles enthält, was ich in jenen Vorlesungen behandle. Ich entschlofs mich, die allmählich entstandenen Vorlesungsnotizen zu veröffentlichen, und während ich sie zur Herausgabe vorbereitete, kam ich zur Vermutung, das so entstehende kleine Buch möchte auch über den engen Kreis kameralistischer Leser hinaus ein wirkliches Bedürfnis zu befriedigen imstande sein.

Heutzutage wird es fast für jedermann notwendig sein, etwas von den Rechnungsweisen des auf Kauf und Verkauf sich beschränkenden Börsengeschäftes zu verstehen, so entbehrlich, ja so schädlich unter Umständen die Kenntnis derjenigen Geschäftsformen sich erweisen kann, welche dem Börsenspiele eigentümlich sind. In diesem Büchlein findet der Leser Auskunft über das Eine unter absichtlicher Vermeidung des Anderen, es sei denn, dafs man das Promessengeschäft als Börsenspiel betrachte, welches vielmehr eine Abart der Lotterie ist. Gemeinde- und Staatsverwaltung lassen es wünschenswert erscheinen, etwas von der Aufnahme und Heimzahlung von Anlehen zu wissen. Hier sind diese Dinge behandelt. Das Versicherungswesen ist in den Vordergrund des modernen Lebens getreten. Ich glaube kaum, dafs man sich anderwärts darüber in so gedrängter Kürze Auskunft verschaffen kann wie hier. Bei manchen von den behandelten Gegenständen ist eine Beziehung auf das binnen kurzem in Rechtskraft tretende Bürgerliche Gesetzbuch für das Deutsche Reich erforderlich. Ich erfülle eine mir angenehme Pflicht, indem ich meinen Sohn, Rechtsanwalt Dr. **Otto Cantor** in Karlsruhe, als meinen kundigen Ratgeber und Mitarbeiter nach dieser Richtung nenne. Logarithmisches Rechnen ist

a*

nicht jedermanns Sache. In einem Anhange finden sich ausgerechnete Tafeln von $1{,}0\,p^n$ und $1{,}0\,p^{-n}$ für die drei gegenwärtig üblichsten Zinsfüſse 3, $3\frac{1}{2}$ und 4 Prozent über sämtliche Jahre von $n = 1$ bis $n = 100$, sodaſs Logarithmen fast überall entbehrlich werden. Ein solcher Inhalt rechtfertigt vielleicht meine oben ausgesprochene Vermutung.

Zweierlei Bedingungen waren allerdings zu erfüllen, wenn mein Buch seinem erweiterten Zwecke sollte genügen können. Es muſste lesbar geschrieben, es muſste zu verhältnismäſsig niedrigem Preise käuflich sein. In letzterer Beziehung hat das Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung wohl das überhaupt Mögliche geleistet. Darüber zu entscheiden, ob ein lesbares Buch vorliegt, ist Sache des Lesers, nicht des Verfassers. Ich kann nur sagen, daſs ich mir redliche Mühe gegeben habe, verständlich zu bleiben, wenn der Gegenstand es auch mit sich brachte, daſs mathematische Formeln nicht überall vermieden werden konnten. Eingestreute Beispiele dienen zu deren Erläuterung, sodaſs sie, wie ich hoffe, dem nichtmathematischen Leser kein unübersteigliches Hindernis bieten werden. Überdies besteht zwischen den einzelnen Kapiteln ein verhältnismäſsig loser Zusammenhang, sodaſs man über Unverstandenes hinwegeilend bald wieder zu leichteren Gegenständen gelangt. Mathematische Leser aber, Lehrer an Mittelschulen z. B., welche in der Lage sind mit ihren Schülern Zinseszins- und Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu behandeln, werden die verhältnismäſsige Breite meiner Darstellung sowie die nicht überall vollkommene strenge Beweisführung zu entschuldigen haben. Alle Leser zu befriedigen ist unmöglich, und darum glaubte ich eine Vermittlung zwischen einander vielfach widerstreitenden Neigungen anstreben zu müssen.

Heidelberg, Oktober 1898.

Moritz Cantor.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Einfacher Zins.

Nr. 1—30. S. 1—32.

Zweites Kapitel.

Zusammengesetzter Zins.

Drittes Kapitel.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Nr. 50—68. S. 50—70.

Viertes Kapitel.

Von den Lotterieanlehen.

Nr. 69—76. S. 70—80.

Fünftes Kapitel.

Versicherungswesen.

Nr. 77—83. S. 80—87.

Sechstes Kapitel.

Sterblichkeitstafeln.

Nr. 84—96. S. 87—99.

Siebentes Kapitel.

Einfache Lebensversicherung und sofort beginnende vorschüssige Rentenversicherung.

Nr. 97—106. S. 100—113.

Achtes Kapitel.

Dividendenberechnung.

Nr. 107—113. S. 114—121.

Neuntes Kapitel.

Weniger einfache Versicherungsarten auf Grundlage der Sterblichkeit.

Nr. 114—127. S. 122—134.

Anhang.

Erstes Kapitel.

Einfacher Zins.

1] Von den beiden der griechischen Sprache angehörenden Bestandteilen der Wortverbindung „Politische Arithmetik“ kommt der erste ähnlich im Griechischen vor. Nikolaus Rhabda von Smyrna stellte etwa in der zweiten Hälfte des 14. Jhdts. eine Sammlung von Rechenbeispielen zusammen, welcher er die Überschrift *Μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν* gab, welche dem deutschen Ausdrucke: *Methode der Rechenregeln aus dem bürgerlichen Leben* entspricht. Es sind teils Aufgaben, welche es mit einfachen oder zusammengesetzten Verhältnissen zu thun haben, teils solche, welche auf Gleichungen ersten Grades mit mehr als einer Unbekannten hinauslaufen.

Eine irgend nahe Verwandtschaft mit dem, was die Neuzeit politische Arithmetik nennt, ist nicht vorhanden. Weit eher läſst sich eine Verwandtschaft mit der heutigen politischen Arithmetik in Schriften erkennen, deren Name gleichzeitig auf Rechenkunst und Rechtsgelehrsamkeit hinweist. Marcus Morsheimer, seit 1572 Professor der Mathematik in Heidelberg, veröffentlichte 1558 eine *Disputatio juridica de rebus mathematicis*, welche ebenso hierher gehört, wie Johann Friedrich Polacks *Mathesis forensis*, die von 1734 bis 1770 vier Auflagen erlebte. Von den der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts angehörenden Schriften dürfte die 1845 gedruckte *Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen* von Ludwig Oettinger die weitaus empfehlenswerteste gewesen sein.

2] Der Inhalt dessen, was wir als politische Arithmetik benennen, ist kein ganz gleichförmiger, wird auch nicht von allen, die sich damit beschäftigen, in gleicher Weise begrenzt. Als allen Aufgaben der politischen Arithmetik gemeinsam kann die Anwendung der Zinsrechnung bezeichnet werden, und zwar der einfachen und der zusammengesetzten Zinsrechnung, nicht verbunden oder verbunden mit Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

3] Eine genauere Erörterung des Zinsbegriffes und seiner Berechtigung ist die Aufgabe nationalökonomischer Schriftsteller. Als Mathematiker dürfen wir uns mit folgender Darlegung des Sachverhaltes begnügen. Der gesamte gesellschaftliche Verkehr der Menschen beruht auf Leistung und Gegenleistung, die sich gegenseitig bedingen, so dafs die Gegenleistung nur ausnahmsweise infolge des ausgesprochenen oder stillschweigenden, freiwilligen oder erzwungenen Verzichtes des Leistenden auf Gegenleistung unterbleibt. Im allgemeinen wird also eine Gegenleistung auch stattfinden müssen, wenn ein Besitzstück aus einer Hand in eine andere übergeht, sei es dauernd, sei es auf eine vorübergehende Zeit. Im ersteren Falle heifst die Gegenleistung Kaufpreis, im letzteren Mietbetrag. Je mehr die Verkehrsverhältnisse von ihrer ursprünglichen Einfachheit einbüfsten, um so deutlicher erwies sich die Unmöglichkeit sachlicher und unmittelbarer Gegenleistungen. Man mufste einen allgemeinen Vermittler von Leistungen erfinden, und man nannte ihn Geld. Kaufpreis und Miete werden seitdem in Geld angegeben. Nachdem aber das Geld der Stellvertreter jeglicher Leistung geworden ist, mufs es auch möglich sein, Geld auf eine vorübergehende Zeit zu mieten. Was bei anderen Besitzstücken Mietbetrag heifst, wird beim Gelde, sofern ein solcher Mietbetrag ausdrücklich, unter Kaufleuten stillschweigend, bedungen ist, Zins genannt, während das zeitweise überlassene (geliehene) Geld den Namen Kapital führt, ohne dafs wir auf diese Weise jedes Kapital begrifflich erklärt denken dürfen. Das Wort Kapital entspricht dem lateinischen *caput*. Zins heifst auf lateinisch *fenus*, von einem verloren gegangenen mit φύω zusammenhängenden Zeitwort *feo*, oder *usura* die Nutzung, wobei nicht notwendigerweise an wucherische Ausbeutung (französisch *usure*) zu denken ist. Der griechische Name des Zinses ist τόκος von τέκω, τίκτω erzeugen, erzielen.

4] Die Gesetzgebung hat sich wiederholt gegen das Ausleihen von Geld unter der Bedingung einer Zinsvergütung ausgesprochen. Die *Lex Genucia* von 342 v. Chr. G. war ein ausdrückliches Zinsverbot. Das kanonische Recht schärfte im Mittelalter das gleiche Verbot ein, wufste aber persönliche Ausnahmen festzusetzen. Später wurde nur eine gewisse Höhe des Zinses mit einem Verbote belegt, dessen Übertretung unter Strafe an dem Zinsnehmer gestellt wurde. Diese Thatsachen vereinigt erweisen die Unmöglichkeit einer Beseitigung der Zinsverleihung, die in Wirklichkeit niemals durchgesetzt werden konnte. Zur Zeit des Cicero wurde für 100 geliehene Geldeinheiten ein Jahreszins von 48 solcher Einheiten bedungen, also 48 *pro centum*, woraus das Wort Prozent entstanden ist. Unter den ersten römischen Kaisern galt ein Zins von 25 Prozent für mäfsig. Später setzten die Kaiser den Jahreszins auf höchstens 12 Prozent, Justinian ihn auf höchstens 6 Prozent herab. Leonardo von Pisa, ein italienischer Kaufmann, hat in seinem *Liber Abaci* von 1202 augenscheinlich dem Leben entnommene Rechenbeispiele mit 20 Prozent im Jahre. Rechenbeispiele in indischen Werken wenig älterer Entstehung (etwa 1160) bedingen 60 Prozent im Jahre. Bei Nikolaus Rhabda kommen Zinsrechnungen überhaupt nicht vor, eine Bestätigung unserer Behauptung (Nr. 1), dafs seine politische Arithmetik der heutigen nicht verwandt sei. So wenig der menschliche Verkehr die Zinserhebung vermeiden kann, und so unwirksam sich in dieser Beziehung staatliche und kirchliche Gesetzgebung erwiesen hat, ebenso wirkungslos dürfte der Einwand gegen die Zinserhebung sein, der darin besteht, der Eigentümer des Geldes müsse dankbar dafür sein, wenn ein anderer ihn von der Mühe der Aufbewahrung entlaste, und er könne keine Vergütung dafür beanspruchen. Auch einen Höchstbetrag des Zinses kann, wenigstens wenn Staaten die Geldbedürftigen sind, kein Gesetz regeln. Der Höchstbetrag wie der Mindestbetrag des Zinses wechselt vielmehr fortwährend und richtet sich einesteils nach dem gerade herrschenden Geldüberflufs oder Geldmangel, andernteils darnach, wer der Geldbedürftige ist, sei es eine einzelne Persönlichkeit, sei es ein Gemeinwesen.

5] Die Regel zur Ermittelung des Zinses Z, welcher von einem Kapitale K_0 bei Berechnung von p Prozenten am Jahresende zu erheben ist, zeigt sich sofort mittels der Proportion $100 : K_0 = p : Z$. Man findet demnach

$$Z = \frac{p \cdot K_0}{100}.$$

Meistens stellt man die Frage nicht nach Z, sondern nach K_1 als dem Kapitale, zu welchem K_0 in Jahresfrist mittels Verzinsung zu p Prozent anwächst. Da aber $K_1 = K_0 + Z$, so hat man

$$K_1 = K_0 + \frac{p K_0}{100}$$

oder

$$K_1 = K_0 \cdot \frac{100 + p}{100}.$$

Man bedient sich häufig gewisser bequemer Abkürzungen. Statt des Wortes Prozent schreibt man %, ein Zeichen, welches durch die beiden links oben und rechts unten an dem von rechts oben nach links unten geneigten Striche angebrachten Nullen daran erinnern soll, dafs 100 aus einer 1 mit zwei Nullen besteht. In Übereinstimmung damit ist das aus einem Strich mit einer und zwei Nullen gebildete Zeichen ‰ für Promille, weil 1000 aus einer 1 mit drei Nullen besteht. Promille bedeutet, dafs eine gewisse Vergütung für je Tausend Einheiten eintreten soll. Eine weitere Abkürzung bezieht sich auf den Bruch $\frac{100 + p}{100}$. Wir bezeichnen ihn durch das mathematisch nicht zu rechtfertigende, aber im Gebrauche äufserst bequeme Zeichen $1,0p$. Darnach ist $K_1 = K_0 \cdot 1,0p$.

6] Ist die Zeit, für welche Zins zu bezahlen ist, nicht genau ein Jahr, so ist der nächstliegende Gedanke der, den Zins der Zeit proportional sein zu lassen, mithin den Zins von K_0 zu p% für n Jahre

1*

als $\frac{npK_0}{100}$ zu rechnen, und somit, wenn K_n das Kapital bedeutet, zu welchem K_0 mittels Verzinsung zu p % anwächst, zu schreiben:

$$K_n = K_0 \cdot \frac{100 + np}{100}.$$

Aus dieser Gleichung folgen augenscheinlich drei andere

$$K_0 = \frac{100\,K_n}{100 + np}$$

$$n = \frac{100\,(K_n - K_0)}{pK_0}$$

$$p = \frac{100\,(K_n - K_0)}{nK_0}.$$

Besteht die Zeit n, während deren Dauer das Kapital K_0 zu verzinsen ist, aus t Tagen, so wird die Rechnung einigermafsen langwierig.

Seien etwa ℳ 436,45 am 17. März ausgeliehen, am 24. Juni des gleichen Jahres heimbezahlt. Man sucht den Zins zu 4 % unter der ein für allemal gemachten Voraussetzung, dafs für den Tag der Rückzahlung selbst kein Zins erhoben werden soll. Die zinspflichtige Zeit besteht aus 15 Tagen im März, 30 im April, 31 im Mai, 23 im Juni, zusammen aus 99 Tagen oder $\frac{99}{365}$ Jahren. Demnach ist

$$Z = \frac{99}{365} \cdot \frac{4 \cdot 436{,}45}{100} = \frac{1\,728\,342}{365\,000} = 4{,}73.$$

7] Wenn auch diese Rechnung in manchen Fällen, z. B. bei notariellen Teilungen, bei gerichtlichen Zinsermittelungen u. dergl., vorschriftsmäfsig so, wie wir sie geschildert haben, auszuführen ist, so wird doch meistens nach allgemeiner Übung, oder mit dem hierfür gebräuchlichen Fremdworte nach der Usance, anders gerechnet. Man nimmt nämlich jeden Monat ohne Rücksicht auf seine Kalenderdauer als 30tägig und dementsprechend das Jahr als 360tägig an. Die zinspflichtige Zeit des vorigen Beispiels wird darnach 14 Tage im März, 30 im April, 30 im Mai, 23 im Juni, zusammen 97 Tage oder $\frac{97}{360}$ Jahre. Darnach ist $Z = \frac{97}{360} \cdot \frac{4 \cdot 436{,}45}{100} = \frac{1\,693\,426}{360\,000} = 4{,}70$. Allerdings ist gegen das Ergebnis der vorhergehenden Rechnung ein Unterschied von 3 ₰, aber dieser Unterschied ist zu gering, als dafs er dem bequemeren Verfahren gegenüber mafsgebend wäre, insbesondere da die Rechnung unter Festhaltung des 30tägigen Monats noch zwei wesentliche Erleichterungen zuläfst.

8] Die erste Erleichterung betrifft die Zahl der zinspflichtigen Tage. Man kann den 17. März als $\frac{17}{\text{III}}$, den 24. Juni als $\frac{24}{\text{VI}}$ bezeichnen.

Zieht man beide bruchartig geschriebene Daten so von einander ab, dafs Zähler von Zähler, Nenner von Nenner abgezogen wird, so entsteht die Differenz $\frac{24-17}{\mathrm{VI}-\mathrm{III}} = \frac{7}{\mathrm{III}}$ oder III Monate und 7 Tage d. h. 97 Tage wie oben. Ist das Enddatum der letzte Tag eines Monats, so mufs er als 30. des betreffenden Monats bezeichnet werden, ohne Rücksicht auf dessen kalendermäfsige Dauer. Vom 9. Juli bis zum letzten August sind also $\frac{30}{\mathrm{VIII}} - \frac{9}{\mathrm{VII}} = \frac{21}{\mathrm{I}} = 51$ Tage, nämlich 22 im Juli und 29 im August. Wäre vom 24. März bis zum 17. Juni zu rechnen, also $\frac{24}{\mathrm{III}}$ von $\frac{17}{\mathrm{VI}}$ abzuziehen, was in den Zählern (Tagesdaten) nicht angeht, so schreibt man anstatt des 17. Juni den 47. Mai oder $\frac{17}{\mathrm{VI}} = \frac{47}{\mathrm{V}}$. Die zu bildende Differenz ist alsdann $\frac{47-24}{\mathrm{V}-\mathrm{III}} = \frac{23}{\mathrm{II}}$ oder II Monate und 23 Tage d. h. 83 Tage. Die weitläufigere Rechnung wäre: 7 Tage im März, 30 im April, 30 im Mai, 16 im Juni, zusammen wieder 83 Tage. Es leuchtet ein, dafs man eine ähnliche Veränderung mit den römischen Zahlen vorzunehmen hat, wenn man es mit Monaten verschiedener Jahrgänge zu thun hat, indem zu der Monatszahl des folgenden Jahres XII hinzugefügt wird. Die Zeit vom 6. Oktober $\left(\frac{6}{\mathrm{X}}\right)$ eines Jahres bis zum 8. März $\left(\frac{8}{\mathrm{III}}\right)$ des folgenden Jahres wird gefunden als

$$\frac{8-6}{\mathrm{XV}-\mathrm{X}} = \frac{2}{\mathrm{V}} = 152 \text{ Tage},$$

oder 25 Tage im Oktober, je 30 im November, Dezember, Januar, Februar, 7 Tage im März geben zusammen wieder 152 Tage.

9] Die zweite Erleichterung besteht in der Einführung eines Normalzinsfufses, bei dessen Voraussetzung ein sogenannter Zinsfaktor benutzt werden kann, und auf welchen der wirklich bedungene Zinsfufs zurückgeführt wird. Ist z. B. $p = 4$ und besteht die Zinsperiode aus t Tagen des 360tägigen Jahres oder aus $\frac{t}{360}$ Jahren, so ist

$$Z = \frac{t}{360} \cdot \frac{4K_0}{100} = \frac{tK_0}{9000}.$$

Der Bruch $\frac{1}{9000}$ ist hier der dem Normalzinsfufs von 4% entsprechende Zinsfaktor. Er liefert die Regel: der Zins zu 4% aus K_0 während t Tagen wird gefunden, indem man Kapital und Tage mit einander vervielfacht und das Produkt tK_0 durch 9000 dividiert. Ist ein anderer Zinsfufs ausbedungen, so beginnt man die Rechnung dennoch damit, den 4prozentigen Zins aufzusuchen. Das weitere Verfahren richtet sich nach der Höhe des bedungenen Zinsfufses, wie an einigen Beispielen gezeigt werden mag. Es ist $5 = \left(1 + \frac{1}{4}\right) 4$, $4\frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{8}\right) 4$, $4\frac{1}{5} = \left(1 + \frac{1}{20}\right) 4$, $3\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{8}\right) 4$, $3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) 4$. Nennt man nun zur kürzeren Bezeichnung Z_p den Zins zu p%, also Z_4 den nach der gegebenen Regel ermittelten 4prozentigen Zins, so ist:

$$Z_5 = Z_4 + \frac{1}{4} Z_4$$

$$Z_{4\frac{1}{2}} = Z_4 + \frac{1}{8} Z_4$$

$$Z_{4\frac{1}{5}} = Z_4 + \frac{1}{20} Z_4$$

$$Z_{3\frac{1}{2}} = Z_4 - \frac{1}{8} Z_4$$

$$Z_3 = Z_4 - \frac{1}{4} Z_4 .$$

Solche Zurückführungen gesuchter Ergebnisse auf schon Ermitteltes durch Addition oder Subtraktion einfacher Bruchteile des Ermittelten übten nach ursprünglich altägyptischem Muster vorzugsweise italienische Kaufleute, durch welche das Verfahren spätestens im 15. Jahrhundert in ganz Europa bekannt wurde. Bei der Wahl des Normalzinsfufses hat man ebensowohl darauf zu achten, dafs er einen bequemen Zinsfaktor liefere, als dafs er nicht gar zu sehr von dem gerade üblichen Zinsfufse sich entferne. Namentlich mit Rücksicht auf letzteren Wunsch hat der Normalzinsfufs mehrfach gewechselt. Im 16. Jahrhunderte wurde bei Zinsrechnungen 10% als Normalzinsfufs $\left(\frac{1}{3600}\right.$ als Zinsfaktor$\left.\right)$ angewandt, in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts 6% als Normalzinsfufs $\left(\frac{1}{6000}\right.$ als Zinsfaktor$\left.\right)$. Gegenwärtig am Ende des 19. Jahrhunderts dürfte 4% der Normalzinsfufs sein. In Übereinstimmung mit dieser Annahme ordnet das Bürgerliche Gesetzbuch für das Deutsche Reich in § 288 an: Eine Geldschuld ist während des Verzugs mit 4 vom 100 für das Jahr zu verzinsen. Kann der Gläubiger aus einem anderen Rechtsgrunde höhere Zinsen verlangen, so sind diese fort zu entrichten. Neben 4% als Normalzinsfufs $\left(\frac{1}{9000}\right.$ als Zinsfaktor$\left.\right)$ wird auch wohl mit $3\frac{3}{5}$% als Normalzinsfufs $\left(\frac{1}{10\,000}\right.$ als Zinsfaktor$\left.\right)$ gerechnet. Die Zurückführungsgleichungen sind alsdann

$$Z_{4\frac{1}{2}} = Z_{3\frac{3}{5}} + \frac{1}{4} Z_{3\frac{3}{5}}$$

$$Z_{4\frac{1}{5}} = Z_{3\frac{3}{5}} + \frac{1}{6} Z_{3\frac{3}{5}}$$

$$Z_4 = Z_{3\frac{3}{5}} + \frac{1}{9} Z_{3\frac{3}{5}}$$

$$Z_{3\frac{1}{2}} = Z_{3\frac{3}{5}} - \frac{1}{36} Z_{3\frac{3}{5}}$$

$$Z_3 = Z_{3\frac{3}{5}} - \frac{1}{6} Z_{3\frac{3}{5}}.$$

Jedenfalls ist bei häufig vorkommenden Zinsrechnungen sehr zu empfehlen, sich an einen Normalzinsfuſs und den entsprechenden Zinsfaktor nebst den zugehörigen Zurückführungsgleichungen zu gewöhnen.

10] Abgesehen von dem Falle der Zinszahlung für gegen bedungene Vergütung vorgeschossenes Geld treten Zinsrechnungen auch sonst zahlreich auf. Von Wichtigkeit ist beispielsweise deren Anwendung bei laufenden Rechnungen, welche ebenso wie der damit zusammenhängende Checkverkehr sich in Deutschland, wenn auch noch nicht in dem Grade wie in manchen anderen Ländern (England, Frankreich, Amerika), einzubürgern beginnen. Der Privatmann oder auch der Geschäftsmann, dessen Geschäft aber nicht die Vermittelung von Einnahmen und Ausgaben in baarem Gelde zum eigentlichen Inhalte hat, setzt sich mit einem Bankgeschäfte in Verbindung, welches sich eben jene Vermittelung zur Aufgabe stellt, und wird dessen Kunde. Der Kunde giebt seine Baareinnahmen der Bank in Verwahrung oder beauftragt sie mit dem Einzug derselben. Dafür erhält er von der Bank ein sogenanntes Checkbuch, dessen einzelne Blätter Checks oder Anweisungen an die Bank, an eine schriftlich auszufüllende Persönlichkeit eine wiederum schriftlich auszufüllende Summe zu zahlen, enthalten. Der Kunde hat dadurch die Bequemlichkeit, nicht viel Baargeld in seiner Wohnung aufheben zu müssen, beim Bezahlen von Rechnungen nicht in Wechselverlegenheiten zu kommen, keine Veruntreuung von Seiten von Persönlichkeiten, welche er mit dem Bezahlen der Rechnungen beauftragt, befürchten zu müssen. Die Bank übernimmt dagegen die ihr so verursachte Mühe aus zwei Gründen. Der eine Grund ist der, daſs sie ziemlich sicher ist, ein Kunde, welcher mit ihr in laufender Rechnung und Checkverkehr steht, werde sich ihrer auch bei für die Bank lohnenden Geschäften, beim Ankauf oder Verkauf von Wertpapieren, von Wechseln, von fremden Geldsorten bedienen; der zweite Grund ist der, daſs der Bank, in deren Verwahrung die gröſseren Einnahmen des Kunden zu bleiben pflegen, erspart bleibt auf andere oftmals kostspielige Weise für einen stets vorhandenen Vorrat an barem Gelde zu sorgen. Die Bank schlägt wenigstens in Deutschland diese ihre Vorteile so hoch an, daſs sie dem Kunden eine wenn auch nicht hochgegriffene Verzinsung des ihr anvertrauten Geldes gewährt, während die englischen Bankhäuser dieses nicht thun. Jedenfalls aber giebt die Bank ihrem Kunden von Halbjahr zu Halbjahr, am 1. Januar und am 1. Juli, einen Auszug seiner laufenden Rechnung, welcher den dem Italienischen entstammenden Namen Contocorrent (d. h. laufende Rechnung) führt, und von dessen Herstellung wir reden wollen. In England ist dieselbe sehr einfach. Da keinerlei Zinsvergütung von seiten der Bank an den Kunden stattfindet, eine Zinsvergütung von seiten des Kunden an die Bank aber dadurch ausgeschlossen ist, dafs die Bank keine Zahlung für den Kunden mehr leistet, sobald sein Guthaben bei ihr erschöpft ist, braucht am Ende des Halbjahrs nur die Summe der Auslagen von der Summe der Einlagen abgezogen zu werden, um das Schlufsguthaben des Kunden zu ermitteln. Verwickelter ist die Herstellung des Contocorrentes in Deutschland bei gegenseitiger Zinsvergütung, und ein Beispiel soll uns dienen, die nötigen Erläuterungen beizufügen.

11] Siehe nächste Seite.

12] Die Bank stellt das Contocorrent auf den Namen des Kunden, und auf ihn beziehen sich die links und rechts oben angegebenen Wörter Soll (mitunter *Debet*) und Haben (mitunter *Credit*). Ersteres bedeutet die Schuld des Kunden an die Bank, letzteres sein Guthaben bei der Bank. Das Haben beginnt mit dem Saldo der letzten Rechnung, d. h. dem Guthaben, mit welchem das am Schlusse des ersten Halbjahrs ausgestellte Contocorrent abschlofs. Hätte sich damals eine Schuld des Kunden herausgestellt, was in dem Falle möglich ist, dafs die Bank für den Kunden auch über sein Guthaben hinaus Zahlung leistet, ihm also, wie man sich ausdrückt, Kredit gewährt, so würde ein Saldo links im Soll den ersten Posten unter dem Datum des 1. Juli bilden. Die übrigen Posten im Haben bis zum 29. Dezember einschliefslich bedürfen an dieser Stelle keine nähere Erklärung (das Wort Coupon wird uns in Nr. 17 beschäftigen). Ebenso verständlich sind die Posten im Soll bis zum 17. Oktober einschliefslich. Addiert man die betreffenden Posten im Soll und im Haben:

400.—	586.65
1083.25	974.35
251.39	377.28
118.12	400.—
300.—	462.13
81.90	2800.41
2234.66	

und zieht die kleinere Summe 2234,66 des Soll von der gröfseren 2800,41 des Haben ab, so bleibt ein Saldo im Haben von

$$2800{,}41 - 2234{,}66 = 565{,}75,$$

und diesen Betrag führt das Contocorrent im Soll unter dem 31. Dezember als Kapitalsaldo an. Wäre keinerlei Zinsvergütung ausbedungen, so wären von den 565,75 nur noch die im Soll unter dem 31. Dezember gebuchten 1,36 für Porto und Spesen abzuziehen,

Laufende Rechnung zwischen der Nn.-Bank und Herrn X. in Z.

Herr X. in Z.

Soll | *Haben*

			Tage	Zahlen	ℳ	₰				Tage	Zahlen	ℳ	₰
Juli	5	An Bar erhalten.	5	20	400	—	Juli	1	Per Saldo letzter Rechnung			586	65
August	14	„ Ankauf von Wertpapieren	44	477	1083	25	„	31	„ Verkauf von Wertpapieren	30	292	974	35
September	6	„ Check Nr. 3816 . . .	66	166	251	39	September	1	„ Verschiedene Coupons.	61	230	377	28
Oktober	3	„ Check Nr. 3817 . . .	93	110	118	12	„	26	„ Wechsel auf A. & Co. zum Einkassieren	86	344	400	—
„	5	„ Bar erhalten.	95	285	300	—	Dezember	29	„ Verschiedene Coupons	179	827	462	13
„	17	„ Check Nr. 3818 . . .	107	88	81	90	„	31	„ Zahlensaldo zu 2%		471	2	61
Dezember	31	„ Kapitalsaldo von ℳ 565,75	180	1018									
„	31	„ Porto und Spesen .			1	36							
„	31	„ Saldo der Rechnung			567	—							
				2164	2803	02					2164	2803	02
							Januar	1	Saldovortrag			567	—

und der Rest mit 564,39 wäre der für die nächste Rechnung vorzumerkende Saldo, der sogenannte Saldovortrag. Dafs dem nicht so ist, beruht auf der Zinsvergütung, vermöge deren das Guthaben des Kunden sich um die im Haben unter dem 31. Dezember gebuchten 2,61 auf 567 erhöht und diese 567 erscheinen im Soll unter dem 31. Dezember als Saldo der Rechnung und ebenso unterhalb der abgeschlossenen Rechnung im Haben unter dem 1. Januar als Saldovortrag. Man sollte eigentlich erwarten, dafs die Summe im Soll (ohne den letzten Saldoposten) mit 2236,02 von der Summe im Haben mit 2803,02 abgezogen würde und 567 als Rest erschiene. Thatsächlich macht man es auch so, aber eine das Abziehen fordernde Ungleichheit der beiderseitigen Summen soll vermieden werden. Die Rechnung soll bilanzieren, d. h. im Gleichgewichte stehen, mit gleichen Summen im Soll und im Haben endigen, und aus diesem rein formalen Grunde wird ein Saldo der Rechnung auf der einen Seite (in unserem Beispiele links) addiert, welches nach abgeschlossener Rechnung auf der anderen Seite (in unserem Beispiele rechts) als Saldovortrag erscheint. Die Anerkennung des Saldovortrags von seiten des Kunden schafft die gesicherte Grundlage für die künftigen Geschäftsbeziehungen.

13] Wir haben nunmehr der Zinsberechnung im Contocorrente uns zuzuwenden. Der Kunde erhielt am 5. Juli *M.* 400 als Barzahlung. Er hat sie dem entsprechend bis zum letzten Dezember zu verzinsen. Laut Nr. 8 wäre die Anzahl der Tage

$$\frac{30}{\mathrm{XII}} - \frac{5}{\mathrm{VII}} = \frac{25}{\mathrm{V}} = 175 = 180 - 5\,.$$

Nun ist es vollständig gleichgültig, ob der Kunde der Bank den Zins für 175 Tage vergütet oder ob er seine Zinsvergütung auf 180 Tage ausdehnt unter Rückvergütung des Zinses für 5 Tage oder für so viele Tage als vom 1. Juli bis zum 5. Juli einschliefslich gezählt werden. Dem entsprechend wird für die am 14. August ausgelegten *M.* 1083,25 der Zins für 180 Tage vergütet unter Rückvergütung des Zinses für 44 Tage, welche vom 1. Juli bis zum 14. August einschliefslich gezählt werden. So in allen anderen Fällen, im Soll sowohl als im Haben. Dadurch ist die mit dem Worte *Tage* überschriebene Kolumne erklärt, und nur darauf ist vielleicht aufmerksam zu machen, dafs im Haben bei dem unter dem 31. Juli gebuchten Posten 30 Tage und nicht deren 31 angegeben sind, weil eben (wie in Nr. 8 auseinandergesetzt wurde) der 31. oder letzte Juli rechnungsmäfsig nur als 30. Tag des Monats gezählt werden kann. Der Zins wird gewonnen, indem man Kapital und Tag multipliziert und ihr Produkt wiederholt mit einem Zinsfaktor multipliziert, welcher ein echter Bruch ist, dessen Nenner mit dem bedungenen Zinsfufs sich ändert, aber in allen Fällen ein Vielfaches von 100 ist. Das Produkt aus Kapital, Tage und $\frac{1}{100}$ ist das, was man in der mit dem Worte *Zahlen* überschriebenen Kolumne liest. Beispielsweise ist $\frac{5 \cdot 400}{100} = 20$, $\frac{44 \cdot 1083,25}{100} = 476,63$, wofür 477 geschrieben wird u. s. w. Bei dem Saldo letzter Rechnung mit 586,65 ist weder die Kolumne Tage noch die Kolumne Zahlen ausgefüllt, weil diese Summe von der Bank ohne jede Rückvergütung während 180 Tage verzinst werden mufs. Hundertachtzigtägige Verzinsung hat also die Bank für die im Haben enthaltene Gesamtsumme von 2800,41, der Kunde für die im Soll enthaltene Gesamtsumme von 2234,66 zu leisten oder unter Wettschlagung gleicher Beträge hat die Bank den Kapitalsaldo von 565,75 während 180 Tage zu verzinsen, was der Zahl $\frac{180 \cdot 565,75}{100} = 1018,35$ entspricht, wofür im Soll im ersten unter dem 31. Dezember gebuchten Posten 1018 steht. Wiewohl diese Zahl 1018 sich links beim Soll findet, hat der Kunde sie zu fordern ebenso wie die anderen ebendort befindlichen Zahlen 20, 477 u. s. w. Ihre Gesamtsumme 2164 ist das Guthaben des Kunden. Die beim Haben gebuchten Zahlen 292, 230, 344, 827 mit der Gesamtsumme 1693 kann die Bank als ihr Guthaben wettschlagen, und bringt sie 1693 durch Addition von 471 zum Bilanzieren mit 2164, so steht jetzt mit Fug und Recht der Zahlensaldo 471 unter dem 31. Dezember im Haben des Kunden. Die Bank verzinst nach einem mit dem Kunden vereinbarten niedrigen Zinsfufs, z. B. von 2%. Da bei 4% der Zinsfaktor $\frac{1}{9000}$ war (Nr. 9), so ist bei 2% der Zinsfaktor $\frac{1}{18000}$. Mit $\frac{1}{100}$ ist schon bei Bildung der Zahlen multipliziert, mithin ist nur noch der Faktor $\frac{1}{180}$ zu berücksichtigen, oder $\frac{1}{180}$ des Zahlensaldo, beziehungsweise $\frac{471}{180} = 2,61$ ist das Zinsguthaben des Kunden. Jetzt endlich werden auch die letzten mit ℳ und ₰ überschriebenen Kolumnen durch Hinzufügung des letzten Posten im Soll (Saldo der Rechnung 567.—) zum Bilanzieren gebracht und derselbe Posten dient, wie in Nr. 12 gesagt wurde, als Saldovortrag im Haben des Kunden zur Eröffnung der neuen Rechnung. Hätte sich ein Zahlensaldo zu Lasten des Kunden, also in dessen Soll ergeben, so tritt ein höherer Zinsfufs, meistens von 5% ein.

14] Die Art der Zinsberechnung, welche wir hier auseinandergesetzt haben, heifst retrograde Zinsberechnung, weil sie auf den Anfangstermin des im Contocorrent berücksichtigten Zeitraums zurückgeht. Es böte keine besondere Schwierigkeit, eine von dem wirklichen Datum der Ein- und der Auszahlungen fortschreitende progressive Zinsberechnung eintreten zu lassen. Im Soll würde neben die am 5. Juli bar erhaltene ℳ 400 in die Kolumne Tage 175, in die Kolumne Zahlen 700 zu schreiben sein; neben die am 14. August zum Ankaufe von Wertpapieren angelegte ℳ 1083,25 käme in die Kolumne Tage 136, in die Kolumne Zahlen 1473 u. s. w.

Im Haben würde neben dem Saldo letzter Rechnung von *M.* 586,65 in der Kolumne Tage 180, in der Kolumne Zahlen 1056 stehen u. s. w. Die sämtlichen Zahlen wären

im Soll:	700	und im Haben:	1056
	1473		1462
	287		449
	103		376
	255		5
	60	Summe im Haben:	3348.
Summe im Soll:	2878		

Der Überschufs der Summe im Haben über die Summe im Soll wäre 3348 — 2878 = 470 mit nicht nennenswertem Unterschiede gegen das vorhin erhaltene Zahlensaldo 471. Dabei ist nicht zu verkennen, dafs der retrograden Zinsrechnung eine gewisse Künstlichkeit anhaftet. Sie mufs andere Vorzüge besitzen, welche bei ihrer Einführung den Ausschlag gaben, und diese bestehen in folgendem. Je bedeutender die Bank ist, je weiter der Kreis ihrer Kunden sich ausdehnt, um so schwerer ist die Arbeitslast zu bewältigen, welche die Ausfertigung der Contocorrente am Schlusse eines jeden Halbjahres dem Bankpersonale auferlegt. Man begrüfst deshalb freudig jede Möglichkeit, die Arbeit schon früher vorzubereiten, und diese gewährt die retrograde Zinsberechnung. Die beiden Kolumnen „Tage“ und „Zahlen“ können sofort beim ersten Eintragen eines Postens ausgefüllt werden und sie stehen alsdann jederzeit zum Gebrauche bereit, wenn das Contocorrent für den betreffenden Kunden ausgefertigt werden soll, sei es das regelmäfsige Halbjahrscontocorrent, sei es ein aufserordentliches Contocorrent, dessen Notwendigkeit bei dem durch den Tod oder durch irgend welche andere Beweggründe hervorgerufenen plötzlichen Abbruch der laufenden Rechnung zwischen einem Kunden und der Bank eintreten kann.

15] In unserem Mustercontocorrente (Nr. 11) kommt im Haben unter dem 31. Juli ein Posten „Verkauf von Wertpapieren“, im Soll unter dem 14. August ein Posten „Ankauf von Wertpapieren“ vor. Beide beziehen sich auf Schulden von Gemeinwesen. Wenn ein Gemeinwesen (eine politische oder konfessionelle Gemeinde, ein Verband von Gemeinden, eine Provinz, ein Staat) zu irgend einem Zwecke Geld aufzunehmen in der Lage ist, so übersteigt die in Anspruch genommene Summe in den meisten Fällen die Leistungsfähigkeit auch der allergröfsten Banken. Eine Bank oder häufiger eine Vereinigung von Banken, ein sogenanntes Konsortium, übernimmt zwar der Regel nach die Verpflichtung, die von dem Gemeinwesen beanspruchte Summe zu liefern, wendet sich aber alsdann an das grofse Publikum, sofern das Gemeinwesen nicht vorgezogen hat, selbst diesen Schritt zu thun. Bei allen Anlehen von Gemeinwesen, die man kurzweg Anlehen zu nennen pflegt, handelt es sich also in letzter Linie um die Eröffnung einer Subskription, sei es mit sei es ohne vorhergegangene Submission. In Frankreich wurde unter Kaiser Napoleon III. der erste Versuch mit unmittelbarer Subskription gemacht, welcher glänzend gelang. Andere Staaten folgten nach. Immerhin gehört ein grofses Gemeinwesen mit fest begründetem Kredit dazu, und ein Wagnis bleibt die Subskription immer. In manchen Staaten hat man sie durch ein drittes Verfahren ersetzt, durch freihändigen Verkauf neu gedruckter Wertpapiere, welche einem früher schon in das grofse Publikum gedrungenen Anlehen sich anschliefsen und insofern keine neue Gattung von Anlehen darstellen. Auch diese Begebungsweise hat den gut begründeten Kredit des geldbedürftigen Staates zur Voraussetzung, da das Anschliefsen neuer Schuldscheine an früher bestehende eine besondere Sicherung sei es der früheren, sei es der späteren Schuld durch Festlegung bestimmter Einnahmequellen zu ihren Gunsten unmöglich macht. Zwischen der unmittelbaren Subskription und der Submission ist ein wesentlicher Unterschied. Bei jener bestimmt das Gemeinwesen, unter welchen Bedingungen sie das Anlehen herausgeben, emittieren, will, und eine Änderung an den Emissionsbedingungen ist nicht möglich, nachdem die Aufforderung zur Subskription ergangen ist. Bei der Submission wendet sich das Gemeinwesen an die Banken und fordert sie auf, die Bedingungen zu nennen, unter welchen sie das Anlehen zu übernehmen gedenken. Man unterscheidet dabei abermals zwischen bedingter und unbedingter Submission. Bei der ersteren wendet sich das Gemeinwesen an eine gröfsere oder kleinere Anzahl ihm als gut fundiert und vertrauenswürdig bekannter Banken und bindet sich soweit, dafs es sich verpflichtet, das günstigste Anerbieten, welches zu einem angegebenen Zeitpunkte ihm gemacht ist, anzunehmen. Bei der letzteren hat jede Bank das Recht, ein Anerbieten einzureichen, und bei dem möglicherweise sehr verschiedenen Grade der Zuverlässigkeit der ein Gebot einreichenden, submissionierenden Banken mufs das Gemeinwesen sich die Entscheidung darüber vorbehalten, ob es überhaupt eines der ihm zu einem angegebenen Zeitpunkte gemachten Anerbieten, und welches derselben es annehmen will.

Zweierlei ist allerdings auch bei dem Submissionsverfahren, bei dem bedingten wie bei dem unbedingten, schon in der Aufforderung zur Submission enthalten: die Höhe des aufzunehmenden Anlehenbetrags und der Zinsfufs, zu welchem es verzinst werden will. Letzterer ist bis zu einem gewissen Grade Modesache. Bald ist im grofsen Publikum, auf welches es schliefslich bei der, sei es von dem Gemeinwesen selbst, sei es von den Banken, welche den Zuschlag des Anlehens erhalten haben, zu eröffnenden Subskription doch ankommt, dieser Zinsfufs, bald jener der beliebtere. Meistens hängt die Beliebtheit von der dermaligen Höhe der durchschnittlich gewährten Verzinsung ab, welche keineswegs mit dem Anlehenszinsfufs in vollständiger Übereinstimmung zu sein braucht, da die Ungleichheit durch den Kurs des Anlehens aufgehoben wird.

16] Wir haben den Ausdruck Kurs, dessen wir uns soeben bedienten, näher zu erläutern. Ein Wertpapier von der Art der Anlehensscheine ist seiner Bedeutung nach nichts anderes als ein über eine gewisse Summe ausgestellter Schuldschein des Gemeinwesens, und diese immer in runden Zahlen auftretende Summe ist der Nennwert des Anlehenscheins. In Deutschland giebt es solche Anlehenscheine zu ℳ 1000, zu ℳ 500, zu ℳ 200, auch der Nennwert von ℳ 300, von ℳ 150 kommt bei älteren Emissionen vor. Will man aber ein solches Wertpapier kaufen oder verkaufen lassen, was in bestimmten mit dem Namen Börse bezeichneten Räumen zu geschehen pflegt, so ist der Preis nur in den allerseltensten Fällen genau dem Nennwerte gleich. Statt dessen tritt ein fortwährend der Änderung unterworfener Umlaufwert ein, der meistens prozentual zu dem Nennwerte angegeben wird, und diese prozentuale Angabe heifst Kurs (oder in der Schreibweise des Börsengesetzes *Cours*). In bestimmten Zeiträumen wird der jedesmalige Kurs von den damit beauftragten Börsenbehörden aufgeschrieben und zur öffentlichen Kenntnis gebracht. Der Abdruck dieser Aufzeichnungen bildet das sogenannte Kursblatt. Die Gründe der Kursveränderung können mancherlei sein. Anlehen verschiedener Gemeinwesen geben in ihrem Kurse Verhältniszahlen für das Zutrauen, welches man der Zahlungsfähigkeit und Zahlungswilligkeit der Gemeinwesen entgegenbringt. Von Einflufs ist ferner, ob das Anlehen nur an wenigen oder an mehreren Börsen Gegenstand des Handels bildet, ob es unstatthaft, statthaft oder gar geboten ist, Mündelgelder in Wertpapieren der genannten Art anzulegen. Von Einflufs ist Geldmangel und Geldüberflufs, d. h. ob im Augenblick, sei es durch Ausgaben für sonstigen Handel und Industrie, sei es durch ängstliches Aufbewahren, dem Börsenpublikum gröfsere Vorräte an barem Gelde entzogen werden, oder ob sie ihm zuströmen; Geldmangel bringt ein Fallen, Geldüberflufs ein Steigen der Kurse hervor. Des weiteren bringt jedes politische Ereignis, aber auch jedes Naturereignis, welches auf die Einnahmen oder auf die Ausgaben des betreffenden Gemeinwesens einen günstigen oder einen ungünstigen Einflufs zu üben imstande ist, den Kurs der von jenem Gemeinwesen ausgegebenen Anlehen zum Steigen oder Fallen. Innerhalb der Anlehen, welche das gleiche Gemeinwesen ausgegeben hat, gehört deren Zinsfufs der wichtigste Anteil an der Kursgestaltung. Wenn beispielsweise das Deutsche Reich ein $3\frac{1}{2}$prozentiges und ein 3 prozentiges Anlehen ausgegeben hat, und wenn am gleichen Börsentage der Kurs des einen 102,90, der des anderen 96,90 war, so ist das so zu verstehen: Für ℳ 1000 Nennwert des ersten Anlehens zahlt das Deutsche Reich jährlich ℳ 35 Zins, für ℳ 1000 Nennwert des zweiten Anlehens jährlich nur ℳ 30 Zins. Um mehr Zins zu erhalten, mufs man billigerweise mehr Kapital anlegen, und in der That mufs im ersteren Falle ℳ 1029, im zweiten Falle ℳ 969 für jenen Zinsgenufs verausgabt werden. Man sollte einen noch gröfseren

Kursunterschied erwarten. Aus dem Verhältnisse 30 : 35 = 969 : 1130,50 würde ein Preis von *M.* 1130,50 für *M.* 1000 Nennwert des $3\frac{1}{2}$ prozentigen Reichsanlehens oder ein Kurs von 113,05 sich herausrechnen. Weshalb wird er nicht gezahlt? Wir stehen hier vor dem, was wir (am Ende von Nr. 15) die gröfsere oder kleinere Beliebtheit dieses oder jenes Zinsfufses nannten, und was wohlbegründet ist. Jedes Gemeinwesen, welches eine Schuld aufnimmt, pflegt sich das Recht vorzubehalten, dieselbe zum Nennwerte wieder heimzuzahlen, und diese drohende Heimzahlung verhindert, dafs der Kurs sich hoch über den der Gleichheit mit dem Nennwerte d. h. über den Parikurs oder den Kurs von 100 erhebe; darin dafs der Zins des $3\frac{1}{2}$ % Reichsanlehen zu 102,90 im Verhältnisse etwas beträchtlicher ist als der Zins des 3% Reichsanlehen zu 96,90 sieht der Besitzer eine gewisse Schadloshaltung gegenüber von dem durch ihn bei etwaiger Kündigung zur Heimzahlung zu erleidenden Verlust, aber nur so lange dieser Verlust sich in mäfsigen Grenzen hält. Bei dem Steigen des $3\frac{1}{2}$% Anlehen wächst daher die Neigung sich desselben zu entledigen, und diese Verkaufslust drückt wieder auf den Kurs. So verhält es sich in allen Fällen, und deshalb können wir jetzt Nr. 15 dahin ergänzen, man wähle den Zinsfufs eines neu zu emittirenden Anlehens meistens so, dafs mit Rücksicht auf die dermalige Durchschnittshöhe der zu gewährenden Verzinsung der Ausgabekurs nicht weit vom Parikurse sich zu entfernen hat, weder nach oben noch nach unten. Ein Ausgabekurs hoch über Pari schreckt den Käufer ab, ein solcher tief unter Pari legt dem das Anlehen ausgebenden Gemeinwesen zu grofse Opfer bei Heimzahlung der Schuld auf. Das Konsortium, welches bei der Submission den Zuschlag erhalten hat, wird diese Vorsichtsmafsregeln ebenso beachten wie das Gemeinwesen, und wenn es seinerseits eine Subskription auf das Anlehen eröffnet, für dessen Unterbringung es die Bürgschaft übernommen hat, wird es selbstverständlich den Emissionskurs etwas höher ansetzen als den Submissionskurs aber in den meisten Fällen nur unbedeutend höher.

17] Das Kursblatt, welchem wir den Kurs des $3\frac{1}{2}$% und des 3% Deutschen Reichsanlehen entnommen haben, enthält denselben in folgender Form:

$3\frac{1}{2}$	Deutsche Reichsanleihe	1/4. 10	103 P.	102,90 G.
3	„ „	1/4. 10	96,90 bz.	

Die Bedeutung der von uns noch nicht benutzten Abkürzungen ist zu erläutern. Die bei beiden Anlehen wiederkehrenden Zahlen 1/4. 10 bedeuten die Zinstermine. Wie jeder Schuldner sich bei gegen Zinsvergütung vorgestreckten Darlehen verpflichten mufs, den Zins pünktlich an vorausbestimmten Tagen zu zahlen, ebenso trifft das Gemeinwesen, welches ein Anlehen aufnimmt, die gleiche Verpflichtung. An bestimmten Tagen, meistens alle Halbjahre, wird der Zins für den eben abgelaufenen Zeitraum bezahlt, bei dem Deutschen Reichsanlehen am 1. April $\left(\frac{1}{IV}\right)$ und 1. Oktober $\left(\frac{1}{X}\right)$ jedes Jahres. Freilich kann das Reich nicht wie ein gewöhnlicher Schuldner zu jedem Gläubiger hinschicken, ihm den fälligen Zins einzuhändigen, schon aus dem Grunde, dafs Name und Wohnort der Gläubiger in der Mehrzahl der Fälle unbekannt sind. Die Anlehenscheine können allerdings auf Namen ausgestellt werden, und müssen diese Form annehmen, wenn sie zur Anlage von Mündelgeldern dienen, aber das umständliche Verfahren, welches bei der Überschreibung auf andere Namen eingehalten werden mufs, und welches bei Mündelgeldern die Sicherheit der Anlage zu einer nahezu unbedingten macht, hemmt die Möglichkeit raschen und ungehinderten Verkaufs. Dieser hinwiederum ist durch die Inhaberpapiere (*titres au porteur)* gewährleistet, welche von Hand zu Hand gehen, ohne dafs die Ausgabestelle des Anlehens davon unterrichtet wird. Der weitaus gröfste Betrag jedes Anlehens ist in Gestalt solcher Inhaberpapiere untergebracht, dem Inhaber liegt es also ob, sich am Verfalltage der Zinsen zum Empfange derselben zu melden. Um die bei möglicherweise rasch wechselndem Besitze bis zur Unmöglichkeit sich steigernde Schwierigkeit der Kontrolirung, ob der Zins für den einzelnen Anlehenschein schon bezahlt ist oder nicht, zu umgehen, sind jedem Anlehenschein gedruckte Zinsabschnitte beigefügt, auf welchen angegeben ist, dafs an dem und dem Tage die und die Summe als Zins für den die und die Nummer tragenden Anlehenschein bezahlt sei. Der Zinsabschnitt wird zur Verfallzeit abgeschnitten, woher sein deutscher Name und ebenso sein noch gebräuchlicherer Fremdname Coupon (von *couper* = abschneiden) abstammt, und er wird bei gleichfalls auf dem Zinsabschnitt genannten Zahlungsstellen zur Einlösung vorgelegt. Zu den Zahlungsstellen gehören der Regel nach die Banken, welche die Ausgabe des Anlehen seiner Zeit vermittelten, und welche für die Einlösung eine gewisse Vergütung von etwa $\frac{1}{2}\text{‰}$ von der Kasse, welcher eigentlich die Zinszahlung oblag, empfangen. Nun sind noch P., G. und bz. zu erklären. P. wird als Papier gelesen, G. als Geld, bz. als bezahlt; anstatt P. findet sich auch wohl B. mit der Aussprache Brief. Ist ein Kurs als Papier oder Brief bezeichnet, so ist die Meinung die, es seien zu diesem Kurse Verkaufswillige an der Börse gewesen, aber kein Käufer, der so viel habe zahlen wollen. Geld bei einem Kurs will sagen, es seien zu diesem Kurs Kaufwillige an der Börse gewesen, aber kein Verkäufer, der sich an dem Gebote hätte genügen lassen. Der Papierkurs oder Briefkurs ist dementsprechend immer höher als der nicht selten bei dem gleichen Wertpapier angegebene Geldkurs. Bezahlt endlich bedeutet, dafs zu eben jenem Kurs Geschäfte abgeschlossen wurden.

18] Wollen wir an einem bestimmten Beispiele zeigen, wie die Rechnung für den Kunden gestellt wird, so mögen am 2. November

ℳ 4000 der 3 % Deutschen Reichsanleihe zum Kurs von 96,90 in seinem Auftrage gekauft worden sein. Die Rechnung lautet:

	ℳ ₰
3 % Deutsche Reichsanleihe ℳ 4000 zu 96,90	3876.—
Zins vom $\frac{1}{X}$ bis zum $\frac{2}{XI}$ (31 Tage)	10.35
Stempel	—.80
Courtage	2.—
Porto	—.80
$\frac{1}{8}$ % Provision von 3886.35	4.85
	3894.80.

Der erste Posten von 3876 bedarf keiner weiteren Erläuterung, wohl aber der zweite von 10,35. Wir sahen (Nr. 17), daſs ein halbjähriger Zinsabschnitt am 1. Oktober losgetrennt wurde. Der nächste Zinsabschnitt lautet auf den 1. April und wird von dem dermaligen Besitzer der Anlehnsscheine losgetrennt und eingewechselt werden. Bei jedem Besitzwechsel innerhalb der Zwischenzeit ist der Käufer verpflichtet, dem Verkäufer den Zins für den Nennwert vom 1. Oktober bis zum Lieferungstage zu vergüten. Im gegenwärtigen Falle erstreckt sich diese Zeit auf 31 Tage und ℳ 4000 während 31 Tage zu $3\frac{3}{5}$ % tragen ℳ 12,40 Zins. Davon $\frac{1}{6}$ mit ℳ 2,07 abgezogen bleiben ℳ 10,33, statt welcher ℳ 10,35 in Rechnung gestellt werden. Die weiteren in der Rechnung vorkommenden Posten betreffen sogenannte Spesen. Von der aus ℳ 3876 und aus ℳ 10,35 gebildeten Summe von ℳ 3886,35 beansprucht die Bank, durch welche das Geschäft ausgeführt wurde, einen Provision genannten Besorgungslohn von $\frac{1}{8}$ %, der sich auf ℳ 4,86 beläuft, statt welcher ℳ 4,85 in Rechnung gestellt werden. Wir haben hier den geringsten Provisionssatz angenommen, der irgend bezahlt wird. In vielen Fällen berechnen die Banken $\frac{1}{6}$, auch wohl $\frac{1}{4}$ % Provision. Mit dem Worte Courtage bezeichnet man die dem Kursmakler, welcher allein berechtigt ist an der Börse den Kauf zu vermitteln, zu zahlende Gebühr. Sie beläuft sich auf $\frac{1}{2}$ ‰ des Nennwertes der gekauften oder verkauften Wertpapiere, in unserem Falle auf $\frac{1}{2}$ ‰ von ℳ 4000 mit ℳ 2. Über den Posten Porto mit 80 ₰ brauchen wir nichts zu bemerken, wohl aber über den Posten Stempel mit 80 ₰. In vielen Staaten, auch in Deutschland, müssen Wertpapiere, die dem Verkehre ausgesetzt sind, gestempelt sein, und dieser wenn einmal aufgedruckte dann ein für allemal dem betreffenden Wertstücke anhaftende Stempel ist die Quittung für eine erhobene Umlaufssteuer. Sie kehrt auf den Rechnungen von der Art derer, mit welchen wir uns im Augenblicke beschäftigen, nicht wieder. Ferner darf aber kein Ankauf oder Verkauf von Wertpapieren, deren Kaufpreis (ohne laufende Zinsen und Spesen) ℳ 600 überschreitet, ohne ihn beglaubigenden Schluſsschein stattfinden, der mit einer Stempelmarke im Betrage von $\frac{1}{5}$ ‰ des genannten Kaufpreises versehen ist, und zwar wird bei Berechnung des Stempels jedes angefangene Tausend (in Mark) für voll gerechnet. Dieser Stempel ist auf unserer Rechnung gemeint, und seine Höhe von 80 ₰ rechtfertigt sich dadurch, dafs der reine Kaufpreis von ℳ 3876 zu ℳ 4000 aufgerundet werden mufs, wovon alsdann $\frac{1}{5}$ ‰, oder 20 ₰ von je ℳ 1000, die berechneten 80 ₰ liefern. Eine Abrundung des Kaufpreises zum Zwecke der Stempelberechnung findet nur in einem Falle statt: bei deutschen Reichs- und Staatsanlehen und bei deutschen auf Grund staatlicher Genehmigung ausgegebenen Schuldscheinen kleinerer Gemeinwesen (Provinzen, Kreise, Städte u. dergl.) wird nur der Nennwert in Rechnung gezogen, so lange er nicht mehr als ℳ 5000 beträgt. Wäre also ein Geschäft über ℳ 5000 $3\frac{1}{2}$ % Deutscher Reichsrente zu 102,90 (Nr. 17) abgeschlossen worden, so betrüge der Kaufpreis ℳ 5145, aber gleichwohl wäre der Stempel nur ℳ 1 und nicht ℳ 1,20. Ferner ist als Ausnahme zu bemerken, dafs der An- und Verkauf von Coupons und Dividendenscheinen (vergl. Nr. 20) stempelfrei ist.

19] Es wird nicht unangemessen sein, auch über die bei dem An- und Verkaufe anderer Wertpapiere vorkommenden Rechnungen Einiges zu sagen. Ausländische Staatspapiere sind selbstverständlich über Beträge in den dort geltenden Geldeinheiten ausgestellt. Solches fremde Geld in gemünzten Stücken oder als Papiergeld ist selbst einem Kurs unterworfen. Die Rechnung würde aber in unerträglicher Weise verwickelt, wollte man bei jedem Geschäfte mit ausländischen Werten erst einen Kurs des Nennwertes als solchen, dann einen Kurs des betreffenden Anlehens berücksichtigen. Zur Vermeidung dieser Weitläufigkeit ist man übereingekommen, einfache Umrechnungssätze ausländischer Geldsorten zu benutzen, welche von dem thatsächlichen beim Wechseln von Geldstücken auftretenden Werte sich recht erheblich unterscheiden können. Dieser Unterschied macht sich in dem Kurs des Wertpapieres bemerklich (vergleiche Nr. 26). So ist beispielsweise ein österreichischer Gulden etwa ℳ 1,69; der Umrechnungssatz nimmt ihn zu ℳ 2, einem Verhältnisse, welches der Wahrheit entsprach, als Deutschland und Österreich in einer Münzkonvention vereinigt waren und aus der gleichen Menge Silber 2 deutsche Thaler oder 3 österreichische Gulden geprägt wurden. Bei anderen Geldsorten wird ähnlicherweise ein festes Verhältnis angenommen. Die wichtigsten Umrechnungssätze sind

7	Gulden (süddeutsch oder holländisch)	= ℳ 12
1	Gulden (österreichisch)	= ℳ 2
1	österreichisch-ungarische Krone . . .	= ₰ 85
1	Franc oder 1 Lire	= ₰ 80
1	russischer Rubel	= ℳ 3,20
1	amerikanischer Dollar	= ℳ 4,25
1	Pfund Sterling	= ℳ 20.

Die Umrechnungssätze dienen in gleicher Weise bei der Berechnung des Wertes der Staatspapiere wie anderer in jenen Geldsorten ausgestellter Wertpapiere, sowie deren Zinsen. Einige Beispiele mögen genügen. Der österreichische Staat war Ausgeber zahlreicher ungemein verschiedener Anlehen. Im Jahre 1868 wurden einesteils die damals in Silber, andernteils die damals in Papiergeld verzinslichen Anlehen durch das sogenannte *Unifikationsgesetz* verschmolzen und eine 5 % Silberrente nebst einer 5 % Papierrente gebildet, deren Coupons in Silber, beziehungsweise in Papiergeld einzulösen zugesagt wurde, und für welche die Gesammtmonarchie Österreich-Ungarn haftet. Gleichzeitig wurden die Coupons beider Gattungen mit einer Couponsteuer von 16 % belegt, deren Betrag beim jedesmaligen Einzug eines Coupons vorweggenommen wird. Nun sind 16 % von 5 soviel wie $\frac{4}{5}$, und $5 - \frac{4}{5} = 4\frac{1}{5}$. Durch Abzug der Couponsteuer verwandelt sich also das dem Namen nach mit 5 % verzinsliche Wertpapier in ein thatsächlich mit $4\frac{1}{5}$ % verzinsliches. Daher die $4\frac{1}{5}$ % Österreichische Silberrente und Papierrente, wie sie im Kursblatte mit 86,30 und 86,10 (ein rein zufälliger Unterschied, da österreichisches Silber- und Papiergeld vollständig gleichen Wert haben) notirt sind. Die Zinstermine der Silberrente sind 1. Januar und 1. Juli. Es seien 5000 Gulden Silberrente am 26. Mai zu 86,30 verkauft. Die Rechnung sieht so aus:

		ℳ. ₰
$4\frac{1}{5}$ % Österreichische Silberrente fl. 5000 zu 86,30		8630.—
Zins vom $\frac{1}{\text{I}}$ bis zum $\frac{26}{\text{V}}$ (145 Tage)		169.15
		8799.15
$\frac{1}{8}$ % Provision von 8799.15	ℳ. 11.—	
Courtage	5.—	
Stempel	1.80	
Porto	2.80	20.60
		8778.55.

Es leuchtet ein, dafs beim Verkauf von Wertpapieren die Spesen vom Erlös abgezogen werden müssen. Andere Österreichische, beziehungsweise Ungarische Staatspapiere sind die Österreichische 4 % Goldrente mit einem Kurs von 102,60, die Ungarische 4 % Goldrente mit einem Kurs von 102,70, die Ungarische 4 % Kronenrente mit einem Kurs von 99,70, wenn wir die Kurse einem und demselben Kursblatte entnehmen. Diese drei Anlehen unterscheiden sich teils durch die dafür haftenden Staatsteile, teils durch die Art der Zinszahlung. Für die Österreichische Goldrente haften alle im österreichischen Reichsrat vertretenen Königreiche und Länder, ausgeschlossen sind also Ungarn, Siebenbürgen und Kroatien, und diese Länder wieder haften für die Ungarische Goldrente und Kronenrente. Die Coupons der Österreichischen Goldrente werden in Gold eingelöst und zwar an den deutschen Zahlungsstellen so eingelöst, dafs 40 Gulden = 81 ℳ., an den französischen Zahlungsstellen so, dafs 40 Gulden = 100 Francs sind. Das gleiche Einlösungsverhältnis gilt für die Coupons der Ungarischen Goldrente, wird aber durch eine anhaftende Bedingung zu gunsten der Besitzer etwas verändert. Es giebt nämlich auch englische Zahlungsstellen, an welchen das Verhältnis 40 Gulden = 4 Pfund Sterling eingehalten wird, und das Ungarische Finanzministerium hat die Verpflichtung übernommen, die Zahlung der Coupons über das angegebene Wertverhältnis in Mark und Francs hinaus zu gewähren, wenn der Wechselkurs auf London es so mit sich bringt. Wir kommen in Nr. 26 darauf zurück und begnügen uns hier mit der Bemerkung, dafs dieser Bestimmung zufolge 40 Gulden bald mit ℳ 81,38, bald etwas höher, bald etwas niedriger eingelöst zu werden pflegen. Die Coupons der Ungarischen Kronenrente sind aufserhalb Osterreich zum jeweiligen Wiener Wechselkurs zahlbar. Als Anlehen des Königreichs Italien nennen wir die Italienische 5 % Rente mit einem Kurs von 90,90 und die Italienische steuerfreie 4% Rente mit einem Kurs von 91. Dafs das Anlehen mit niedrigerem Zinsfufse im Kurs das mit höherem Zinsfufse hinter sich gelassen hat, ist in dem Zusatze *steuerfrei* begründet. Die Italienische 5 % Rente ist mit einer Couponsteuer belegt, welche allerdings bei der börsenmäfsigen Zinsberechnung in der Zwischenzeit nicht beachtet wird. Sie wurde in verschiedenen Zeitpunkten erhöht und beträgt gegenwärtig 20 %, verwandelt also thatsächlich die ursprünglich 5 % Rente in eine 4 %. Wer letztere in ihrer steuerfreien Form vorzieht, sieht darin eine Sicherung gegen abermalige Erhöhung der Steuer über den gegenwärtigen Ansatz hinaus; dagegen entgeht ihm der Vorteil, den der Besitzer der besteuerten 5 % Rente von dem Augenblicke an geniefst, in welchem der Steuersatz erniedrigt werden kann.

20] Wenn wir in Nr. 15—19 von den Geldbedürfnissen von Gemeinwesen und von den Anlehen, mittels deren diese sie decken, zu sprechen hatten, so giebt es auch Gemeinschaften, welche auf Gelderwerb gerichtet sind, und deren Entstehung und Fortdauer zu mancherlei Börsengeschäften und demzufolge zu mancherlei Berechnungen Anlafs geben. Unsere Leser erraten, dafs wir von den Aktiengesellschaften reden. Diese bilden sich in der fast ausnahmslosen Regel so, dafs zum Zwecke eines bestimmten Erwerbsbetriebes, zu welchem gröfsere Geldmittel erforderlich sind, Anteilscheine ausgegeben werden, deren Erlös die Gesellschaftskasse bildet, welche aber, wenn einmal vorhanden, zu Inhaberpapieren werden, die börsenmäfsig von Hand zu Hand gehen. Die Anteilscheine heifsen Aktien (französisch *action*, englisch *share*). Die Erwerbsbetriebe sind von der allerverschiedensten Art. Es giebt Aktiengesellschaften zum Bau und Betriebe von Eisenbahnen und sonstigen Transportmitteln, von Bergwerken (sogenannte Montanaktiengesellschaften), von Fabriken. Es giebt ferner Aktiengesellschaften, welche den eigentlichen Geldverkehr zu vermitteln wünschen, und welche bald Hypothekenbanken gründen, deren Geschäftszweig auf die Belehnung von Liegenschaften sich beschränkt, bald Kredit-banken oder Banken schlechtweg, denen diejenigen Aufgaben obliegen, von welchen wir schon wiederholt unter dem Namen Bank zu reden hatten. Endlich giebt es auf Aktien gegründete Versicherungsgesellschaften. Die Verwaltung der Aktiengesellschaften ist wie ihre Gründung an gesetzliche Vorschriften geknüpft. Zu diesen gehört allerorten die Verpflichtung jährlicher Rechnungsablage vor der sogenannten Generalversammlung der Aktionäre, welche sodann über den Reingewinn des verflossenen Jahres verfügt und dadurch bestimmt, welche Summe aus dem Reingewinne zu Reservefonds zurückzulegen ist (wofür das Gesetz oder die Gesellschaftssatzung einen niedersten Bruchteil des Gewinnes vorzuschreiben pflegt, unter den nicht heruntergegangen werden darf), welche Summen der Leitung der Aktiengesellschaft, ihren Direktoren und ihrem Aufsichtsrat, zu Gute kommen, wofür wieder satzungsgemäfs vorgesorgt ist, welche Summe in neue Rechnung vorzutragen ist, welche Summe endlich unter die Aktionäre nach Mafsgabe der Anzahl der Aktien, welche jeder besitzt, verteilt werden soll. Das derartig zu Verteilende bildet die Dividende und entspricht dem Coupon bei Staatspapieren u. dergl. Der wesentliche Unterschied besteht nur darin, dafs der Wert des Coupons ein für allemal bekannt ist und nur durch gesetzliche Mafsnahmen, als Einführung oder Veränderung einer Besteuerung, erniedrigt oder erhöht werden kann, während der Betrag der Dividende erst am Jahresende bekannt wird. Die Frage entsteht, wie dieser Ungewifsheit gegenüber ein Zwischenzins ermittelt werden kann, den der Käufer einer Aktie dem Verkäufer zu vergüten hat? In Deutschland hilft man sich damit, dafs schon bei Gründung der Aktiengesellschaft ein sogenannter Börsenzinsfufs angenommen wird, nach welchem der erwähnte Zwischenzins sich vom Nennwerte der Aktie berechnet. Der vermöge der Dividende sich herausstellende wirkliche Zins, welcher über, welcher aber auch unter dem Börsenzinsfufs liegen kann, spiegelt sich in dem Kurs der Aktien. Dieser Kurs ist in Deutschland meistens prozentual angegeben, nur österreichische Aktien bilden eine Ausnahme, deren Kurs als Betrag in österreichischen Gulden zu 2 ℳ für je eine Aktie zu verstehen ist. Einige wenige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen. Die $4\frac{1}{2}$ % Pfälzische Maxbahnaktien brachten eine Dividende von $7\frac{1}{2}$ % und stehen 154,10. Die $3\frac{1}{2}$ % Deutsche Reichsbankaktien brachten eine Dividende von $7\frac{1}{2}$ % und stehen 160,90. Die 5 % Aktien der Höchster Farbwerke brachten eine Dividende von 26 % und stehen 425,50. Die 4 % Rheinische Hypothekenbankaktien brachten eine Dividende von 8 % und stehen 170. Die $4\frac{1}{2}$ % Aktien der Reichenberg-Pardubitzer Eisenbahn von je 200 Gulden österreichisch brachten eine Dividende von $4\frac{1}{2}$ % und stehen 178, d. h. also ℳ 356 für jede Aktie.

21] Unter den Aktien unterscheidet man vollbezahlte und nichtvollbezahlte. Zu den vollbezahlten gehören alle die in der vorigen Nummer genannten. Der Nennwert dieser Aktien entspricht der gemachten Einzahlung, und in Deutschland besteht zur Zeit das Gesetz, dafs keine Aktiengesellschaften sich bilden dürfen aufser mit Verpflichtung zur Einzahlung des vollen Nennwertes von nicht unter ℳ 1000 für jede Aktie, wenn es auch gestattet ist die Einzahlung ratenweise allmählich zu leisten, beziehungsweise einzuberufen. Aufserhalb Deutschland ist die Bedingung voller Einzahlungspflicht nicht gesetzlich, und auch in Deutschland war sie nicht immer vorhanden, sodafs an deutschen Börsen Geschäfte in inländischen und ausländischen nicht vollbezahlten Aktien gemacht werden. Ihre Grundbedingung ist das Befreitsein der ersten Zeichner von der Haftung für spätere Einzahlung. Macht die Gesellschaft schlechte Geschäfte und beruft eine neue Einzahlung zur Deckung ihrer Schulden ein, so kann man keinen Aktienbesitzer nötigen, dieser Einberufung Folge zu leisten und ebensowenig den ursprünglichen Zeichner dazu zwingen. Dividendenzahlung und Zwischenverzinsung unter Zugrundelegung eines angenommenen Börsenzinsfufses finden genau nach der gleichen Weise wie bei vollgezahlten Aktien statt, natürlich nach Mafsgabe des einbezahlten Bruchteils. *Der Kurs dagegen ist bei nicht vollbezahlten Aktien, soweit er vom Parikurse abweicht, vom ganzen Nennwerte zu verstehen.* Die 4 % Aktien der Versicherungsgesellschaft Providentia z. B. stehen 135. Es sind Aktien, welche noch aus dem Jahre 1856 herstammen. Sie wurden in süddeutschen Gulden mit dem Nennwerte von 1000 solcher Gulden (ℳ 1714,29) mit 10 % Einzahlung ausgegeben; der Kurs 135 bedeutet also, dafs für jede Aktie erstens ℳ 171,43 als Pariwert der Einzahlung, zweitens ℳ 600 als 35 % des ganzen Nennwertes von ℳ 1714,29, zusammen also ℳ 771,43 kostet. Auf die gemachte Einzahlung von ℳ 171,43 bezogen heifst das eigentlich 450 %. Zu der gleichen Zahl wäre man gekommen, wenn man die 35 % Überschufs über den Parikurs wegen nur 10 % Einzahlung mit 10 vervielfacht und das Produkt 350 zu dem Parikurs 100 addirt hätte. Die Berechtigung des hohen Kurses liegt darin begründet, dafs die letzte Dividende mit ℳ 46 für jede Aktie d. h. $26\frac{5}{6}$ % von ℳ 171,43 bezahlt wurde. Die 4 % Aktien der Deutschen Effekten- und Wechselbank stehen 122,50. Der Nennwert jeder Aktie ist ℳ 300, und 70 % sind darauf eingezahlt. Der Kurs von 100 % bedeutet demnach ℳ 210, die 22,50 % Aufgeld werden von ℳ 300 gerechnet und betragen ℳ 67,50. Eine Aktie kostet mithin ℳ 277,50 oder $132\frac{1}{7}$ %, wenn man den Kurs auf die eingezahlten ℳ 210 bezieht. Die letzte Dividende betrug 7 %.

22] Auch Aktiengesellschaften können in die Lage kommen, dafs das vorhandene vollbezahlte Kapital sich zur Fortführung des Geschäftsbetriebes unzulänglich erweist. Der Grund davon kann in erlittenen Verlusten, er kann bei glänzenden Geschäftsverhältnissen in der wünschenswerten Erweiterung und Vergröfserung des Geschäftes liegen. Neue Bahnlinien oder Fortsetzungen schon vorhandener sollen gebaut, neue Fabrikgebäude errichtet, Töchteranstalten (*Filiale*) der Bank an neuen Orten eröffnet werden. Der nächstliegende Gedanke, die erforderlichen Geldmittel durch Verstärkung des Aktienkapitals, also durch Ausgabe neuer Aktien zu beschaffen, wird womöglich vermieden; denn geht das auf Aktien gegründete Unternehmen nicht glänzend, so finden die neuen Aktien keine Abnehmer, geht es glänzend, so wünschen die alten Aktionäre nicht, neuen Teilhabern an ihrem Jahresgewinne Mitgenufs zu gewähren. Kreditanstalten können allerdings in solchem Falle die Ausgabe neuer Aktien nicht entbehren und Hypothekenbanken, wie wir in Nr. 23 sehen wollen, ebensowenig. Sie suchen dem Wunsche der alten Aktionäre, keine neuen Teilhaber dulden zu müssen, dadurch gerecht zu werden, dafs sie denselben das Vorrecht gestatten, nach Mafsgabe ihres früheren Aktienbesitzes neue in Anspruch zu nehmen und zwar zu einem Kurse, der unter dem Börsenkurse der alten Aktien zu liegen pflegt. Aktiengesellschaften aber, welche über einen grofsen Immobilienbesitz (Eisenbahnen, Fabriken, Bergwerke und dergleichen) verfügen, ziehen es vor die Geldmittel durch Verpfändung dieses Besitzes zu beschaffen und wenden sich zu diesem Zwecke an das grofse Publikum. Die Hypothekarschuld, so beträchtlich sie auch sei, wird in kleine durchweg gleichberechtigte Bruchteile meistens von je *M.* 400 zerlegt, und für jedes dieser kleinen Anlehen (manchmal auch für 5 oder 10 zusammen) wird ein Inhaberpapier ausgestellt. Die Aktiengesellschaft übernimmt als Pflicht, was in Nr. 16 als ein Recht des ein Anlehen aufnehmenden Gemeinwesens bezeichnet wurde, die Tilgung der Schuld zum Nennwerte oder auch mit einem den Nennwert etwas übersteigenden Betrage, und die jährliche Reineinnahme der Aktiengesellschaft mufs zuvor die Hypothekargläubiger befriedigen, ihnen Verzinsung und planmäfsige Rückzahlung gewähren, bevor die Aktienbesitzer eine Dividende beanspruchen können. Wegen dieses Erstlingsrechtes auf die Reineinnahme heifsen die damit ausgezeichneten Anlehenscheine Prioritätsobligationen. Ihre börsenmäfsige Berechnung bei Kauf oder Verkauf ist in keiner Weise von dem Verfahren beim Kauf oder Verkauf von Staatsanlehen verschieden. Der Kurs der Prioritätsanlehen richtet sich nach der Höhe des Zinsfufses, nach der Höhe der an die Aktionäre verteilten Dividende, da diese Höhe einen Mafsstab für die Gewifsheit der Befriedigung der Prioritätenbesitzer bildet, nach der den Coupons der Obligationen auferlegten oder nichtauferlegten Besteuerung, nach der Geldsorte, in welcher die Couponseinlösung erfolgt.

23] Wir haben von der Aktienvermehrung der Hypothekenbanken gesprochen und zugesagt darauf zurückzukommen. Wir müssen dabei auf das Wesen dieser Banken mit einigen Worten eingehen. Das Geldbedürfnis von Liegenschaftsbesitzern, welches durch Aufnahme von Hypothekarschulden befriedigt zu werden pflegt, hat sich oft als Quelle zahlloser Verdriefslichkeiten für Schuldner und Gläubiger erwiesen. Für den Schuldner war es schwer einen Kapital-besitzer zu finden, der geneigt war, sein Geld auf Hypothek zu geben, und er kam in die Notwendigkeit Vermittler zu Hilfe zu rufen, welche ihn nicht selten ausbeuteten. Für den Gläubiger war es, wenn er selbst in die Lage kam, bares Geld haben zu wollen, kaum minder schwer, Jemand zu finden, der ihm seine Hypothekarforderung abkaufte, und fand er ihn, so war die Form der Übertragung mit grofsen Umständen und mit Ausgaben verknüpft. Da traten nun Hypothekenbanken ins Leben mit einem über weite Gegenden verbreiteten Netze von landes- und sachkundigen Agenten, welche die Belehnungsfähigkeit der Liegenschaften sowie die persönliche Zuverlässigkeit ihrer Eigentümer zu bemessen haben, und auf deren Aussage hin die Hypothekenbank bereit ist, unter thunlichst günstigen Bedingungen für den Schuldner ihm Geld auf Hypothek vorzuschiefsen. Ein sehr interessanter Versuch mittelbarer Darlehen ist in Ungarn gemacht worden, wo eine Hypothekenbank den einzelnen Dorfgemeinden Geld vorstreckt und es diesen überläfst, auf eigene Gefahr ihren Gemeindebürgern hypothekarisch gesicherte Darlehen zu bewilligen. So hoch auch das Aktienkapital einer Hypothekenbank sich beläuft, wird es niemals genügen, um alle Eingaben von Vorschufs zu befriedigen, und überdies wird der so erzielte Zins nicht hinreichend hoch sein, um eine Beteiligung an der Hypothekenbank als Aktienbesitzer wünschenswert zu machen. Die Hypothekenbank arbeitet daher wesentlich als Vermittler, aber unter öffentlich kundgegebenen Bedingungen, welche eine Ausbeutung des Schuldners unmöglich machen. Die Bank verschafft sich das zum Ausleihen bestimmte Geld durch den Verkauf von Pfandbriefen, denen sämmtliche Hypothekenforderungen der Bank als Sicherheit zu Grunde liegen, welche mithin selbst als Hypothekarforderungen betrachtet werden dürfen und zur Anlage von Mündelgeldern dienen können, daneben aber als Inhaberpapiere den Vorzug ungehinderter Verkäuflichkeit besitzen. Sind die Pfandbriefe etwa zu $3\frac{1}{2}$ % verzinslich, so kann die Hypothekenbank schon zu einem nicht viel höheren Zinsfufse, z. B. zu 4 %, die einzelnen Darlehen bewilligen und dadurch einen genügenden Überschufs erzielen, um ihren Aktionären beträchtliche Dividenden zu verschaffen. Einige Vorbedingungen sind allerdings von seiten der Hypothekenbank zu erfüllen. Die Belehnung von Liegenschaften darf nur vorsichtig erfolgen, und es dürfen nur so viele Pfandbriefe im Umlaufe sein, dafs sie durch die der Bank verpfändeten Liegenschaften volle Deckung finden; mit vollständigen oder teilweisen Heimzahlungen von Hypothekenschulden mufs also die Tilgung von Pfandbriefen Hand in Hand gehen. Unterlassung dieser Vorsicht kann zum Zusammenbruch der Hypothekenbank führen, und mit Recht sucht der Entwurf des Reichshypothekenbankgesetzes von 1898 die Pfandbriefbesitzer dadurch zu schützen, dafs er ein Verhältnis zwischen der Summe der Pfandbriefe und dem Aktienkapital der Hypothekenbank festsetzt: die Summe der Pfandbriefe darf das Fünfzehnfache des

Aktienkapitals und der vorhandenen Rückhaltssummen *(Reserven)* der Hypothekenbank nicht übersteigen Daher die Notwendigkeit neuer Aktienausgaben der Hypothekenbanken, wenn sie ihre Pfandbriefausgabe vermehren wollen. Über Kauf und Verkauf von Pfandbriefen bedarf es keiner weiteren Bemerkung.

24] Wir haben in Nr. 21 den Namen der Deutschen Effekten- und Wechselbank erwähnt. Dieser Namen bietet uns Gelegenheit, der beiden Kunstausdrücke, die in ihm vorkommen, zu gedenken. Effekten nennt man alle die Wertpapiere, als Anlehenscheine, Aktien, Obligationen, Pfandbriefe, von welchen wir seither als dem Börsengeschäft unterworfen geredet haben. Zu den Effekten gehören aufserdem Lose, mit welchen wir uns in Kapitel IV. zu beschäftigen haben werden. Wechsel nennt man eine andere Gattung von dem Börsengeschäft unterworfenen Wertpapieren, nämlich Schuldscheine von einer bestimmten Form, welche das Wort Wechsel als wesentlichen Bestandteil enthalten, und welche vermöge dieser Form gewisse Verpflichtungen zur Folge haben, deren Darlegung dem Handelsrechte angehört. Die grofse Bedeutung des Wechsels für das Geschäftsleben erhellt daraus, dafs man annimmt, annähernd $^9/_{10}$ aller Geschäftsschulden werden durch Wechsel ausgeglichen. Man pflegt Wechsel auf das Ausland, in welchen die Summe, auf welche der Wechsel ausgestellt ist, in anderem Gelde als deutscher Reichswährung genannt ist, Devisen, Wechsel auf das deutsche Inland in Mark und Pfennig Rimessen zu benennen. Der Wechsel auf den Ort selbst, wo man lebt, heifst Platzwechsel oder auch Diskonto.

25] Bei der Rimesse beziehungsweise dem Platzwechsel ist rechnungsmäfsig nur ein Punkt zu besprechen, nämlich was für einen auf eine bestimmte Verfallzeit ausgestellten Wechsel zu zahlen ist, wenn man an einem früheren Tage Geld dafür zu haben wünscht. In vielen auch nicht zum Börsenhandel in unmittelbarer Beziehung stehenden Geschäftszweigen ist es üblich, einem Kunden einen Abzug an der ihm gestellten Rechnung zu erlauben, wenn er entweder gröfsere Mengen Waren zu entnehmen gewohnt ist oder Barzahlung leistet. Jenen Abzug pflegt man Rabatt, diesen Diskonto zu nennen. Der Verleger gewährt dem Sortimenter etwa 25 % Rabatt, dieser dem barzahlenden Kunden einen Diskonto, der durch das buchhändlerische Übereinkommen von 1888 auf 5 % festgesetzt ist. Zeitungen gestatten einrückenden Behörden 25,30, sogar 50 % Rabatt an den Einrückungsgebühren. Maschinenfabriken gewähren Gaswerken 5 % Rabatt und überdies 2 % Diskonto für Barzahlung. Der Begriff der Zeit tritt bei dieser Art von Diskonto nur ganz allgemein vermöge des Wortes Barzahlung in Frage, ohne dafs bestimmte Zeitangaben gemacht wären. Alle diese Vergünstigungen sind überdies vom Gläubiger freiwillig gewährt, denn der Schuldner selbst ist nach § 272 des Bürgerlichen Gesetzbuches, wenn er eine unverzinsliche Schuld vor der Fälligkeit bezahlt, zu einem Abzuge wegen der Zwischenzinsen nicht berechtigt. Ohne Abzug wird aber ein Dritter, z. B. eine Bank, eine erst später fällige Forderung nicht übernehmen. Bei dem Wechsel tritt daher eine Diskontierung, ein für Barzahlung gestatteter Abzug an dem Betrage des Wechsels ein, der in zweifacher Weise sich ändert, nach der Anzahl der Tage, um welche die Zahlung der Verfallzeit vorgreift, nach dem Diskontierungssatze, der, je nachdem Geldmangel oder Geldüberflufs herrscht (vergl. Nr. 16), höher oder niedriger ist. Der Diskonto wird nach dem gerade vorhandenen Diskontierungssatze als Zins der Summe, auf welche der Wechsel lautet, während der Zeit, welche der Wechsel noch zu laufen hat, berechnet und von dem Betrage des Wechsels abgezogen. Soll z. B. ein am 20. Juli fälliger Wechsel über *M.* 550 am 3. Juni zu 4 % diskontiert werden, so rechnet man so: $\frac{20}{\mathrm{VII}} - \frac{3}{\mathrm{VI}} = \frac{17}{\mathrm{I}} = 47$ Tage; der Zins von *M.* 550 in 47 Tagen zu 4 % ist $\frac{550 \cdot 47}{9000} = 2{,}87$, wofür 2,85 geschrieben werden, und 2,85 von 550 bleibt *M.* 547,15 als Preis des Wechsels. Wir haben dabei weder die Courtage, noch die Provision, noch den Betrag des Wechselstempels in Anrechnung gebracht, welcher letztere mittels Aufkleben einer von der Höhe des Wechselbetrags abhängenden Stempelmarke, in unserem Beispiele von 30 ₰, ein für allemal (also nicht wie bei Effekten bei jedem Anschaffungsgeschäft) zu entrichten ist. Man könnte mit Berufung auf die in Nr. 6 enthaltene Formel

$$K_0 = \frac{100\,K_n}{100 + np}$$

verlangen, die Rechnung müsse mittels

$$\frac{55\,000}{100 + \frac{4 \cdot 47}{360}} = \frac{4\,950\,000}{9047}$$

geführt werden. Man erhielte so durch umständliche Division 547,14, wofür *M.* 547,15 geschrieben werden, also genau denselben Betrag, der sich vorhin ergab. Wenn auch in anderen Fällen bei höheren Summen und längerer Zeit ein Unterschied erscheint (*M.* 9000 über 83 Tage zu 4 % diskontiert geben nach der üblichen Rechnung *M.* 8917, nach der anderen *M.* 8917,75), so ist derselbe doch im Verhältnisse zu der ganzen Summe, um welche es sich handelt, nicht so beträchtlich, dafs die Banken vorzögen, von der Usance gewordenen bequemen Rechnungsweise Abstand zu nehmen. Wir kommen in Nr. 28 auf den Gegenstand zurück.

26] Die Diskontierung von D e v i s e n hat neben dem Diskontosatze auch die Umrechnung der ausländischen Geldsorten in inländische zu berücksichtigen, welche nicht wie bei Effekten nach einem festen Verhältnisse (vergl. Nr. 19), sondern nach wechselndem Kurse stattfindet. In dem Kursblatte sind diese Wechselkurse an besonderer

Stelle vereinigt abgedruckt, und wir entnehmen einem solchen folgende einiger Erläuterung bedürftigen Angaben.

	Kurze Sicht	$2\frac{1}{2}$—3 Monate
5 Italien Lire 100	75,30	75,40
2 Paris Fr. 100	80,95	81
4 London Lstr. 1	20,46	20,49
4 Wien ö. fl. 100	169,70	169,80

Wechsel kurzer Sicht sind hier von Wechseln auf $2\frac{1}{2}$—3 Monate unterschieden, welche auch wohl Wechsel langer Sicht heifsen. Dafs letztere noch $2\frac{1}{2}$—3 Monate zu laufen haben, entnimmt man dem einen ihrer Namen, Wechsel kurzer Sicht sind solche, deren Verfallzeit nicht weiter als 14 Tage mehr entfernt ist. Bei Wechseln kurzer Sicht wird nur der Wechselkurs, der jedesmal in Mark und Pfennigen deutscher Reichswährung zu verstehen ist, in Rechnung gezogen, eine Diskontierung findet nicht statt. Für 100 italienische Lire zahlt man also ℳ 75,30, für 100 Francs auf Paris ℳ 80,95, für 1 Pfund Sterling auf London ℳ 20,46, für 100 österreichische Gulden auf Wien ℳ 169,70, wozu noch Spesen kommen, welche wir hier wie in Nr. 25 nicht genauer erörtern. Wechsel langer Sicht dagegen werden diskontiert; sie erleiden einen Abzug ähnlich wie die Rimessen unter Zugrundelegung eines Zinsfufses, der von Zeit zu Zeit börsenmäfsig festgesetzt wird und auf dem Kursblatt links von dem Orte, an welchem der Wechsel zahlbar ist, sich abgedruckt vorfindet. Italienische Wechsel werden darnach mit 5 %, Pariser mit 2 %, Londoner und Wiener Wechsel mit 4 % diskontiert, und dieser Abzug ist die Ursache dafür, dafs der Wechselkurs bei Wechseln langer Sicht zwar nicht ausnahmslos, aber doch meistens um eine Kleinigkeit höher ist, als bei Wechseln kurzer Sicht. Eine letzte Erläuterung bedarf die Berechnung der Zeit, über welche Devisen langer Sicht diskontiert werden. Die ersten 8 Tage vom Diskontierungstage an gerechnet und zwar als Kalendertage gerechnet sind zinsfrei. Wird z. B. ein Wechsel auf den 5. Juni am 17. März diskontiert, so sagt man: 17 und 8 sind 25, ferner

$$\frac{5}{\text{VI}} - \frac{25}{\text{III}} = \frac{35}{\text{V}} - \frac{25}{\text{III}} = \frac{10}{\text{II}} = 70 \text{ Tage.}$$

Bei einem am 24. Februar diskontierten Wechsel auf den 24. Mai sagt man: 24 und 8 sind 32, der 32. Februar ist aber im gewöhnlichen Jahre der 4. März, im Schaltjahre der 3. März, und so wird bald $\frac{24}{\text{V}} - \frac{4}{\text{III}} = \frac{20}{\text{II}} = 80$ Tage, bald $\frac{24}{\text{V}} - \frac{3}{\text{III}} = \frac{21}{\text{II}} = 81$ Tage gerechnet u. s. w.

27] Der Wechselkurs auf eine auswärtige Stadt und der Effektenkurs an zwei Börsenorten kommt bei sogenannten Arbitragen in

Betracht. Am 26. Mai (vergl. Nr. 19) stand österreichische Silberrente in Frankfurt a. M. 86,30. Am gleichen Tage war der Wechselkurs auf Wien kurzer Sicht in Frankfurt a. M. 169,70, der Kurs der österreichischen Silberrente in Wien 101,80. Der Kaufpreis von fl. 1000 Silberrente in Wien betrug also

	fl. 1018
145 Tage Zins zu $4\frac{1}{5}$%	fl. 16,90
	fl. 1034,90.

Aber fl. 1034,90 zu 169,70 sind ℳ 1756,25. Der Verkaufspreis von fl. 1000 Silberrente in Frankfurt a. M. war

	ℳ 1726
145 Tage Zins zu $4\frac{1}{5}$%	ℳ 33,85
	ℳ 1759,85.

Beim Ankauf von fl. 1000 österreichischer Silberrente in Wien und gleichzeitigem Verkaufe in Frankfurt a. M. hätte sich also ein Nutzen dieses Arbitragegeschäftes von ℳ 1759,85 — ℳ 1756,25 = ℳ 3,60 ergeben, wenn keinerlei Spesen auf dem Geschäfte ruhten. Dem ist freilich nicht so. Courtage in Frankfurt a. M. und in Wien, Telegramme, welche den Auftrag erteilen und die Ausführung des Auftrages melden, endlich die zu entrichtende Börsensteuer mindern den Nutzen fast bis zur Aufhebung desselben herab, wenn auch zu Gunsten des Arbitragegeschäftes die deutsche Börsensteuer von 20 ₰ auf ℳ 1000 (Nr. 18) eine kleine Erniedrigung auf 19 ₰ für denselben Betrag erfährt, und das Geschäft nicht mit fl. 1000, sondern mit einem Vielfachen von fl. 1000 abgeschlossen zu werden pflegt, ohne dafs die Telegrammkosten dadurch eine Erhöhung erlitten. Wie mit Effekten kann auch mit Wechseln allein ein Arbitragegeschäft vorgenommen werden. Es kann sich lohnend oder nicht lohnend erweisen, eine Schuld in London nicht mittels eines auf London lautenden Wechsels, sondern mittels eines Wechsels auf Paris abzutragen u. s. w. Dafs in weitaus den meisten Fällen der Nutzen des Arbitragierens ein verschwindend kleiner geworden ist, und das Arbitragieren selbst, ehedem ein Hauptzweig des Bankgeschäftes, nahezu aufgehört hat, ist eine Folge des die Erde überspannenden Telegraphennetzes. Politische wie finanzielle Nachrichten pflanzen sich mit so augenblicklicher Geschwindigkeit fort, dafs gröfsere Kursunterschiede zwischen den Hauptbörsen, welche das Arbitragieren gestatteten, aufhören mufsten und aufgehört haben. Wenn gleichwohl das Bestehen von Bankgeschäften unter dem Wegfalle der Arbitrage wenig oder nicht gelitten hat, so liegt der Grund darin, dafs das gleiche Telegraphennetz, welches in der einen Beziehung geschäftschädigend wirkt, zahlreichen Kreisen Veranlassung giebt, am Börsengeschäft sich zu beteiligen, welche früher nicht daran dachten, und dafs so die Kundschaft der Banken eine ungeahnte Zunahme erfuhr.

28] Wir haben (Nr. 25) die zur Usance gewordene Berechnung des Diskontos an einem Wechsel mit einer auf Nr. 6 beruhenden anderen Berechnung verglichen und darauf zurückzukommen zugesagt. Dazu ist jetzt der Augenblick gekommen, nachdem das, was wir vom Börsengeschäft und den dabei vorkommenden prozentualen Rechnungen zu sagen beabsichtigten, seine Erledigung gefunden hat. Darüber, dafs ein Abzug gestattet sein müsse, wenn eine Schuld vor der Zeit ihrer Fälligkeit abgetragen werde, waren längst kaufmännische wie gerichtliche Kreise einig. Der lateinische Name dieses Abzugs war Interusurium, d. h. Zwischennutzung oder Commodum, beziehungsweise Incommodum repraesentationis, d. h. aus der Zurückführung auf die Gegenwart hervorgehender Vorteil oder Nachteil. Es scheint, als ob die italienischen Kaufleute, deren Vorbildlichkeit in der Buchhaltung und in zahlreichen kaufmännischen Rechnungen von ganz Europa anerkannt wurde, die heute noch börsenmäfsig übliche Form der Auswertung des Interusuriums eingeführt hätten. Sie beruht auf dem Abzug des Betrages $\frac{p \cdot n \cdot K_n}{100}$ als Interusurium von dem nach der Zeit n fälligen K_n, falls p der Diskontierungssatz ist. Nennt man den Barwert k_0, so ist also

$$k_0 = K_n - \frac{pnK_n}{100} = K_n \cdot \frac{100 - pn}{100}.$$

Man hat diese Rechnungsweise als Diskontierung von 100 oder Diskontierung in 100 bezeichnet, und nachdem ein sächsischer Rechtsgelehrter, Benedikt Carpzow, im 17. Jahrhunderte für sie eingetreten war, galt sie für unanfechtbar. Da trat Leibniz 1683 mit einer anderen Berechnungsweise hervor, welche im zweiten Kapitel, Nr. 33 und 34, erörtert werden soll. Die Abhandlung wurde von den Nichtmathematikern nicht verstanden und blieb praktisch wirkungslos, so wirkungslos, dafs fast 50 Jahre später ein Rechtslicentiat, Gottfried August Hoffmann, Berühmtheit erlangen konnte, als er in seiner *Klugheit hauszuhalten oder Prudentia oeconomica nebst einem Anhange vom Interusurio* von 1731 seine Methode der Carpzowschen wie der mifsverstandenen Leibnizischen gegenüber stellen konnte. Ist K_0 der nach Hoffmann erhaltene Barwert, so rechnete er nach der Formel

$$K_0 = \frac{100 K_n}{100 + pn}.$$

Man hat seine Rechnungsweise die Diskontierung auf 100 genannt. Das eigentliche Interusurium, der gestattete Abzug oder Diskontobetrag, ist bei der Rechnung von 100

$$D = K_n - k_0 = \frac{p \cdot n \cdot K_n}{100},$$

bei der Rechnung auf 100

$$d = K_n - K_0 = \frac{p \cdot n \cdot K_n}{100 + pn}.$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{D} = \frac{100 + pn}{pnK_n} - \frac{100}{pnK_n} = \frac{1}{K_n}$$

oder der Unterschied der beiden reciproken Abzüge bei Diskontierung von 100 und auf 100 ist ohne Rücksicht auf Zeit und Diskontierungssatz immer die reciproke diskontierte Summe.

29] Zwischen den beiden Barwerten K_0 und k_0 findet die Beziehung statt:

$$K_0 - k_0 = \frac{100\,K_n}{100 + pn} - \frac{(100 - pn)\,K_n}{100} = \frac{p^2 n^2 K_n}{100\,(100 + pn)}.$$

Der K_0 genannte Wert ist vermöge dieser wesentlich positiven Differenz immer gröſser als k_0, und damit ist erklärlich, daſs Gläubiger die Diskontierung auf 100, Schuldner die von 100 vorziehen. Am deutlichsten zeigt sich der frühzeitig erkannte Widersinn der Diskontierung von 100, wenn die Zeit n sich über eine lange Reihe von Jahren erstreckt. Ist beispielsweise $p = 4$, $n = 25$ Jahre, so wird $k_0 = 0$, und $n = 26$ Jahre bringt sogar $k_0 = -\frac{K_{26}}{25}$ hervor, oder der Gläubiger müſste dem Schuldner die nach 25 Jahren fällige Schuld einfach erlassen, müſste ihm für die nach 26 Jahren fällige Schuld noch etwas bar herauszahlen. Bei wenig entfernter Verfallzeit ist (Nr. 25) der Unterschied beider Diskontierungen nicht erheblich. Auch unser Wert $K_0 - k_0$ läſst dieses erkennen. Sei die Verfallzeit nach t Tagen oder $\frac{t}{360}$ Jahren, so ist

$$K_0 - k_0 = \frac{p^2 t^2 K_n}{1\,296\,000\,000 + 36\,000\,pt}$$

und t, namentlich aber K_n muſs schon eine recht groſse Zahl sein, wenn der Zähler dieses Bruches gegen dessen Nenner in Betracht kommen soll. Bei $p = 4$, $t = 90$ ist $K_0 - k_0 = \frac{K_n}{10\,100}$, oder bei einem Dreimonatswechsel beträgt bei 4 % der Unterschied der beiden Diskontierungsweisen nur so viele Pfennige, als die Wechselsumme ein Vielfaches von ℳ 101 ist.

30] Wie bei der Wechseldiskontierung sich zwei von einander in der Methode mehr als in den Ergebnissen abweichende Rechnungsarten bemerklich machten, so ist es auch bei der Terminrechnung.

Ihre Aufgabe ist folgende: Abzahlungen $a_1, a_2, \cdots a_\mu$ sollen nach $n_1, n_2, \cdots n_\mu$ Jahren fällig sein, man fragt nach dem mittleren Termine m, zu welchem die ganze Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu = \Sigma a$ bezahlt werden soll, damit beide Zahlungsweisen als gleichwertig erscheinen. In vielen Schriften wird die Antwort folgendermafsen erteilt: die Zahlungsverfahren sind gleichwertig, wenn der Schuldner bis zur Abtragung seiner Schuld gleichen Zinsertrag von den in seinem Besitze befindlichen Summen erzielt, wenn also

$$\frac{n_1 p a_1}{100} + \frac{n_2 p a_2}{100} + \cdots + \frac{n_\mu p a_\mu}{100}$$

und $\frac{mp\Sigma a}{100}$ gleich sind, oder, unter Kürzung durch $\frac{p}{100}$, wenn

$$\Sigma na = m\Sigma a,$$

beziehungsweise wenn

$$m = \frac{\Sigma na}{\Sigma a}.$$

Sind z. B. je *M.* 1000 nach 1, 2, 3, 4 Jahren zu zahlen, also

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1000, \quad n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4,$$

so ist

$$\Sigma na = 1000 + 2000 + 3000 + 4000 = 10000,$$
$$\Sigma a = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4000$$

und $m = \frac{10000}{4000} = 2\frac{1}{2}$ Jahre. Der Zinsfufs p kommt, wie man sieht, bei dieser Rechnung in Wegfall. Die andere Auffassung nennt die Zahlungsverfahren gleichwertig, wenn die nach dem einen und nach dem anderen Verfahren ausgezahlten Summen bei der Diskontierung auf 100 gleiche Barwerte besitzen. In einer Gleichung heifst diese Bedingung

$$\frac{100 a_1}{100 + n_1 p} + \frac{100 a_2}{100 + n_2 p} + \cdots + \frac{100 a_\mu}{100 + n_\mu p} = 100 \cdot \sum \frac{a}{100 + np} = \frac{100\Sigma a}{100 + mp},$$

und aus ihr folgt

$$m = \frac{\sum \frac{a}{p}}{\sum \frac{a}{100 + np}} - \frac{100}{p},$$

Bei ihrer Anwendung macht es einen Unterschied, welcher Zinsfufs p in Rechnung zu bringen ist. Fügen wir den Zahlenangaben unseres obigen Beispiels noch $p = 4$ hinzu, so ist

$$\sum \frac{a}{p} = \frac{1000}{4} + \frac{1000}{4} + \frac{1000}{4} + \frac{1000}{4} = 1000,$$

$$\sum \frac{a}{100 + np} = \frac{1000}{104} + \frac{1000}{108} + \frac{1000}{112} + \frac{1000}{116} = \frac{5190625}{142506},$$

$$\frac{100}{p} = \frac{100}{4} = 25$$

und

$$m = \frac{142506000}{5190625} - 25 = \frac{101923}{41525} = 2,454497\ldots$$

oder nahezu $m = 2\frac{5}{11}$ Jahre.

Unmöglich können beide Ergebnisse richtig sein. Wir haben daher alle Veranlassung, die Voraussetzungen des zweiten Ergebnisses, denen man, schon weil sie p berücksichtigen, weniger Mifstrauen entgegenzubringen geneigt sein wird, etwas genauer zu prüfen. Wir werden in der Lage sein, bei dieser Prüfung namentlich einen Punkt schärfer ins Auge zu fassen, nämlich inwieweit die Diskontierung auf 100, welche bei der Verzinsung über den Zeitraum eines Jahres oder auch über einen kürzeren Zeitraum richtig ist, ebenso richtig bleiben kann, wenn wie in obigem Beispiele von einer Verzinsung über 2, 3, 4 Jahre die Rede ist.

Zweites Kapitel.

Zusammengesetzter Zins.

31] Das Bürgerliche Gesetzbuch für das Deutsche Reich bestimmt im § 608: Sind für ein Darlehen Zinsen bedungen, so sind sie, sofern nicht ein anderes bestimmt ist, nach dem Ablaufe je eines Jahres und, wenn das Darlehen vor dem Ablaufe eines Jahres zurückzuerstatten ist, bei der Rückerstattung zu entrichten. Ist aber dieser gesetzlichen Bestimmung zufolge, sofern K ein Kapital, Z dessen Zins bis zu einem ein Jahr nicht überschreitenden Zeitpunkt bedeutet, in jenem Zeitpunkt $K + Z$ für K geworden, so ist K der Barwert jener $K + Z$, und eine im gleichen Zeitpunkte abzutragende Summe S mufs den Barwert $\frac{S \cdot K}{K + Z}$ haben, was mit den Formeln unserer Nr. 6, beziehungsweise mit der Diskontierung auf 100 übereinstimmt. Prüfen wir an der Hand des gleichen Gesetzesparagraphen und unter Zugrundelegung eines einfachen Zahlenbeispiels den Einflufs längerer Zeitdauer.

32] Ein Schuldner nimmt von einem Gläubiger eine Schuld von ℳ 12 000 zum Jahreszins von 4 % auf. Am Ende des 1. Jahres zahlt er den Zins mit ℳ 480 und ℳ 3000 an der Schuld ab, sodafs eine Restschuld von ℳ 9000 bleibt. Am Ende des 2. Jahres zahlt der Schuldner den Zins mit ℳ 360 und ℳ 3000 an der Schuld ab, sodafs eine Restschuld von *M.* 6000 bleibt. Am Ende des 3. Jahres zahlt der Schuldner den Zins mit *M.* 240 und *M.* 3000 an der Schuld ab, sodafs eine Restschuld von *M.* 3000 bleibt. Schliefslich am Ende des 4. Jahres zahlt der Schuldner den Zins mit *M.* 120 und die letzten *M.* 3000 an der Schuld. Er ist schuldenfrei. Die Zahlungen waren mithin

am Ende des 1. Jahres *M.* 3480,
" " " 2. " *M.* 3360,
" " " 3. " *M.* 3240,
" " " 4. " *M.* 3120,

wodurch eine Anfangsschuld von *M.* 12 000 mit 4 % Jahreszins sich getilgt erweist. Man mufs notwendiger Weise die Bedingungen der Aufgabe auch umkehren und behaupten können, bei 4 % Jahreszins sei *M.* 12 000 der Barwert der vier Forderungen *M.* 3480 nach 1 Jahre, *M.* 3360 nach 2 Jahren, *M.* 3240 nach 3 Jahren, *M.* 3120 nach 4 Jahren. Jede Diskontierung der vier Forderungen, welche nicht *M.* 12 000 als Barwert liefert, ist falsch, jede Diskontierung, welche zu diesem Barwerte führt, ist richtig. Diskontieren wir von 100, so ist:

$$\begin{aligned}
3480 - \frac{4}{100} \cdot 3480 &= 3340{,}80, \\
3360 - \frac{8}{100} \cdot 3360 &= 3091{,}20, \\
3240 - \frac{12}{100} \cdot 3240 &= 2851{,}20, \\
3120 - \frac{16}{100} \cdot 3120 &= \underline{2620{,}80} \\
& 11\,904.
\end{aligned}$$

Die Summe der Barwerte ist um *M.* 96 zu klein, mithin ist die Diskontierung von 100 falsch.

Diskontieren wir auf 100, so ist

$$\begin{aligned}
\frac{3480}{1{,}04} &= 3346{,}15, \\
\frac{3360}{1{,}08} &= 3111{,}11, \\
\frac{3240}{1{,}12} &= 2892{,}86, \\
\frac{3120}{1{,}16} &= \underline{2689{,}66} \\
& 12\,039{,}78.
\end{aligned}$$

Die Summe der Barwerte ist um *M.* 39,78 zu grofs, mithin ist die Diskontierung auf 100 falsch, wenn die Zeitdauer ein Jahr übersteigt.

33] Um die richtige Diskontierung zu erhalten, müssen wir die für den Zeitraum eines Jahres hergeleitete Diskontierung auf 100 jahr-weise anwenden. Die am Ende des 4. Jahres fälligen 3120 haben am Ende des 3. Jahres den Wert $\frac{3120}{1{,}04}$. Soll also am Ende des 3. Jahres die Schlufszahlung stattfinden, so mufs sie aus $3240 + \frac{3120}{1{,}04}$ bestehen, während die Zahlungen früheren Datums unverändert bleiben. Der Wert der am Ende des 3. Jahres fälligen Zahlung wird mittels Division durch 1,04 auf das Ende des 2. Jahres zurückgeführt, betrug also damals $\frac{3240}{1{,}04} + \frac{3120}{1{,}04^2}$, und soll am Ende des 2. Jahres die Schlufszahlung stattfinden, so mufs sie bestehen aus $3360 + \frac{3240}{1{,}04} + \frac{3120}{1{,}04^2}$, während die Zahlung am Ende des 1. Jahres unverändert bleibt. Will man die am Ende des 2. Jahres fällige Zahlung abermals mittels Division durch 1,04 auf das Ende des 1. Jahres zurückführen, so erscheint sie dort als $\frac{3360}{1{,}04} + \frac{3240}{1{,}04^2} + \frac{3120}{1{,}04^3}$, und somit ist die ganze am Ende des 1. Jahres zu erlegende Summe $3480 + \frac{3360}{1{,}04} + \frac{3240}{1{,}04^2} + \frac{3120}{1{,}04^3}$. Sie mufs den Barwert 12 000 besitzen und mittels einer letzten Division durch 1,04 auf denselben zurückgeführt werden, d. h. es mufs sein:

$$12\,000 = \frac{3480}{1{,}04} + \frac{3360}{1{,}04^2} + \frac{3240}{1{,}04^3} + \frac{3120}{1{,}04^4}.$$

Die Bestätigung dieser Gleichung ist aber nicht schwer. Durch Kürzung zeigt sich $\frac{3120}{1{,}04^4} = \frac{3000}{1{,}04^3}$ und mithin $\frac{3240}{1{,}04^3} + \frac{3120}{1{,}04^4} = \frac{6240}{1{,}04^3}$. Abermalige Kürzung zeigt $\frac{6240}{1{,}04^3} = \frac{6000}{1{,}04^2}$, mithin $\frac{3360}{1{,}04^2} + \frac{3240}{1{,}04^3} + \frac{3120}{1{,}04^4} = \frac{9360}{1{,}04^2}$. Wieder eine neue Kürzung zeigt $\frac{9360}{1{,}04^2} = \frac{9000}{1{,}04}$. So gelangt man zu $\frac{3480}{1{,}04} + \frac{3360}{1{,}04^2} + \frac{3240}{1{,}04^3} + \frac{3120}{1{,}04^4} = \frac{12\,480}{1{,}04} = 12\,000$, wie behauptet worden war. Die hier vorgenommene Diskontierung ist also allein richtig. Offenbar müssen die einzelnen Glieder der als 12 000 sich addierenden viergliedrigen Reihe die Barwerte derjenigen Beträge darstellen, welche in ihnen als Zähler erscheinen. Die am Ende des 4. Jahres fälligen 3120 haben am Ende des 3. Jahres den Wert $\frac{3120}{1{,}04}$, am Ende des 2. Jahres den Wert $\frac{3120}{1{,}04^2}$, am Ende des 1. Jahres den Wert $\frac{3120}{1{,}04^3}$, am Ende des 0. Jahres oder, wie man statt dessen sagt, am Anfange des 1. Jahres den Wert $\frac{3120}{1{,}04^4}$. Wird in allgemeinen Buchstaben K_n das Kapital genannt, welches am Ende des n^{ten} Jahres vorhanden sein soll, ist K_0 dessen Barwert unter Annahme einer Jahresverzinsung von $p\,\%$, so mufs also sein:

$$K_0 = \frac{K_n}{1{,}0p^n}.$$

34] Wie in Nr. 6 aus einer zwischen K_0, K_n, p, n (wo $n \leq 1$ Jahr) stattfindenden Gleichung drei andere hervorgingen, so erhalten wir jetzt, n als ganze positive Zahl vorausgesetzt, die Gleichungen

$$K_n = K_0 \cdot 1{,}0p^n$$

$$p = 100\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 100$$

$$n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log 1{,}0p}.$$

Die erste derselben hat Leibniz (vergl. Nr. 28) in seiner Abhandlung von 1683 *Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice* (abgedruckt in der damals in Leipzig erscheinenden Zeitschrift Acta Eruditorum) hergeleitet. Leibnizens Formel, im Wesentlichen darin wurzelnd, dafs die Gleichungen

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 &&\cdot 1{,}0p \\ K_2 &= K_1 &&\cdot 1{,}0p \\ K_3 &= K_2 &&\cdot 1{,}0p \\ &\cdots \\ K_n &= K_{n-1} &&\cdot 1{,}0p \end{aligned}$$

als gleichberechtigte auftreten, aus deren Multiplikation $K_n = K_0 \cdot 1{,}0p^n$ entstehen mufs, fand bei den Juristen seiner Zeit keine Gnade. Man fertigte sie damals und noch vor kurzem mit dem Worte ab, sie enthalte einen Anatocismus (vergl. Nr. 3), sie rechne Zins von dem nicht gezahlten Zinse, also Zinzeszins oder zusammengesetzten Zins, und das sei verboten. Aber gesetzliche Verbote können gegen den Zwang mathematischer Beweisführung, gegen die in den Verkehr eingedrungene Anerkennung ihrer Richtigkeit nicht fruchten. Das Bürgerliche Gesetzbuch für das Deutsche Reich hat zwar in § 248 alter Gewohnheit folgend den Satz ausgesprochen: Eine im voraus getroffene Vereinbarung, dafs fällige Zinsen wieder Zinsen tragen sollen, ist nichtig. Aber es hat im gleichen Paragraphen der Regel so viele Ausnahmen folgen lassen, dafs sie gerade in den wichtigsten Fällen als aufgehoben erscheint. An jenen Satz schliefst sich nämlich unmittelbar an: Sparkassen, Kreditanstalten und Inhaber von Bankgeschäften können im voraus vereinbaren, dafs nicht erhobene Zinsen von Einlagen als neu verzinsliche Einlagen gelten sollen. Kreditanstalten, die berechtigt sind, für den Betrag der von ihnen gewährten Darlehen verzinsliche Schuldverschreibungen auf den Inhaber auszugeben, können sich bei solchen Darlehen die Verzinsung rückständiger Zinsen im voraus versprechen lassen. Man sieht aus diesem Wortlaute, dafs schliefslich nur dem kleinen

Schuldner gegen seinen Gläubiger ein gewisser Schutz gewährt bleibt, eine Folgewidrigkeit, die man um der guten Absicht willen zugeben mag.

35] Unter den vom Bürgerlichen Gesetzbuche für das Deutsche Reich vorgesehenen Ausnahmen, in welchen Zinseszins gestattet sei, befindet sich auch die Rechnungsführung der Sparkassen. Den Spareinlagen wird am Ende jedes Jahres der bis dahin erwachsene Zins zugeschrieben, der vom 1. Januar des folgenden Jahres an als neue zinstragende Spareinlage behandelt wird. Allerdings tritt dabei eine Einschränkung insofern ein, als die Sparkassen einen gewissen Kleinstbetrag zu bestimmen pflegen, meistens von ℳ 10, der erreicht sein mufs, bevor Zinsvergütung stattfindet. Es lohnt an einem Beispiele sich von der Tragweite dieser Einschränkung zu überzeugen. Als 1886 das 500jährige Stiftungsfest der Universität Heidelberg begangen wurde, legte man ℳ 10 in die dortige Sparkasse ein, welche bis zum 1000jährigen Stiftungsfeste unangetastet bleiben, dann mit ihrem ganzen Zuwachse den Universitätsbehörden zur Verfügung gestellt werden sollen. Bei unserer Berechnung wollen wir jene Satzung, dafs nur ganze Vielfache von ℳ 10 verzinst werden, berücksichtigen und den Zinsfufs zu 3 % annehmen. Vorläufig gewährt zwar die Heidelberger Sparkasse einen höheren Zins, wir legen aber den niedrigeren Zinsfufs zu Grunde, um mit unserem Ergebnisse lieber unter als über der Wahrheit zu bleiben. Der Zins aus ℳ 10 beträgt demnach 30 ₰ und in 34 Jahren ℳ 10,20, mithin ist $K_0 = 10$, $K_1 = 10{,}30$, $K_2 = 10{,}60$, $K_{34} = 20{,}20$. Von da an werden 60 ₰ Jahreszins vergütet, in 17 Jahren ℳ 10,20, d. h. man hat $K_{51} = 30{,}40$. Weitere Zahlen sind $K_{62} = 40{,}30$, $K_{71} = 51{,}10$, $K_{77} = 60{,}10$, $K_{83} = 70{,}90$, $K_{88} = 81{,}40$, $K_{92} = 91$, $K_{96} = 101{,}80$, $K_{99} = 110{,}80$, $K_{100} = 114{,}10$. Von hier an mögen die Beträge Jahr für Jahr angegeben werden:

Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag
101	117.40	114	170.20	127	248.20	140	362.50	153	529.90
102	120.70	115	175.30	128	255.40	141	373.30	154	545.50
103	124.30	116	180.40	129	262.90	142	384.40	155	561.70
104	127.90	117	185.80	130	270.70	143	395.80	156	578.50
105	131.50	118	191.20	131	278.80	144	407.50	157	595.60
106	135.40	119	196.90	132	286.90	145	419.50	158	613.30
107	139.30	120	202.60	133	295.30	146	431.80	159	631.60
108	143.20	121	208.60	134	304.—	147	444.70	160	650.50
109	147.40	122	214.60	135	313.—	148	457.90	161	670.—
110	151.60	123	220.90	136	322.30	149	471.40	162	690.10
111	156.10	124	227.50	137	331.90	150	485.50	163	710.80
112	160.60	125	234.10	138	341.80	151	499.90	164	732.10
113	165.40	126	241.—	139	352.—	152	514.60	165	754.—

Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag
166	776.50	215	3289.30	264	13983.50	313	59518.—
167	799.60	216	3387.70	265	14402.90	314	61303.30
168	823.30	217	3489.10	266	14834 90	315	63142.30
169	847.90	218	3593.50	267	15279.80	316	65036.50
170	873.10	219	3701.20	268	15737.90	317	66987.40
171	899.20	220	3812.20	269	16209.80	318	68996.80
172	925.90	221	3926.50	270	16695.80	319	71066 50
173	953.50	222	4044.10	271	17196.50	320	73198.30
174	982.—	223	4165.30	272	17712.20	321	75394.—
175	1011.40	224	4290.20	273	18243.50	322	77655.70
176	1041.70	225	4418.90	274	18790.70	323	79985.20
177	1072.90	226	4551.20	275	19354.40	324	82384 60
178	1105.—	227	4687.70	276	19934.90	325	84856.—
179	1138.—	228	4828.10	277	20532.80	326	87401.50
180	1171.90	229	4972.70	278	21148.70	327	90023.50
181	1207.—	230	5121 80	279	21782.90	328	92724.10
182	1243.—	231	5275.40	280	22436.30	329	95505.70
183	1280.20	232	5433.50	281	23108.20	330	98370.70
184	1318.60	233	5596 40	282	23801.20	331	101321.80
185	1357.90	234	5764.10	283	24515.20	332	104361.40
186	1398.40	235	5936.90	284	25250.50	333	107492.20
187	1440.10	236	6114.80	285	26008.—	334	110726.90
188	1483.30	237	6298.10	286	26788.—	335	114048.50
189	1527.70	238	6486.80	287	27591.40	336	117469.70
190	1573.30	239	6681.20	288	28429.10	337	122993.50
191	1620.40	240	6881.60	289	29281.70	338	124623.20
192	1669.—	241	7088.—	290	30160.10	339	128361.80
193	1718.80	242	7300.40	291	31064.90	340	132212.60
194	1770.10	243	7519.40	292	31996.70	341	136178.90
195	1823.20	244	7744.70	293	32956.40	342	140264.—
196	1877.80	245	7976.90	294	33944.90	343	144471.80
197	1933.90	246	8216.—	295	34963.10	344	148805.90
198	1991.80	247	8462.30	296	36011.90	345	153269.90
199	2051.50	248	8716.10	297	37092.20	346	157867.70
200	2113.—	249	8977.40	298	38204.90	347	162603 50
201	2176.30	250	9246.50	299	39350.90	348	167481.50
202	2241.40	251	9523.70	300	40530.40	349	172505.90
203	2308.60	252	9809.30	301	41746.30	350	177680.90
204	2377.60	253	10103.30	302	42998.50	351	183011.30
205	2448.70	254	10406.30	303	44288.20	352	188501 60
206	2521.90	255	10718.30	304	45616.60	353	194156.60
207	2597.50	256	11039.60	305	46984.90	354	199980.10
208	2675.20	257	11370.50	306	48394.30	355	205979.50
209	2755.30	258	11711.60	307	49846.—	356	212158.60
210	2837.80	259	12062.90	308	51341.20	357	218523.10
211	2922.70	260	12424.70	309	52881.40	358	225058.70
212	3010.30	261	12797.30	310	54467.80	359	231810.20
213	3100.60	262	13181.—	311	56101.60	360	238764.50
214	3193.60	263	13576.40	312	57784.60	361	245927.30

Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag	Jahr	Betrag
362	253304 90	397	712753 60	432	2006372.60	467	5645637.70
363	260903.90	398	734136.10	433	2066560.70	468	5815006.60
364	268730.90	399	756160.—	434	2128557.50	469	5989456.60
365	276792.80	400	778844.80	435	2192413.—	470	6169140.10
366	285096 50	401	802210.—	436	2258185.30	471	6354214.30
367	293649.20	402	826276.30	437	2325930.70	472	6544840.60
368	302458.40	403	851064.40	438	2395708.60	473	6741185.80
369	311531.90	404	876596.20	439	2467579.60	474	6943421.20
370	320877.80	405	902893.90	440	2541606.70	475	7151723.80
371	330503.90	406	929980.60	441	2617854.70	476	7366275.40
372	340418.90	407	957880.—	442	2696390.20	477	7587263.50
373	350630.20	408	986616.40	443	2777281.90	478	7814881.30
374	361149.10	409	1016614.70	444	2860600.30	479	8049327.70
375	371983.30	410	1047113.—	445	2946418.30	480	8290807.30
376	383142.70	411	1078526.30	446	3034810.60	481	8539531.30
377	394636.90	412	1110881.90	447	3125854.90	482	8795717.20
378	406475.80	413	1144208.30	448	3219630.40	483	9059588.50
379	418669.90	414	1178534.30	449	3316219.30	484	9331375.90
380	431229.70	415	1213890.20	450	3415705.60	485	9611317.—
381	444166.30	416	1250306.90	451	3518176.60	486	9899656.30
382	457491.10	417	1287815.90	452	3623721.70	487	10196645.80
383	471215.80	418	1326450.20	453	3732433.30	488	10502544.—
384	485352.10	419	1366243.70	454	3844406.20	489	10817620.20
385	499912.60	420	1407230.90	455	3959738.20	490	11142148.80
386	514909.90	421	1449447.80	456	4078530.10	491	11476413.—
387	530356.90	422	1492931.—	457	4200886.—	492	11820705.30
388	546267.40	423	1537718.90	458	4326912.40	493	12175326.30
389	562655.20	424	1583850.20	459	4456719.70	494	12540585.90
390	579534.70	425	1631365.70	460	4590421.—	495	12917803.30
391	596920.60	426	1680306.50	461	4728133.60	496	13305337.30
392	614828.20	427	1730715.50	462	4869977.50	497	13704497.20
393	633272.80	428	1782636 80	463	5016076.60	498	14115631.90
394	652270.90	429	1836115.70	464	5166558.70	499	14539100.80
395	671839.—	430	1891199.—	465	5321555.20	500	14975273.80
396	691993.90	431	1947934.70	466	5481201.70		

Wir haben die langwierige Rechnung vorgenommen, um den Einflufs, welchen jene zinsbeschränkende Klausel ausübt, recht deutlich hervortreten zu lassen. Bei bedingungslosem Zinseszins würden *M.* 10 in 500 Jahren zu $10 \cdot 1{,}03^{500} = 26\,218\,778$, während wir einen um fast $12\frac{1}{4}$ Millionen niedrigeren Betrag erhielten. Die Klausel macht sich am Anfang am fühlbarsten, wo die zinslos verbleibenden, weil 10 *M.* noch nicht erreichenden Überschüsse bei selbst noch geringer Einlage einen wesentlichen Teil derselben bilden, während später bei schon hoher Einlage *M.* 10 und weniger als verschwindend klein betrachtet werden dürfen. In der That haben wir $K_{100} = 114{,}10$ erhalten, während $10 \cdot 1{,}03^{100} = 192{,}19$ mehr als $\frac{5}{3}$ von 114,10 ist.

Würde $K_{100} = 114{,}10$ dem weiteren bedingungslosen Zinseszins zu Grunde gelegt, mithin $114{,}10 \cdot 1{,}03^{400}$ berechnet, so käme 15 565 950 heraus, immer noch mehr als sparkassenmäfsig, aber der Unterschied beträgt noch nicht ℳ 600 000, nicht den zwanzigsten Teil wie vorhin. Man könnte den Einflufs der Klausel auch unter Anwendung der in Nr. 34 gefundenen Formel $p = 100 \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 100$ untersuchen. Wir hätten hier $p = 100 \sqrt[500]{1\,497\,527{,}38} - 100 = 2{,}884\ldots$, zu welchem Zinsfufs die ℳ 10 sich bedingungslos während 500 Jahren durch Zinseszins vermehrt haben müfsten, um ℳ 14 975 273.80 zu erreichen.

36] Wir haben (Nr. 34) auch die Formel $n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log 1{,}0p}$ kennen gelernt. Sie leistet gute Dienste bei Beantwortung der Frage, wie lange es dauert, bis ein Kapital mittels Zinseszins zu p% sich ver*m*facht hat. Die Fragestellung verlangt $K_n = mK_0$, $\log K_n - \log K_0 = \log m$ und $n = \frac{\log m}{\log 1{,}0p}$. In bestimmten Zahlen entsprechen einander

$$m = 2 \begin{cases} p = 3 & n = 23{,}44\ldots \\ p = 3\tfrac{1}{2} & n = 20{,}14\ldots \\ p = 4 & n = 17{,}67\ldots \end{cases}$$

$$m = 10 \begin{cases} p = 3 & n = 77{,}87\ldots \\ p = 3\tfrac{1}{2} & n = 66{,}92\ldots \\ p = 4 & n = 58{,}71\ldots \end{cases}$$

$$m = 100 \begin{cases} p = 3 & n = 155{,}75\ldots \\ p = 3\tfrac{1}{2} & n = 133{,}85\ldots \\ p = 4 & n = 117{,}43\ldots \end{cases}$$

Dafs die Zeit der Verhundertfachung doppelt so lang, als die der Verzehnfachung sein mufs, ist einleuchtend, weil $100 = 10^2$ und $\log 100 = 2 \log 10$. Man kann den gleichen Gedanken auch in die Worte kleiden: bei der Verhundertfachung müsse das schon verzehnfachte Kapital abermals verzehnfacht werden. Vergleichen wir die Tabelle in Nr. 35, so sehen wir wiederholt, dafs die Sparkassenklausel bei einer gewissen Höhe der Einlage nicht mehr in Betracht kommt. Es war $14\,975\,273.80 = K_{500}$. Die Einlage 149 752.74 ist $\begin{matrix} > K_{344} \\ < K_{345} \end{matrix}$. Die Verhundertfachung brauchte also mehr als 155, weniger als 156 Jahre. Wir haben bei den hier auftretenden Bruchteilen von Jahren noch zu verweilen. Zunächst bedeuten sie nur, dafs eine ganzzahlige Anzahl von Jahren eine zu geringe, die um die Einheit gröfsere Anzahl von Jahren eine zu lange Verzinsungszeit darstellt. Ihre genauere Angabe, d. h die bestimmte Bezeichnung der Zeit, nach welcher die gewünschte Ver*m*fachung des Anfangskapitals eintritt, erfordert eine besondere Rechnung mit einfacher Verzinsung für die Zeit unterhalb von einem Jahre. Beispielsweise war $78 > n > 77$ für $p = 3$, $m = 10$. Aus 1 wird zu 3 % in 77 Jahren 9,73792224 bei Anwendung von Zinseszins, mithin fehlen noch 0,26207776, um 10 hervorzubringen, und dieser Betrag soll der Zins von 9,73792224 in der Zeit n_1 (ein Bruchteil eines Jahres) zu 3 % sein, oder $\frac{3n_1}{100} \cdot 9{,}73792224 = 0{,}26207776$ und $n_1 = \frac{26{,}207776}{29{,}21376672} = 0{,}897$. Das gesuchte n ist also 77,897 Jahre statt der vorhin erhaltenen 77,87 Jahre.

37] Ähnlicherweise ist auch die in Nr. 30 zur Sprache gebrachte Terminrechnung zu behandeln. Der Barwert der Forderungen a_1 nach n_1, a_2 nach n_2, $\cdots$ a_μ nach n_μ Jahren bei p % ist

$$\frac{a_1}{1{,}0p^{n_1}} + \frac{a_2}{1{,}0p^{n_2}} + \cdots + \frac{a_\mu}{1{,}0p^{n_\mu}},$$

und man fragt nun, in welcher Zeit diese Summe zu $a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu$ anwächst. Es wird nicht von der Hand zu weisen sein, auch hier Zinseszins zu rechnen, sofern eine ganze Anzahl von Jahren vorkommt, bei den überschiefsenden Bruchjahren dagegen einfache Verzinsung anzunehmen. In dem Beispiele von Nr. 30 waren vier Forderungen von je *M.* 1000 nach 1, 2, 3, 4 Jahren geltend zu machen. Bei 4 % ist ihr Barwert

$$\frac{1000}{1{,}04} + \frac{1000}{1{,}04^2} + \frac{1000}{1{,}04^3} + \frac{1000}{1{,}04^4} = 3629{,}896\,.$$

Diese Summe soll zu 4000 anwachsen. Im ersten Jahre wird sie zu 3775,092, im zweiten Jahre zu 3926,096, und nun fehlen noch 73,904 an 4000. Wir nehmen $\frac{25 \cdot 73{,}904}{3926{,}096} = 0{,}4706$ und finden somit den Endtermin mit 2,4706 Jahren. Er liegt ungefähr in der Mitte zwischen 2,5 und 2,454497. Praktisch ist allerdings der Unterschied aller drei Ergebnisse nicht sehr erheblich, aber die ganze Aufgabe der Terminrechnung ist nur von der theoretischen Seite aufzufassen, da wir uns kaum einen Fall denken können, in welchem sie im wirklichen Geschäftsleben Anwendung finden sollte.

38] Die Formeln in Nr. 34 setzten voraus, dafs ein Anfangskapital K_0 durch Zinseszins zu p % innerhalb n Jahren, wo n ganzzahlig gedacht ist, zur Höhe K_n anwächst. Die Aufgabe läfst mancherlei Nebenbedingungen zu, welche in Rechnung gebracht werden können, und von welchen einige Beispiele erwähnt werden mögen. Sei etwa ein Kapital K_0 zinstragend zu $p\,\%$ angelegt. Der am Ende des Jahres fällige Zins werde regelmäfsig zur Sparkasse gegeben und dort mit $q\,\%$ verzinst. Von einer Klausel, nach welcher Beträge unter einer gewissen Höhe unverzinst bleiben, sehen wir ab, um allgemeine Betrachtungen anstellen zu können. Wie grofs ist das nach n Jahren vorhandene Kapital K_n? Am Ende des ersten Jahres und ebenso am Ende jedes Jahres ist K_0 vorhanden. Die Jahreszinsen sind erstmalig am Ende des ersten, zum n^{ten} male am Ende des n^{ten} Jahres in der Höhe von $\frac{pK_0}{100}$ zur Sparkasse gebracht, wo sie Zinseszins zu $q\,\%$ tragen. Demnach ist:

$$K_n = K_0 + \frac{pK_0}{100}\left[1{,}0q^{n-1} + 1{,}0q^{n-2} + \cdots + 1{,}0q + 1\right].$$

Aber durch Ausführung der Division erkennt man leicht, dafs

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1$$

und demgemäfs mufs

$$1{,}0q^{n-1} + 1{,}0q^{n-2} + \cdots + 1{,}0q + 1 = \frac{1{,}0q^n - 1}{1{,}0q - 1} = \frac{100}{q}\left[1{,}0q^n - 1\right]$$

sein, beziehungsweise

$$K_n = K_0 + \frac{pK_0}{100}\cdot\frac{100}{q}\left[1{,}0q^n - 1\right] = \frac{K_0}{q}\left[p\cdot 1{,}0q^n - (p-q)\right].$$

39] Mancherlei Bemerkungen können an folgende Aufgabe geknüpft werden: Zur Unterhaltung eines Gebäudes und zum jeweiligen Wiederaufbau ist ein Kapital von *M.* 20000 gestiftet. Die Unterhaltung des jetzigen Gebäudes erfordert einen am Ende jedes Jahres zu deckenden Aufwand von *M.* 100 und am Ende jedes 5. Jahres einen aufserordentlichen Aufwand von *M.* 500. Nach 40 Jahren mufs das Gebäude abgerissen werden, sodafs dann der aufserordentliche Aufwand wegfällt. Der inzwischen aufgeführte und zu jenem Zeitpunkt zu bezahlende Neubau ist auf eine Dauer von jeweils 200 Jahren geschätzt, seine Unterhaltungskosten auf am Ende jedes Jahres zu erlegende 1 % der Baukosten. Wie hoch sind die Baukosten, wenn 4 % Zinsen in Rechnung kommen? Wird zunächst nach dem nach 40 Jahren vorhandenen Kapitale gefragt, so besteht dasselbe aus

$$20000\cdot 1{,}04^{40} - 100\left[1{,}04^{39} + 1{,}04^{38} + \cdots + 1{,}04 + 1\right]$$

$$-\,500\left[1{,}04^{35} + 1{,}04^{30} + \cdots + 1{,}04^{5}\right] = 20000\cdot 1{,}04^{40} - 100\cdot\frac{1{,}04^{40}-1}{1{,}04-1}$$

$$-\,500\,\frac{1{,}04^{40} - 1{,}04^5}{1{,}04^5 - 1} = 17500\cdot 1{,}04^{40} + 2500 - 500\,\frac{1{,}04^{40} - 1{,}04^5}{1{,}04^5 - 1}.$$

Nun ist $1{,}04^{40} = 4{,}80102063$, $1{,}04^5 = 1{,}21665290$, und demnach vorhanden $K_0 = 85\,690{,}65$, woraus ein Baufond B und ein Reservefond $K_0 - B$ gebildet wird. Dieser Reservefond verzinst sich 200 Jahre lang zu $4\,\%$, während jährlich $\frac{B}{100}$ verausgabt werden. Nennt man den Bestand des Reservefonds am Ende der einzelnen Jahre K_1, K_2, $\cdots K_{200}$, so ist demnach

$$K_1 = (K_0 - B)\,1{,}04 - \frac{B}{100}$$

$$K_2 = (K_0 - B)\,1{,}04^2 - \frac{B}{100} \cdot 1{,}04 - \frac{B}{100}$$

. . . .

$$\begin{aligned} K_{200} &= (K_0 - B)\,1{,}04^{200} - \frac{B}{100}\left(1{,}04^{199} + 1{,}04^{198} + \cdots + 1{,}04 + 1\right) \\ &= (K_0 - B)\,1{,}04^{200} - \frac{B}{100} \cdot \frac{1{,}04^{200} - 1}{1{,}04 - 1} \\ &= K_0 \cdot 1{,}04^{200} - \frac{5B}{4} \cdot 1{,}04^{200} + \frac{B}{4}. \end{aligned}$$

Da jeweils die gleiche Finanzoperation wiederholt werden soll, so mufs $K_{200} = K_0$ sein und $K_0 = K_0 \cdot 1{,}04^{200} - \frac{5B}{4} \cdot 1{,}04^{200} + \frac{B}{4}$, folglich

$$B = 4K_0\,\frac{1{,}04^{200} - 1}{5 \cdot 1{,}04^{200} - 1}.$$

Kommen Ausdrücke von solcher Gestalt wie der Bruch $\frac{1{,}04^{200} - 1}{5 \cdot 1{,}04^{200} - 1}$ vor, so thut man meistens gut, denselben durch $1{,}04^{200}$ zu kürzen, um lieber kleine Decimalbrüche von 1, als 1 von grofsen Zahlen abzuziehen. Man erhält folglich

$$B = \frac{4K_0}{5 - 1{,}04^{-200}}\left(1 - 1{,}04^{-200}\right).$$

Wäre das Wort *jeweils* nicht in der Aufgabe vorhanden, sollte also nur ein Neubau errichtet werden, dessen Baukosten B' sein mögen, und soll der Reservefond $K_0 - B'$ durch die Unterhaltungskosten aufgezehrt werden, so mufs

$$K_{200} = K_0 \cdot 1{,}04^{200} - \frac{5B'}{4} \cdot 1{,}04^{200} + \frac{B'}{4} = 0$$

sein, mithin

$$B' = \frac{4K_0}{5 - 1{,}04^{-200}}.$$

Rechnen wir beide Werte B und B' aus, indem wir von

$$1{,}04^{-200} = 0{,}00039204$$

Gebrauch machen, so erhalten wir

$$B' = \frac{342\,762{,}6}{4{,}99960796} = 68\,557{,}88$$

$$B = \frac{342\,762{,}6}{4{,}99960796} \cdot 0{,}99960796 = 68\,530{,}98\,.$$

Die entsprechenden Reservefonds sind

$$K_0 - B' = 17\,132{,}77 \qquad K_0 - B = 17\,159{,}67\,.$$

Der 4% Zins von $K_0 - B$ beträgt 686,39, während $\frac{B}{100} = 685{,}31$. Jährlich vermehrt sich der Reservefond.

Der 4% Zins von $K_0 - B'$ beträgt 685,31, während $\frac{B'}{100} = 685{,}58$. Jährlich vermindert sich der Reservefond.

Auf eine praktische Bedeutung erheben die beiden in dieser Nummer vereinigten Aufgaben keinerlei Anspruch, da in ihnen Verzinsung von Beträgen mit einzelnen Mark und Pfennigen verlangt wird, die thatsächlich zu 4% zinstragend zu machen kaum jemals gelingen wird.

40] Hervorragend praktische Bedeutung hat dagegen die Aufgabe der Verzinsung und Tilgung oder Amortisation von Anlehen durch dem Betrage nach gleiche Jahresleistungen oder Annuitäten. Sei das Anfangskapital K_0 zu p% verzinslich; am Ende jedes Jahres wird die Summe a ausgezahlt, welche zur Deckung der fälligen Zinsen und, soweit sie diese übertrifft, zur Abtragung der Schuld Verwendung findet; man fragt nach K_n, als der Höhe der Schuld am Ende des n^{ten} Jahres. Ersichtlich ist

$$K_1 = K_0 \cdot 1{,}0p - a$$

$$K_2 = K_0 \cdot 1{,}0p^2 - a(1{,}0p + 1)$$

$$K_3 = K_0 \cdot 1{,}0p^3 - a(1{,}0p^2 + 1{,}0p + 1)$$

. . . .

$$K_n = K_0 \cdot 1{,}0p^n - a(1{,}0p^{n-1} + 1{,}0p^{n-2} + \cdots + 1{,}0p + 1)$$

$$= K_0 \cdot 1{,}0p^n - a \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p - 1} = K_0 \cdot 1{,}0p^n - \frac{100\,a}{p}(1{,}0p^n - 1)\,.$$

Soll am Ende des n^{ten} Jahres die Schuld vollständig getilgt sein, so mufs $K_n = 0$ sein. Man hat alsdann die Amortisationsgleichung

$$K_0 \cdot 1{,}0p^n - \frac{100\,a}{p}(1{,}0p^n - 1) = 0\,,$$

welche zuerst von Euler 1748 veröffentlicht wurde.

41] Die Amortisationsgleichung kann nach K_0, nach a und nach n gelöst werden. Man findet

$$a = \frac{pK_0}{100\left(1 - 1{,}0p^{-n}\right)}$$

$$K_0 = \frac{100\,a}{p}\left(1 - 1{,}0p^{-n}\right)$$

$$n = \frac{\log(100\,a) - \log\left(100\,a - pK_0\right)}{\log 1{,}0p}.$$

Eine einfache Auflösung der Amortisationsgleichung nach p ist nicht möglich, weil dieselbe nach p von dem Grade n ist; doch kommt eine dahin zielende und nur durch allmähliche Annäherung zu bewältigende Aufgabe kaum jemals vor.

42] Dafs aus gegebenen K_0, p, n die Annuität a gesucht wird, entspricht dem Falle, dafs ein Gemeinwesen eine Summe von einer gewissen Höhe, welche durch das Bedürfnis bestimmt ist, in Gestalt eines Anlehens aufzunehmen genötigt ist, dafs die Zeitverhältnisse es mit sich bringen, dafs ein solches Anlehen nur unter Verzinsung mit p % zu Stande kommt, und dafs die Notwendigkeit vorhanden ist, dafs das ganze Anlehen binnen n Jahren heimgezahlt sei, weil diese Verpflichtung von der die Ausgabe des Anlehens bewilligenden Stelle, gleichviel wie sie heifse, auferlegt wurde. Wolle beispielsweise eine Stadtgemeinde ein $3\frac{1}{2}$ % Anlehen von ℳ 4 000 000 aufnehmen und habe die staatliche Genehmigung dazu nur unter der Bedingung erhalten, dafs die Schuld binnen 25 Jahren abgetragen werde. Man rechnet $a = \frac{140\,000}{1 - 1{,}035^{-25}} = 242\,696{,}15$, und in der That wird durch diese Jahreszahlung die städtische Verpflichtung erfüllt sein. Wäre die Schuld an eine einzige Stelle abzutragen, so würde diese Summe von ℳ 242696,15 am Ende jedes Jahres ausbezahlt werden können, nicht aber wenn die Schuld die Form eines Anlehens besitzt. Die Abzahlungen können in diesem Falle nur in runden Summen bestehen, entsprechend dem Nennwerte der ausgegebenen Anlehenscheine, und demzufolge wird die Annuität bald nach oben, bald nach unten abgerundet werden müssen und nur als Durchschnittswert dem Tilgungsplane zu Grund gelegt werden können. Ein solcher sieht etwa so aus:

Jahr	Schuld	Zins zu $3\frac{1}{2}$ %	Abzahlung	Jahresbedarf
1	4 000 000	140 000.—	102 700	242 700.—
2	3 897 300	136 405.50	106 300	242 705.50
3	3 791 000	132 685.—	110 000	242 685.—
4	3 681 000	128 835.—	113 900	242 735.—
5	3 567 100	124 848.50	117 800	242 648.50

Jahr	Schuld	Zins zu $3\frac{1}{2}$ %	Abzahlung	Jahresbedarf
6	3 449 300	120 725.50	122 000	242 725.50
7	3 327 300	116 455.50	126 200	242 655.50
8	3 201 100	112 038.50	130 600	242 638.50
9	3 070 500	107 467.50	135 200	242 667.50
10	2 935 300	102 735.50	140 000	242 735.50
11	2 795 300	97 835.50	144 900	242 735.50
12	2 650 400	92 764.—	149 900	242 664.—
13	2 500 500	87 517.50	155 200	242 717.50
14	2 345 300	82 085.50	160 600	242 685.50
15	2 184 700	76 464.50	166 200	242 664.50
16	2 018 500	70 647.50	172 100	242 747.50
17	1 846 400	64 624.—	178 000	242 624.—
18	1 668 400	58 394.—	184 300	242 694.—
19	1 484 100	51 943.50	190 800	242 743.50
20	1 293 300	45 265.50	197 400	242 665.50
21	1 095 900	38 356.50	204 300	242 656.50
22	891 600	31 206.—	211 500	242 706.—
23	680 500	23 817.50	218 900	242 717.50
24	461 600	16 156.—	226 600	242 756.—
25	235 000	8 225.—	235 000	243 225.—

Selbstverständlich könnten in einzelnen Jahren auch einmal ℳ 100 mehr oder ℳ 100 weniger abbezahlt werden, um den Jahresbedarf noch gleichmäfsiger zu gestalten. Die Zusicherung jährlich ℳ 242 696,15 für Verzinsung und Tilgung aufwenden zu wollen pflegt in die Form gekleidet zu werden, das Anlehen werde $3\frac{1}{2}$ % Zins tragen und 2,5674 % zur Amortisation verwenden, wobei der Zusatz gemacht wird oder als selbstverständlich gilt, dafs die allmählich sich ergebende Zinsersparnis auch auf Amortisation zu verwenden sei.

43] Wäre das Anlehen nicht mit $3\frac{1}{2}$ % Zins, sondern nur mit 4 % Zins zu erhalten, so würde sich der Jahresbedarf bei 25jähriger Tilgung auf $\frac{160\,000}{1 - 1{,}04^{-25}} = 256\,077$ stellen, und man würde sagen, das Anlehen trage 4 % Zins nebst 2,4019 % Amortisation. Der Unterschied der unter beiden Voraussetzungen erforderlichen Jahresaufwendungen stellt sich also auf 0,3345 % oder ziemlich genau auf $\frac{1}{3}$ %. Im mathematischen Denken ungeübte Personen finden mitunter unbegreiflich, dafs der Unterschied nur $\frac{1}{3}$ % betrage, während doch die Verzinsung mit $3\frac{1}{2}$ % um $\frac{1}{2}$ % niedriger sei, als die mit 4 %. Der Grund dieses scheinbaren Widerspruches liegt darin, dafs, wenn auch an dem zu verzinsenden Kapitale jährlich $\frac{1}{2}$ % erspart wird, dieses Kapital selbst vermöge der Tilgung immer geringer wird, sodafs beispielsweise, wenn die Schuld zur Hälfte getilgt ist, das bei Verzinsung der Restschuld ersparte $\frac{1}{2}$ % auf die ganze Schuld bezogen nur noch eine Zinsersparnis von $\frac{1}{4}$ % darstellt.

44] Gewisse Gründe, unter welchen die Neigung des kapitalbesitzenden Publikums zu Anlehenpapieren eines bestimmten Prozentsatzes obenan steht, können die Veranlassung bieten, die Schuld auch zu einem anderen Zinsfuſse, als man ursprünglich beabsichtigte, aufzunehmen, und man kann dieses ohne Veränderung der dem Gemeinwesen durch die Schuld auferlegte Belastung mittels eines vom Nennwerte oder Parikurs verschiedenen Emissionskurs. Sei also K_0 das aufzunehmende Kapital, welches man zum Nennwerte aufzunehmen wünscht, indem man es zu p % verzinst, und sei a der Jahresbedarf, mittels dessen Verzinsung und Tilgung in n Jahren bewerkstelligt wird; zu welchem Kurse C ist das Anlehen als q prozentiges zu emittieren? Der Kurs C bedeutet, daſs man für 100 im Nennwerte nur C bar, für $\frac{100}{C}$ im Nennwerte nur 1 bar empfängt. Um K_0 zu empfangen, muſs man also Papiere im Nennwerte von $\frac{100\,K_0}{C}$ ausgeben. Dieser Schuldbetrag soll zu q % verzinslich mittels n Jahreszahlungen a getilgt sein. Es muſs also sein:

$$a = \frac{q \cdot \frac{100\,K_0}{C}}{100\left(1 - 1{,}0q^{-n}\right)} = \frac{qK_0}{C\left(1 - 1{,}0q^{-n}\right)},$$

wie andernteils war

$$a = \frac{pK_0}{100\left(1 - 1{,}0p^{-n}\right)}.$$

Setzt man beide Werte von a einander gleich, so erkennt man sofort

$$C = \frac{100\,q}{p} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{1 - 1{,}0q^{-n}}.$$

Es kann nicht in Erstaunen setzen, daſs K_0 und a aus dieser Formel verschwunden sind. Schuldbetrag und Jahresbedarf ändern sich gleichzeitig und stehen in einem ganz bestimmten Verhältnisse, welches durch das Vorkommen von n und p innerhalb der Formel genügende Berücksichtigung findet. Ist in Zahlen $p = 4$, $q = 3\frac{1}{2}$, $n = 25$, so findet man

$$C = \frac{350}{4} \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-25}}{1 - 1{,}035^{-25}} = 94{,}7854.$$

Je gröſser n ist, um so kleiner wird $1{,}0p^{-n}$ und $1{,}0q^{-n}$, und beide Werte verschwinden bei $n = \infty$. Mit anderen Worten ein q % Zins tragendes der Tilgung nicht unterworfenes Anlehen darf den Kurs $C = \frac{100\,q}{p}$ haben, wenn das p % Zins tragende gleichfalls keiner Tilgung unterworfene Anlehen des gleichen Staates den Kurs von 100 hat. Sicherheit gegen Tilgung wird aber höchstens für eine nicht sehr grofse Anzahl von Jahren gewährleistet, und deshalb steht das Anlehen niedrigeren Zinsfufses meistens höher als es stehen sollte. (Vergl. Nr. 16.)

45] Eine andere Form, in welcher es gelingt, dem Anlehen statt der Verzinsung zu p % eine solche von nur q % zu gewähren, und es doch zum Nennwerte unterzubringen, besteht in der Zusicherung eines Amortisationszuschlages. Wir haben (Nr. 22) den Gegenstand erwähnt, ohne den Namen zu gebrauchen. Man versteht aber unter Amortisationszuschlag, dafs bei Tilgung des mit q % verzinslichen zum Parikurs ausgegebenen Anlehens die zur Tilgung bestimmten Anlehensscheine nicht blofs mit ihrem Nennwerte eingelöst werden, sondern dafs überdies ein Zuschlag oder Mehrgeld, Agio, von c % auf den Nennwert vergütet wird. Die Aufsuchung von c setzt natürlich wieder, neben der Kenntnis von p und q, die Unveränderlichkeit von K_0, a, n voraus. Nun erfordert K_0 zu q % an Zins $\frac{qK_0}{100}$ und von der Jahresverwendung a bleibt $a-\frac{qK_0}{100}$ zur Amortisation übrig. Mit $100+c$ wird 100, mit 1 wird $\frac{100}{100+c}$, mit $a-\frac{qK_0}{100}$ wird $\frac{100\,a-qK_0}{100+c}$ getilgt. Die Restschuld am Ende des ersten Jahres ist mithin

$$K_1=\frac{100+c+q}{100+c}K_0-\frac{a}{1{,}0c}$$

und eine ebensolche Formel vermittelt den Übergang von K_1 zu K_2, von K_2 zu K_3 u. s. w. Man erhält:

$$K_2=\frac{100+c+q}{100+c}K_1-\frac{a}{1{,}0c}=\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^2K_0-\frac{a}{1{,}0c}\left(1+\frac{100+c+q}{100+c}\right)$$

$$K_3=\frac{100+c+q}{100+c}K_2-\frac{a}{1{,}0c}=$$

$$=\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^3K_0-\frac{a}{1{,}0c}\left(1+\frac{100+c+q}{100+c}+\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^2\right)$$

. . . .

$$K_n=\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^nK_0-\frac{a}{1{,}0c}\left[1+\frac{100+c+q}{100+c}+\cdots+\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^{n-1}\right]$$

Die mit $\frac{a}{1{,}0c}$ vervielfachte Reihe hat aber die Summe

$$\frac{\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^n-1}{\frac{100+c+q}{100+c}-1}=\frac{100+c}{q}\left(\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^n-1\right),$$

und demzufolge ist

$$K_n = \left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^n K_0 - \frac{100\,a}{q}\left(\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^n - 1\right).$$

Soll $K_n = 0$ sein, wie wir voraussetzen, so zeigt sich

$$a = \frac{qK_0}{100} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^{-n}}$$

neben

$$a = \frac{pK_0}{100\left(1-1{,}0p^{-n}\right)}.$$

Setzt man, ähnlich wie in der vorigen Nummer, beide Werte von a einander gleich, so entsteht

$$\frac{p}{1-1{,}0p^{-n}} = \frac{q}{1-\left(\frac{100+c+q}{100+c}\right)^{-n}}$$

und daraus endlich

$$c = \frac{q\sqrt[n]{\frac{p-q}{p}+\frac{q}{p}\cdot 1{,}0p^{-n}}}{1-\sqrt[n]{\frac{p-q}{p}+\frac{q}{p}\cdot 1{,}0p^{-n}}} - 100$$

Ist wieder $p = 4$, $q = 3\frac{1}{2}$, $n = 25$, so findet man

$$c = \frac{3{,}5\sqrt[25]{\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\cdot 1{,}04^{-25}}}{1-\sqrt[25]{\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\cdot 1{,}04^{-25}}} - 100 = 8{,}8273\,.$$

In einem praktischen Falle wird man freilich niemals einen Amortisationszuschlag von 8,8273 % in Aussicht stellen, sondern etwa $8\frac{3}{4}$ % oder sonst irgend eine, wenn auch von dem errechneten Werte abweichende, doch nicht so kraus aussehende Zahl.

46] Bei sämtlichen Betrachtungen dieses Kapitels war als selbstverständlich die Voraussetzung gemacht, der Zinsfuss p sei ein Jahreszinsfuſs, d. h. die Bedingung sei gestellt, für je 100 müsse bei Ablauf eines Jahres p als Zins gezahlt werden. Die Bedingung kann aber auch gestellt werden, der Zins müsse halbjährlich oder vierteljährlich u. s. w. entrichtet werden, und diese Bedingung nötigt zu einer Änderung der Formel $K_0 = \frac{K_n}{1{,}0p^n}$ aus Nr. 33. Ähnlicherweise wie in Nr. 32 und 33 soll ein Zahlenbeispiel uns wieder auf den richtigen Weg weisen. Ein Schuldner nimmt von einem Gläubiger *M.* 3000 zu 4 % Jahreszins mit vierteljährlicher Zinszahlung auf.

Nach dem ersten Vierteljahre zahlt er *M.* 30 Zins und trägt *M.* 600 an der Schuld ab. Nach dem zweiten Vierteljahre zahlt er *M.* 24 Zins und trägt *M.* 700 an der Schuld ab. Nach dem dritten Vierteljahre zahlt er *M.* 17 Zins und trägt *M.* 800 an der Schuld ab. Nach dem vierten Vierteljahre zahlt er *M.* 9 Zins und trägt die letzten *M.* 900 an der Schuld ab. Folglich mufs 3000 der Barwert von 630 nach 1 Vierteljahr, von 724 nach 2 Vierteljahren, von 817 nach 3 Vierteljahren und von 909 nach 4 Vierteljahren sein. Setzt man aber in $\frac{K_n}{1,0p^n}$ bei $p = 4$ für n der Reihe nach $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, so entsteht:

$$\frac{630}{1,04^{\frac{1}{4}}} + \frac{724}{1,04^{\frac{2}{4}}} + \frac{817}{1,04^{\frac{3}{4}}} + \frac{909}{1,04} = 3001,16$$

anstatt 3000, welche herauskommen müssen. Dagegen ist ganz richtig

$$\frac{630}{1,01} + \frac{724}{1,01^2} + \frac{817}{1,01^3} + \frac{909}{1,01^4} = 3000,$$

wie sich leicht durch Vereinigung der Brüche von rechts nach links unter Vornahme von Kürzungen, wo solche möglich sind, bestätigen läfst.

47] Die zum richtigen Ergebnisse führende Rechnung hat offenbar das Vierteljahr als Zeiteinheit, als Zinsfufs für je ein Vierteljahr $\frac{p}{4}$, in unserem Sonderfalle $\frac{4}{4} = 1$, angenommen. Man nennt das den Übergang zum relativen Zinsfufs. Soll also $\frac{1}{m}$ Jahr die Zeiteinheit sein, nach welcher eine Zinszahlung zu erfolgen hat, und ist p der Jahreszinsfufs, so gewinnt man $\frac{p}{m}$ als relativen Zinsfufs für die Zeit $\frac{1}{m}$ Jahr. Die wirkliche Zeit n erscheint als $\frac{mn}{m}$, und man hat endlich

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{mn}}$$

beziehungsweise

$$K_n = K_0 \cdot \left(\frac{100\,m + p}{100\,m}\right)^{mn}.$$

Bei vierteljährlicher Zinszahlung und Zinzeszins ist also unter Annahme von $3\frac{1}{2}$ Jahreszins

$$K_n = K_0 \cdot \left(\frac{400 + 3,5}{400}\right)^{4n} = K_0 \cdot 1,00875^{4n}.$$

48] Dem relativen Zinsfufse steht der conforme Zinsfufs gegenüber, welcher auch unter Annahme von Zinsterminen von der

Dauer $\frac{1}{m}$ Jahr unter Annahme eines Jahreszinsfußes π gestattet, von der Formel $K_n = K_0\, 1{,}0\,\pi^n$ Gebrauch zu machen. Es muſs also sein

$$K_0 \left(\frac{100\, m + p}{100\, m}\right)^{mn} = K_0 \left(\frac{100 + \pi}{100}\right)^n.$$

Daraus ergiebt sich sofort

$$\pi = 100 \left[\left(1 + \frac{p}{100\, m}\right)^m - 1\right].$$

Soll $p = 4$, $m = 4$ sein, so hat man $\pi = 4{,}060401$.

Für solche Leser, welche etwas tiefer in die Mathematik eingedrungen sein sollten, sei bemerkt, daſs Augenblicksverzinsung, mit welcher sich Jakob Bernoulli im Maihefte 1690 der *Acta Eruditorum* zuerst beschäftigte, $m = \infty$ voraussetzt. Weil aber $\left(1 + \frac{p}{100\, m}\right)^m_{[m=\infty]} = e^{\frac{p}{100}}$, so ist $1{,}0\,\pi = e^{\frac{p}{100}}$, $1{,}0\,\pi^n = e^{\frac{np}{100}}$, und $K_n = K_0 \cdot e^{\frac{np}{100}}$ zeigt das Kapital an, zu welchem K_0 in n Jahren bei p % Jahreszins unter Annahme von Augenblicksverzinsung anwächst.

49] Zinseszins pflegt auch von Forstbeamten bei der rechnerischen Behandlung sogenannter Waldaufgaben angewandt zu werden, indem man annimmt, daſs die Vergröſserung der Bäume und überhaupt der Waldertrag nach zusammengesetztem Zinse zu bemessen ist.

Drittes Kapitel.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

50] Wenn Aristoteles eine Behauptung als wahrscheinlich bezeichnet hat, sofern sie Allen, oder der Mehrzahl, oder den Vernünftigen, und zwar diesen wieder entweder Allen, oder der Mehrzahl von ihnen, oder doch den Weisesten derselben wahr zu sein scheint, so ist diese Begriffsbestimmung in keiner Weise mit dem als gleichbedeutend zu betrachten, was bei den Mathematikern den Namen der Wahrscheinlichkeit erhalten hat. Mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nennt man das Verhältnis der Anzahl der dem Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle zur Anzahl der überhaupt möglichen

Fälle. Die Anzahl der günstigen Fälle kann keinesfalls gröfser als die der möglichen Fälle sein, sondern höchstens ihr gleich. Sind wirklich alle möglichen Fälle dem Eintreffen des fraglichen Ereignisses günstig, so ist dieses Ereignis gewifs, und da der als Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit genannte Bruch alsdann $= 1$ ist, so ist Gewifsheit in Übereinsimmung mit der Wahrscheinlichkeit 1. Ist dagegen keiner der möglichen Fälle dem Eintreffen des fraglichen Ereignisses günstig, so ist das Ereignis unmöglich. Der Zähler des vorerwähnten Bruches ist alsdann 0, der Nenner von 0 verschieden und der Bruch selbst $= 0$. Unmöglichkeit ist in Übereinstimmung mit der Wahrscheinlichkeit 0. Sind manche von den möglichen Fällen dem Eintreffen des fraglichen Ereignisses günstig, andere ihm ungünstig, so mufs, wie schon angedeutet, in dem Wahrscheinlichkeitsbruche der Zähler kleiner als der Nenner sein. Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines weder gewissen noch unmöglichen Ereignisses ist ein positiver echter Bruch. Sind in einer Urne 7 rote Kugeln und sonst keine enthalten, so ist die Wahrscheinlichkeit bei blindem Zugreifen eine rote Kugel zu erfassen, welche w_r heifsen mag, durch $w_r = \frac{7}{7} = 1$ gegeben. Enthält die Urne ausschliefslich 9 schwarze Kugeln, so ist $w_r = \frac{0}{9} = 0$. Enthält die Urne 7 rote und 9 schwarze Kugeln, mithin im ganzen 16 Kugeln, so ist $w_r = \frac{7}{16}$. Bezeichnet man durch w_s die Wahrscheinlichkeit bei blindem Zugreifen eine schwarze Kugel zu erfassen, so ist in dem ersten der drei genannten Fälle $w_s = \frac{0}{7} = 0$, in dem zweiten $w_s = \frac{9}{9} = 1$, in dem dritten $w_s = \frac{9}{16}$. Damit ist keineswegs behauptet, unter 16 Zügen werde bei jedesmaligem Zurückgeben der gezogenen Kugel 7 mal eine rote, 9 mal eine schwarze Kugel erscheinen, sondern nur dafs dieses Verhältnis bei der Vornahme von sehr vielen Zügen sich wahrnehmbar machen werde. (Vergl. Nr. 67.)

51] Nicht bei allen Aufgaben zeigt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses so leicht und unmittelbar wie bei den soeben erwähnten Beispielen, und man hat meistens Gelegenheit zwei Hilfssätze zu benutzen, welche jetzt zu erörtern sind. Der erste Satz ist der von der vollständigen Wahrscheinlichkeit als Summe von Teilwahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches gewifs ist, so oft eines von mehreren anderen gleich oder ungleich wahrscheinlichen Ereignissen eintrifft, und nur wenn eines derselben eintrifft, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. Seien $E_1, E_2, \cdots E_n$ von einander unabhängige und verschiedene Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \cdots w_n$. Tritt das Ereignis E ein, wenn entweder E_1 oder $E_2 \cdots$ oder E_n eintritt, und ist w die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von E, so mufs sein:

$$w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n .$$

Ist nämlich $w_1 = \frac{a_1}{m}$, $w_2 = \frac{a_2}{m}$, $\cdots w_n = \frac{a_n}{m}$, oder giebt es im ganzen m mögliche Fälle, von welchen die Anzahl a_1 dem Ereignisse E_1, a_2 dem Ereignisse E_2, $\cdots a_n$ dem Ereignisse E_n zum Eintreffen verhelfen, welche alle das Ereignis E hervorzurufen sich eignen, so giebt es eine Anzahl von zusammen $a_1 + a_2 \cdots + a_n$ Fällen zu gunsten des Ereignisses E oder es ist $w = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{m}$, was mit obiger Formel übereinstimmt. Seien in einer Urne 5 blaue Kugeln, welche mit einem Kreuzchen bezeichnet sind, und 6 blaue Kugeln ohne solche Bezeichnung. Ferner 4 rote Kugeln mit, 3 ohne Kreuzchen, endlich 2 gelbe Kugeln mit und 5 ohne Kreuzchen. Im ganzen sind $5 + 6 + 4 + 3 + 2 + 5 = 25$ Kugeln vorhanden, darunter $5 + 4 + 2 = 11$ mit einem Kreuze, $5 + 6$ blaue u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit eine Kugel mit einem Kreuze zu erfassen ist $\frac{5}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} = \frac{11}{25}$. Die Wahrscheinlichkeit eine blaue Kugel zu erfassen ist $\frac{5}{25} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$. Es ist folglich genau ebenso wahrscheinlich eine mit einem Kreuze bezeichnete als eine blaue Kugel zu erfassen. Diese vergleichsweise in betracht gezogene Wahrscheinlichkeit verschiedener Gruppen von Ereignissen heifst deren relative Wahrscheinlichkeit.

52] Der zweite Hilfssatz ist der von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse als Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Ein Ereignis E bestehe aus dem Zusammentreffen der Ereignisse E_1, E_2, $\cdots E_n$. Von diesen tritt E_1 ein in a_1 unter m_1 Fällen, E_2 in a_2 unter m_2 Fällen, $\cdots E_n$ in a_n unter m_n Fällen. Jeder der m_1 auf E_1 sich beziehenden Fälle kann mit jedem der m_2 auf E_2 sich beziehenden Fälle zusammentreffen, es giebt also $m_1\, m_2$ Fälle, die sich zugleich auf E_1 und E_2 beziehen. Darunter sind die dem vereinigten Eintreffen von E_1 und E_2 günstigen $a_1\, a_2$ Fälle, deren Anzahl sich dadurch rechtfertigt, dafs jeder der a_1 Fälle, die dem Eintreten von E_1 günstig sind, mit jedem der a_2 Fälle, die dem Eintreten von E_2 günstig sind, zusammentreffen kann. Setzt man diese Schlufsweise fort, so erkennt man, dafs $m_1\, m_2 \cdots m_n$ Fälle mit Rücksicht auf die Ereignisse E_1, E_2, $\cdots E_n$ möglich sind, und dafs $a_1\, a_2 \cdots a_n$ Fälle deren gleichzeitiges Eintreten bewirken. Mithin ist $w = \frac{a_1\, a_2 \cdots a_n}{m_1\, m_2 \cdots m_n}$. Aber $\frac{a_1}{m_1} = w_1$, $\frac{a_2}{m_2} = w_2$, $\cdots \frac{a_n}{m_n} = w_n$. Folglich ist $w = w_1\, w_2 \cdots w_n$.

Man habe 3 Urnen, in der ersten sind 3 blaue und 4 rote Kugeln, in der zweiten 6 gelbe und 2 schwarze Kugeln, in der dritten sind 5 blaue und 15 grüne Kugeln. Man will die Wahrscheinlichkeit w kennen, dafs blindlings eine grüne Kugel gezogen werde. Nur die dritte Urne enthält grüne Kugeln. Mithin setzt sich w zusammen aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ in die richtige Urne zu greifen und aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{15}{5+15} = \frac{3}{4}$ aus der richtigen Urne eine grüne Kugel zu ziehen. Man hat also $w = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit eine gelbe Kugel zu ziehen ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{6+2} = \frac{1}{4}$. Die relative Wahrscheinlichkeit eine grüne, beziehungsweise eine gelbe Kugel zu ziehen, ist demnach ganz gleich, wie wohl die 3 Urnen 15 grüne und nur 6 gelbe Kugeln enthalten; die Art der Verteilung der Kugeln in den Urnen bewirkt diese scheinbare Folgewidrigkeit.

53] Noch deutlicher wird die Schlufsweise vielleicht an folgendem Beispiele, welches beide Hilfssätze anwendet. Eine Urne ist durch eine Scheidewand in zwei Abteilungen geteilt. In der einen Abteilung befinden sich 4 rote und 6 schwarze Kugeln, in der anderen 3 rote und 5 schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit aus der ersten Abteilung eine rote Kugel zu ziehen ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4+6} = \frac{1}{5}$; die Wahrscheinlichkeit aus der zweiten Abteilung eine rote Kugel zu ziehen ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3+5} = \frac{3}{16}$. Die Wahrscheinlichkeit beim Hineingreifen in die Urne eine rothe Kugel zu erfassen setzt sich als Summe aus den beiden gefundenen Wahrscheinlichkeiten zusammen, ist also $\frac{1}{5} + \frac{3}{16} = \frac{31}{80} = \frac{279}{720}$. Entfernt man die Scheidewand vor dem Hineingreifen in die Urne, so befinden sich in ihr ungesondert $4 + 3 = 7$ rote, $6 + 5 = 11$ schwarze Kugeln; die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen ist also $\frac{7}{18} = \frac{280}{720}$ oder die Entfernung der Scheidewand hat die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen von $\frac{279}{720}$ auf $\frac{280}{720}$ erhöht. Seien in der ersten Abteiilung r_1 rote und s_1 schwarze, in der zweiten Abteilung r_2 rote und s_2 schwarze Kugeln; sei w_m die Wahrscheinlichkeit aus der mit einer Scheidewand versehenen Urne eine rote Kugel zu ziehen, w_o die ähnliche Wahrscheinlichkeit bei der Urne ohne Scheidewand. Man hat

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1}{r_1 + s_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2}{r_2 + s_2} = \frac{r_1 (r_2 + s_2) + r_2 (r_1 + s_1)}{2 (r_1 + s_1)(r_2 + s_2)}$$

$$w_o = \frac{r_1 + r_2}{(r_1 + s_1) + (r_2 + s_2)}.$$

Zieht man w_m von w_o ab, so erhält man nach einiger Umformung

$$w_o - w_m = \frac{[(r_1 + s_1) - (r_2 + s_2)]\,[r_1 s_2 - r_2 s_1]}{2\,(r_1 + s_1)\,(r_2 + s_2)\,[(r_1 + s_1) + (r_2 + s_2)]}.$$

Der Nenner dieses Bruches ist immer positiv, der Zähler kann positiv, kann negativ oder auch Null sein. Letzteres ist der Fall, d. h. das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer Scheidewand bringt keinen Unterschied in der Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, hervor, wenn entweder $r_1 + s_1 = r_2 + s_2$ (wenn in beiden Abteilungen sich eine gleiche Anzahl von Kugeln befindet), oder $r_1 s_2 = r_2 s_1$ beziehungsweise $r_1 : s_1 = r_2 : s_2$ ist (wenn in beiden Abteilungen das gleiche Verhältnis zwischen den Anzahlen der roten und schwarzen Kugeln obwaltet).

54] Bei Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet auch die Kombinatorik oder Lehre von der Ordnung, welche bei Zusammenstellungen und Folgen gegebener Dinge beobachtet werden kann, vielfache Hilfe. Die Dinge, deren Ordnung man betrachtet, werden Elemente genannt und durch Buchstaben mit Zahlenindex oder durch einfache Buchstaben oder durch Zahlen bezeichnet. Im letzteren Falle sind die Zahlen nicht als Kardinalzahlen, sondern als Ordinalzahlen aufzufassen: 1, 2, 3 bedeuten ein erstes, zweites, drittes Element, und nicht Elemente von einfacher, zweifacher, dreifacher Gröfse. Eine jede Zusammenstellung von Elementen heifst eine kombinatorische Form oder eine Komplexion. Die Verschiedenheit in der Anordnung der Elemente zu Formen kann eine zweifache sein. Einmal kann man verlangen, dafs in jeder Form alle Elemente vorkommen, aber immer anders geordnet. Man nennt diese Formen Permutationen. Zweitens kann man verlangen, dafs die Elemente in Gruppen geteilt werden, in denen nicht alle Elemente vorzukommen brauchen und nicht eben dieselben in zwei Gruppen vorkommen dürfen. Man nennt diese Formen Kombinationen. Man spricht, um sich kürzer fassen zu können, von höheren und niedrigeren Elementen und nicht minder von höheren und niedrigeren Formen. Die ersteren erhalten wir, indem wir den Elementen eine Rangordnung geben, welche an und für sich willkürlich ist, aber welche einmal gegeben die ganze Operation hindurch beibehalten werden mufs. Gewöhnlich wird die Rangordnung nach dem Index gegeben: der gröfsere Zahlenindex zeigt das höhere Element an. Von Formen mit gleicher Elementenanzahl heifst diejenige die höhere, in welcher an der frühsten Stelle von links anfangend ein niedrigeres Element durch ein höheres vertreten ist oder, anders ausgesprochen, in welcher die Indices als Zahl gelesen die gröfsere Zahl bilden. Mithin ist a_4 ein höheres Element als a_2 und $a_3\,a_4\,a_1\,a_2$ eine höhere Form als $a_2\,a_4\,a_3\,a_1$ und $a_3\,a_4$ eine höhere Form als $a_1\,a_2$.

55] Bilden wir nach Einführung dieser Unterscheidungen zunächst die Permutationsformen, so werden wir alle solche Formen erhalten, indem wir von der niedrigsten Form ausgehend immer die nächsthöhere bilden, bis wir zuletzt zur höchsten Form gelangen. Daher gilt die Regel: man schreibt zuerst die niedrigste Form und läfst dann, so lange als möglich, die ersten Elemente stehen, greift so weit zurück, als man kann, um ein höheres Element an einen niedrigeren Platz zu bringen, und ordnet hinter demselben nach dem Range. Dieses Verfahren setzt man dann fort, um aus jeder Form die nächsthöhere zu bilden. Man bezeichnet die Permutationen durch P, hinter welchem in Klammern die zu permutierenden Elemente folgen, welche entweder alle von einander verschieden oder teilweise untereinander gleich sein können. Beispielsweise ist

$$P(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3,\ a_1 a_3 a_2,\ a_2 a_1 a_3,\ a_2 a_3 a_1,\ a_3 a_1 a_2,\ a_3 a_2 a_1$$

$$\begin{aligned} P(a_1, a_1, a_2, a_2, a_2) = {} & a_1 a_1 a_2 a_2 a_2,\ a_1 a_2 a_1 a_2 a_2,\ a_1 a_2 a_2 a_1 a_2,\ a_1 a_2 a_2 a_2 a_1, \\ & a_2 a_1 a_1 a_2 a_2,\ a_2 a_1 a_2 a_1 a_2,\ a_2 a_1 a_2 a_2 a_1,\ a_2 a_2 a_1 a_1 a_2, \\ & a_2 a_2 a_1 a_2 a_1,\ a_2 a_2 a_2 a_1 a_1. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Permutationen aus n von einander verschiedenen Elementen heifse P_n; die Anzahl der Permutationen aus n Elementen, unter welchen $m_1, m_2, \cdots m_\nu$ je unter einander gleiche sich befinden, heifse $P_{n(m_1, m_2, \cdots m_\nu)}$.

56] Um P_n zu finden, geht man aus von $P_1 = 1$; eine sofort einleuchtende Anzahl, da a_1 allein nur eine einzige Anordnung besitzt. Ein zweites Element a_2 kann vor und kann nach a_1 zu stehen kommen an zwei verschiedenen Stellen, d. h. man kann $a_2\, a_1$ und $a_1\, a_2$ schreiben, und man erhält $P_2 = 2\,P_1 = 1 \cdot 2$. Ein drittes Element a_3 kann zu jeder zweielementigen Form an drei Stellen herantreten, an erster, an zweiter, an dritter d. h. aus $a_1\, a_2$ erhält man $a_3\, a_1\, a_2$, $a_1 a_3 a_2$, $a_1 a_2 a_3$, aus $a_2 a_1$ erhält man $a_3 a_2 a_1$, $a_2 a_3 a_1$, $a_2 a_1 a_3$. Im ganzen findet man $P_3 = 3\,P_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Setzt man dieses Verfahren, welches allerdings von der in Nr. 55 zur Bildung sämtlicher Permutationsformen gegebenen Regel durchaus abweicht, fort, so erhält man $P_4 = 4\,P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ u. s. w. Allgemein ist

$$P_n = n\,P_{n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ bezeichnet man häufig auch durch $n!$ und nennt es n Fakultät.

Läfst man m von den n Elementen untereinander gleich werden, so gehen in Bezug auf dieses vielfach auftretende Element je P_m früher von einander verschiedene Permutationsformen in eine einzige über, und man findet $P_{n(m)} = \frac{P_n}{P_m}$ und allgemein

$$P_{n(m_1, m_2, \cdots m_\nu)} = \frac{P_n}{P_{m_1} \cdot P_{m_2} \cdots P_{m_\nu}}.$$

Die in Nr. 55 durchgeführten Beispiele liefern in Übereinstimmung mit den dort gebildeten Formen

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\,, \; P_{5(2,3)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10\,.$$

57] Wir gelangen zur Bildung der Kombinationsformen. Aufser den n Elementen, welche dabei zur Verwendung kommen sollen, mufs die Anzahl k der Elemente bekannt sein, welche zu einer Form sich vereinigen, und welche man die Klasse nennt, zu welcher zu kombinieren ist. Die Reihenfolge der Elemente in jeder einzelnen Kombinationsform ist an und für sich gleichgiltig. Wie man jedoch bei Kartenspielen die Karten in der Hand zu stecken, d. h. nach einem bestimmten Grundgedanken zu ordnen, pflegt, um die Übersicht zu erleichtern, so ist man auch bei Bildung der Kombinationsformen übereingekommen, niemals ein niedrigeres Element einem höheren nachfolgen zu lassen; man darf also nicht schreiben $a_1 a_2 a_4 a_1 a_3$, sondern nur $a_1 a_1 a_2 a_3 a_4$. Man hat alsdann die Regel: Man bildet zuerst die niedrigste Form durch so viele Elemente von den niedrigsten anfangend, als in jeder Form enthalten sein sollen; dann setzt man in der spätesten Stelle, wo es angeht ein höheres Element, dem zwar kein niedrigeres folgen darf, welchem man aber doch wenigstens das unter Innehaltung dieser Vorschrift niederste Elemente folgen läfst. Beispielsweise ist

$$\overset{3}{C}(a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3) = a_1 a_2 a_2,\; a_1 a_2 a_3,\; a_1 a_3 a_3,\; a_2 a_2 a_3,\; a_2 a_3 a_3,\; a_3 a_3 a_3.$$

Die Wiederholbarkeit der Elemente in diesen Formen ist, wie man sieht, eine verschiedene: a_1 darf nur einmal, a_2 zweimal, a_3 dreimal vorkommen. Wollte man für a_3 ein noch häufigeres Vorkommen gestatten, so wäre das eine leere Redensart, da die Klassenzahl 3 nicht zuliefse von der erweiterten Erlaubnis Gebrauch zu machen. Sollen alle Elemente nur einmal vorkommen dürfen, so spricht man von Kombinationen ohne Wiederholung, soll jedes Element in einer Form so oft vorkommen dürfen, als die Klassenzahl aussagt, so spricht man von Kombinationen mit unbedingter Wiederholung oder kurzweg von Kombinationen mit Wiederholung.

Die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur Klasse k bezeichnet man durch $\overset{k}{C}_n$.

58] Um $\overset{k}{C}_n$ zu ermitteln, können wir folgenden Weg einschlagen. Wir bilden alle P_n Permutationsformen, welche aus den Elementen $a_1, a_2, \cdots a_n$ gebildet werden können, und trennen in jeder derselben eine erste Gruppe von k Elementen von einer zweiten Gruppe von $n-k$ Elementen durch einen Vertikalstrich ab. Ist z. B. $n = 5$,

$k = 2$, so werden die Formen untereinander geschrieben folgendermafsen aussehen:

$$\begin{array}{c|c} a_1\, a_2 & a_3\, a_4\, a_5 \\ a_1\, a_2 & a_3\, a_5\, a_4 \\ a_1\, a_2 & a_4\, a_3\, a_5 \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_5\, a_4 & a_3\, a_2\, a_1\,. \end{array}$$

Die überhaupt möglichen Kombinationsformen zur Klasse k aus den n gegebenen Elementen müssen in der ersten Gruppe, also links vom Vertikalstrich sich vorfinden, und die ganze Frage beschränkt sich darauf, in wie vielen Permutationsformen die gleichen Elemente jene erste Gruppe bilden? Die Gruppe $a_1\, a_2$ erscheint so oft, als die 3 Elemente $a_3\, a_4\, a_5$ permutiert werden können oder $1 \cdot 2 \cdot 3$ mal. Ebenso häufig erscheint $a_2\, a_1$ als Permutationsform von $a_1\, a_2$ in der ersten Gruppe und da es $1 \cdot 2$ Permutationen der 2 Elemente $a_1\, a_2$ giebt, so sind, wenn man nicht die Anordnung, sondern nur die Verschiedenheit der in der ersten Gruppe vorkommenden Elemente beachtet, stets $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ Permutationsformen unter den $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ überhaupt möglichen als eine einzige zu rechnen, und man hat $\overset{2}{C}_5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ entsprechend den Formen: $a_1\, a_2$, $a_1\, a_3$, $a_1\, a_4$, $a_1\, a_5$, $a_2\, a_3$, $a_2\, a_4$, $a_2\, a_5$, $a_3\, a_4$, $a_3\, a_5$, $a_4\, a_5$. Im allgemeinen Falle ist

$$\overset{k}{C}_n = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

59] Wir wollen an einem Beispiele erkennen, wie die gewonnenen Formeln der Kombinatorik zur Auflösung von Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt werden. In einer Urne sind 4 schwarze, 3 rote, 3 blaue, 2 gelbe Kugeln enthalten. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von zwei gleichzeitig gezogenen Kugeln die eine rot, die andere gelb sei? Im ganzen sind 12 Kugeln in der Urne, und da $\overset{2}{C}_{12} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$ ist, giebt es als Anzahl der möglichen Fälle 66 Kugelpaare. Günstig ist das Zusammentreffen jeder der 3 roten Kugeln mit jeder der 2 gelben, d. h. es giebt $3 \cdot 2 = 6$ günstige Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{6}{66} = \frac{1}{11}$. Als weiteres Beispiel wählen wir das Lottospiel. In Genua wurden zu Anfang des 17. Jahrhunderts unter 100 Senatoren erst halbjährlich, dann jährlich 5 durch das Loos für die höchsten Ehrenstellen bestimmt. Ein Ratsherr Benedetto Gentile führte Wetten darauf ein, dafs dieser oder jener Name werde gezogen werden, und einige Genuesische Bankiers versprachen Jedem, der eine solche Wette zu wagen geneigt sei, den 20000fachen Betrag seines Einsatzes, wenn er alle 5 Namen rate, entsprechend weniger, wenn nur 4 oder 3 Namen erraten werden wollten. Allmählich übernahm der Staat selbst dieses für den Unternehmer höchst gewinnreiche Spiel, indem an die Stelle der 100 Namen 90 Nummern traten, deren 5 gezogen wurden, und so entstand wahrscheinlich im Jahre 1620 das genuesische Zahlenlotto. Es fand vielfache Nachahmung in Italien, in Österreich, in Frankreich, in Preufsen, in anderen deutschen Staaten, wo überall ein grofser Gewinn aus dem Spiele gezogen wurde. Allmählich aber erkannte man die Schädlichkeit dieser Einrichtung für den Volkswohlstand und für die öffentliche Moral, und ein Staat nach dem anderen schaffte das Lotto wieder ab. In Baiern, als dem letzten deutschen Staate, welcher noch das Lottospiel besafs, wurde es 1861 aufgehoben. Heute dürfte es nur noch in Österreich und in Italien geduldet sein. Die Art des Spieles ergiebt sich aus dem Vorhergehenden: man wettet darauf, dafs 1, 2, 3, 4, 5 Nummern unter den 5 aus einem Gefäfse mit 90 Nummern blindlings gezogenen Nummern sich befinden sollen. Man nennt das Erraten einer Nummer einen Auszug, das Erraten zweier Nummern eine Ambe, das Erraten dreier, vierer, fünfer Nummern eine Terne, eine Quaterne, eine Quine. Was ist die Wahrscheinlichkeit einer jeden dieser Gewinnarten?

60] Da es sich um Aufsuchung des Bruches mit der Anzahl der günstigen Fälle als Zähler, der der möglichen Fälle als Nenner handelt, so sind beide zu ermitteln. Da 90 Nummern vorhanden sind, so ist die mögliche Anzahl aller Auszüge, Amben, Ternen, Quaternen, Quinen durch $\overset{1}{C}_{90}$, $\overset{2}{C}_{90}$, $\overset{3}{C}_{90}$, $\overset{4}{C}_{90}$, $\overset{5}{C}_{90}$ dargestellt. Für den Gewinn kommen nur die 5 gezogenen Nummern in Betracht, die Anzahl der günstigen Fälle ist also durch $\overset{1}{C}_{5}$, $\overset{2}{C}_{5}$, $\overset{3}{C}_{5}$, $\overset{4}{C}_{5}$, $\overset{5}{C}_{5}$ gegeben, und bezeichnet man die Menge der erratenen Nummern durch einen dem Buchstaben w beigefügten Zahlenindex, so sind die betreffenden Wahrscheinlichkeiten:

$$w_{\mathrm{I}} = \frac{\overset{1}{C}_{5}}{\overset{1}{C}_{90}} = \frac{5}{1} : \frac{90}{1} = \frac{1}{18}$$

$$w_{\mathrm{II}} = \frac{\overset{2}{C}_{5}}{\overset{2}{C}_{90}} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} : \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = \frac{2}{801}$$

$$w_{\mathrm{III}} = \frac{\overset{3}{C}_{5}}{\overset{3}{C}_{90}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{11\,748}$$

$$w_{\mathrm{IV}} = \frac{\overset{4}{C}_{5}}{\overset{4}{C}_{90}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{511\,038}$$

$$w_{\mathrm{V}} = \frac{\overset{5}{C}_{5}}{\overset{5}{C}_{90}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{43\,949\,268}$$

Ohne Anwendung von Kombinationszahlen, dagegen unter Benutzung des Satzes von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse (Nr. 52) wird man folgendermafsen schliefsen. Dafs eine bestimmte Nummer unter 90 sofort gezogen werde, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{90}$; da aber 5 Nummern gezogen werden, unter welchen die gewünschte den 1., 2., 3., 4., 5. Platz einnehmen kann, so ist

$$w_{\mathrm{I}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

Nachdem eine Nummer als gezogen gedacht ist, verbleiben noch 89 Nummern, von welchen 4 gezogen werden, sodafs die Wahrscheinlichkeit eine zweite bestimmte Nummer zu erraten $\frac{4}{89}$ wird. Für Erzielung einer Ambe müssen beide Ereignisse zusammentreffen, oder es ist

$$w_{\mathrm{II}} = \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{89} = \frac{2}{801}.$$

Man sieht leicht die Fortsetzung des Verfahrens und findet:

$$w_{\mathrm{III}} = \frac{2}{801} \cdot \frac{3}{88} = \frac{1}{11\,748}$$

$$w_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{11\,748} \cdot \frac{2}{87} = \frac{1}{511\,038}$$

$$w_{\mathrm{V}} = \frac{1}{511\,038} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{43\,949\,268}.$$

61] Soll auf das Eintreten eines Ereignisses gewettet werden, und jedes Spiel läfst sich als eine solche Wette betrachten, so wird man etwa folgendermafsen sagen. Wenn $w_{\mathrm{I}} = \frac{1}{18}$, so heifst das: unter 18 Fällen errät man einmal einen Auszug. Setzt man jedesmal 1 ein, so betragen sämtliche Einsätze 18, und diese erhält man bei jenem Zuge zurück, welcher die besetzte Nummer zum Vorschein bringt. Beansprucht der Spielgeber keinen Vorteil für sich, so wird er mithin, wenn ein Auszug gewonnen ist, dem Gewinner den 18fachen Einsatz zurückerstatten. Dem Gewinner einer Ambe gebührt nach dem gleichen Grundgedanken der $\frac{801}{2}$fache Einsatz, die Terne wird 11 748, die Quaterne 511 038, die Quine 43 949 268 für den Einsatz 1 bringen müssen.

Der Spielgeber beabsichtigt stets, aus dem Spiele einen Vorteil zu ziehen, und er wird sich daher niemals zur Auszahlung der ganzen nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung verlangbaren Summe verpflichten. Wir haben (Nr. 59) erwähnt, dafs in Genua das Erraten von 5 Namen unter 100 mit dem 20 000fachen Einsatz belohnt wurde, während $\frac{\overset{5}{C}_5}{\overset{5}{C}_{100}} = \frac{1}{75\,287\,520}$ eine Bezahlung des mehr als 75 millionenfachen Einsatzes begründen müfste. Bei anderen Lottokassen war die Abminderung zwar keine so ungeheuere, aber immerhin noch stark genug. Die Vervielfachungszahlen des Einsatzes bei dem Gewinne eines Auszugs, einer Ambe, einer Terne, einer Quaterne, einer Quine waren

in Frankreich	15	270	5500	70000	1000000
in Baiern	15	270	5400	60000	
in Preufsen	15	270	5300	60000,	

während in den beiden letztgenannten Ländern das Besetzen einer Quine überhaupt nicht statthaft war. Eine weitere Sicherung gegen, wenn auch mit niedriger Wahrscheinlichkeit eintretende, grofse Verluste bestand in dem Rechte des Spielgebers, den Satz auf eine bestimmte einzelne Nummer oder eine bestimmte Verbindung einzelner Nummern abzuschliefsen, zu sperren, oder aus eigener Machtvollkommenheit vor der Ziehung herabzumindern, sodafs der Spieler, wenn er verlor, einen Teil seines Einsatzes zurückerhielt und, wenn er gewann, nur einen Teil des ihm nach den Spielregeln zukommenden Gewinnes empfing. Zu dieser Mafsregel des Sperrens schritt man, sobald eine einigermafsen hohe Summe, sei es von einem einzelnen Spieler, sei es von mehreren zusammen, auf die gleiche Gewinnhoffnung sich vereinigt hatte. Es ist begreiflich, dafs ein so eingerichtetes Zahlenlotto sich für den Spielgeber als sehr einträglich erweisen mufste. In Preufsen z. B. belief sich im Jahre 1804, in welchem der Ertrag seinen Höhepunkt erreichte, die Reineinnahme auf 498160 Thaler (*M.* 1494480), und wenn auch die Verwendung zum Besten von Unterrichtsanstalten, von Armenanstalten, von Invalidenkassen und dergleichen den Verzicht auf eine solche Summe einigermafsen erschwerte, so wurde derselbe wieder erleichtert durch die Erwägung, dafs, wie unleugbare Thatsachen beweisen, das Zahlenlotto in Preufsen durch die geringen Einsätze die Lust zum Spiele auf eine verderbliche Art im Volke hervorgerufen, heftige Leidenschaften erregt, die Moral hauptsächlich der minder begüterten Klassen getrübt und die Arbeitslust und den Fleifs der Bürger gestört hatte. Eine der eigentümlichsten Verwendungen des Lottoertrags bestand in der für die *annektierten Mädchen*. Je 90 Mädchen aus Berliner Waisenanstalten wurden die Nummern 1 bis 90 beigefügt, und die bei der nächsten Ziehung herausgelosten unter ihnen erhielten sofort einen Annexenschein, welcher ihnen, wenn sie sich verheirateten, bei gleichzeitiger Vorlegung des Trauzeugnisses mit 50 Thalern eingewechselt wurde.

62] Kartenspiele geben Veranlassung zu häufig gestellten Aufgaben. Das Skatspiel wird mit 32 Kartenblättern gespielt, die in 4 durch verschiedene Farbengebung sich unterscheidende Gruppen von je 8 Karten zerfallen; in jeder Gruppe ist eine Karte als Bube oder Wenzel benannt, und den 4 Farben entsprechend giebt es einen ersten, zweiten, dritten, vierten Wenzel. Jeder der 3 Spieler erhält 10 Karten, die 2 übrigen Karten bilden verdeckt auf dem Tische liegend den sogenannten Skat. Wie viele von einander verschiedene Skatspiele giebt es? Darüber entscheidet die Reihenfolge, in welcher die 32 Kartenblätter ursprünglich lagen, und für diese ist P_{32} die Permutationszahl. Andererseits ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge jeder der Spieler seine 10 Karten erhielt, und in welcher Reihenfolge die 2 Karten im Skate liegen, man mufs deshalb durch $P_{10} \cdot P_{10} \cdot P_{10} \cdot P_2$ dividieren. Endlich ist also die gesuchte Anzahl

$$\frac{P_{32}}{P_{10} \cdot P_{10} \cdot P_{10} \cdot P_2} = 2\,379\,544\,036\,309\,440.$$

Man gewinnt einen Einblick in die Gröfse dieser Zahl durch folgende Überlegung: man denke sich 50 Millionen Menschen Tag und Nacht ohne die geringste Pause Karten gebend und 1 Minute als den Zeitaufwand für einmaliges Mischen und Austeilen der Karten, man denke sich ferner lauter von einander verschiedene Spiele, so bedarf es etwa 90 Jahre, bis alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Eine andere Frage geht auf die Wahrscheinlichkeit, dafs die beiden höchsten Wenzel im Skat liegen. Es giebt

$$\overset{2}{C}_{32} = \frac{32 \cdot 31}{2} = 496$$

Möglichkeiten 2 Karten aus 32 auszuwählen, von diesen erfüllt nur eine die verlangte Bedingung, mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{496}.$$

Ohne Kombinatorik würde man sagen: die Wahrscheinlichkeit, dafs der höchste Wenzel obenauf im Skate liege, ist $\frac{1}{32}$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der zweite Wenzel unter 31 noch vorhandenen Karten als untere Karte im Skat liege, ist $\frac{1}{31}$. Das Zusammentreffen beider Ereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} = \frac{1}{992}$. Genau ebenso grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der zweite Wenzel obenauf im Skate und unter ihm der höchste Wenzel liege. Beide Wahrscheinlichkeiten sind zu addieren, also $\frac{2}{992} = \frac{1}{496}$ als Wahrscheinlichkeit anzusetzen, wenn ohne Beachtung der Reihenfolge nur das Erscheinen beider höchster Wenzel im Skate beansprucht wird.

Verlangt man, dafs irgend 2 unter den 4 Wenzeln im Skate liegen sollen, so ist wieder $\overset{2}{C}_{32}$ die Anzahl der möglichen Fälle, während $\overset{2}{C}_4$ die Anzahl der günstigen Fälle darstellt. Die Wahrscheinlichheit steigt also jetzt auf $\dfrac{\overset{2}{C}_4}{\overset{2}{C}_{32}} = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} : \dfrac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2} = \dfrac{3}{248}$.

63] Ein anderes Kartenspiel, das Whistspiel, wird mit 52 in 4 Gruppen zu je 13 Karten zerfallenden Blättern gespielt. In jeder Gruppe befindet sich ein Kartenblatt, welches Afs genannt wird. Das Spiel wird zwischen 4 Spielern gespielt, deren jeder 13 Karten erhält. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, dafs ein bestimmter Spieler 0, 1, 2, 3, 4 Asse in der Hand habe? Man kann 13 Karten aus 52 auf $\overset{13}{C}_{52}$ Arten auswählen, und diese Zahl giebt die Anzahl der möglichen Fälle an. Um 0, 1, 2, 3, 4 Asse in der Hand zu haben, mufs man aufserdem 13, 12, 11, 10, 9 Nichtasse haben, welche 48 Nichtassen entstammen. Aufserdem sind 0 und 4 Asse nur auf je 1 Art möglich, dagegen 1, 2, 3 Asse auf $\overset{1}{C}_4$, $\overset{2}{C}_4$, $\overset{3}{C}_4$ Arten. Mithin ist

$$w_0 = \overset{13}{C}_{48} : \overset{13}{C}_{52} = \frac{82\,251}{270\,725}$$

$$w_1 = \overset{1}{C}_4 \cdot \overset{12}{C}_{48} : \overset{13}{C}_{52} = \frac{118\,807}{270\,725}$$

$$w_2 = \overset{2}{C}_4 \cdot \overset{11}{C}_{48} : \overset{13}{C}_{52} = \frac{57\,798}{270\,725}$$

$$w_3 = \overset{3}{C}_4 \cdot \overset{10}{C}_{48} : \overset{13}{C}_{52} = \frac{11\,154}{270\,725}$$

$$w_4 = \overset{9}{C}_{48} : \overset{13}{C}_{52} = \frac{715}{270\,725}.$$

Da irgend einer der 5 angeführten Fälle notwendig eintreffen mufs, so kann die Summe aller Wahrscheinlichkeiten nur 1 als Mafszahl der Gewifsheit betragen, und die Rechnung bestätigt es. Gaufs, der 48 Jahre seines Lebens in Göttingen zubrachte und dort lange Zeit hindurch allabendlich mit einigen Freunden Whist spielte, führte genau Buch darüber, wie die Asse in jedem einzelnen Spiele verteilt waren. Nach einer Reihe von Jahren stimmten seine Aufzeichnungen vollständig mit den errechneten Ergebnissen überein. Wir können auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dafs in einem gut gemischten Whistspiele von 52 Karten die 4 Asse bei einander liegen. Möglich sind P_{52} Lagen. In jeder günstigen Lage können P_{48} Anordnungen der 48 Nichtasse mit P_4 Anordnungen der 4 Asse zusammentreffen, ausferdem können 0, 1, 2, $\cdots$ 48 Karten über den 4 Assen liegen, was für sich wieder 49 Fälle bedingt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{P_{48} \cdot P_4 \cdot 49}{P_{52}} = \frac{1}{5525}.$$

64] Wieder andere Beispiele pflegen dem Würfelspiele entnommen zu werden, das mit Würfeln ausgeführt wird, deren 6 Flächen in der Art mit 1 bis 6 Augen bezeichnet sind, dafs je zwei einander gegenüberliegende Flächen zusammen 7 Augen zählen. Mithin sind 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 je einander entsprechende Gegenflächen. Jede Fläche eines Würfels kann gleichzeitig mit jeder Fläche jedes anderen zugleich benutzten Würfels erscheinen. Bei n Würfeln sind also im Ganzen 6^n Würfe möglich (6 mit 1 Würfel, 36 mit 2 Würfeln, 216 mit 3 Würfeln u. s. w.). Weitaus geringer ist die Anzahl der in Bezug auf die geworfenen Augen verschiedenen Würfe. Mit n Würfeln kann man nicht weniger als n, nicht mehr als $6n$ Augen werfen, möglich sind also $6n - (n - 1) = 5n + 1$ verschiedene Anzahlen geworfener Augen ($5 + 1 = 6$ mit 1 Würfel, $10 + 1 = 11$ mit 2 Würfeln, $15 + 1 = 16$ mit 3 Würfeln u. s. w.). Aus dieser grofsen Verschiedenheit der Anzahlen der überhaupt möglichen Würfe und der Würfe ungleicher Augenzahl, sobald mehr als nur ein Würfel benutzt wird, erkennt man schon, dafs die gleiche Augenzahl in mehrfacher Art erzielt werden kann. Unterscheidet man z. B. bei zwei Würfeln den ersten von dem zweiten und läfst von zwei nebeneinander stehenden einziffrigen Zahlen die erste die Augenzahl des ersten, die zweite die Augenzahl des zweiten Würfels bedeuten, sodafs 35 anzeigt, mit dem ersten Würfel seien 3, mit dem zweiten 5, zusammen 8 Augen geworfen, so haben offenbar die Augenzahlen 2 bis 12 folgende Entstehungsweisen

$$
\begin{aligned}
2 &= 11 \\
3 &= 12,\ 21 \\
4 &= 13,\ 22,\ 31 \\
5 &= 14,\ 23,\ 32,\ 41 \\
6 &= 15,\ 24,\ 33,\ 42,\ 51 \\
7 &= 16,\ 25,\ 34,\ 43,\ 52,\ 61 \\
8 &= 26,\ 35,\ 44,\ 53,\ 62 \\
9 &= 36,\ 45,\ 54,\ 63 \\
10 &= 46,\ 55,\ 64 \\
11 &= 56,\ 65 \\
12 &= 66\,.
\end{aligned}
$$

Dafs die Augenzahlen von oben und unten gegen die Mitte hin auf gleich viele Arten entstehen, hat darin seinen Grund, dafs sie die Augenzahlen von Gegenflächen sind, die sich zu 2mal 7 oder 14 ergänzen ($2 + 12 = 3 + 11 = 4 + 10 = 5 + 9 = 6 + 8 = 7 + 7 = 14$). Giebt es also a Würfe, welche h Augen hervorbringen, und dreht man jeden Wurf um, so giebt dieses Verfahren die ebenfalls a Würfe, welche $14 - h$ Augen hervorbringen. Bei 3 Würfeln ergänzt ein Wurf den durch Umkehrung der Würfel hervorgebrachten Gegenwurf zu 21, bei n Würfeln zu $7n$. Bei 3 Würfeln hat also der Wurf von h Augen den Gegenwurf $21 - h$. Ist h gerade, so mufs $21 - h$ ungerade sein, ist h ungerade, so mufs $21 - h$ gerade sein; mit 3 Würfeln sind also, da jeder Wurf einen von ihm bezüglich der Teilbarkeit der Augenzahl durch 2 abweichenden Gegenwurf besitzt, gleich viele gerade und ungerade Würfe vorhanden. Bei 2 Würfeln ist diese Schlufsweise nicht möglich, weil h und $14 - h$ gleichzeitig gerade, beziehungsweise ungerade sind. Der Satz freilich, dafs es auch bei 2 Würfen ebenso viele gerade als ungerade Würfe gebe, ist darum nicht minder wahr. Man kann ihn etwa so beweisen. Ist g die Bezeichnung eines geraden Wurfes mit einem Würfel (also 2, 4, 6), u die Bezeichnung eines ungeraden Wurfes mit einem Würfel (also 1, 3, 5), so ist die Wahrscheinlichkeit g zu werfen genau ebenso grofs wie die u zu werfen, nämlich $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}\cdot$ Das Gleiche gilt für einen zweiten Würfel. Benutzt man beide Würfel gleichzeitig, so hat man die Möglichkeiten gg, gu, ug, uu eine jede mit der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot$ Nun giebt gg und uu einen geraden, gu und ug einen ungeraden Wurf, die Wahrscheinlichkeit des geraden wie des ungeraden Wurfes ist demnach $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot$ Man mufs sich daher vor dem Fehlschlusse hüten, dafs, weil 3, 5, 7, 9, 11 fünferlei ungerade und 2, 4, 6, 8, 10, 12 sechserlei gerade Würfe sind, es wahrscheinlicher sei mit 2 Würfeln gerade als ungerade zu werfen.

65] Zeigen 2 Würfel die gleiche Anzahl Augen, so nennt man diesen Wurf, wie viele Würfel auch dabei benutzt wurden, einen Pasch. Drei die gleiche Augenzahl aufzeigende Würfel bilden einen Dreipasch, der selbstverständlich zugleich auch Pasch ist. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit mit 3 Würfeln einen Pasch zu werfen? Man kann die Frage unmittelbar, man kann sie leichter mittelbar beantworten, indem man nach der Wahrscheinlichkeit eines Nichtpaschwurfes fragt, welcher, weil jeder Wurf entweder Pasch oder Nichtpasch sein mufs, die Wahrscheinlichkeit des Paschwurfes zur Einheit ergänzt. Das erstere Verfahren sagt so: es giebt 6 Möglichkeiten mit den Würfeln I und II einen Pasch zu werfen; bei jedem derselben giebt es 5 Würfe des Würfels III, die keinen Dreipasch hervorbringen; so hat man $6 \cdot 5 = 30$ einfache von den Würfeln I und II herstammende Paschwürfe. Ebenso viele von den Würfeln I und III, ebenso viele von den Würfeln II und III hervorgebrachte einfache Pasch giebt es, endlich auch noch 6 Dreipasch. Damit hat man $30 + 30 + 30 + 6 = 96$ günstige Fälle bei $6^3 = 216$ möglichen Fällen, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{96}{216} = \frac{4}{9}\cdot$ Das zweite Verfahren sagt so: für den ersten Würfel stehen 6 Würfe frei, für den zweiten, insofern ein Pasch vermieden werden soll, nur noch 5 neben jedem Wurfe des ersten, für den dritten unter der gleichen Bedingung nur noch 4 neben jedem Nichtpaschwurfe der beiden ersten Würfel. Folglich giebt es $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Nichtpasch-würfe mit 3 Würfeln, und die Wahrscheinlichkeit des Nichtpasches ist $\frac{120}{216} = \frac{5}{9}$, mithin die des Pasches $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

Man kann nun auch Fragen von der Art stellen, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, mit 3 Würfeln in 5 (beziehungsweise in 6) Würfen gar nicht, einmal, zweimal Pasch zu werfen? Diese Wahrscheinlichkeiten mögen bei 5 Würfen w_0, w_1, w_2, bei 6 Würfen W_0, W_1, W_2 heifsen. Da $\frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit des Pasches, $\frac{5}{9}$ die des Nichtpasches in einem Wurfe ist, und da unter 6 Würfen ein Pasch auf 5, 2 Pasch auf $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ Arten vorkommen können, so ist ersichtlich

$$w_0 = \left(\frac{5}{9}\right)^5 \qquad w_1 = 5 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4 \cdot \frac{4}{9} \qquad w_2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left(\frac{5}{9}\right)^3 \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

und dem entsprechend

$$W_0 = \left(\frac{5}{9}\right)^6 \qquad W_1 = 6 \left(\frac{5}{9}\right)^5 \cdot \frac{4}{9} \qquad W_2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4 \left(\frac{4}{9}\right)^2,$$

oder nach Ausrechnung der Werte und indem man $w_0 + w_1 + w_2 = w$, $1 - w = w'$, $W_0 + W_1 + W_2 = W$, $1 - W = W'$ setzt:

$w_0 = 3125 : 59049$	$W_0 = 15625 : 531441$
$w_1 = 12500 : 59049$	$W_1 = 75000 : 531441$
$w_2 = 20000 : 59049$	$W_2 = 150000 : 531441$
$w = 35625 : 59049 = 0{,}6033\ldots$	$W = 240625 : 531441 = 0{,}4527\ldots$
$w' = 23424 : 59049 = 0{,}3966\ldots$	$W' = 290816 : 531441 = 0{,}5472\ldots$

Die Zahl w bedeutet etwas anders ausgesprochen die Wahrscheinlichkeit in 5 Würfen mit 3 Würfeln weniger als 3 Pasch zu werfen, w' die Wahrscheinlichkeit in 5 Würfen 3 Pasch oder noch mehr zu werfen; dabei ist $w' < w$, man wettet also mit Vorteil darauf, in 5 Würfen mit 3 Würfeln weniger als 3 Pasch zu werfen, während eine ähnliche Deutung von W und W' zeigt, dafs man mit Vorteil darauf wette, in 6 Würfen mit 3 Würfeln 3 Pasch oder noch mehr zu werfen.

Die in diesem Beispiele gezogenen Schlüsse erweitern sich sofort zu dem Satze, dafs die Wahrscheinlichkeit, dafs von zwei einander ausschliefsenden Ereignissen, welchen für sich Wahrscheinlichkeiten a_1 und a_2 zukommen, unter $m + n$ Versuchen das erstere $m$mal, das zweite $n$mal eintreten wird, ohne dafs es auf die Reihenfolge des Eintretens ankommt, sich darstelle durch

$$\overset{m}{C}_{m+n} \cdot a_1^m \cdot a_2^n .$$

Ist dagegen auch die Reihenfolge des Eintretens zum voraus genau bestimmt, so fällt die Kombinationszahl $\overset{m}{C}_{m+n}$ als Faktor weg, und die Wahrscheinlichkeit ist nur

$$a_1^m \cdot a_2^n \,.$$

Eine weitere Ausdehnung des Satzes findet auf mehr als nur zwei Ereignisse statt. Besitzen μ Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten $a_1, a_2, \cdots a_\mu$ und sollen sie unter $n_1 + n_2 + \cdots + n_\mu = n$ Versuchen, das erste $n_1$mal, das zweite $n_2$mal, das letzte $n_\mu$mal eintreten, ohne dafs auf die Reihenfolge des Eintretens Rücksicht zu nehmen wäre, so ist dafür die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdots P_{n_\mu}} a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdots a_\mu^{n_\mu} \,.$$

66] Der Ausdruck $\overset{m}{C}_{m+n} = \frac{P_{m+n}}{P_m P_n}$, welcher bei den letzten Betrachtungen eine Rolle spielte, hat aufser seiner kombinatorischen Bedeutung auch die eines Binomialkoefficienten, der bei der Erhebung der zweiteiligen Gröfse oder des Binomiums $a_1 + a_2$ auf die $m + n^{\text{te}}$ Potenz auftritt. Man hat nämlich, so oft m und n ganze positive Zahlen sind, die Entwickelung

$$(a_1 + a_2)^{m+n} = a_1^{m+n} + \overset{1}{C}_{m+n} a_1^{m+n-1} a_2$$
$$+ \overset{2}{C}_{m+n} a_1^{m+n-2} a_2^2 + \cdots + \overset{n}{C}_{m+n} a_1^m a_2^n + \cdots + a_2^{m+n}$$

und das $n + 1^{\text{te}}$ Glied dieser Entwickelung $\overset{n}{C}_{m+n} a_1^m a_2^n$ ist genau der Wert, den wir als Wahrscheinlichkeit dafür erkannten, dafs von zwei einander ausschliefsenden Ereignissen mit den Wahrscheinlichkeiten a_1, a_2 unter $m + n$ Versuchen das erste $m$mal, das zweite $n$mal eintrete. Allerdings schrieben wir oben $\overset{m}{C}_{m+n}$, wo jetzt $\overset{n}{C}_{m+n}$ steht, aber $\overset{m}{C}_{m+n} = \frac{P_{m+n}}{P_m P_n}$ läfst $\overset{n}{C}_{m+n} = \frac{P_{m+n}}{P_n P_m}$ erkennen, und deshalb ist

$$\overset{m}{C}_{m+n} = \overset{n}{C}_{m+n} \,.$$

Sei wieder $a_1 = \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit mit 3 Würfeln einen Pasch zu werfen, $a_2 = \frac{5}{9}$ die Wahrscheinlichkeit mit 3 Würfeln einen Nichtpasch zu werfen und entwickelt man

$$\left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right)^4 = \left(\frac{4}{9}\right)^4 + 4\left(\frac{4}{9}\right)^3\left(\frac{5}{9}\right) + 6\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^2 + 4\left(\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{9}\right)^4,$$

so haben die 5 Glieder der Entwickelung die Bedeutung der Wahrscheinlichkeiten unter 4 Würfen mit 3 Würfeln 4mal, 3mal, 2mal, 1mal, 0mal einen Pasch zu werfen.

Sind a_1 und a_2 einander gleich, also beide $= \frac{1}{2}$, wie z. B. wenn es sich darum handelt, mit 3 Würfeln eine gerade oder eine ungerade Augenzahl zu werfen, und man entwickelt

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{2^4} + \frac{4}{2^4} + \frac{6}{2^4} + \frac{4}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16},$$

so sind die 5 Glieder dieser Entwickelung die Wahrscheinlichkeiten bei 4maligem Werfen mit 3 Würfeln 4mal, 3mal, 2mal, 1mal, 0mal einen geraden Wurf zu erhalten.

67] Die 5 Reihenglieder $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ und gleich ihnen die 5 Binomialkoefficienten 1, 4, 6, 4, 1 zeigen die Eigenschaft, vom Anfang nach der Mitte zu gröfser zu werden, um dann wieder abzunehmen; das mittlere Glied ist das gröfste. Hätte man

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$+ 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5}$$
$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}$$

zum Ausgangspunkte genommen, so wäre ein ähnliches Wachsen und Abnehmen der Glieder, sowie der Binomialkoefficienten wahrnehmbar gewesen, mit dem einzigen Unterschiede, dafs in der Mitte zwei einander gleiche Glieder und Binomialkoefficienten als höchstwertige neben einander auftreten. Die Gleichmäfsigkeit der Erscheinung kann nicht verwundern, wenn $a_2 = a_1 = \frac{1}{2}$ ist, wie verhält sich aber die Sache, wenn zwar $a_1 + a_2 = 1$, aber a_1 von a_2 verschieden ist, also z. B. $a_1 = \frac{4}{9}$, $a_2 = \frac{5}{9}$ wie bei den mit 3 Würfeln zu erzielenden Pasch- oder Nichtpaschwürfen? Giebt es auch in diesem Falle ein Mittelglied, welches einen gröfseren Wert als die beiden Nachbarglieder zur Rechten und zur Linken besitzt?

Denken wir uns $\frac{P_{m+n}}{P_m P_n} a_1^m a_2^n$ als ein solches Mittelglied, welches gröfser als die beiden Nachbarglieder $\frac{P_{m+n}}{P_{m-1} P_{n+1}} a_1^{m-1} a_2^{n+1}$ und $\frac{P_{m+n}}{P_{m+1} P_{n-1}} a_1^{m+1} a_2^{n-1}$ sein soll. Die beiden Ungleichungen

$$\frac{P_{m+n}}{P_m P_n} a_1^m a_1^n > \frac{P_{m+n}}{P_{m-1} P_{n+1}} a_1^{m-1} a_2^{n+1}$$

und

$$\frac{P_{m+n}}{P_m P_n} a_1^m a_2^n > \frac{P_{m+n}}{P_{m+1} P_{n-1}} a_1^{m+1} a_2^{n-1}$$

gehen leicht über in

$$(n + 1) a_1 > m a_2$$

und

$$(m + 1) a_2 > n a_1 .$$

Ersetzt man beidemal a_2 durch $1 - a_1$, so erhält man:

$$m < (m + n + 1) a_1 < m + 1 .$$

Ist $m + n$ eine sehr grofse Zahl, d. h. hat man eine sehr grofse Anzahl von Versuchen angestellt, so ist sehr angenähert

$$m = (m + n) a_1$$

und

$$a_1 = \frac{m}{m + n}$$

nebst

$$a_2 = 1 - a_1 = \frac{n}{m + n}$$

und demzufolge

$$m : n = a_1 : a_2 .$$

Das höchstwertige Glied der Binomialentwickelung von

$$(a_1 + a_2)^{m+n},$$

wo $m + n$ eine sehr grofse Zahl ist, wird also dasjenige sein, in welchem $a_1^m a_2^n$ vorkommt und die Exponenten m, n im Verhältnisse von a_1, a_2 stehen. Jedes Glied der Binomialentwickelung stellte uns die Wahrscheinlichkeit einer gewissen Voraussetzung, das höchstwertige Glied also die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Voraussetzung dar. Bei sehr zahlreichen Versuchen ist also am wahrscheinlichsten, dafs einander kontradiktorisch ausschliefsende Ereignisse im Verhältnisse ihrer mathematischen Wahrscheinlichkeiten wirklich eintreten. Dieses Gesetz wurde schon von Cardano in der Mitte des 16. Jahrhunderts ziemlich deutlich ausgesprochen, Jakob Bernoulli hat es um 1680 bewiesen, Poisson hat ihm den Namen des Gesetzes der grofsen Zahlen beigelegt, unter welchem es bekannt zu sein pflegt. Es beschränkt sich nicht auf zwei einander kontradiktorisch ausschliefsende Ereignisse, sondern gilt von mehr als zweien, sobald nur deren Einzelwahrscheinlichkeiten die Summe 1 besitzen, sobald es also gewifs ist, dafs irgend eines der Ereignisse eintreten mufs. Darauf beruht die ganze Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre im täglichen Leben (Nr. 50). Das Gesetz der grofsen Zahlen gestattet Wetten abzuschliefsen in dem Sinne, welcher in Nr. 61 Erläuterung fand, das Gesetz der grofsen Zahlen wollte Gaufs bestätigen, indem er (Nr. 63) sich darüber Aufzeichnungen machte, wie die Asse im Whistspiele verteilt waren.

68] Alle bis hierhin behandelten Aufgaben, deren Beispiele vielleicht dazu angethan waren, die Neugier unserer Leser etwas zu reizen, und die jedenfalls in der Absicht gehäuft wurden, um zu zeigen, wie verschiedenartig man Wahrscheinlichkeitsaufgaben anfassen kann, stimmten in einer Beziehung überein: es waren Aufgaben der Wahrscheinlichkeit a priori, d. h. man konnte den theoretischen Bedingungen der Aufgaben zum Voraus die Anzahl der möglichen sowie der günstigen Fälle mit aller Genauigkeit entnehmen. Ihnen gegenüber stehen solche Aufgaben, bei welchen weder die Anzahl der möglichen noch die der günstigen Fälle genau entziffert werden kann, bei welchen man sich vielmehr mit erfahrungsmäfsigen Zahlen begnügen mufs, welche gegebenen Thatsachen nachträglich entnommen werden, ohne dafs eine zwingende Begründung derselben vorläge. Man spricht alsdann von der Wahrscheinlichkeit a posteriori. Beide Ausdrücke stammen von Jakob Bernoulli her. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori wendet das Gesetz der grofsen Zahlen nach rückwärts an. Wenn gewisse Ereignisse innerhalb des Rahmens einer sehr grofsen Zahl von Versuchen thatsächlich in einer Weise abwechseln, die den mittels der Wahrscheinlichkeit a priori gefolgerten Erwartungen entspricht, so ist der Begriff einer sehr grofsen Zahl von Versuchen immerhin ein wechselnder. Man kann 10000 und mehr Versuche darunter verstehen, man kann mit 1000 Versuchen schon sich begnügen wollen. Indem man letzteres thut, nimmt man eben an, dafs das Wahrscheinlichkeitsgesetz sich nicht erst bei 10000, sondern schon bei 1000 Versuchen bewähre, was selbstverständlich mit sich führt, dafs weitere 9000 nach den ersten 1000 anzustellende Versuche nur noch mehr mit dem im ersten 1000 schon bewährten Gesetze übereinstimmen werden. Mit anderen Worten, man nimmt an, es werde, wenn nicht neue bestimmende Momente hinzutreten, eine Reihe von Ereignissen, welche sehr oft beobachtet worden sind, sich auch weiter nach gleichem Zahlenverhältnisse wiederholen. Wenn aus einem grofsen Sacke 199 schwarze, 405 weifse, 596 blaue Kügelchen in irgend einer Reihenfolge entnommen worden sind, so folgert man, in jenem Sacke seien ausschliefslich schwarze, weifse und blaue Kügelchen und zwar im Verhältnisse von $199:405:596$ oder annähernd von $1:2:3$ gemischt, und auch spätere Ziehungen werden die drei Farben in diesem Zahlenverhältnisse auftreten lassen. Kommt aber, nachdem jene $199 + 405 + 596 = 1200$ Kugeln entfernt sind, ein neuer Sack an die Reihe, so wird jene Folgerung keineswegs gestattet sein, weil hier ein neues bestimmendes Moment hinzutritt, die Kugelmischung in dem neuen Sacke, von welcher wir weder a priori, noch zunächst wenigstens a posteriori irgend etwas wissen. Solche neue bestimmende Momente, welche verändernd auf Ereignisse in Bezug auf ihre Anzahl einwirkten, waren die Erfindung der Blitzableiter gegenüber der Zahl von Feuersbrünsten nach Gewittern, die Einführung der Kuhpockenimpfung gegenüber der Zahl der Todesfälle an schwarzen Blattern, die Erbauung von Dampfschiffen gegenüber der Zeitdauer einer Fahrt nach Amerika u. s. w. Die Zusammenstellung zahlreicher Ereignisse und das Ziehen von Schlüssen aus ihnen auf noch unbekannte Ereignisse bildet die Grundlage einer besonderen Wissenschaft, der Statistik.

Viertes Kapitel.

Von den Lotterieanlehen.

69] Als wir von den verschiedenartigen Staatsanlehen und deren börsenmäfsiger Berechnung sprachen, vertrösteten wir unsere Leser (Nr. 24) bezüglich der Lotterieanlehen auf das vierte Kapitel. Wir haben gegenwärtig unsere Zusage einzulösen. Man versteht unter Lotterieanlehen ein in bestimmten Fristen heimzuzahlendes Anlehen, dessen einzelne Anlehenscheine bei der Heimzahlung bald mit einer gröfseren, bald mit einer kleineren Summe eingelöst werden, indem der Einlösungspreis des einzelnen Scheines durch eine Verlosung bestimmt wird. Bis zum Augenblicke der Einlösung trägt das Los entweder Zins oder nicht. Man darf das Lotterieanlehen nicht mit Anlehen verwechseln, welche einen Amortisationszuschlag (Nr. 22) in Aussicht stellen. Der Amortisationszuschlag kommt jedem zur Heimzahlung einberufenen Anlehenscheine in gleicher Weise zu gut, während bei dem Lotterieanlehen gerade die Verschiedenheit des Einlösungspreises für die gleichzeitig zur Heimzahlung gelangenden Anlehenscheine das Kennzeichnende ist. Auch mit dem Zahlenlotto (Nr. 59) darf das Lotterieanlehen nicht gleichgestellt werden und ebenso wenig mit der Klassenlotterie, welche in manchen Staaten noch immer eingeführt ist, und deren wesentliches Merkmal es ist, dafs eine grofse Anzahl von Einsätzen ganz verloren geht, während bei dem Lotterieanlehen jedes ausgegebene Los früher oder später mit einem niemals unter dem Nennwerte des Loses liegenden Mindestbetrag eingelöst wird, sofern es keinen höheren Gewinn erzielt hat. Da der Zufall bei Bestimmung des Einlösungspreises des einzelnen Loses eine Rolle spielt, so wird bei der Wertberechnung von Losen die Beiziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung unerläfslich, und das ist der Grund, aus welchem die Besprechung der Lotterieanlehen bis hierher aufgeschoben werden mufste. Wir werden sogar zur Rechtfertigung des bei den Ziehungen üblichen Verfahrens noch einige weitere Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen hier einzuschalten haben, welche im dritten Kapitel absichtlich übergangen wurden.

70] Wenn bei einem Spiele oder bei einer Wette Wertgegenstände dem Verluste ausgesetzt werden, so geschieht dieses nicht, weil der drohende Verlust sorglos liefse, sondern weil die Hoffnung auf Gewinn vorhanden ist. Hoffnung, so heifst es in der Ethik Spinozas, eines Schriftstellers, welcher mutmafslich auch über Wahrscheinlichkeitsrechnung geschrieben hat, ist die unbeständige Fröhlichkeit, welche aus der Vorstellung einer zukünftigen oder vergangenen Sache entstanden ist, über deren Ausgang wir irgend einen Zweifel hegen. Die Rechnung freilich kann mit dieser Erklärung von Hoffnung gerade so wenig anfangen, als mit der aristotelischen Erklärung von Wahrscheinlichkeit (Nr. 50). Sie schiebt deshalb die Seelenempfindung der Lust, welche der Hoffnung zugesellt ist, wenn sie dieselbe nicht bildet, ebenso bei Seite wie die mit der Angst oder Besorgnis verknüpfte Seelenempfindung der Unlust. Die Rechnung hat es nur mit Vermögensvorteilen oder -nachteilen zu thun und nennt mathematische Hoffnung das Produkt aus einem zu erwartenden Gewinn in die Wahrscheinlichkeit ihn zu erlangen. Der drohende Verlust kann in diesem Sinne als negativer Gewinn aufgefafst werden, die mathematische Hoffnung demnach zur mathematischen Besorgnis werden. Die moralische Hoffnung oder moralische Erwartung ist wieder ein anderes. Sie vervielfacht die mathematische Erwartung noch mit einem Faktor, der von der Persönlichkeit, insbesondere von den Vermögensverhältnissen dessen abhängt, für welchen die Rechnung angestellt wird. Sie geht von der nicht zu bezweifelnden Thatsache aus, dafs eine und dieselbe Summe als Gewinn oder als Verlust auf die Vermögenslage des Einen einen erheblichen Einflufs ausübt, während sie bei dem Anderen unmerklich ist. Während z. B. 3 ℳ mehr oder weniger für den Millionär eine vernachlässigbare Summe darstellt, ist der gleiche Betrag für den Fabrikarbeiter so bedeutend, dafs die Möglichkeit ihn zu erhalten oder ihn auszahlen zu müssen auf die Handlungsweise bestimmend einwirken kann. Man kann deshalb die mathematische Hoffnung auch als objektive, die moralische als subjektive Erwartung bezeichnen. Hier soll nur von der objektiven Erwartung die Rede sein. Die Unterscheidung der mathematischen von der moralischen Hoffnung und beide Namen rühren von Daniel Bernoulli (1730) her.

71] Prüfen wir sie an folgendem Beispiele. In einer Urne sind $n-1$ schwarze und 1 rote Kugel vorhanden. Das Ziehen der roten Kugel wird mit einem Gewinne G belohnt. An dem Ziehen beteiligen sich n Personen $A_1, A_2, \cdots A_n$ die nach der Rangordnung ihres Stellenzeigers an die Urne herantreten und ihr eine Kugel entnehmen, welche, wenn schwarz, nicht wieder in die Urne geworfen wird. Sobald die rote Kugel gezogen ist, hat das Spiel sein Ende erreicht. Wie grofs ist die Erwartung des A_r? Damit A_r gewinne, mufs die rote Kugel noch in der Urne befindlich sein, d. h. eine der noch in der Urne befindlichen $n-(r-1)=n+1-r$ Kugeln sein, und mufs er sie zu ergreifen wissen. Die Wahrscheinlichkeit des ersteren Ereignisses ist $\frac{n+1-r}{n}$, die des zweiten ist $\frac{1}{n+1-r}$, die ihres Zusammentreffens ist $\frac{n+1-r}{n}\cdot\frac{1}{n+1-r}=\frac{1}{n}\cdot$ Der Gewinn ist G. Mithin ist

$$\frac{G}{n}$$

die Erwartung des A_r. Der Stellenzeiger r kommt in diesem Ausdrucke überhaupt nicht vor, d. h. die Erwartung eines jeden der n Spieler ist die genau gleiche, oder es kommt auf die Reihenfolge nicht an, in welcher ein Spieler zum Ziehen gelangt.

Nun erweitern wir die Angabe dahin, dafs unter den n in der Urne befindlichen Kugeln deren k gewinnbringende sein sollen, auf deren Ziehung $G_1, G_2, \cdots G_k$ als Preis gesetzt ist. Die Erwartung des A_r setzt sich zusammen aus seinen auf die Erlangung jedes einzelnen Gewinnes gerichteten Erwartungen $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n}, \cdots \frac{G_k}{n}\cdot$ Sie beträgt also im Ganzen

$$\frac{G_1+G_2+\cdots+G_k}{n}.$$

Es ist, als wenn jeder der Spieler seinen etwaigen Gewinn einem einzigen Auftraggeber auszuliefern hätte, welcher alsdann, weil jeder Beauftragte gleiche Mühe hatte, auch das Erworbene unter alle nach gleichen Teilen zu verteilen für billig hält.

Auch kombinatorisch läfst das gewonnene Ergebnis sich rechtfertigen. Wir denken uns n Elemente, nämlich $1, 2, \cdots k$ und im übrigen lauter Nulle, $n-k$ an der Zahl. Das Herantreten an die Urne und Ziehen einer roten oder schwarzen Kugel nach der Reihenfolge der Stellenzeiger der Spieler können wir durch eine Permutationsform der genannten Elemente darstellen, innerhalb deren die Rangordnung der Elemente der der Spieler entspricht und eine 0 das Ziehen einer gewinnlosen schwarzen Kugel, einer sogenannten Niete, ein zählendes Element $1, 2, \cdots k$ das Ziehen der mit den Gewinnen $G_1, G_2, \cdots G_k$ bedachten roten Kugel bedeutet. Es giebt im Ganzen $\frac{P_n}{P_{n-k}} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ solcher Permutationsformen, eine durch n teilbare Anzahl, und in der That wird jedes der Elemente genau gleich oft an jeder der n Rangstellen vorkommen müssen wie jedes andere, und das kennzeichnet für jeden Spieler die gleiche Wahrscheinlichkeit zu einem Gewinne, mithin auch die gleiche Erwartung. Die Gesamterwartung ist aber die Summe der Gewinne, und damit diese in n gleiche Teilerwartungen zerfalle, mufs die Einzelerwartung jedes Spielers $\frac{G_1 + G_2 + \cdots G_k}{n}$ sein.

72] Diese Auffassung gestattet aber eine Umkehrung des Verfahrens von praktisch grofser Wichtigkeit. Anstatt den Spielern feste Stellen in jeder Permutationsform zuzuweisen und die Gewinne und Nieten auf diese Stellen zu verteilen, kann man den Gewinnen und Nieten feste Stellen zuweisen und die Spieler permutieren, deren jeder durch seinen Stellenzeiger $1, 2, \cdots n$ vertreten ist. Den einfachsten Fall erhalten wir, wenn wir den k Gewinnen $G_1, G_2, \cdots G_k$ die k ersten Stellen ihrer Reihenfolge entsprechend zuweisen und dann lauter Nieten folgen lassen. Die n Elemente $1, 2, \cdots n$ kommen jetzt bei Bildung aller $1 \cdot 2 \cdots n$ Permutationsformen genau gleich oft an jeder Stelle vor, die Erwartung jedes Spielers ist also wieder die genau gleiche wie die jedes anderen Spielers, und das Spielverfahren ist ein gerechtes. Weil aber nur die k Gewinne und die mit ihnen zu belohnenden Spieler eine praktische Bedeutung haben, kann man anstatt der Bildung von P_n Permutationsformen aus n Elementen die Ziehung von k unter den n die Spieler vertretenden Nummern vornehmen lassen und die jedem Spieler gleiche Erwartung dadurch nicht im mindesten beeinträchtigen. Damit haben wir das bei allen Lotterien übliche Verfahren gekennzeichnet und zugleich gerechtfertigt. Die Lose, jedes mit einer Nummer versehen, welche einer Nummer eines der Anteilscheine des Lotterieanlehens entspricht, werden unter Beachtung zahlreicher Vorsichtsmafsregeln zur Verhütung von Unterschleifen in ein einer Trommel ähnliches Gefäfs, das sogenannte Glücksrad, gebracht und durch oft wiederholte Drehung des Rades durcheinander geschüttelt. Dann wird das Rad geöffnet, und es werden demselben abermals unter Beachtung zahlreicher Vorsichtsmafsregeln k Lose entnommen, worauf das Rad mit seinem Inhalte, den nicht gezogenen Losen, bis zur nächsten Ziehung fest verschlossen aufbewahrt wird. Die k gezogenen Lose werden ihrer Reihenfolge nach mit den planmäfsig bestimmten Summen $G_1, G_2, \cdots G_k$ eingelöst.

Die hier geschilderte Art der Verlosung ist einer Abänderung unterworfen, wenn innerhalb der Numerierung der Lose gewisse Gruppen von einzelnen Nummern unterschieden wurden. So wurde beispielsweise 1867 eine Badische 4prozentige Eisenbahn-Prämien-

Anleihe im Betrage von 12 Millionen Thaler (*M.* 36000000) ausgegeben, sogenannte Hundert-Thaler-Lose, weil jeder Anlehenschein auf den Nennwert von 100 Thaler (*M.* 300) ausgestellt und vermöge der Anlehensbedingung ein Los war. Es gab also 120000 Lose. Von diesen bildeten je 50 eine Serie genannte Gruppe, sodaſs die Lose nicht einfach mit den Nummern 1 bis 120000 bezeichnet wurden, sondern je mit einer Doppelnummer, der Seriennummer 1 bis 24000 und einer zweiten Stücknummer 1 bis 50. Die Ziehung findet dieser Doppelnumerierung entsprechend in zwei von einander getrennten Handlungen statt. Am 1. April findet alljährlich die Serienziehung, am 1. Juni die Prämienziehung statt, während die Zahlung der gezogenen Lose am 1. August fällig ist. Halbjährliche Zinsabschnitte von je 2 Thaler (*M.* 6) sind am 1. Februar und am 1. August fällig. Unter Serienziehung wird verstanden, daſs aus einem Glücksrade, welches ursprünglich die Seriennummern 1 bis 24000 enthielt, immer am 1. April eine gewisse planmäſsig bestimmte Anzahl von Seriennummern entnommen wird. Alle Lose der gezogenen Serien heiſsen von da an Serienlose, und man weiſs nun schon, daſs sämtliche Serienlose am folgenden 1. August zur Einlösung gelangen, wenn man auch den Einlösungspreis jedes einzelnen noch nicht kennt, weil darüber erst am 1. Juni entschieden wird. Zwischen dem 1. April und dem 1. Juni werden 50mal so viele Zettel, als am 1. April Serien gezogen worden waren, bezeichnet mit den Seriennummern verbunden mit Nr. 1 bis 50 (z. B. wenn Serie 2713 gezogen worden war bezeichnet mit $\frac{2713}{\text{Nr. } 1}, \frac{2713}{\text{Nr. } 2}, \dots \frac{2713}{\text{Nr. } 50}$ und ebenso für jede andere gezogene Serie) in ein zweites Glücksrad geworfen und durch Umdrehung des Rades gehörig gemischt. Diesem zweiten Glücksrade werden am 1. Juni so viele Nummern einzelner Serienlose entnommen, als planmäſsig mit eigentlichen Gewinnen ausgestattet werden sollen, deren Reihenfolge wieder planmäſsig feststeht. Die nicht gezogenen Serienlose, deren Vorhandensein in dem zweiten Glücksrade strenger Kontrole unterliegen kann, weil jenes doch ganz entleert werden muſs, werden ein jedes mit seinem Nennwerte von 100 Thaler (*M.* 300) eingelöst.

73] Die wichtigste Aufgabe ist die, den Wert eines solchen Loses zu einer bestimmten Zeit zu berechnen, wenn ein bestimmter Zinsfuſs der Berechnung zu Grunde gelegt wird. Die Badischen 100 Thaler Lose besitzen, wie wir gesagt haben, halbjährliche Zinsabschnitte von je 2 Thalern. Daraus geht hervor, daſs ein Halbjahrzinsfuſs von 2% in Rechnung gezogen werden muſs. Da man meistens beabsichtigt, die einmalige nicht ganz unbedeutende Mühe der Wertberechnung für die ganze Lebensdauer des Anlehens bis zur letzten Ziehung benutzen zu können, so wird es am zweckmäſsigsten sein, bei dieser letzten Ziehung zu beginnen und von der Zeit der letzten Einlösung rückwärts zu gehen.

Die letzte Ziehung findet 1917 statt. Alsdann sind noch 4900 Lose vorhanden, und der Verlosungsplan bestimmt als die zu deren Einlösung erforderlichen Summen:

1	Los	zu	100000	Thaler.	Erfordernis:	300000 M.
1	"	"	16000	"	"	48000 "
1	"	"	6000	"	"	18000 "
1	"	"	1600	"	"	4800 "
3	Lose	"	800	"	"	7200 "
7	"	"	400	"	"	8400 "
206	"	"	200	"	"	123600 "
4680	"	"	100	"	"	1404000 "
4900	Lose					1914000 M.

Aufserdem ist am 1. August 1917 ein letzter Zinsabschnitt mit je 6 M. für 4900 Lose fällig. Dieser Betrag ist 29400 M., und das Gesamterfordernis am 1. August 1917 ist $1914000 + 29400 = 1943400$ M. Nun gehen wir um ein halbes Jahr rückwärts zum 1. Februar 1917. Auch zu dieser Zeit sind 4900 Zinsabschnitte mit 29400 M. einzulösen. Der Barwert der am 1. August 1917 erforderlichen 1943000 M. wird infolge des Halbjahrzinsfufses von 2 % durch Division mit 1,02 gefunden. Nun ist $\frac{1943400}{1,02} = 1905294,12$, und addiert man das Zinserfordernis mit 29400, so stellt sich der Wert des Anlehens am 1. Februar 1917 auf 1934694,12. An ihm nehmen 4900 Lose teil. Der Durchschnittswert eines Loses scheint also am 1. Februar 1917 vor der letzten Ziehung $\frac{1934694,12}{4900} = 394,84$ für den Nennwert 300, oder 131,60 % als gerechtfertigter Kurs. Das wäre aber falsch geschlossen, weil der Betrag des letzten Zinserfordernisses mit 29400 als dem Käufer zu gute kommend eingerechnet wurde, während bei einem Besitzwechsel am 1. Februar der Zinsabschnitt entweder dem Verkäufer bleibt oder ihm von dem Käufer in Gestalt von Zwischenzins vergütet wird. Man mufs also 2 % wieder abziehen, beziehungsweise nur $\frac{1905294,12}{4900} = 388,84$ als Wert eines Loses rechnen, um zum richtigen Kurs von 129,60 zu gelangen. Wir gehen, um die Rechnung recht klar zu stellen, noch ein weiteres Jahr in gleich ausführlicher Weise rückwärts. Der Verlosungsplan von 1916 ist:

1	Los	zu	40000	Thaler.	Erfordernis:	120000 M.
1	"	"	12000	"	"	36000 "
1	"	"	4000	"	"	12000 "
1	"	"	1600	"	"	4800 "
2	Lose	"	800	"	"	4800 "
22	"	"	200	"	"	13200 "
5522	"	"	100	"	"	1656600 "
5550	Lose					1847400 M.

Die Summe von 1847400 *M.* für 5550 Lose wird am 1. August 1916 ausgezahlt. Gleichzeitig sind 4900 + 5550 = 10450 Zinabschnitte mit 62700 *M.* einzulösen. Die Gesamtauszahlung am 1. August 1916 beträgt also 1910100 *M.* Der Betrag vom 1. Februar 1917 wird mittels Division durch 1,02 zu $\frac{1934694,12}{1,02} = 1896758,94$, der Wert des Anlehens am 1. August 1916 also $1910100 + 1896758,94 = 3806858,94$. Am 1. Februar 1916 sind 62700 *M.* für Zinsabschnitte zu zahlen. Dazu kommt $\frac{3806858,94}{1,02} = 3732214,65$ als rabattierter Wert der der Zeit nach späteren Auszahlungen, der Gesamtwert des Anlehens am 1. Februar 1916 ist also 3794914,65, worein sich 10450 Lose teilen, und der Durchschnittswert eines Loses ist am 1. Februar 1916 vor der vorletzten Ziehung $\frac{3794914,65}{10450} = 363,15$, was dem Kurs von 121,05 %, beziehungsweise von 119,05 % entspricht, wenn wie vorhin wieder 2 % für den letzten Zinsabschnitt abgezogen werden. Beim Vergleich der Verlosungspläne von 1917 und von 1916 mufs auffallen, dafs der sogenannte höchste Treffer sich 1917 auf 300000, und 1916 nur auf 120000 beläuft. Auch in den übrigen Prämien der beiden Ziehungen findet ein Unterschied statt. Nennen wir die Ziehung von 1917 eine grofse, die von 1916 eine kleine Ziehung, so war der Plan so eingerichtet, dafs von Anfang an eine grofse und eine kleine Ziehung regelmäfsig abwechselten und nur 1891 und 1892 zwei kleine Ziehungen aufeinander folgten. Grofse Ziehungen fanden also und finden statt in den 25 Jahren 1868, 1870, 1872, 1874, 1876, 1878, 1880, 1882, 1884, 1886, 1888, 1890, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, kleine Ziehungen in den 25 dazwischen liegenden Jahren. Zwischen den einzelnen grofsen Ziehungen einerseits, zwischen den einzelnen kleinen Ziehungen andererseits besteht nur der Unterschied, dafs die Anzahl der mit dem niedersten Treffer von *M.* 300 und mit den nächstniederen Treffern herauskommenden Lose regelmäfsig ansteigt und in den Jahren mit kleinen Ziehungen eine gröfsere ist als in den Jahren mit grofsen Ziehungen. Vermöge dieser Einrichtung ist der Jahresbedarf ein stets gleicher von *M.* 1972800. Nach diesen Vorbemerkungen lassen wir die bis zum 1. Februar 1900 zurückgeführte tabellarisch geordnete Berechnung folgen, deren Verständnis wohl nichts mehr im Wege steht:

Datum	Jahr	Anzahl der Lose	Auszahlung	Rabattierte spätere Auszahlungen	Barwert der Summe aller Auszahlungen	Kurswert
1. Aug.	1917	4900	1943400	1943400.—	1943400.—	
1. Febr.	1917	4900	29400	1905294.12	1934694.12	129.60
1. Aug.	1916	10450	1910100	1896758.94	3806858.94	
1. Febr.	1916	10450	62700	3732214.65	3794914.65	119.05

Datum	Jahr	Anzahl der Lose	Auszahlung	Rabattierte spätere Auszahlungen	Barwert der Summe aller Auszahlungen	Kurs-wert
1. Aug.	1915	14950	1883100	3720504.56	5603604.56	
1. Febr.	1915	14950	89700	5493729.96	5583429.96	122.49
1. Aug.	1914	20100	1852200	5473950.94	7326150.94	
1. Febr.	1914	20100	120600	7182500.92	7303100.92	119.11
1. Aug.	1913	24300	1827000	7159706.78	8986706.78	
1. Febr.	1913	24300	145800	8810496.84	8956296.84	120.85
1. Aug.	1912	29100	1798200	8780683.18	10578883.18	
1. Febr.	1912	29100	174600	10371454.10	10546054.10	118.80
1. Aug.	1911	32950	1775100	10339268.71	12114368.71	
1. Febr.	1911	32950	197700	11876832.07	12074532.07	120.15
1. Aug.	1910	37450	1748100	11837776.54	13585876.54	
1. Febr.	1910	37450	224700	13319486.80	13544186.80	118.55
1. Aug.	1909	41000	1726800	13278614.51	15005414.51	
1. Febr.	1909	41000	246000	14711190.69	14957190.69	119.60
1. Aug.	1908	45200	1701600	14663912.44	16365512.44	
1. Febr.	1908	45200	271200	16044620.04	16315820.04	118.32
1. Aug.	1907	48450	1682100	15976294.15	17658394.15	
1. Febr.	1907	48450	290700	17312151.13	17602851.13	119.11
1. Aug.	1906	52350	1658700	17257108.95	18915808.95	
1. Febr.	1906	52350	314100	18564518.58	18878618.58	118.21
1. Aug.	1905	55300	1641000	18508449.59	20149449.59	
1. Febr.	1905	55300	331800	19754362.34	20086162.34	119.07
1. Aug.	1904	58900	1619400	19692316.02	21311716.02	
1. Febr.	1904	58900	353400	20893839.23	21247239.23	118.24
1. Aug.	1903	61600	1603200	20830626.69	22433826.69	
1. Febr.	1903	61600	369600	21993947.73	22363547.73	119.01
1. Aug.	1902	65000	1582800	21925046.79	23507846.79	
1. Febr.	1902	65000	390000	23046908.61	23436908.61	118.19
1. Aug.	1901	67500	1567800	22977361.38	24545161.38	
1. Febr.	1901	67500	405000	24063883.71	24468883.71	118.83
1. Aug.	1900	70650	1548900	23989101.67	25538001.67	
1. Febr.	1900	70650	423900	25037256.54	25461156.54	118.13

Der Kurswert erhält sich, abgesehen von den allerletzten Ziehungsjahren fortwährend innerhalb 118 und $122\frac{1}{2}$, ist vor den grofsen Ziehungen höher als bei den benachbarten kleinen Ziehungen, und steigt innerhalb beider Gruppen von der der Zeit nach früheren Ziehung zur späteren. Der thatsächliche Kurs ist weit höher als der hier durch Rechnung gefundene, nämlich etwa 145. Bei Losen, welche wenigen vom Glücke Begünstigten einen grofsen Gewinn in Aussicht stellen, wähnt Jeder, er werde ein so Begünstigter sein und scheut sich ein in seinem Besitze befindliches Los zu verkaufen, während andere in den Besitz eines Loses zu gelangen wünschen, um, wie man oft sagen hört, dem Glücke einmal die Hand zu bieten, und dieses fortwährende Überwiegen der Nachfrage über das Angebot hält den Kurs der Lotterieanlehen aufser in ganz besonderen aus dem Mifskredite der verschuldeten Gemeinwesen hervorgehenden Fällen meistens weit über dem berechtigten Stande. Wenn gleichwohl Gemeinwesen mit geordneten Finanzverhältnissen aufgehört haben bei der Aufnahme von Anlehen von dem Anziehungsmittel verlockender Lotteriepläne Gebrauch zu machen, so liegt das daran, dafs solche Gemeinwesen in der Lage sind, sich die erforderlichen Summen billiger zu verschaffen als mittels eines regelmäfsigen Zinses und des durch den Ziehungsplan ihnen auferlegten Mehrbedarfs über den Nennwert der Schuld. Ein Lotterieanlehen ohne beigefügte Zinsabschnitte wird aber nachgerade als eine Verleitung zu unsolidem Spiele betrachtet und deshalb gemieden. Unsolid ist das Spiel in Lotterieanlehen ohne Zinsabschnitte, weil bei ihnen auch in dem Falle, dafs der niederste Treffer im Verlaufe der Ziehungen sich planmäfsig erhöht, was nicht einmal ausnahmslos zutrifft, diese Erhöhung einer so niedrigen Verzinsung entspricht, dafs man von einem wirklichen Verluste des Spielers reden darf, dessen Los erst in einem ziemlich späten Zeitpunkte mit dem niedersten Treffer herauskommt.

74] Die Spiellust der Menschen, auf welche die Ausgabe von Lotterieanlehen sich gründet, hat den Anlafs zu gewissen Börsengeschäften gegeben, welche hier erwähnt werden müssen. Wir sahen (Nr. 72), dafs das Badische Anlehen der 100 Thaler-Lose in Serien von je 50 Losen zerfällt, welche alsdann, wenn am 1. April die Seriennummer gezogen wurde, Serienlose im engeren Sinne des Wortes heifsen. Jedes Serienlos gelangt, wie wir gleichfalls gesehen haben, an dem auf die Ziehung folgenden 1. August zur Einlösung, nachdem am 1. Juni der Einlösungspreis für jedes einzelne Serienlos durch die Prämienziehung bestimmt wurde. In der Zeit zwischen dem 1. April und dem 1. Juni mufs jedes Serienlos als zu jeder Prämie gleich berechtigt den Mittelwert sämtlicher Prämien besitzen. Im Jahre 1900 beispielsweise ist eine kleine Ziehung mit 3150 Losen, auf welche eine Summe von *M.* 1125000 fällt, auf jedes einzelne also *M.* 357,14. Im Jahre 1901 ist eine grofse Ziehung mit 2500 Losen, auf welche eine Summe von *M.* 1162800 fällt, auf jedes einzelne also *M.* 465,12. Mithin kann im Jahre 1900 (1901) für ein Serienlos, dessen Ertrag am 1. August dem Käufer eingehändigt wird, der Durchschnittspreis von *M.* 357,14 nebst *M.* 6 für den am 1. August fälligen Zinsabschnitt oder *M.* 363,14 (*M.* 465,12 + *M.* 6 = *M.* 471,12) rabattiert mit 2% Halbjahrzins auf den Tag des Kaufes bezahlt werden. Der Kaufpreis eines solchen Serienloses ist thatsächlich regelmäfsig weit höher, weil hier erst recht eintritt, dafs der Käufer die Möglichkeit, dafs der höchste Treffer gerade auf sein Los fallen werde, ganz besonders berücksichtigt und dementsprechend sich eine Preissteigerung gefallen läfst. An manchen Börsenorten, z. B. in München, bilden Bankhäuser geradezu Vereinigungen von Persönlichkeiten unter dem Namen von Serien-Los-Gesellschaften, welche gemeinschaftlich Serienlose von 20 bis 30 verschiedenen Lotterieanlehen ankaufen, um in ihrem Besitze in den Prämienziehungen mitzuspielen. Das unternehmende Bankhaus verpflichtet sich, die Serienlose anzuschaffen und Verlosung und Auszahlung der Prämien zu überwachen und zu vermitteln, während die Gesellschafter ohne Rücksicht auf den börsenmäfsigen Ankaufspreis der Serienlose eine zum voraus bestimmte feste Summe einzahlen. Natürlich ist diese Summe so bemessen, dafs das an der Spitze stehende Bankhaus keinenfalls zu Schaden kommt. In einem derartigen Gesellschaftsentwurfe beträgt beispielsweise die Einlagsumme etwa 245 $^0/_0$ des theoretischen Wertes der betreffenden Serienlose, die also schon ziemlich teuer angekauft dem Bankhause immer noch einen nicht unerheblichen Gewinn sichern.

75] Eine zweite Art sich vorübergehend an dem Lotteriespiele zu beteiligen ist folgende. Man mietet gegen ein bestimmtes Mietgeld oder Heuergeld ein Los, bevor die Ziehung erfolgt. Kommt das Los nicht heraus, so ist jenes Heuergeld für den Spieler verloren. Kommt es dagegen heraus, so verspricht der Vermieter dem Spieler den ganzen Betrag, mit welchem das Los eingelöst wird. Dieses Versprechens wegen heifst das geschilderte Geschäft eine Promesse. Vor dem 1. Februar 1900 sind beispielsweise 70650 Badische 100 Thaler-Lose vorhanden, von welchen 3150 gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit herauszukommen ist mithin für ein Los

$$\frac{3150}{70\,650} = \frac{7}{157} = 0{,}04458\ldots$$

Der Mittelwert eines Serienloses (Nr. 74) war 357,14. Die mathematische Erwartung des Besitzers eines Loses ist also

$$0{,}04458\cdots \times 357{,}14 = 15{,}92$$

und so viel ist die Promesse wert. Da der Mittelwert des Serienloses durch den Quotienten $\frac{1\,125\,000}{3150}$ erhalten und dieser mit $\frac{3150}{70\,650}$ vervielfacht wird, so kann die Promesse auch unmittelbar durch $\frac{1\,125\,000}{70\,650}$ erhalten werden d. h. als Quotient der infolge der bevorstehenden Ziehung zu erwartenden Auszahlungen dividiert durch die Anzahl der vorhandenen Lose. Dafs dieser Wert der Promesse streng genommen noch vom Zeitpunkte der Auszahlung zurück bis zum Augenblicke, in welchem die Promesse abgeschlossen wurde, rabattiert werden mufs, ist einleuchtend.

Die Promesse kann auch gewisse Einschränkungen erleiden, wie z. B. dafs man auf den niedersten Treffer verzichte und nur die höheren Treffer beanspruche. In dem Beispiele der Ziehung der Badischen 100 Thaler-Lose im Jahre 1900 fallen dadurch die Ansprüche auf 3130 $\times$ 100 Thaler oder auf *M.* 939000 weg, und nur der Betrag von *M.* 186000, der sich auf 20 Gewinnnummern verteilt, ist Gegenstand des Spiels. Die Promesse hat alsdann nur den Wert $\frac{186000}{70650} = 2{,}63$.

76] Der Promesse ungefähr zur Seite zu stellen ist die Versicherung gegen einfache Zurückzahlung. Wir haben gesehen (Nr. 73), dafs die Badischen 100 Thaler-Lose etwa 145 stehen, dafs man also, wenn man ein mit dem niedersten Treffer gezogenes Los durch ein noch nicht gezogenes ersetzen will, eine Einbufse von 45 Thaler oder ℳ 135 hat. In der wiederholt benutzten Ziehung von 1900 würde dieser Verlust 3130mal eintreten, also auf ℳ 422550 steigen und sich immer wieder auf 70650 Lose verteilen. Der mittlere Verlust wäre $\frac{422550}{70650} = 5{,}98$. Soviel müfste man also demjenigen bezahlen, der es übernähme, ein in der Prämienziehung von 1900 mit dem niedersten Treffer herauskommendes Los gegen ein noch nicht gezogenes Los umzutauschen.

Wesentlich höher müfste die Versicherungsprämie sein, wenn ein Serienlos gegen den niedersten Treffer versichert werden wollte, sodafs es eintretenden Falles gegen ein noch nicht gezogenes Los umgetauscht würde. Dann verteilt sich der Verlust von ℳ 422550 auf nur 3150 Serienlose, und $\frac{422550}{3150} = 134\frac{1}{7}$ ist der Betrag des Verlustes auf je einem Los, also auch der Versicherung, ein Betrag der dem wirklichen Verluste von ℳ 135 so nahe kommt, dafs eine derartige Versicherung kaum thatsächlich vorkommen dürfte.

Dagegen treten häufig Versicherungen bei der Tilgung unterworfenen Staatspapieren ein, wenn ihr Börsenkurs den Nennwert überstiegen hat. Die 4 % Staatsanlehen Deutscher Staaten (Württemberg u. s. w.) haben meistens einen Kurs von 102,50. Wird eine solche Obligation durch das Los zur Tilgung einberufen, so ist diese für den Besitzer, falls er die gezogene Obligation zu ersetzen wünscht, mit einem Verluste von $2\frac{1}{2}$ % verbunden, und gegen diesen Verlust bieten Bankhäuser der betreffenden Staaten in den öffentlichen Blättern Versicherungen an.

Fünftes Kapitel.

Versicherungswesen.

77] Wir haben (Nr. 68) den Begriff der Wahrscheinlichkeit a posteriori kennen gelernt und der Statistik als der Wissenschaft gedacht, welche es mit der Zusammenstellung zahlreicher Ereignisse in thunlichster Vollständigkeit und mit dem Ziehen von Schlüssen aus ihnen auf künftige noch unbekannte Ereignisse zu thun hat. Wir haben (Nr. 76) bei Ereignissen, welche dem Gebiete der Wahrscheinlichkeit a priori angehören, die Möglichkeit einer Versicherung eintreten sehen. Die meisten Versicherungen werden jedoch bei solchen Ereignissen eingegangen, für die ausschliefslich eine Wahrscheinlichkeit a posteriori zur Verfügung steht. Der Sinn des Wortes Versicherung ist allerdings genauer festzustellen. Wenn durch ein freiwillig gebrachtes Opfer die Sicherstellung gegen gewisse Schädlichkeiten erkauft werden will, so ist das nicht in dem Sinne der Opfer verschiedener religiöser Kulte gemeint, welche, soweit sie nicht Dankopfer waren, den ausgesprochenen Zweck hatten, das Eintreten der Schädlichkeiten selbst hintenanzuhalten. Jenen Opfern ist weit eher eine Reihe von Thätigkeiten, welche Vorbeugungsmafsregeln genannt werden, z. B. Anbringung von Blitzableitern, von selbstthätigen Ventilen, Herstellung und Instandhaltung von Dämmen, Vornahme von Schutzimpfungen u. s. w. an die Seite zu stellen. Die Versicherung bringt nur Opfer zum Zwecke der Erzielung von Schadloshaltung d. h. eines Ersatzes des in Werten auszumessenden Schadens. Dabei kann der Schaden von zweifacher Natur sein, entweder ein solcher, der zu irgend einer Zeit eintreten kann oder auch nicht eintreten kann, oder ein solcher, der irgend einmal eintreten mufs. In beiden Fällen bietet die Versicherung dem Versicherten einen doppelten Vorteil, den, dafs er den mit jeder auch nur möglichen Schädigung verbundenen Verlust nicht auf einen Schlag zu empfinden hat, und den, dafs er sich selbst die Zeitpunkte wählt, an welchen er die Teilverluste tragen will.

78] Die Versicherung gegen Schäden, welche nicht notwendig eintreten müssen, zerfällt selbst wieder in zwei Gruppen, je nachdem der Versicherte sich selbst oder Wertobjekte versichert hat. Jener ersten Gruppe gehören Rentenversicherungen der verschiedensten Natur an, Altersversicherung, Invaliditätsversicherung, Krankenversicherung, Unfallversicherung, Reiseversicherung u. s. w. Aus der zweiten Gruppe nennen wir die Viehversicherung, welche seit dem Anfange des 18. Jahrhunderts in Frankreich und England begann und 1765 durch Friedrich den Grofsen in Schlesien eingeführt wurde. Bei der grofsen volksgesundheitlichen Bedeutung thunlichst frühzeitiger Vernichtung kranken Viehs sind manche Staaten, z. B. Baden, dazu übergegangen, die Kosten der Viehversicherung zum Teil wenigstens auf die Staatskasse zu übernehmen und den Einzelversicherten nur einen geringen Beitrag abzuverlangen. Die Hagelversicherung begann gleichfalls in Frankreich und England um die Mitte des 18. Jahrhunderts. In Deutschland wurde mit ihr 1797 in Mecklenburg der Anfang gemacht. Hagelschlag trifft die Gemarkung, wo er niederfällt, vernichtend. Um so notwendiger ist es, dafs der Versicherer ein möglich grofses Gebiet versichere. Er wird alsdann zwar alljährlich Schadenersatz zu leisten haben, aber doch nur einen solchen, der in mäfsigen Grenzen sich hält, während bei engem Versicherungsgebiete bald gar keine Entschädigung, bald eine so beträchtliche zu zahlen sein kann, dafs der Bestand der Versicherungsgesellschaft gefährdet werden könnte. Man kann es daher nur billigen, wenn badische Landwirte sich zu einem Bezirksverein der Norddeutschen Hagel-Versicherungsgesellschaft zusammengethan haben und gemeinschaftlich jener weitverbreiteten Gesellschaft beigetreten sind. Die Thatsache, dafs verhältnismäfsig nur wenige Besitztümer einer Schädigung durch Überschwemmung, diese wenigen aber ihr in hohem Grade ausgesetzt sind, hat eine Versicherung gegen Überschwemmung bisher nicht zu stande kommen lassen und sie wohl auch für die Zukunft aussichtslos gemacht. Man mufs sich an der in Nr. 77 erwähnten Vorbeugungsmafsregel der Schutzdämme genügen lassen, zu deren Kosten die sogenannten Deichgenossenschaften beigezogen werden. Wir nennen noch im Vorbeigehen die Transportversicherung und als Abart derselben die Postwertversicherung sei es bei der Postverwaltung selbst, sei es bei besonderen Anstalten, wir nennen die Spiegelscheibenversicherung, die Wasserleitungsversicherung. Am ältesten dürfte unter den zu dieser Gruppe gehörenden Versicherungszweigen die Feuerversicherung sein, auf welche wir, um ein Bild derartiger Versicherungen zu erhalten, näher eingehen.

79] Schon 1530 bildete sich in London, 1545 in Paris ein Verein mit der Absicht Abgebrannten eine geringe Unterstützung zu gewähren. Unmittelbar nach dem Londoner Brande 1666 gründete 1667 Nicolas Barbon das *Fire-office*, eine Vermittelungsstelle, bei welcher Versicherungslustige den Wert, zu welchem sie ihr Haus gegen Brandschaden zu versichern wünschten, angaben und andere Persönlichkeiten sich bereit erklärten, unter gewissen Bedingungen für den Schaden aufzukommen. Dann wurden seit 1681 wirkliche Aktiengesellschaften gegründet, welche Feuerversicherungen als Geschäft betrieben, und von welchen die *Hand in hand* genannte Gesellschaft von 1696 noch heute besteht. Zur Übernahme von Mobiliarfeuerversicherungen wurde 1710 in London das *Sun fire office* mit 500 000 Lst. Aktienkapital gebildet, und die *Phoenix Assurance Company* trat gar 1782 mit einem Kapitale von 800 000 Lst. ins Leben und gründete 1786 eine Niederlassung auf deutschem Boden in Hamburg, von wo aus sie in Norddeutschland immer festeren Fufs fafste. Französische und spanische Mobiliarfeuerversicherungsanstalten entstanden seit 1750. Die französischen Gesellschaften drangen in Süddeutschland ein. In Deutschland selbst hatte Sachsen 1729 eine allgemeine Brandkasse eingerichtet. Die Staatsverwaltung sammelte vierteljährlich die freiwilligen Beiträge und verteilte von Fall zu Fall Brandentschädigungen in willkürlicher Höhe. Dann entstanden Landesbrandkassen zur Versicherung der Gebäude 1742 in Preufsen, 1750 in Braunschweig, 1753 in Hannover, eine staatliche Mobiliarfeuerversicherung 1784 in Sachsen. Aber die kriegerischen Zustände in Deutschland liefsen neue Unternehmungen neben den auf fester Kapitalgrundlage arbeitenden englischen und französischen Feuerversicherungsaktiengesellschaften nicht aufkommen, und erst als mit dem Jahre 1818 die sächsische staatliche Mobiliarfeuerversicherung wieder einging, gründete 1818 auf 1819 E. Weifse aus Berlin in Leipzig eine Feuerversicherungsanstalt, welche mit den auswärtigen Anstalten in Wettbewerb trat. Einen vollständigen Umschwung der Verhältnisse leitete die Gründung der Gothaer Feuerversicherungsanstalt auf Gegenseitigkeit ein, zu welcher Ernst Wilhelm Arnoldi 1817 durch seinen Aufsatz *Vorschlag zu einem Bunde unter den deutschen Fabriken* den Anstofs gegeben hatte. Wenn, sagte Arnoldi in jenem Aufsatze, durch die Vereinigung aller deutschen Fabriken und Manufakturen für gemeinschaftliche Zwecke eine Versicherungsanstalt gegen Feuersgefahr zu stande käme, so würde der Überschufs der Prämie dem gemeinsamen Vaterlande und den Fabriken unter sich durch diese Anstalt erhalten sein. Wie die Sachen gegenwärtig stehen, bleibt dieser Überschufs der Phönix-Assekuranz-Societät in London.

80] Der von Arnoldi schon betonte Überschufs hat inzwischen sich bedeutend vermehrt, da dasjenige eingetreten ist, was in Nr. 68 den Namen neuer bestimmender Momente führte. Die festere Bauart der Häuser, für welche als Beispiel gelten mag, dafs allein in Baden in der Zeit von 1870 bis 1890 die mit Holz gedeckten Häuser um 10 %, die mit hartem Dache um $22\frac{1}{2}$% zugenommen haben, während Häuser mit Strohdächern abnahmen, die Einrichtung regelrechter Feuerwehren, die Benutzung von Wasserleitungen bei Brandlöschungen, die Anschaffung von Dampfspritzen haben die Feuergefahr wesentlich herabgemindert, und wenn auch gefährlichere Beleuchtungsmittel, Einbeziehung von Fabriken in die Städte, dichtere Bebauung durch den Wegfall früherer Hausgärten einen Einflufs in entgegengesetzter Richtung übten, so hat sich doch aus den Statistiken der verschiedenen Feuerversicherungsanstalten ergeben, dafs, während 1820 etwa $1\frac{1}{2}$ ‰ des verbrennbaren Eigentums in Deutschland alljährlich durch Feuer zu Grunde ging, dieser Bruchteil am Ende des Jahrhunderts nur noch $\frac{1}{2}$ ‰ beträgt. Was also mehr als $\frac{1}{2}$ ‰ an Versicherungsprämien erhoben wird, stellt einen Gewinn der Versicherungsanstalt dar, und da wir (Nr. 79) dreierlei Feuerversicherungsanstalten kennen gelernt haben (staatliche, von Aktiengesellschaften gegründete und Gegenseitigkeitsanstalten), so lohnt es von der Prämienerhebung und der Gewinnverteilung in den drei Fällen zu reden.

81] Eine Landesbrandkasse besitzt Baden, wenn auch nicht als besondere Kasse. Jeder Hausbesitzer ist verpflichtet, den Wert seines Hauses zu vier Fünfteln bei der Staatsverwaltung zu versichern, während ihm freisteht, auch das letzte Fünftel bei einer ihm beliebigen Anstalt zu versichern. Früher war der ganze Wert staatlich versichert, womit man schlechte Erfahrungen machte. Unter diesem Gesetze wuchsen nämlich in dem Jahrzehnte von 1839 bis 1849 die Versicherungsanschläge im Verhältnisse von 100 : 158, die

Brandschäden im Verhältnisse von 100 : 178, d. h. es verbrannte etwa $\frac{1}{8}$ mehr als nach Verhältnis der mehrerbauten Häuser hätte verbrennen dürfen. Seit durch das Gesetz vom 29. März 1852 nur $\frac{4}{5}$ des Hauswertes staatlich versichert ist, hat eine Abnahme der Brandschäden stattgefunden. Ob eine Zwangsversicherung weiter zu empfehlen ist oder nicht, mag hier unentschieden gelassen werden. Von Übel ist jedenfalls, dafs das Badische Gesetz Gefahrklassen, in dem Sinne wie nichtstaatliche Anstalten sie unterscheiden, nicht kennt. Die Prämienerhebung findet nicht durch Vorauszahlung, sondern durch Nachzahlung statt, und da man die Brandschäden des abgelaufenen Jahres stets genau kennt, so kann die Versicherungsprämie so bemessen werden, dafs kein nennenswerter Unterschied zwischen Schadengeldern und Prämiensumme vorhanden ist. Allerdings zeigt sich dabei ein unangenehmes Schwanken der Prämienhöhe von Jahr zu Jahr, je nachdem ein gröfserer Brand stattgefunden hat oder nicht, ein Beweis dafür, wie wichtig es ist, dafs das Versicherungsgebiet einer Versicherungsanstalt die gröfstmögliche Ausdehnung besitze.

82] Nichtstaatliche Anstalten können die Beiträge der Versicherten nicht mit gleicher Leichtigkeit nachträglich erheben, wie der Staat es auf dem Steuerwege thut, sie verfügen auch nicht von Anfang an über ein genügendes Betriebskapital, um daraus während eines Jahres alle Brandentschädigungen und sonstige Geschäftskosten decken zu können, sie müssen die Vorausbezahlung der Versicherungsprämie verlangen, und wenn auch der Wettbewerb der einzelnen Anstalten dafür sorgt, dafs die Prämie nicht übertrieben hoch sein kann, so ist doch darin Übereinstimmung zwischen allen nichtstaatlichen Anstalten, dafs die Prämie etwas höher gegriffen wird, als der voraussichtliche Bedarf von etwa $\frac{1}{2}$ ‰ des versicherten Besitzstandes an Immobilien und Mobilien es nötig macht. Auch darin herrscht Übereinstimmung, dafs Gefahrklassen der Versicherungsgegenstände gebildet werden je nach der Lage, der Bauart, dem in dem Gebäude betriebenen Gewerbe. Ein freistehendes, mit Schiefer gedecktes, nur als Wohnhaus dienendes Gebäude bildet die niederste Gefahrklasse und gilt nach dem Kunstausdruck der Feuerversicherungsanstalten als einfaches Risiko, Gaswerke müssen schon wesentlich höhere Versicherungsprämien zahlen, Theater wieder 6 mal soviel als Gaswerke, Holzgerüste, welche bei Bauten bald an einer, bald an einer anderen Stelle zur Verwendung kommen, nimmt überhaupt keine Anstalt zur Versicherung an. In Deutschland beträgt bei Aktienunternehmungen die Feuerversicherungsprämie für ein Wohnhaus 1 — 2 ‰, für ein Gaswerk $2\frac{1}{2}$ ‰, für ein Theater 15 ‰, während die Gothaer Feuerversicherungsgesellschaft auf Gegenseitigkeit für ein Wohnhaus $1\frac{1}{2}$ — 3 ‰, für ein Gaswerk 5 ‰, für ein Theater 30 ‰ in Rechnung bringt. Wenn demnach die Versicherung bei Aktiengesellschaften die wesentlich wohlfeilere zu sein scheint, und wenn gleichwohl die Versicherungen bei der Gothaer Gegenseitigkeitsanstalt einen Wert von 5500 Mill. Mark erreicht haben, wenn diese Anstalt jährlich rund 14 Millionen Mark an Prämien einnimmt, rund $2\frac{1}{2}$ Millionen Mark für Brandentschädigungen, 2 Millionen Mark für Verwaltungskosten bedarf, also mit einem Jahresgewinn von rund $9\frac{1}{2}$ Millionen Mark oder fast 68 % der Prämieneinnahme abschliefst, so ist die Gunst, deren die Gothaer Anstalt sich erfreut, in der Verteilungsart des erzielten Reingewinnes begründet. Die Aktiengesellschaft legt von dem Jahresgewinne eine stattliche Reserve zurück und verteilt das Übrige unter die Aktienbesitzer. Wir haben (Nr. 21) die Aktien der Versicherungsgesellschaft Providentia, die allerdings keineswegs ausschliefslich Feuerversicherungsanstalt ist, kennen gelernt, welche eine Dividende von $26\frac{5}{6}$ % des Nennwertes des eingezahlten Aktienkapitals trugen. Die Gegenseitigkeitsgesellschaft kann als jedes Jahr neu gegründete und am Jahresschlufs sich auflösende Aktiengesellschaft aufgefafst werden. Jeder Versicherte ist zugleich Versicherer und nimmt an Gewinn und Verlust des Jahres nach Mafsgabe seines Anteils, d. h. der durch ihn gezahlten Versicherungsprämie teil. Wenn, wie wir entzifferten, der Gewinn sich auf 68 % der Prämieneinnahme beläuft, so erhält jeder Versicherte am Jahresschlufs 68 % seiner Prämie zurück. Wer $1\frac{1}{2}$ ‰ des Wertes seines Besitzstandes als Prämie bezahlte, erhält 68 % davon oder 1,02 ‰ des Wertes zurück und hat, wenn wir den Jahreszins vernachlässigen, etwa 0,48 ‰, mit Einrechnung des Zinses etwa $\frac{1}{2}$ ‰ als eigentliche Prämie gezahlt, mithin halb so viel als wenn er bei einer Aktiengesellschaft versichert gewesen wäre. Diesem Vorteile gegenüber erscheint wieder auffallend, dafs überhaupt noch Versicherungen bei Aktiengesellschaften eingegangen werden, und für diese Thatsache ist der Grund in der Nachzahlungspflicht der bei der Gegenseitigkeitsgesellschaft Versicherten zu suchen. Die Prämie ist ja so hoch bemessen, dafs die Brandschäden der Regel nach durch sie reichliche Deckung finden, aber es könnte doch sein, dafs in einem Jahre so zahlreiche Brände stattfänden, dafs die Summe der Prämieneinnahmen nicht ausreichte, um die Versicherungsbeträge auszuzahlen. Was geschieht in einem solchen sogenannten Mifsjahre? Die Aktiengesellschaft sichert auch dann pünktliche und vollständige Schadloshaltung den Versicherten zu und bürgt dafür nicht nur mit dem Reservefond der Gesellschaft, den man, wie oben gesagt, in guten Jahren fortwährend zu stärken gewohnt ist, sondern auch noch mit dem ganzen Aktienkapitale. Die Gegenseitigkeitsgesellschaft dagegen, welche keine Reserven besitzt, ihren Besitz auch nicht zu rechtfertigen imstande wäre, weil sie, wie gleichfalls oben gesagt, einer jährlich neu sich bildenden und wiederauflösenden Gesellschaft vergleichbar ist, mufs ihre Versicherten von vornherein dazu verpflichten, in Mifsjahren eine Nachzahlung zu leisten. Bei Gelegenheit des Hamburger Brandes wurde diese Verpflichtung angerufen, und die Versicherten mufsten $\frac{14}{15}$ einer

Jahresprämie nachentrichten. Die Furcht vor einer solchen Nachzahlung hebt bei manchem die Hoffnung auf den Rückersatz von reichlich $\frac{2}{3}$ einer Jahresprämie auf, und läfst ihn nur auf die thatsächlich höhere Prämie der Gegenseitigkeitsanstalt schauen, welche ihn alsdann abschreckt.

83] In Wirklichkeit erscheint diese Furcht als eine ziemlich nichtige. Als vom 5. zum 8. Mai 1842 jener furchtbare Brand in Hamburg wüthete und die Gothaer Feuerversicherungsanstalt an 520 Versicherte 4 Millionen Mark auszuzahlen hatte und mit Hilfe nachträglicher Inanspruchnahme ihrer sämtlichen Versicherten auch wirklich auszahlte, während gleichzeitig einige in Hamburg selbst ansässige Feuerversicherungsaktienunternehmungen ihre Zahlungen einstellten, waren im ganzen für 780 Millionen Mark Werte bei ihr versichert, und jener Brandschaden von 4 Millionen oder $5\frac{1}{8}$ °/₀ aller versicherten Werte mufste ganz andere Wirkung äufsern als nachdem die Versicherungssumme auf 5500 Millionen Mark gestiegen ist. Wenn auch kein ähnlich grofser Brand wie der Hamburger von 1842 inzwischen eingetreten ist, möglicherweise nie wieder eintreten wird, nachdem Telegraphen und Eisenbahnen auswärtigen Hilfskräften ein 1842 noch nicht denkbares rasches Eingreifen gestatten, hat doch 1874 ein Brand einen Teil der Stadt Meiningen in Asche gelegt. Die Gothaer Feuerversicherungsanstalt war damals zur Auszahlung von 600000 *M.* Entschädigungsgelder genötigt, was sie nicht hinderte beim Jahresschlufs 66 °/₀ ihrer Prämien als Dividende zurückzuerstatten. Ja ein neuer Verlust von 4 Millionen würde bei den gegenwärtigen Verhältnissen von 14 Millionen Prämien, $9\frac{1}{2}$ Millionen Überschufs immer noch $5\frac{1}{2}$ Millionen Überschufs lassen, mithin Rückzahlung von fast 40 °/₀ der Prämien als Jahresdividende gestatten. Der Einwurf liegt allerdings sehr nahe, bei einem neuen Hamburger Brande würde, wie die Versicherungssumme im ganzen von 780 Millionen auf 5500 Millionen gestiegen ist, auch die notwendige Brandentschädigung etwa 28 Millionen anstatt 4 Millionen betragen und alsdann die gleiche Folge einer Nachzahlung von $\frac{14}{15}$ einer Jahresprämie hervorbringen. Dieser Einwurf scheitert aber an der von allen Versicherungsgesellschaften, auch von der Gothaer, geübten Vorsicht, die Gefahr übermäfsiger Schädigung durch örtliche Begrenzung der Versicherungssumme auszuschliefsen. Es giebt einen Höchstbetrag, über welchen keine Gesellschaft bei Versicherung eines einzelnen Risikos hinausgeht, und ebenso einen Höchstbetrag, welchen sie bei Versicherung von nahe beieinander liegenden Gebäulichkeiten nicht überschreitet. Ist der Höchstbetrag erreicht, so heifst der betreffende Stadtteil b e s e t z t, und die Gesellschaft nimmt dort entweder überhaupt keine Versicherung mehr an oder deckt sich durch R ü c k v e r s i c h e r u n g d. h. indem sie selbst das überschiefsende Risiko bei einer anderen Gesellschaft versichert. Furchtempfindung ist allerdings eine durchaus persönliche, der nicht immer mit den gleichen Gründen zu begegnen ist, und dadurch wird bewirkt, dafs auch neben der Gegenseitigkeitsgesellschaft noch Aktiengesellschaften auf dem Gebiete der Feuerversicherung thätig sein können und, wie die verteilten Jahresdividenden beweisen, ihre Rechnung dabei finden. Der Gegensatz zwischen Aktiengesellschaften und Gegenseitigkeitsgesellschaften beschränkt sich aber nicht auf die Feuerversicherung. Auch Rentenversicherung und Lebensversicherung wird von beiden betrieben. Auch dort ist es an und für sich finanziell günstiger durch Beitritt zu einer Gegenseitigkeitsgesellschaft zugleich Versicherter und Versicherer zu sein, auch dort wirkt für die Aktiengesellschaften die Furcht vor etwa erforderlicher Nachzahlung und die im allgemeinen billigere Prämie, da die Gegenseitigkeitsgesellschaft zur gröfseren Sicherheit ihre Prämie etwas erhöht und erhöhen darf, weil das zuviel Gezahlte den Mitgliedern als Dividende wieder zufliefst. Bevor wir den Rechnungen näher treten, zu welchen die Rentenversicherung und die Lebensversicherung im engeren Sinne des Wortes, welche die einzige Versicherung gegen unausbleiblich eintretenden Schaden (Nr. 77) bildet, Anlafs geben, müssen wir von der Beschaffung des für diese Versicherungen erforderlichen statistischen Materials reden.

Sechstes Kapitel.

Sterblichkeitstafeln.

84] Will man wissen, wie viele von 10000 Neugeborenen im 1., im 2., im 3. Lebensjahre sterben, wie viele jedes näher anzugebende Alter erreichen, wann von sämtlichen Neugeborenen keiner mehr am Leben ist, so ist die Möglichkeit unmittelbarer fortlaufender Beobachtung ausgeschlossen. Man braucht nur an die Aufgabe zu denken, 10000 Neugeborene aus allen Ständen von ihrer Geburt bis zu ihrem Tode fortwährend zu überwachen, stets zu wissen, wo ein Jeder von ihnen lebt, um sicher zu sein, auch sofort zu erfahren, wenn er stirbt, um die Unlösbarkeit der Aufgabe zu erkennen, um zugleich zu erkennen, dafs die Lösung der Aufgabe, wenn sie wider alles Erwarten gelänge, doch die daran geknüpften Erwartungen nicht erfüllen könnte. Eine solche Liste von Neugeborenen müfste, um im Jahre 1900 ausgestorben zu sein, etwa im Jahre 1800 zusammengestellt worden sein, und die im Jahre 1900 vollendete Sterblichkeitstafel ergäbe nicht etwa den mittleren Lebenslauf, wie er alsdann anzunehmen ist, sondern wie er 100 Jahre früher stattfand. Hat innerhalb dieses Jahrhunderts irgend eine Änderung in den Sterblichkeitsverhältnissen stattgefunden? Darüber giebt die unter unsäglicher Mühe erhaltene Liste nicht den geringsten Aufschlufs. Anstatt lange fortgesetzter, fast ein Jahrhundert in Anspruch nehmender und schliefslich unfruchtbarer Beobachtungen wird man suchen müssen, eine Sterblichkeitsliste auf Grund nahe beieinander liegender Beobachtungen auszuarbeiten, und zu diesem Zwecke sind zweimal Anläufe genommen worden, über welche wir berichten.

85] Edmund Halley ging 1693 von der Annahme einer stationären Bevölkerung aus. Er dachte sich diesen Beharrungszustand dadurch hervorgerufen, dafs in jedem Jahre Γ Geburten und T Todesfälle vorkommen, und dafs $\Gamma = \mathrm{T}$. Er dachte sich ferner die Unveränderlichkeit auch nach der Richtung festgehalten, dafs jedes Jahr eine gleiche Anzahl von Todesfällen in einem gewissen Alter eintreten. Wenn die Anzahl der Todesfälle in dem auf die Geburt folgenden Jahre τ_0, in dem nächsten Jahre τ_1, in dem Alter zwischen h und $h+1$ Jahren τ_h beträgt, wenn etwa n das höchste erreichbare Alter ist, sodafs die ältesten Leute sterben, bevor sie $n+1$ Jahr alt werden, so ist, nach Halleys Auffassung, in jedem Jahre

$$\mathrm{T} = \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_n,$$

wo jedes τ_h in jedem Jahre den gleichen Wert behält, während selbstverständlich die $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_n$ untereinander ungleich sind. Halley liefs sich zu der Vermutung einer stationären Bevölkerung durch die für die Jahre 1687—1691 veröffentlichten Geburts- und Todeslisten der Stadt Breslau verleiten. In jenem Zeitraume kamen 6193 Geburten neben 5869 Todesfällen, und alljährlich ziemlich zutreffend die Durchschnittszahl von 1238 Geburten bei 1174 Todesfällen vor. Der alljährliche Überschufs von 1238—1174 = 64 oder etwa einem Zwanzigstel der Geburten konnte aber mit Rücksicht auf die jährliche Aushebung von annähernd ebenso vielen Erwachsenen zum Kriegsdienste eine Vermehrung der Einwohnerzahl nicht hervorbringen. Sind aber Halleys Annahmen richtig, so bildet die Todesliste eines einzigen Jahres zugleich eine Sterblichkeitstafel. Die τ_0 Todesfälle bedeuten doch, dafs von Γ Geborenen schon im ersten Lebensjahre τ_0 gestorben sind. Die τ_1 Todesfälle bedeuten, dafs abermals von Γ Geborenen im zweiten Lebensjahre τ_1 gestorben sind, und so kann man von jedem τ_h behaupten, es bedeute die Anzahl derjenigen unter Γ Geborenen, welche h aber nicht $h+1$ Jahre alt geworden sind. Was in dem einen Beobachtungsjahre stattfand, hat in jedem Jahre seine Wiederholung, und die Behauptung, seine Todesliste sei zugleich Sterblichkeitsliste ist gerechtfertigt.

86] Immer unter der Annahme der stationären Bevölkerung läfst auch eine einmalige Volkszählung mit Angabe des Alters jedes Einzelnen, ein sogenannter Census, wichtige Folgerungen zu. Es mag Λ die Summe aller Lebenden bedeuten und $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ die

Anzahl derjenigen Personen bezeichnen, welche darunter im ersten, im zweiten, im $n+1^{\text{ten}}$ Lebensjahre stehen. Von den λ_n wissen wir, dafs sie im folgenden Jahre sterben müssen; folglich mufs $\lambda_n = \tau_n$ sein. Von den λ_{n-1} wissen wir, dafs sie entweder im folgenden oder, wenn das nicht, im nächstfolgenden Jahre sterben müssen, weil sie das $n+1^{\text{te}}$ Lebensjahr nicht mehr vollenden können; folglich mufs $\lambda_{n-1} = \tau_{n-1} + \tau_n$ sein, oder bei veränderter Anordnung der Glieder $\lambda_{n-1} = \tau_n + \tau_{n-1}$. Setzt man diese Schlufsweise fort, so entstehen der Reihe nach $n+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \tau_n \\
\lambda_{n-1} &= \tau_n + \tau_{n-1} \\
\lambda_{n-2} &= \tau_n + \tau_{n-1} + \tau_{n-2} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_h &= \tau_n + \tau_{n-1} + \tau_{n-2} + \cdots + \tau_h \\
\lambda_{h-1} &= \tau_n + \tau_{n-1} + \tau_{n-2} + \cdots + \tau_h + \tau_{h-1} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_0 &= \tau_n + \tau_{n-1} + \tau_{n-2} + \cdots + \tau_h + \tau_{h-1} + \cdots + \tau_0 .
\end{aligned}$$

Aus ihnen sieht man aber sofort:

$$\lambda_{h-1} - \lambda_h = \tau_{h-1} .$$

Der Sinn dieser Gleichung ist der, dafs man die Anzahl der Todesfälle, die alljährlich zwischen dem $h-1^{\text{ten}}$ und h^{ten} vollendeten Lebensjahre eintreten, findet, indem man die Anzahl der h-jährigen von der Anzahl der $(h-1)$-jährigen, welche die Volkszählung nachgewiesen hat, abzieht. Zugleich erkennt man, dafs immer $\lambda_{h-1} > \lambda_h$ sein mufs, dafs bei jeder Volkszählung die Anzahl der jüngeren Personen stets gröfser als die der um ein Jahr älteren Personen ist, ein Satz, der ohne die vorausgegangene Begründung, auf welche er sich stützt, kaum als selbstverständlich erscheinen möchte, und der auch nur bei einer vollständigen Volkszählung zutreffen wird, nicht bei der Zählung von Personen, welche zu irgend einem bestimmten Zwecke sich vereinigt haben.

87] Bildet man die Summe der in der vorigen Nummer erhaltenen Gleichungen und berücksichtigt, dafs $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \Lambda$, so erhält man

$$\Lambda = 1 \cdot \tau_0 + 2 \cdot \tau_1 + \cdots + h\tau_{h-1} + \cdots + (n+1)\tau_n ,$$

und diese Gleichung hat wieder einen ganz bestimmten Sinn. Wir nannten τ_{h-1} die Anzahl derjenigen Personen, welche alljährlich sterben, nachdem sie mehr als $(h-1)$ Lebensjahre hinter sich, das

h^{te} dagegen noch nicht ganz vollendet haben. Nehmen wir an, dafs diese insgesamt ganz gegen Ende ihres h^{ten} Jahres sterben, so haben sie gemeinschaftlich $h\tau_{h-1}$ Jahre gelebt. Im gleichen Sinne haben die τ_0 im ersten Lebensjahre Sterbenden gemeinschaftlich $1 \cdot \tau_0$ Jahre, die τ_n im höchsten Alter Sterbenden gemeinschaftlich $(n+1)\tau_n$ Jahre gelebt, und die Summe $1 \cdot \tau_0 + 2 \cdot \tau_1 + \cdots + (n+1)\tau_n$ ist die Gesamtsumme der Jahre, welche die Γ in einem Jahre Geborenen, ein jeder bis zu seinem Tode, durchlebt haben. Das Durchschnittsalter eines jeden ist also

$$\frac{\Lambda}{\Gamma}.$$

Richtiger ist es allerdings, nicht sämtliche τ_{h-1} am Ende ihres h^{ten} Lebensjahres, sondern in dessen Mitte sterben zu lassen, was bei den über das ganze Jahr verteilten Todesfällen der Wahrheit ziemlich entsprechen wird. Dann ist die von allen Γ Geborenen durchlebte Zeit

$$\frac{1}{2}\tau_0 + \frac{3}{2}\tau_1 + \cdots + \frac{2h-1}{2}\tau_{h-1} + \cdots + \frac{2n+1}{2}\tau_n$$

und das Durchschnittsalter

$$\frac{\frac{1}{2}\tau_0 + \frac{3}{2}\tau_1 + \cdots + \frac{2n+1}{2}\tau_n}{\Gamma},$$

wofür man leicht eine andere Ausdrucksform gewinnt. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2}\tau_0 + \frac{3}{2}\tau_1 + \cdots + \frac{2n+1}{2}\tau_n = \left(1\tau_0 + 2\tau_1 + \cdots + (n+1)\,\tau_n\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\tau_0 + \tau_1 + \cdots \tau_n\right) = \Lambda - \frac{1}{2}\mathrm{T} = \Lambda - \frac{1}{2}\Gamma$$

und

$$\frac{\Lambda - \frac{1}{2}\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Lambda}{\Gamma} - \frac{1}{2}.$$

Die mittlere Lebensdauer eines Neugeborenen wird also gefunden, indem man die Bevölkerungszahl durch die Zahl der Geburten eines Jahres dividiert und den Quotienten um $\frac{1}{2}$ verkleinert.

Der Begriff der mittleren Lebensdauer ist 1742 von Wilhelm Kerseboom eingeführt worden.

Da auch unter der Annahme der stationären Bevölkerung die Zahlen Γ und T, wie es in Breslau der Fall war (Nr. 85), kleine Abweichungen von einander aufweisen, so kann man $\frac{\Lambda}{\Gamma}$ durch das arithmetische Mittel von $\frac{\Lambda}{\Gamma}$ und $\frac{\Lambda}{T}$ ersetzen und erhält alsdann für die mittlere Lebensdauer eines Neugeborenen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda}{\Gamma}+\frac{\Lambda}{T}-1\right).$$

88] Halley hat den Begriff der wahrscheinlichen Lebensdauer in die Wissenschaft eingeführt. Ist $\lambda_h = 2\lambda_k$, oder sind von λ_h Personen, welche h Jahre alt sind, nach $k-h$ Jahren nur noch λ_k, oder halb so viele als mit h Jahren, am Leben, so ist es für jede der h-jährigen Personen gleich wahrscheinlich, nach $k-h$ Jahren zu der gestorbenen als zu der am Leben gebliebenen Hälfte zu gehören, und $k-h$ Jahre ist ihre wahrscheinliche Lebensdauer. Wenn nach der von Halley benutzten Sterblichkeitsliste 1238 Neugeborene und 616 im Alter von 17 Jahren vorhanden sind, so nennt er 17 Jahre die wahrscheinliche Lebensdauer des Neugeborenen. Bei ihm ist ferner $\lambda_{30} = 531$, $\lambda_{57} = 272$, $\lambda_{58} = 262$. Die Hälfte von 531 oder $265\frac{1}{2}$ liegt zwischen λ_{57} und λ_{58}, die wahrscheinliche Lebensdauer eines 30jährigen ist also zwischen 27 und 28 Jahren. Niclaus Bernoulli hat 1709 einen Gedanken ausgesprochen, welcher auf ähnliche Grundlage sich stützte. Wenn der Richter, sagt er, einen Abwesenden ausschliefslich nach Mafsgabe der verflossenen Zeit für tot erklären darf, so halte ich seinen Tod für hinreichend wahrscheinlich, wenn sein Totsein doppelt so wahrscheinlich ist als sein Leben, denn alsdann überschreitet die Wahrscheinlichkeit die Hälfte der Gewifsheit um ein Beachtenswertes, nämlich um den sechsten Teil der Gewifsheit. Jenes ist aber doppelt so wahrscheinlich, wenn so viele Jahre verflossen sind, dafs von einer Anzahl mit dem Abwesenden gleichaltrigen Menschen die Zahl der innerhalb jener Jahre Verstorbenen das Doppelte der Zahl der Überlebenden ausmacht.

89] Die Annahme der stationären Bevölkerung hat sich nirgend bewahrheitet. Seit man in regelmäfsigen Zwischenräumen Volkszählungen zu veranstalten pflegt, ist nahezu überall eine Veränderung der Bevölkerungszahlen hervorgetreten, und zwar in den meisten Ländern ein merkliches Anwachsen derselben. Nur in Ausnahmefällen tritt eine Verminderung der Bevölkerung ein, welche alsdann immer als auffallende Erscheinung gilt, deren Gründen nachzuforschen eine bald leichte bald schwierigere Aufgabe bietet. Man weifs z. B., dafs die Rothäute in Nordamerika jährlich abnehmen; das Gleiche wird von der eigentlich türkischen Bevölkerung in Kleinasien behauptet, das Gleiche von den echten Magyaren in Ungarn. Die Bevölkerungszahl Irlands war 1841 noch 8196527 und 1891 nur 4706162, hat also innerhalb 50 Jahren im Verhältnisse von 7 zu 4 abgenommen u. s. w. In Deutschland beträgt zur Zeit der die Bevölkerungsvermehrung hervorbringende Überschufs der Geburten über die Todesfälle jährlich gut 1 % der jedesmaligen Bevölkerung, in Frankreich ist nur ein sehr geringer Überschufs vorhanden.

De Moivre und nach ihm Euler kannten die Thatsache der im allgemeinen zunehmenden Bevölkerungen hinlänglich, um zu versuchen, ihnen ein Zahlengesetz vorzuschreiben, welches ersterer 1724, letzterer 1748 und namentlich 1760 als das der geometrischen Progression aussprach. Waldaufgaben (Nr. 49) und Bevölkerungsfragen erscheinen dadurch nahe verwandt. Ist nun in aufeinander folgenden Jahren Λ, Λ', Λ'' die Bevölkerungszahl, Γ, Γ', Γ'' die Zahl der Geburten, T, T', T'' die Zahl der Todesfälle, und ist zugleich

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,\ \Lambda' = \lambda_0' + \lambda_1' + \cdots + \lambda_n',$$
$$\Lambda'' = \lambda_0'' + \lambda_1'' + \cdots + \lambda_n'';$$

weifs man ferner, dafs $\Lambda' = q\Lambda$, $\Lambda'' = q\Lambda' = q^2\Lambda$, wo q der Regel nach ein unechter Bruch und nur in dem Ausnahmefall der abnehmenden Bevölkerung ein echter Bruch ist; nimmt man endlich an, was in der Natur der Sache liegt, dafs die Zahl der Todesfälle der Bevölkerung proportional sei, also

$$T : T' : T'' = \Lambda : \Lambda' : \Lambda'' = 1 : q : q^2,$$

d. h. dafs auch

$$T' = qT,\ T'' = qT' = q^2 T,$$

so kann man folgenden Schlufs ziehen: Λ' entsteht aus Λ durch Γ Geburten und T Todesfällen oder $\Lambda' = \Lambda + \Gamma - T$, beziehungsweise

$$\Gamma = \Lambda' - \Lambda + T = (q-1)\Lambda + T.$$

Ganz entsprechend mufs

$$\Lambda'' = \Lambda' + \Gamma' - T'$$

sein oder

$$\Gamma' = \Lambda'' - \Lambda' + T' = (q^2 - q)\Lambda + qT.$$

Division der beiden Gleichungen liefert $\Gamma' = q\Gamma$, und ebenso mufs auch $\Gamma'' = q\Gamma' = q^2\Gamma$ sein, oder die Proportionalität der Bevölkerungszahlen führt die gleiche Proportionalität der Zahl der Todesfälle, wie die der Zahl der Geburten mit sich. Freilich läfst die Gleichung $\Lambda' = \Lambda + \Gamma - T$ die Einwanderungen und Auswanderungen aufser Betracht, welche indessen den Geburten und Todesfällen gegenüber, wo es sich um ein grofses Land und nicht etwa um eine einzelne Fabrikstadt oder ein einzelnes Dorf handelt, vernachlässigt werden dürfen. Die Folge unseres Schlusses ist die, dafs notwendigerweise gleichzeitig

$$\Lambda : \Lambda' = \Lambda' : \Lambda'' = 1 : q$$
$$T : T' = T' : T'' = 1 : q$$
$$\Gamma : \Gamma' = \Gamma' : \Gamma'' = 1 : q$$

sein muls. Volkszählungen finden nun freilich in umfassender Weise nicht in jedem Jahre statt, wohl aber stehen in wohlgeordneten

Staatswesen alljährlich genaue Geburts- und Todeslisten zur Verfügung. Man wird also die Annahme der in geometrischer Progression sich verändernden Bevölkerung leicht zu prüfen imstande sein, wenn man nur die Zahlen der Todesfälle (oder der Geburten) in zwei auf einander folgenden Jahren durch einander dividiert und die gleiche Arbeit für zwei andere, etwa ein Jahrzehnt später, auf einander folgende Jahre vornimmt. Erscheint alsdann nicht genau derselbe Wert von q, so ist jene grundlegende Annahme falsch, und dieses Ergebnis hatten allerdings die angestellten Versuchsrechnungen.

90] Nachträglich erkannte man auch, dafs die Annahme der Bevölkerungsvermehrung in geometrischer Progression nicht blofs nicht richtig war, dafs sich auch für sie gar keine Vermutungsgründe angeben lassen, so wenig wie für die Vermehrung der Nahrungsmittel in arithmetischer Progression, welche Malthus 1817 neben jener lehrte und damit den Hungertod als unausbleibliches Ende der Menschheit verkündete. Die Bevölkerungsvermehrung kann, so entgegnete man, nur durch drei Umstände hervorgebracht werden, durch geringer werdende Sterblichkeit, durch gröfsere Fruchtbarkeit der Ehen, durch Vermehrung der Ehen. Keines der drei ist aber von der Art, dafs es, insbesondere im Zusammenwirken mit den beiden anderen, einem so einfachen Gesetze wie dem der geometrischen Progression gehorchen könne. Die Thatsache der Bevölkerungsvermehrung, wenn alle Menschen berücksichtigt werden, steht zahlenmäfsig fest, das Vermehrungsgesetz ist trotz wiederholter Anläufe noch nicht erkannt, und es handelt sich nur darum, eine den Zahlenangaben der Jetztzeit entsprechende, voraussichtlich mit der Zeit der Veränderung unterworfene, aber bis zu jener Veränderung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung brauchbare Sterblichkeitstafel zu entwerfen. Eine Volkszählung und die Todenliste des auf sie folgenden Jahres geben das Gewünschte. Ist nämlich

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

$$\mathrm{T} = \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_n$$

gegeben, so sieht man sofort, dafs von den λ_0 die τ_0, von den λ_1 die τ_1, von den λ_n die τ_n herstammen, und dafs man durch einfache Dreisatzrechnungen die Ergebnisse in Anschlufs an einander zu bringen vermag. Weifs man, dafs von λ_0 Neugeborenen τ_0 im ersten Jahre sterben und $\lambda_0 - \tau_0$ ein Jahr alt werden, so kann man auch sagen: von 10000 Neugeborenen sterben $\frac{10\,000\,\tau_0}{\lambda_0}$ im ersten Jahre und $10\,000 - \frac{10\,000\,\tau_0}{\lambda_0} = 10\,000\,\frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0}$ werden ein Jahr alt. Im zweiten Lebensjahre sterben τ_1 unter λ_1, welche in dieses zweite Lebensjahr eintreten, und $\lambda_1 - \tau_1$ erreichen das folgende Jahr, werden also 2 Jahre alt. Von $10000 \frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0}$ sterben mithin im zweiten Lebensjahre

$$10000 \frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\tau_1}{\lambda_1}$$

und

$$10000 \frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0} - 10000 \cdot \frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\tau_1}{\lambda_1} = 10000 \frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_1 - \tau_1}{\lambda_1}$$

werden 2 Jahre alt. Von den 10000 Neugeborenen erreichen folglich das Alter von h Jahren

$$10000 \frac{\lambda_0 - \tau_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_1 - \tau_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2 - \tau_2}{\lambda_2} \cdots \frac{\lambda_h - \tau_h}{\lambda_h}.$$

So kann man eine Sterblichkeitstafel von augenblicklicher Brauchbarkeit herstellen, gegen welche allenfalls der Vorwurf allzugroſser Allgemeinheit für die Zwecke der Versicherungsgesellschaften, die wir im Auge haben, erhoben werden kann. Die Volkszählung und die Todesliste unterscheiden zwar das Geschlecht der Lebenden sowie der Verstorbenen, man kann daher neben der einen Sterblichkeitstafel, von welcher soeben die Rede war, noch zwei andere berechnen, deren eine sich auf das männliche, die andere auf das weibliche Geschlecht beschränkt, aber die Gesundheitsverhältnisse der einzelnen Lebenden und der Verstorbenen bis zu ihrem Tode sind ebenso wenig aus jenen Listen zu entnehmen wie ihre Vermögensverhältnisse, und doch spielen beide bei Versicherungen eine wichtige Rolle. Es giebt eine Versicherungsart — die Versicherung auf den Todesfall — welche ausschlieſslich solchen Personen gestattet ist, welche bei ärztlicher Untersuchung sich als mit keiner Krankheit behaftet erwiesen haben, und die Vermögensverhältnisse kommen dadurch in Betracht, daſs kaum jemals von ganz Vermögenslosen eine Versicherung eingegangen wird, während andererseits ein Zusammenhang zwischen Vermögen, Lebenshaltung und Sterblichkeit stattfinden kann, wenn wir ihn auch nicht ausdrücklich behaupten wollen. Für Versicherungszwecke ist deshalb eine eigene Sterblichkeitstafel aus den Erfahrungen von Versicherungsgesellschaften selbst hergestellt werden. In ihr bedeuten λ_h und τ_h nicht alle Lebende, alle Verstorbene, sondern nur versichert Lebende, versichert Verstorbene des betreffenden Alters, sodaſs das Zahlenmaterial zufälligen Vereinigungen von Personen (Nr. 86) entnommen ist, aber das unterstützt dessen Brauchbarkeit, anstatt ihr im Wege zu stehen, und bei dem durch Rechnung hergestellten Anschluſs der Zahlen an einander stellt sich die Verminderung der Zahl der Lebenden von Jahr zu Jahr ein, selbst wenn sie in dem rohen Zahlenmaterial nicht vorhanden gewesen sein sollte.

91] Bald auf die eine, bald auf die andere Weise, in älteren Zeiten auch wohl nach Annahmen, die gar keine erfahrungsmäſsige Grundlage hatten, sind Sterblichkeitstafeln hergestellt worden. Jan de Witts Tafel von 1671 ist eine frei erfundene gewesen. Er nahm 212 Dreijährige an, von welchen 50 Jahre lang jährlich 2 starben, dann 10 Jahre lang jährlich 3, 10 Jahre lang jährlich 4, 7 Jahre lang jährlich 6, 80 Jahre gelten als höchstes nicht überschreitbares Alter. Edmund Halleys Tafel von 1693 war (Nr. 85) auf die Annahme der stationären Bevölkerung gegründet. Johann Peter Süſsmilch veröffentlichte 1741 eine Sterblichkeitstafel in seinem Werke *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen,* welches 1775 nach Süſsmilchs Tode von dessen Schwiegersohn Baumann zum 4. Male aufgelegt wurde. Baumann nahm einige Verbesserungen an der Süſsmilchschen Tafel vor, welche von da an als Süſsmilch-Baumannsche Sterblichkeitstafel lange Zeit hindurch sehr beliebt war, teilweise noch heute beliebt ist, wenn es sich lediglich um Ausrechnung von Übungsbeispielen handelt, während das praktische Versicherungswesen keinen Gebrauch mehr von ihr machen kann.

92] Die Süſsmilch-Baumannsche Sterblichkeitstafel ist folgende:

Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)
0	1000	250	24	471	5	48	316	8	72	94	9
1	750	89	25	466	5	49	308	8	73	85	8
2	661	43	26	461	5	50	300	9	74	77	8
3	618	25	27	456	5	51	291	9	75	69	7
4	593	14	28	451	6	52	282	9	76	62	7
5	579	12	29	445	6	53	273	9	77	55	6
6	567	11	30	439	6	54	264	9	78	49	6
7	556	9	31	433	6	55	255	9	79	43	6
8	547	8	32	427	6	56	246	9	80	37	5
9	539	7	33	421	6	57	237	9	81	32	4
10	532	5	34	415	6	58	228	9	82	28	4
11	527	4	35	409	7	59	219	9	83	24	4
12	523	4	36	402	7	60	210	9	84	20	3
13	519	4	37	395	7	61	201	9	85	17	3
14	515	4	38	388	7	62	192	10	86	14	2
15	511	4	39	381	7	63	182	10	87	12	2
16	507	4	40	374	7	64	172	10	88	10	2
17	503	4	41	367	7	65	162	10	89	8	2
18	499	4	42	360	7	66	152	10	90	6	1
19	495	4	43	353	7	67	142	10	91	5	1
20	491	5	44	346	7	68	132	10	92	4	1
21	486	5	45	339	7	69	122	10	93	3	1
22	481	5	46	332	8	70	112	9	94	2	1
23	476	5	47	324	8	71	103	9	95	1	1

93] Während in den ersten Zeiten der mit Rücksicht auf das menschliche Leben abgeschlossenen Versicherungen man sich an einer einzigen Sterblichkeitstafel genügen liefs, brach mit der Entwickelung dieses Versicherungszweiges das Bewufstsein durch, dafs es zweckmäfsiger sei, sich zweier wesentlich verschiedener Tafeln zu bedienen. Die eine Tafel ist die sogenannte Deutsche Sterblichkeitstafel aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften für normale Leben mit vollständiger ärztlicher Untersuchung. Sie wird zur Zeit, wie von den meisten oder allen deutschen Versicherungsgesellschaften, so auch von der 1835 gegründeten, 1864 erweiterten Allgemeinen Versicherungs-Anstalt im Grofsherzogtum Baden in Karlsruhe benutzt und lautet ohne Trennung der Geschlechter und mit dem 18. Jahre beginnend wie folgt:

Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)
18	101 878	936	46	76 590	1 140	74	23 952	2 360
19	100 942	942	47	75 450	1 169	75	21 592	2 299
20	100 000	919	48	74 281	1 204	76	19 293	2 210
21	99 081	908	49	73 077	1 246	77	17 083	2 103
22	98 173	887	50	71 831	1 303	78	14 980	1 982
23	97 286	861	51	70 528	1 362	79	12 998	1 848
24	96 425	835	52	69 166	1 425	80	11 150	1 730
25	95 590	816	53	67 741	1 490	81	9 420	1 599
26	94 774	804	54	66 251	1 556	82	7 821	1 443
27	93 970	797	55	64 695	1 621	83	6 378	1 264
28	93 173	795	56	63 074	1 691	84	5 114	1 080
29	92 378	800	57	61 383	1 759	85	4 034	896
30	91 578	808	58	59 624	1 832	86	3 138	715
31	90 770	818	59	57 792	1 900	87	2 423	587
32	89 952	831	60	55 892	1 976	88	1 836	487
33	89 121	841	61	53 916	2 038	89	1 349	394
34	88 280	856	62	51 878	2 097	90	955	309
35	87 424	873	63	49 781	2 149	91	646	233
36	86 551	889	64	47 632	2 197	92	413	167
37	85 662	906	65	45 435	2 246	93	246	113
38	84 756	928	66	43 189	2 302	94	133	69
39	83 828	950	67	40 887	2 355	95	64	37
40	82 878	975	68	38 532	2 399	96	27	18
41	81 903	1 006	69	36 133	2 432	97	9	6
42	80 897	1 035	70	33 701	2 452	98	3	2
43	79 862	1 063	71	31 249	2 455	99	1	1
44	78 799	1 092	72	28 794	2 436			
45	77 707	1 117	73	26 358	2 406			

Bei Trennung der Geschlechter ist die Zahl λ_h in der Tafel für Männer anfangs etwas über, später etwas unter der in der Tafe für Frauen. Während bei 20 Jahren sowohl 100000 Männer als 100000 Frauen angegeben sind, findet man bei 45 Jahren 79976 Männer, 74128 Frauen, bei 59 Jahren 58711 Männer, 57947 Frauen, bei 61 Jahren 54601 Männer, 54640 Frauen, bei 80 Jahren 11167 Männer, 11800 Frauen, bei 88 Jahren 1829 Männer, 2023 Frauen.

94] Die andere Tafel mag als Sterblichkeitstafel für Rentenbezieher benannt werden. Sie beruht wesentlich auf den Erfahrungen der 1838 gegründeten Preuſsischen Renten-Versicherungs-Anstalt in Berlin und wurde von Dr. Semmler berechnet.

Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)	Alter	λ_h (Lebende)	τ_h (Todesfälle)
0	100000	6504	34	73516	667	68	40656	1929
1	93496	1714	35	72849	677	69	38727	1993
2	91782	1422	36	72172	684	70	36734	2050
3	90360	1203	37	71488	688	71	34684	2089
4	89157	1010	38	70800	691	72	32595	2118
5	88147	845	39	70109	693	73	30477	2143
6	87302	696	40	69416	695	74	28334	2165
7	86606	557	41	68721	696	75	26169	2169
8	86049	429	42	68025	695	76	24000	2166
9	85620	318	43	67330	692	77	21834	2159
10	85302	209	44	66638	693	78	19675	2139
11	85093	167	45	65945	696	79	17536	2094
12	84926	187	46	65249	703	80	15442	2030
13	84739	215	47	64546	719	81	13412	1937
14	84524	258	48	63827	741	82	11475	1820
15	84266	323	49	63086	769	83	9655	1691
16	83943	382	50	62317	804	84	7964	1542
17	83561	433	51	61513	834	85	6422	1373
18	83128	476	52	60679	854	86	5049	1169
19	82652	512	53	59825	869	87	3880	954
20	82140	543	54	58956	886	88	2926	758
21	81597	570	55	58070	917	89	2168	585
22	81027	592	56	57153	934	90	1583	446
23	80435	611	57	56219	981	91	1137	336
24	79824	628	58	55238	1064	92	801	248
25	79196	635	59	54174	1164	93	553	181
26	78561	636	60	53010	1256	94	372	128
27	77925	628	61	51754	1341	95	244	89
28	77297	622	62	50413	1417	96	155	60
29	76675	617	63	48996	1494	97	95	42
30	76058	618	64	47502	1573	98	53	27
31	75440	628	65	45929	1664	99	26	15
32	74812	641	66	44265	1759	100	11	
33	74171	655	67	42506	1850			

95] Die Verschiedenheit der beiden in Nr. 93 und 94 zum Abdruck gebrachten Tafeln tritt schon beim ersten Anblick hervor, wird aber noch viel beträchtlicher, wenn man eine kleine Rechnung anstellt. Unmittelbar vergleichbar sind doch nur solche Sterblichkeits-Tafeln, welche bei irgend einem Lebensalter die gleiche Anzahl Lebender annehmen, und das thun unsere Tafeln nirgends. Während z. B. die erste Tafel $\lambda_{20} = 100\,000$ voraussetzt, ist in der zweiten Tafel $\lambda_{20} = 82\,140$ und $\frac{100\,000}{82\,140} = 1{,}217433\ldots$. Man mufs also alle Zahlen der zweiten Tafel mit etwas mehr als $\frac{6}{5}$ vervielfachen, um sie als gleiche Bruchteile der λ_{20} genannten Zahl wie die Zahlen der ersten Tafel betrachten zu können. Unter Anbringung dieser Korrektur zeigt

die erste Tafel	die zweite Tafel
$\lambda_{20} = 100\,000$	$\lambda_{20} = 100\,000$
$\lambda_{50} = 71\,831$	$\lambda_{50} = 75\,867$
$\lambda_{71} = 31\,249$	$\lambda_{71} = 42\,225$
$\lambda_{75} = 21\,592$	$\lambda_{75} = 31\,859$
$\lambda_{99} = 1$	$\lambda_{99} = 31$.

Die zweite Sterblichkeitstafel läfst also das allmähliche Absterben der Menschen erheblich langsamer erfolgen als die erste, und das ist kein Zufall, sondern bewufste und durch den Zweck, dem die beiden Tafeln dienen sollen, durchaus gerechtfertigte Absicht.

96] Wir nannten (Nr. 83) Rentenversicherung und Lebensversicherung im engeren Sinne des Wortes als diejenigen Versicherungszweige, deren rechnerische Aufgabe nicht ohne Sterblichkeitstafeln gelöst werden kann. Wir müssen den allgemeinen Sinn jeder der beiden Versicherungen kurz kennzeichnen. Bei der Rentenversicherung wünscht der Versicherte von einem bestimmten Zeitpunkte an, falls er denselben erlebt, entweder eine bestimmte Anzahl von Jahren hindurch oder bis zu seinem Lebensende jährlich eine als Rente bezeichnete Summe zu erhalten. Bei der Lebensversicherung wünscht der Versicherte, dafs bei seinem Tode, wann immer er eintritt, derjenigen Persönlichkeit, zu deren Gunsten die Versicherung eingegangen wurde, ein gewisses Kapital ausgezahlt werde.

Beide Versicherungen unterscheiden sich nach drei Richtungen von einander. Erstlich sieht man sofort, worauf wir (Nr. 83) schon hingewiesen haben, dafs die Rentenversicherung zu der gleichen Gruppe von Versicherungen gehört wie Feuerversicherung, Krankenversicherung u. dergl. Die Versicherungsgesellschaft kann in die Lage kommen, Zahlungen leisten zu müssen oder auch nicht, da ja der Versicherte vor Eintritt des Zeitpunktes des Rentenbezuges sterben kann. Bei der Lebensversicherung ist die Leistung der Versicherungsgesellschaft unausbleiblich. Irgend einmal mufs der Versicherte sterben, und alsdann tritt die Leistungspflicht der Versicherungsgesellschaft in Kraft.

Ein zweiter Unterschied bezieht sich auf die Persönlichkeit des Versicherten. Die Versicherungsgesellschaft mufs wünschen, dafs der Rentenversicherte so früh als möglich sterbe, damit die Rente, wenn überhaupt, nur thunlichst selten zur Auszahlung gelange. Je schlechter es mit den Gesundheitsverhältnissen des Versicherten bestellt ist, um so angenehmer wird es der Versicherungsgesellschaft sein, und sie hat nicht die geringste Veranlassung, den körperlichen Zustand des Versicherten untersuchen zu lassen, bevor sie den Versicherungsvertrag mit ihm abschliefst. Umgekehrt verhält es sich bei der Lebensversicherung. Hier mufs die Versicherungsgesellschaft das thunlichst späte Eintreten des Todes des Versicherten wünschen, und dieser Wunsch tritt so mächtig in den Vordergrund, dafs von dessen voraussichtlicher Erfüllung das Eingehen eines Versicherungsvertrages abhängig gemacht wird: Wer den Antrag auf eine Lebensversicherung einreicht, mufs sich einer genauen ärztlichen Untersuchung unterwerfen und die wahrheitsgetreue Beantwortung einer ganzen Anzahl von auf sein Vorleben und seine Voreltern bezüglichen Fragen übernehmen. Zeigt jene Untersuchung eine keimende oder gar in gröfserer Entwickelung vorhandene Krankheit, so wird der Versicherungsantrag von der Versicherungsgesellschaft abgelehnt. Ergiebt sich beim Tode des Versicherten, dafs er bei Beantwortung der ihm gestellten Fragen in einer Weise, welche den Abschlufs des Vertrages beeinflufste, von der Wahrheit abwich, so vernichtet dieses die Ansprüche dessen, zu dessen Gunsten die Versicherung abgeschlossen worden war.

Der dritte Unterschied bezieht sich auf die zur Anwendung gelangende Sterblichkeitstafel. Die Leistung der Versicherungsgesellschaft ist um so gröfser, je später bei Rentenversicherungen, je früher bei Lebensversicherungen der Versicherte stirbt. Gegenleistung des Versicherten und Leistung der Versicherungsgesellschaft müssen sich das Gleichgewicht halten, die zu zahlende Prämie ist folglich so hoch als möglich, wenn bei Rentenversicherungen ein spätes, bei Lebensversicherungen ein frühes Ableben des Versicherten der Berechnung der Prämie zu Grund gelegt wird. Diesem Erfordernisse genügen aber die in Nr. 94 und in Nr. 93 abgedruckten Sterblichkeitstafeln, und deshalb werden sie bei den Prämienberechnungen benutzt, unsere von uns zweite Tafel genannte Zahlen bei Rentenversicherungen, die der ersten Tafel bei Lebensversicherungen.

Siebentes Kapitel.

Einfache Lebensversicherung und sofort beginnende vorschüssige Rentenversicherung.

97] Wiewohl die bis hierher eingehaltene Anordnung dazu auffordern müfste, die Prämienberechnung der Rentenversicherung vorauszuschicken und die der Lebensversicherung in zweiter Linie zu behandeln, kehren wir die Reihenfolge lieber um, weil wir dadurch leichter verständlich zu werden hoffen.

Die erste Lebensversicherung, von welcher man aktenmäfsige Kenntnis hat, wurde am 18. Juni 1583 auf das Leben von William Gibbons abgeschlossen und zwar für die folgenden 12 Monate. Als Gibbons am 29. Mai 1584 starb, erhob sich über die Meinung des Versicherungsvertrages ein Rechtsstreit, dessen Akten sich in England erhalten haben. Der Versicherer behauptete, die Zeit von 12 Monaten bedeute 12mal 4 Wochen oder 336 Tage, und diese wären allerdings schon vor dem 29. Mai 1584 abgelaufen gewesen. Der, zu dessen Gunsten die Versicherung abgeschlossen war, behauptete, 12 Monate seien Kalendermonate, die Versicherungsfrist laufe mithin erst am 17. Juni 1584 ab. Der Prozefs dauerte bis 1587 und wurde gegen den Versicherer entschieden. Eine wissenschaftliche Grundlage kann diese, können andere damals vermutlich auch schon abgeschlossene Versicherungen nicht gehabt haben. Solches wurde erst möglich, als Jan de Witts Sterblichkeitstafel von 1671 (Nr. 91) und insbesondere Edmund Halleys Sterblichkeitstafel von 1693 (Nr. 85) durch den Druck bekannt gegeben wurden. Zwar kann eine 1699 in England unter dem Namen der Society of Assurance for Widows and Orphans von Stansfeld ins Leben gerufene Gesellschaft nicht als Lebensversicherungsanstalt im heutigen Sinne bezeichnet werden. Es sollten 2000 Mitglieder zusammentreten, und von jedem sollten an die Erben eines verstorbenen Mitgliedes 5 Schilling, also zusammen 500 Pfund Sterling, ausgezahlt werden, von welchen 3 % oder Lst. 15 für Verwaltungskosten zurückbehalten wurden. Aufserdem mufsten für den gleichen Zweck von jedem neu aufgenommenen Mitgliede sh. 5 als Eintrittsgeld erlegt werden. Um die Auszahlungen nicht verzögern zu müssen, wurden auch von jedem Mitgliede beim Eintritt sh. 5 für den nächsten Sterbefall vorausverlangt, und nach dessen Stattfinden waren abermals sh. 5 wieder für den nächsten Sterbefall zu entrichten und so fort. Wer mit seinen Zahlungen länger als eine Woche im Rückstand blieb, galt als aus der Gesellschaft ausgetreten. War die Zahl der Mitglieder nicht voll, d. h. geringer als 2000, so wurde das Sterbegeld von Lst. 500 der Mitgliederzahl proportional gekürzt, immer wieder unter Abzug von 3 %. Ein wesentliches Merkmal bestand also darin, dafs jedem Mitgliede die gleiche Zahlungspflicht bei jedem Todesfalle auferlegt war und dafs das Sterbegeld mit der Anzahl der Mitglieder wechselte, während auch die jährliche Beitragspflicht der Mitglieder mit der Anzahl der vorkommenden Todesfälle dem Wechsel unterworfen war. Dafs in den Satzungen der Gesellschaft angenommen war, die Sterblichkeit werde etwa 2 % im Jahre betragen, war ohne irgend verbindliche Kraft für etwaige Zahlungspflicht der Mitglieder. Erleichternd für dieselbe wirkten folgende Satzungsbestimmungen, von welchen manche sich sehr lange Zeit erhalten haben: beim Eintritt durfte man mit keiner bekannten Krankheit behaftet sein; Anspruch auf Sterbegeld trat erst 6 Monate nach erworbener Mitgliedschaft ein, wer innerhalb dieser Karenzzeit starb, gab seinen Erben kein Anrecht auf Sterbegeld; Kriegsdienst, Seefahrt, Reise in fremde Länder, Hinrichtung eines Mitgliedes vernichteten jeden Anspruch der Erben. Das Alter der Mitglieder fand nur dadurch Berücksichtigung, dafs man bei Erwerbung der Mitgliedschaft nicht älter als 50 Jahre sein durfte, und dafs man dieses Beitrittsalter bald auf höchstens 45 Jahre herabsetzte, auch zugleich bestimmte, bei wachsender Mitgliederzahl solle die Beitrittsgrenze erniedrigt werden, bei 1200 Mitgliedern auf 40, bei 1600 auf 35, bei vollen 2000 auf 30 Jahre. Wir bemerken beiläufig, dafs nach der Sterblichkeitstafel von Nr. 93 man

$$\frac{\tau_{50}}{\lambda_{50}} = \frac{1\,303}{71\,831} = 0{,}01814$$

findet; die Annahme einer 2 %igen Sterblichkeit war also gar keine üble.

98] Ganz allmählich entwickelten sich aus diesen Anfängen die heutigen Versicherungsanstalten für Lebensversicherung, deren Prämienberechnung wir anzugeben haben. Sei Jemand im Alter von h Jahren gewillt, einem Erben die Summe 1 zu sichern, falls er im bevorstehenden Jahre sterben sollte. Den λ_h Lebenden stehen τ_h Todesfälle zur Seite; die Wahrscheinlichkeit, die Summe 1 am Jahresende zahlen zu müssen ist für die Versicherungsanstalt $\frac{\tau_h}{\lambda_h}$; der Wert dieser Zahlung am Jahresanfang ist bei $3\frac{1}{2}$ % Verzinsung $\frac{1}{1{,}035}\frac{\tau_h}{\lambda_h}$, und so viel wird also die Versicherungssumme betragen, welche bei h Jahren bar zu zahlen ist. Will am Ende des Jahres der noch Lebende sein Leben abermals auf 1 Jahr mit der Summe 1 versichern, so ist nach den gleichen Grundsätzen berechnet $\frac{1}{1{,}035}\frac{\tau_{h+1}}{\lambda_{h+1}}$ für die Versicherung zu entrichten, im folgenden Jahre $\frac{1}{1{,}035}\frac{\tau_{h+2}}{\lambda_{h+2}}$ u. s. w. Nun nehmen die λ naturgemäfs von

Jahr zu Jahr ab, die τ nehmen, wie ein Blick auf die Sterblichkeitstafel (Nr. 93) erkennen läfst, von τ_{28} an bis zu τ_{71} jährlich zu, der Bruch $\frac{1}{1{,}035}\,\frac{\tau}{\lambda}$ wird also vom Alter von 28 Jahren an bis zum Alter von 71 Jahren jährlich gröfser, und rechnet man die Brüche, in welchen sowohl λ als auch τ kleiner als im vorhergehenden Jahre sind, genauer nach, so findet man $\frac{1}{1{,}035}\,\frac{\tau_h}{\lambda_h}$ mit folgenden Werten:

0,008877	bei	18	Jahren,
0,009017	„	19	„
0,008879	„	20	„
0,008854	„	21	„
0,008730	„	22	„
0,008551	„	23	„
0,008367	„	24	„
0,008248	„	25	„
0,008178	„	26	„
0,008195	„	27	„
0,008244	„	28	„ ,

sodafs die Zunahme jener Brüche schon bei 26 Jahren thatsächlich beginnt, bei derjenigen Altersgrenze, an welcher nach den Erfahrungen der Versicherungsanstalten die zahlreichsten Anträge auf Lebensversicherung gestellt zu werden pflegen. Wer mit 26 Jahren daran denkt, sein Leben zu versichern, könnte demnach nicht verkehrter handeln, als von Jahr zu Jahr eine neue Versicherung einzugehen. Er würde erstens von Jahr zu Jahr mehr bezahlen müssen und nach dem 60. Jahre sich überhaupt nicht mehr versichern können, da nach den Satzungen der Lebensversicherungsgesellschaften zum Vertragsabschlufs über eine Lebensversicherung nur solche Personen zugelassen werden, welche das 18. Lebensjahr vollendet und das 60. noch nicht zurückgelegt haben. Wie erheblich die Kosten der jeweils auf 1 Jahr geschlossenen Versicherung ansteigen, zeigt der Vergleich von $\frac{1}{1{,}035}\cdot\frac{\tau_{26}}{\lambda_{26}} = 0{,}008178$ mit $\frac{1}{1{,}035}\,\frac{\tau_{59}}{\lambda_{59}} = 0{,}031768$. Der so sein Leben Versichernde würde zweitens von Jahr zu Jahr die Unkosten zu tragen haben, welche mit der Fertigstellung einer neuen Vertragsurkunde, der sogenannten Police, verbunden sind. Er würde drittens sich von Jahr zu Jahr einer neuen ärztlichen Untersuchung unterwerfen müssen und vermutlich mit seinem Antrage gerade dann zurückgewiesen werden, wenn die Versicherung ihm besonders wichtig erschiene, weil seine Gesundheit in bedenklicher Weise abnehme. Aus allen diesen Gründen findet eine Lebensversicherung von Jahr zu Jahr überhaupt nicht statt und ist in den Satzungen der Versicherungsanstalten nicht vorgesehen.

99] Die Versicherung mufs vielmehr ein für allemal abgeschlossen werden und bedingt alsdann in der Regel als einfache Lebensversicherung, dafs ein in das Belieben des Versicherten gestelltes Kapital bei dessen Tode oder, falls der Tod nicht früher eintritt, nach dessen zurückgelegtem 85. Lebensjahr, an den sogenannten Bezieher der Lebensversicherung ausgezahlt werde. Wenn wir die Höhe des Kapitals in das Belieben des Versicherten gestellt nannten, so sind immerhin gewisse Einschränkungen vorhanden. Das Kapital soll durch 100 teilbar sein, soll nicht unter *M.* 1000 betragen und andererseits einen Höchstbetrag von *M.* 100000 nicht übersteigen. Wir werden daher gut daran thun, die Versicherungsprämie nicht wie in der vorigen Nummer auf die Summe 1, sondern auf die Summe 1000 zu beziehen. Die Berechnung der mit h Jahren zu bezahlenden Prämie P_h findet alsdann folgendermafsen statt. Sie setzt sich, wenn auch eine Versicherung von Jahr zu Jahr nicht stattfindet, aus solchen gedachten Einzelversicherungen zusammen. Für das Jahr des Eintritts hat der $h$jährige $\frac{1000}{1{,}035}\frac{\tau_h}{\lambda_h}$ zu zahlen, wenn fortwährend der Zinsfufs von $3\frac{1}{2}\%$ angewandt wird, dessen die Versicherungsgesellschaften sich zur Zeit bedienen. Für das nächste Jahr hat der am Anfange desselben noch Lebende an jenem Zeitpunkt $\frac{1000}{1{,}035}\frac{\tau_{h+1}}{\lambda_{h+1}}$ zu zahlen. Um den Zahlungszeitpunkt ein Jahr zurückzuverlegen, genügt es aber nicht, wiederholt durch 1,035 zu dividieren, man mufs auch die Wahrscheinlichkeit berücksichtigen dafs der $h$jährige zum $(h+1)$jährigen werde, und diese ist $\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}$. Die sofort zu zahlende Versicherung für das zweite Jahr ist folglich

$$\frac{1}{1{,}035}\cdot\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}\cdot\frac{1000}{1{,}035}\cdot\frac{\tau_{h+1}}{\lambda_{h+1}}=\frac{1000}{1{,}035^2}\cdot\frac{\tau_{h+1}}{\lambda_h}.$$

Man sieht ohne Schwierigkeit den weiteren Fortgang. Für das dritte Jahr ist sofort zu bezahlen $\frac{1000}{1{,}035^3}\cdot\frac{\tau_{h+2}}{\lambda_h}$ u. s. w. Alle diese Teilzahlungen, deren letzte nach den Vertragsbedingungen $\frac{1000}{1{,}035^{86-h}}\cdot\frac{\tau_{85}}{\lambda_h}$ zum Barwerte hat, vereinigen sich und bilden als Summe:

$$P_h=\frac{1000}{1{,}035}\cdot\frac{\tau_h}{\lambda_h}+\frac{1000}{1{,}035^2}\cdot\frac{\tau_{h+1}}{\lambda_h}+\cdots+\frac{1000}{1{,}035^{86-h}}\cdot\frac{\tau_{85}}{\lambda_h}$$

oder auch

$$\frac{\lambda_h P_h}{1000} = \frac{\tau_h}{1{,}035} + \frac{\tau_{h+1}}{1{,}035^2} + \cdots + \frac{\tau_{85}}{1{,}035^{86-h}}.$$

Dabei ist Eines nicht aufser Augen zu lassen, dafs nach der Vertragsbedingung, welche wir wie alles, was auf eigentliche Lebensversicherung sich bezieht, den Satzungen der Karlsruher Allgemeinen Versorgungs-Anstalt im Grofsherzogtum Baden entnehmen, am Ende des 85. Lebensjahrs der Versicherten an alle Bezieher je *M.* 1000 auszuzahlen sind; dafs man also nicht der Sterblichkeitstafel (Nr. 93) entsprechend $\tau_{85} = 896$ setzen darf, sondern für die Zwecke der Rechnung $\tau_{85} = \lambda_{85} = 4034$ wählen mufs. Vervielfacht man die gewonnene Gleichung mit $\frac{1}{1{,}035^h}$, so nimmt sie die Gestalt an

$$\frac{\lambda_h}{1{,}035^h} \cdot \frac{P_h}{1000} = \frac{\tau_h}{1{,}035^{h+1}} + \frac{\tau_{h+1}}{1{,}035^{h+2}} + \cdots + \frac{\tau_{85}}{1{,}035^{86}}.$$

Man pflegt nun gewisse Abkürzungen vorzunehmen, mit welchen gewisse Benennungen in Verbindung stehen. Wie λ an Lebende, τ an Tode erinnert, so haftet m als Anfangsbuchstabe von *mortui*, v von *vivi* leicht im Gedächtnisse. Man schreibt nun

$$\frac{\tau_h}{1{,}035^{h+1}} = m_h\,, \quad \frac{\lambda_h}{1{,}035^h} = v_h$$

und nennt m_h die diskontierten Todesfälle, v_h die diskontierten Lebenden zu h Jahren. Die Summe

$$\frac{\tau_h}{1{,}035^{h+1}} + \frac{\tau_{h+1}}{1{,}035^{h+2}} + \cdots + \frac{\tau_{85}}{1{,}035^{86}}$$

nennt man Summe der diskontierten Todesfälle und schreibt dafür $\sum \frac{\tau_h}{1{,}035^{h+1}} = \Sigma m_h$. In ähnlicher Weise nennt man vorkommenden Falles

$$\frac{\lambda_h}{1{,}035^h} + \frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035^{h+1}} + \cdots + \frac{\lambda_{85}}{1{,}035^{85}} = \sum \frac{\lambda_h}{1{,}035^h} = \Sigma v_h$$

die Summe der diskontierten Lebenden. Wäre ein anderer Zinsfufs als $3\frac{1}{2}\,\%$, etwa $4\,\%$ oder $3\,\%$, den Berechnungen zu Grunde gelegt, so würde nur 1,035 durch 1,04 beziehungsweise durch 1,03 ersetzt werden müssen, während der Begriff der diskontierten Todesfälle und der diskontierten Lebenden an sich unverändert bliebe und mit ihm auch die Bezeichnung m_h und v_h beibehalten werden könnte. Zwischen den m und den v besteht überdies ein ziemlich einfacher Zusammenhang. Aus der Beziehung $\lambda_h - \lambda_{h+1} = \tau_h$ (Nr. 86) folgt, daſs auch

$$\frac{\lambda_h}{1{,}035^h} \cdot \frac{1}{1{,}035} - \frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035^{h+1}} = \frac{\tau_h}{1{,}035^{h+1}} \text{ oder } \frac{v_h}{1{,}035} - v_{h+1} = m_h$$

sein muſs. Dadurch erhält man als aufeinander folgende Gleichungen:

$$m_h = \frac{v_h}{1{,}035} - v_{h+1}$$

$$m_{h+1} = \frac{v_{h+1}}{1{,}035} - v_{h+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{85} = \frac{v_{85}}{1{,}035} - v_{86} = \frac{v_{85}}{1{,}035}\,.$$

Die letzte dieser Gleichungen rechtfertigt sich dadurch, daſs $v_{86} = \frac{\lambda_{86}}{1{,}035^{86}}$ und $\lambda_{86} = 0$ gilt. Addiert man alle Gleichungen, so entsteht

$$\Sigma m_h = \frac{1}{1{,}035} \Sigma v_h - \Sigma v_{h+1}\,.$$

Ferner ist leicht ersichtlich $\Sigma v_{h+1} = \Sigma v_h - v_h$, mithin

$$\Sigma m_h = \frac{1}{1{,}035} \Sigma v_h - \Sigma v_h + v_h$$

oder

$$\Sigma m_h = v_h - \frac{0{,}035}{1{,}035} \Sigma v_h\,.$$

Bei 4 %, 3 % u. s. w. wäre der Bruch $\frac{0{,}035}{1{,}035}$ durch $\frac{0{,}04}{1{,}04}$, durch $\frac{0{,}03}{1{,}03}$ u. s. w. zu ersetzen. So lange $3\frac{1}{2}$ % als Zinsfuſs der Versicherungsgesellschaften benutzt wird, kann man auch $\frac{0{,}035}{1{,}035} = \frac{7}{207}$ schreiben. Eine andere bei der Berechnung von P_h vorkommende, der Veränderung unterworfene Zahl ist 1000. Wäre der Lebensversicherungsvertrag auf die Summe K abgeschlossen worden, so müſste man 1000 durch K ersetzen, und die einmalige Einzahlung mittels deren ein $h$jähriger sein Leben auf die bei seinem Tode oder, wenn er nicht früher gestorben sein sollte, bei Ablauf seines 85. Jahres zu erhebende Summe K versichert, ist

$$P_h = \frac{K}{v_h} \Sigma m_h = K - \frac{7K}{207} \cdot \frac{\Sigma v_h}{v_h}\,.$$

Es ist sehr zweckmäfsig die v_h und mittels ihrer die Σv_h, m_h, Σm_h zum voraus zu berechnen, um davon je nach Bedürfnis Gebrauch machen zu können.

100] Der nach der letzten Formel sich ergebende Wert von P_h ist nicht unbeträchtlich. Bei $K = 1000$ findet man z. B.

$$P_{60} = 656.68,\; P_{50} = 544.59,\; P_{40} = 444.65,\; P_{30} = 363.89.$$

Wer sein Leben auf *M.* 1000 zu versichern wünscht, pflegt selten wohlhabend zu sein, und für ihn sind die genannten Summen, welche, wie wir in Nr. 107 sehen werden, sich noch um annähernd den vierten Teil erhöhen, fast unerschwinglich. Für Wohlhabende aber, die ihr Leben entsprechend höher zu versichern wünschen, wachsen auch die Prämien im gleichen Verhältnisse mit der Versicherungssumme, und für den 30jährigen, der eine Lebensversicherung von *M.* 20000 erwerben will, ist der Preis netto *M.* 7277.60 und brutto *M.* 8984.80. Aus diesem Grunde werden nur ungemein selten Lebensversicherungen mittels einmaliger Einlagen erworben, und wenn die dazu erforderlichen Tarife von den Lebensversicherungsanstalten gleichwohl ausgerechnet und im Drucke bekannt gegeben werden, so geschieht dieses einerseits der Vollständigkeit wegen, andererseits zum Zwecke der Umwandlungsrechnungen, von welchen in Nr. 106 die Rede sein wird. Weitaus in den meisten Fällen zieht der Versicherte vor alljährlich eine verhältnismäfsig kleine Zahlung p_h zu leisten, deren Berechnung wir nunmehr zu lehren haben. Wir nehmen an, der Versicherte, welcher h Jahre alt ist, zahle von Beginn der Versicherung an jährlich, und zwar am Anfang des Jahres, die Summe 1. Was ist der Barwert aller dieser Zahlungen? Bei der Beantwortung dieser Frage ist die Wahrscheinlichkeit die Zahlung leisten zu müssen nebst dem erforderlichen Zinsabzuge zu berücksichtigen. Ähnliche Schlüsse wie in Nr. 99 führen zur Erkenntnis, dafs der Barwert der ersten ganz gewifs zu leistenden Zahlung $1 = \frac{\lambda_h}{\lambda_h}$ ist, der der zweiten Zahlung $\frac{1}{1{,}035}\,\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}$, der der dritten Zahlung $\frac{1}{1{,}035^2}\,\frac{\lambda_{h+2}}{\lambda_h}$ u. s. w., oder anders geschrieben

$$\frac{1}{\lambda_h}\cdot\frac{\lambda_h}{1{,}035^0},\; \frac{1}{\lambda_h}\cdot\frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035^1},\; \frac{1}{\lambda_h}\cdot\frac{\lambda_{h+2}}{1{,}035^2}$$

u. s. w. Der Barwert der letzten Zahlung ist $\frac{1}{\lambda_h}\,\frac{\lambda_{85}}{1{,}035^{85-h}}$. Die Gesammtsumme ist

$$\frac{1}{\lambda_h}\left[\frac{\lambda_h}{1{,}035^0}+\frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035^1}+\frac{\lambda_{h+2}}{1{,}035^2}+\cdots+\frac{\lambda_{85}}{1{,}035^{85-h}}\right].$$

Man kann diesen Ausdruck vor der Klammer mit $1{,}035^h$ multiplizieren, ihn innerhalb der Klammer durch $1{,}035^h$ dividieren, wodurch er die Gestalt erhält:

$$\frac{1{,}035^h}{\lambda_h}\left[\frac{\lambda_h}{1{,}035^h}+\frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035^{h+1}}+\cdots+\frac{\lambda_{85}}{1{,}035^{85}}\right]=\frac{1{,}035^h}{\lambda_h}\sum\frac{\lambda_h}{1{,}035^h}.$$

Ist die jährliche Zahlung nicht 1, sondern p_h, so wird der Barwert aller Zahlungen

$$p_h\frac{1{,}035^h}{\lambda_h}\sum\frac{\lambda_h}{1{,}035^h}=\frac{\Sigma v_h}{v_h}\cdot p_h\,.$$

Nun war P_h die sofortige Einzahlung, welche für den $h$jährigen Versicherten die Anwartschaft auf die Versicherungssumme K eröffnete. Soll die Jahresprämie p_h dieselbe Wirkung üben, so mufs P_h ihr Barwert sein oder

$$P_h=\frac{\Sigma v_h}{v_h}\,p_h$$

$$p_h=\frac{v_h P_h}{\Sigma v_h}.$$

Führen wir aus Nr. 99 den Wert von P_h ein, so entsteht

$$p_h=K\frac{\Sigma m_h}{\Sigma v_h}=\frac{Kv_h}{\Sigma v_h}-\frac{7K}{207}=\frac{7KP_h}{207(K-P_h)}.$$

Die den früheren P_h entsprechenden p_h sind (unter der Voraussetzung $K=1000$) $p_{60}=64.68$, $p_{50}=40.44$, $p_{40}=27.08$, $p_{30}=19.34$. Für den 30jährigen, der sein Leben mit ℳ 20000 versichern will, ist die Jahresprämie netto ℳ 386.80 und brutto ℳ 477.80.

101] Wir haben in der vorigen Nummer $\frac{1{,}035^h}{\lambda_h}\sum\frac{\lambda_h}{1{,}035^h}=\frac{\Sigma v_h}{v_h}$ als den Barwert einer Jahreszahlung 1, welche der Versicherte zu entrichten hat, gefunden. Für den Barwert einer Jahreszahlung kann es aber nicht darauf ankommen, wer sie leistet, beziehungsweise wer sie empfängt. Wir denken uns jetzt den Versicherten als Empfänger, der vom Alter von h Jahren an, und zwar am Anfang des Jahres, von der Versicherungsgesellschaft jährlich die Summe 1 erhält. Der Versicherte wird dadurch zum Rentenbezieher, und zwar heifst seine Rente eine vorschüssige, weil sie zu Anfang des Jahres und erstmalig beim Abschlufs des Versicherungsvertrags durch den Versicherten erhoben wird. Bezeichnet R_h den Barwert einer mit h Jahren erworbenen vorschüssigen Rente 1, so ist folglich

$$R_h=\frac{1{,}035^h}{\lambda_h}\sum\frac{\lambda_h}{1{,}035^h}=\frac{\Sigma v_h}{v_h}.$$

Man hat dadurch zugleich die Formel:

$$P_h = p_h R_h.$$

Will man die thatsächliche Berechnung von R_h vornehmen, so mufs man freilich sich dazu bequemen die ganze Arbeit neu zu vollziehen, weil man sich dabei aus dem in Nr. 96 erörterten Grunde der in Nr. 94 abgedruckten Sterblichkeitstafel zu bedienen hat.

102] Die Lebensversicherung wie die Rentenversicherung stellen der Versicherungsanstalt eine Aufgabe, welche neben den zwischen beiden obwaltenden Unterschieden ihnen dennoch den Stempel der Gemeinsamkeit aufdrückt. Sie verlangen beide die zinstragende Verwaltung von Kapitalien. Wir haben (Nr. 82) gesehen, dafs eine Feuerversicherungsanstalt jeden Reservefond entbehren kann und allen Gefahren mit Hilfe der theoretisch vorhandenen, praktisch kaum je zur Anwendung kommenden Nachzahlungspflicht zu begegnen imstande ist. Ebenso verhält es sich mit der Hagelversicherung, mit der Unfallversicherung, mit der Krankenversicherung. Eine grofse Ausdehnung des Versicherungsgebietes gestattet hier, eine nahezu gleichbleibende Leistungspflicht der Versicherungsanstalt von Jahr zu Jahr anzunehmen, mit welcher die Versicherungsgebühr der Versicherten sich im Gleichgewicht zu halten vermag. Man kann die Versicherungsverträge als in jedem Jahre aufgehoben und neu abgeschlossen denken, ohne dafs eine Stetigkeit der Verträge durch ihren Sinn bedingt wäre. Ganz anders zeigen sich Lebensversicherungsverträge und Rentenverträge. Wird bei einer Lebensversicherungsgesellschaft die Summe P_h eingezahlt, oder wird jährlich die Prämie p_h beigetragen, welche gröfser ist als wenn der $h$jährige, kleiner als wenn der $(h+k)$jährige sich in der unter Nr. 98 als unzweckmäfsig erwiesenen Art auf jeweil ein Jahr versicherte, so mufs die Versicherungsanstalt diese Gelder zinstragend anlegen, damit durch Zins und Zinseszins allmählich die Summe daraus werde, welche beim Tode des Versicherten auszuzahlen ist. Wird bei einer Rentenversicherung die Summe R_h eingezahlt, so mufs abermals die Versicherungsanstalt auf zinstragende Anlage bedacht sein, damit aus dem Zinse und, soweit dieser nicht ausreicht, aus dem dadurch allmählich aufgezehrten Kapitale die Renten bezahlt werden. Die hier hervorgehobene Notwendigkeit hat nicht nur die volkswirtschaftlich wichtige Folge, dafs in den Versicherungsanstalten, allen anderen voran in den Anstalten der vom Deutschen Reiche geordneten Alters- und Invaliditätsversicherung, Geldmächte entstanden sind, welche, weil nicht geradezu auf Gewinn arbeitend, sondern mit mäfsiger Verzinsung ihrer Mittel sich begnügend, geeignet erscheinen einen mäfsigenden Einflufs auf den Zinsfufs überhaupt auszuüben. Sie hat auch die Folge, dafs das Anwachsen der Lebensversicherungskapitalien, das Schwinden der Rentenkapitalien mit rechnender Feder vorausgesagt und verfolgt werden mufs, und diese Aufgabe: die buchmäfsige Herstellung des sogenannten Deckungsfond oder der sogenannten Prämienreserve haben wir zu besprechen.

103] Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung des Deckungsfond bei Lebensversicherung gegen einmalige Einzahlung. Der $h$jährig sich Versichernde hat für *M.* 1000 Versicherungssumme den Betrag P_h eingezahlt. Nach k Jahren ist er $(h+k)$ jährig. Hätte er bis dahin mit der Versicherung gewartet, so müfste er jetzt die Einzahlung P_{h+k} leisten. Als früher Versicherter braucht er nichts zu zahlen. Das ist nur dann billig, wenn sein Guthaben bei der Versicherungsanstalt, d. i. eben sein Deckungsfond, inzwischen die Höhe P_{h+k} erreicht hat. Mit anderen Worten: der Deckungsfond des $(h+k)$ jährigen Versicherten beträgt, falls er sich durch einmalige Einzahlung auf *M.* 1000 versichert hatte, genau P_{h+k}, gleichviel, wann er früher den Versicherungsvertrag abgeschlossen hat.

Bei Lebensversicherungen auf *M.* 1000 gegen eine Jahresprämie p_h ist folgende Betrachtung anzustellen. Wenn der im Alter von h Jahren Versicherte noch k Jahre zugewartet hätte, so hätte er jährlich nicht p_h, sondern die höhere Prämie p_{h+k} zu zahlen gehabt, und die Jahresprämie p_h hätte ihm dann nicht mehr das Anrecht auf 1000, sondern nur noch auf $\frac{1000 p_h}{p_{h+k}}$ gegeben. Da ihm aber das Anrecht auf 1000 unverkümmert bleibt, so mufs das Anrecht auf den Unterschied

$$1000 - \frac{1000 p_h}{p_{h+k}} = 1000 \frac{p_{h+k} - p_h}{p_{h+k}}$$

ihm durch die inzwischen gezahlten Prämien erworben worden sein. Mit $h+k$ Jahren erwirbt man aber durch einmalige Zahlung von P_{h+k} das Anrecht auf 1000 und durch einmalige Zahlung von $\frac{p_{h+k} - p_h}{p_{h+k}} \cdot P_{h+k}$ das Anrecht auf $1000 \frac{p_{h+k} - p_h}{p_{h+k}}$. Der Deckungsfond des $(h+k)$jährigen auf *M.* 1000 Versicherten, der im Alter von h Jahren den Versicherungsvertrag abschlofs, ist demnach

$$\frac{p_{h+k} - p_h}{p_{h+k}} \cdot P_{h+k}.$$

Bei der vorschüssigen Rente 1 ist die Kenntnis des Deckungsfond wieder ungemein leicht zu erlangen. Der im Alter von h Jahren Versicherte hat die Rente mittels der Einzahlung R_h erworben. Nach $k$jährigem Zuwarten hätte er die Rente mittels der geringeren Einzahlung R_{h+k} erworben. Sein Deckungsfond ist also zu jenem

Zeitpunkt R_{h+k}, gleichviel wann er früher den Vertrag abgeschlossen hat.

104] So einfach die Schlüsse der vorigen Nummer sind, wollen wir sie doch für Leser, denen es schwerer fallen sollte, mit allgemeinen Zahlen zu rechnen, an bestimmten Zahlenbeispielen prüfen und dabei voraussetzen, sämtliche λ_h beteiligten sich an der Versicherung. Nach Nr. 100 ist $P_{30} = 363.88$, während nach Nr. 93 die Zahlen $\lambda_{30} = 91\,578$, $\tau_{30} = 808$, $\tau_{31} = 818$, $\tau_{32} = 831$ gegeben sind. Nun rechnet man:

$$\begin{array}{rr}
\lambda_{30} \cdot P_{30} = & 33\,323\,402.64 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 1\,166\,319.09 \\
\hline
 & 34\,489\,721.73 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{30} = & 808\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{31} = & 33\,681\,721.73 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 1\,178\,860.26 \\
\hline
 & 34\,860\,581.99 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{31} = & 818\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{32} = & 34\,042\,581.99 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 1\,191\,480.36 \\
\hline
 & 35\,234\,062.35 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{32} = & 831\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{33} = & 34\,403\,062.35.
\end{array}$$

Am Deckungsfond der λ_{33} sind $\lambda_{33} = 89\,121$ Versicherte beteiligt. Auf jeden fällt also $\frac{34\,403\,062.35}{89\,121} = 386.02$, und genau ebenso grofs ist P_{33}.

Wollen wir den Deckungsfond der λ_{33} mit Hilfe der p_{30} berechnen, so brauchen wir aufser den soeben benutzten Zahlen noch $\lambda_{31} = 90770$, $\lambda_{32} = 89\,952$, $p_{30} = 19{,}34$

$$\begin{array}{rr}
\lambda_{30} \cdot p_{30} = & 1\,771\,118.52 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 61\,989.15 \\
\hline
 & 1\,833\,107.67 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{30} = & 808\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{31} = & 1\,025\,107.67 \\
\lambda_{31} \cdot p_{30} = & 1\,755\,491.80 \\
\hline
 & 2\,780\,599.47
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rr}
\text{Übertrag} & 2\,780\,599.47 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 97\,320.98 \\
\hline
 & 2\,877\,920.45 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{31} = & 818\,000.— \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{32} = & 2\,059\,920.45 \\
\lambda_{32} \cdot p_{30} = & 1\,739\,671.68 \\
\hline
 & 3\,799\,592.13 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 132\,985.72 \\
\hline
 & 3\,932\,577.85 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{32} = & 831\,000.— \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{33} = & 3\,101\,577.85.
\end{array}
$$

Auf jeden Einzelnen der λ_{33} Versicherten fällt an Deckungsfond $\frac{3\,101\,577.85}{89\,121} = 34.80$. Unter Anwendung der Formel aus Nr. 103 käme $\frac{p_{33} - p_{30}}{p_{33}} \cdot P_{33} = \frac{21{,}26 - 19{,}34}{21{,}26} \cdot 386.02 = 34.86$ mit einem nicht in Betracht kommenden Unterschied, welcher daher rühren mufs, dafs zu wenige Dezimalstellen der einzelnen Zahlen in der zuletzt benutzten Formel in Anwendung kamen.

Zur Berechnung des Deckungsfond der von dem Augenblick der Versicherung an beginnenden vorschüssigen Rente 1 haben wir uns der Sterblichkeitstafel aus Nr. 94 zu bedienen. Wir haben also zu setzen $\lambda_{30} = 76\,058$, $\lambda_{31} = 75\,440$, $\lambda_{32} = 74\,812$, $\lambda_{33} = 74\,171$ und $R_{30} = 19{,}82$

$$
\begin{array}{rr}
\lambda_{30} \cdot R_{30} = & 1\,508\,032.39 \\
\text{ab } \lambda_{30} = & 76\,058.— \\
\hline
 & 1\,431\,974.39 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 50\,119.10 \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{31} = & 1\,482\,093.49 \\
\text{ab } \lambda_{31} = & 75\,440.— \\
\hline
 & 1\,406\,653.49 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 49\,232.87 \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{32} = & 1\,455\,886.36 \\
\text{ab } \lambda_{32} = & 74\,812.— \\
\hline
 & 1\,381\,074.36 \\
3\tfrac{1}{2}\,\%\ \text{Zins} = & 48\,337.60 \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{33} = & 1\,429\,411.96
\end{array}
$$

Am Deckungsfond der λ_{33} sind $\lambda_{33} = 74171$ Versicherte beteiligt. Auf jeden fällt also $\frac{1429411.96}{74171} = 19.27$. Diese Zahl ist mit R_{33} in genauer Übereinstimmung. Sie kann selbstverständlich auch als Wert einer lebenslänglichen Nutzniefsung aufgefafst werden, welche einem 33 jährigen aus irgend einem Rechtsgrunde zukommt. Wenn die Badische Accisgesetzgebung bei Vererbung eines Vermögensbestandteils, dessen Nutzniefsung ein anderer als der eigentliche Erbe hat, dem Erben 60 %, dem Nutzniefser 40 % der Erbschaftsaccise, falls eine solche zu zahlen ist, auferlegt, so ist das Alter des Nutzniefsers überhaupt nicht berücksichtigt. Diese Gesetzesbestimmung kann mithin hier nicht zum Vergleiche dienen.

105] Die Rechnungen der vorigen Nummer geben zu einigen Bemerkungen Anlafs. Der Deckungsfond fand sich, indem eine zu der Gröfse der einmaligen oder wiederholten Einzahlung im Verhältnis stehende Summe sich zum Zinsfufse von $3\frac{1}{2}$ % vermehrte und um andere Beträge, welche nur von dem Alter des Versicherten und von der Höhe seiner Versicherung abhängen, abnimmt. Man ersieht aus dieser Schilderung, was auch unmittelbare Rechnung bestätigen mufs, dafs die Höhe des Deckungsfond bei abnehmendem Zinsfufse geringer wird. Sinkt z. B. der Zinsfufs auf 3 %, so hat man:

$$
\begin{array}{rr}
\lambda_{30} \cdot P_{30} = & 33\,323\,402.64 \\
3\,\%\ \text{Zins} = & 999\,702.08 \\
\hline
 & 34\,323\,104.72 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{30} = & 808\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{31} = & 33\,515\,104.72 \\
3\,\%\ \text{Zins} = & 1\,005\,453.14 \\
\hline
 & 34\,520\,557.86 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{31} = & 818\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{32} = & 33\,702\,557.86 \\
3\,\%\ \text{Zins} = & 1\,011\,076.74 \\
\hline
 & 34\,713\,634.60 \\
\text{ab } 1000\ \tau_{32} = & 831\,000.\text{—} \\
\hline
\text{Deckungsfond der } \lambda_{33} = & 33\,882\,634.60.
\end{array}
$$

Auf jeden der λ_{33} kommt also ein Deckungsfond $\frac{33882634.60}{89121} = 380.17$ oder 5.85 weniger als beim Zinsfufse von $3\frac{1}{2}$ %. Der Deckungsfond darf aber nicht geringer gewählt werden, weil auf seiner Höhe die Solidität der Versicherungsanstalt, die Gewifsheit, dafs sie ihre Verpflichtungen zu erfüllen imstande sein wird, beruht. Es bleibt also nichts übrig als bei sinkendem Zinsfufse die Prämien zu erhöhen. Das geschah bereits um das Jahr 1886, als der früher zur Berechnung dienende Zinsfufs von 4 % aufhörte, bei unbedingt sicheren Geldanlagen in allen Fällen erreichbar zu sein; und sollte auch $3\frac{1}{2}$ % nicht mehr unter allen Umständen erzielt werden können, so wird eine abermalige dem Zinsfufse von 3 % etwa entsprechende Prämienerhöhung nicht ausbleiben können. Umgekehrt würden die Versicherungsanstalten in der Lage sein ihre Tarife wieder herabzusetzen, wenn irgend welche Veränderungen der Geschäftsverhältnisse neuerdings eine bleibende 4 % Verzinsung sicherer Geldanlagen in Aussicht stellen sollten. Der Wettbewerb der zahlreichen Versicherungsanstalten würde keiner einzelnen gestatten, sich von einer solchen Tarifherabsetzung auszuschliefsen. Schon bestehende Verträge werden in keinem Falle von etwaiger Tarifveränderung berührt.

106] Der Deckungsfond, bemerken wir weiter, dient zu der in Nr. 100 ankündigend erwähnten Umwandlungsrechnung, beziehungsweise zum sogenannten Rückkauf. Die Satzungen der ältesten Versicherungsanstalten enthielten schon Vorschriften, welche die Verpflichtungen der Anstalt einschränkten, und welche, wie wir in Nr. 97 erwähnten, sich teilweise erhalten haben. Die Bestimmungen sind nicht bei allen Versicherungsanstalten buchstäblich gleichlautend, wenn auch wiederum der Wettbewerb allzugrofse Abweichungen verhindert. Unsere Angaben stimmen wesentlich mit den Satzungen der allgemeinen Versorgungsanstalt im Grofsherzogtum Baden zu Karlsruhe überein. Darnach gestattet die Anstalt, wenn wenigstens eine Jahresprämie bezahlt ist, die Aufkündigung des eingegangenen Versicherungsvertrags und zahlt als Rückkaufssumme gegen Verzicht auf alle künftigen Ansprüche eine Abfindung von 75 % des jeweiligen Deckungsfond für den betreffenden Vertrag. Auf den Rückkaufspreis beschränkt sich die Leistung der Anstalt auch ohne Aufkündigung von Seiten des Versicherten unter gewissen Voraussetzungen, von welchen wir namhaft machen: Erleidung der Todesstrafe durch den Versicherten, Antritt einer Freiheitsstrafe von 5 oder mehr Jahren, Selbstmord des Versicherten, es sei denn, dafs die That im Zustande einer durch Körper- oder Geisteskrankheit entstandenen Unzurechnungsfähigkeit begangen wurde u. s. w. Die Ansprüche an die Anstalt erlöschen ganz, wenn der Versicherte durch den Bezieher in böslicher Absicht an Gesundheit oder Leben gefährdet wird. Die oben erwähnte Umwandlung kann von dem Verwaltungsrate gestattet werden, wenn auch kein Anrecht auf dieselbe anerkannt wird. Der Versicherte wünscht z. B. künftig keine Jahresprämie mehr bezahlen zu müssen, so dient sein Deckungsfond unter Aufrundung zum nächsten zulässigen Betrage als einmalige Einzahlung zum Erwerb einer Lebensversicherung.

Achtes Kapitel.

Dividendenberechnung.

107] Die in Nr. 100 gebrauchten Ausdrücke Nettoprämie und Bruttoprämie bedürfen der Erläuterung. Wir haben die Anwendung zweier wesentlich verschiedener Sterblichkeitstafeln (Nr. 93 und 94) kennen gelernt, je nachdem Lebensversicherung oder Rentenversicherung gewünscht wird. Wir haben auch die Notwendigkeit (Nr. 105) erkannt, der Berechnung der Prämie einen Zinsfuſs zu Grunde zu legen, welcher unter dem thatsächlich bei sicheren Geldanlagen zu erlangenden Zinssatz liege. Eine der Versicherungsanstalt günstige Sterblichkeitstafel, ein von der Wirklichkeit überbotener Zinsertrag gewährleisten bis zu einem gewissen Grade die Leistungsfähigkeit der Versicherungsanstalt für alle von ihr eingegangene Verpflichtungen, ohne jedoch eine unbedingte Sicherheit zu gewähren. Einmal beansprucht die Verwaltung so bedeutender Summen, als Versicherungsanstalten anzulegen genötigt sind, einen nicht unbeträchtlichen Aufwand, und zum anderen ist bei noch so vorsichtig hergestellter Sterblichkeitstafel ein Miſsjahr in zwei Beziehungen möglich. Bei der Lebensversicherung kann durch eintretende Volkserkrankungen eine zeitweise Übersterblichkeit eintreten. Das war beispielsweise im 1. Vierteljahre 1890 und im 4. Vierteljahre 1893 im Groſsherzogtum Baden der Fall, als Influenza und Diphtherie zahlreiche Opfer forderten, und wenn gleichwohl bei der Karlsruher Versorgungsanstalt in den Jahren 1890 wie 1893 eine Untersterblichkeit namentlich infolge des ausgedehnten Versicherungsgebietes sich ergab, so ist das Entgegengesetzte doch keineswegs ausgeschlossen. In zweiter Richtung ist ein Miſsjahr dann vorhanden, wenn grade solche Personen sterben, deren Leben besonders hoch versichert ist. Die Rentenversicherung dagegen verzeichnet als Miſsjahr, wenn eine Untersterblichkeit der Rentenbezieher eintritt, oder wenn diejenigen am Leben bleiben, welche die höchsten Renten beziehen. Um die Verwaltungskosten zu decken, um Miſsjahren zu begegnen, sehen sich alle Versicherungsanstalten genötigt, die nach den Vorschriften des vorigen Kapitels berechneten Prämien zu erhöhen. Die unmittelbar aus den Sterblichkeitstafeln hergeleitete Prämie heiſst Nettoprämie, durch die erwähnte Erhöhung wird sie zur Bruttoprämie. Die Tarife der Versicherungsanstalten enthalten die Bruttoprämien. Ein noch immer nicht erlassenes Deutsches Reichsversicherungsgesetz müſste unserer Meinung nach vorschreiben, daſs jede Versicherungsanstalt gehalten sei, bekannt zu geben, mittels welchen Zuschlags sie die Bruttoprämie aus der Nettoprämie herstellt. Die Karlsruher Versorgungsanstalt erfüllt schon lange dieses Begehren. In ihren Satzungen heiſst es ausdrücklich: Der Berechnung der Leistungen der Anstalt werden nur 81 % der Prämie zu Grunde gelegt. Diese 81 % bilden die Nettoprämie. Der Zuschlag besteht also aus $\frac{19}{81}$ oder (Nr. 100) aus annähernd $\frac{1}{4}$ der Nettoprämie. Die Preufsische Rentenversicherungsanstalt hat in ihren Satzungen keinen Aufschlufs über das von ihr festgehaltene Verhältnis. Freundlicher Mitteilung ihrer Leitung entnehmen wir, dafs 95 % der Bruttoprämien als Nettoprämien anzusehen sind. Der Zuschlag besteht also aus $\frac{5}{95}$ oder $\frac{1}{19}$ der Nettoprämie.

108] Die Folgen des den Versicherten auferlegten Zuschlages zur Nettoprämie sind einleuchtend. Die Jahresabrechnung mufs, da die Möglichkeiten, gegen welche der Zuschlag die Versicherungsanstalt schützen soll, in ihrem Zusammentreffen zu den gröfsten Seltenheiten gehören, mit einem Überschusse für die Anstalt abschliefsen, welcher um so beträchtlicher sein wird, je höher der Prämienzuschlag war. Über die Verwendung des Überschusses wird sodann zwischen den verschiedenen Versicherungsanstalten ziemliche Übereinstimmung herrschen. Sie legen sämtlich einen Teil des Überschusses als Sicherheitsreserve zurück, um aus ihr in Mifsjahren die Ergänzung des Deckungsfond vornehmen zu können, sie legen vielfach auch sofort die Verwaltungskosten für das folgende Jahr bei Seite, sie verteilen, was dann noch übrig ist, als Dividende. Hier tritt aber eine Trennung der Wege zwischen Aktienanstalten und Gegenseitigkeitsanstalten ein. Die Aktienanstalt hat eine und dieselbe Verteilungsart ihres Reingewinnes, soweit er zur Verteilung kommt. Sind A Aktien vorhanden, welche über gleiche Beträge ausgestellt sind, und auf welche der gleiche Prozentsatz bar eingezahlt wurde, ist G der zur Verteilung kommende Gewinn, so entfällt $\frac{G}{A}$ auf jede Aktie, mag sie im Besitz des bei der Gründung der Aktiengesellschaft Mitwirkenden geblieben oder durch Erbschaft oder Kauf inzwischen beliebig oft in andere Hände gekommen sein. Ganz anders bei der Gegenseitigkeitsanstalt, deren Versicherte zugleich ihre Aktionäre sind, Gewinn und Verlust unter sich zu teilen haben, und dieses thatsächlich nach verschiedenartigen Verfahren ausführen. Was wir von der Teilung des etwaigen Verlustes sagten, wird insbesondere von den Beamten von Aktiengesellschaften stark betont, um Versicherungslustige zu gewinnen, beziehungsweise sie den Gegenseitigkeitsanstalten abspenstig zu machen. Jeder Verlust treffe bei Aktiengesellschaften einzig und allein die Aktionäre, während der Versicherte nie in Mitleidenschaft gezogen werden könne und genau wisse, was er jährlich an Prämie zu zahlen habe. Wir halten wie bei den Feuerversicherungsanstalten (Nr. 83) auch bei Lebens- und Rentenversicherung die angedrohte Gefahr eines Verlustes für so gut wie nicht vorhanden, und der hohe Kurs der Aktien von Versicherungsanstalten bestätigt unsere Meinung. Will eine Einschränkung gemacht werden, so dürfte sie höchstens darin bestehen, dafs man, um sich zu versichern, solche Gegenseitigkeitsanstalten bevorzuge, welche ein grofses Versicherungsgebiet und eine stattliche Sicherheitsreserve besitzen. Wenn die Karlsruher Versorgungsanstalt ihrem Geschäftsberichte für 1897 zufolge neben einem 92501 Versicherungsverträgen entsprechenden Deckungsfond von ℳ 84870638 noch eine Sicherheitsreserve von ℳ 17168814 oder mehr als 20 % des Deckungsfond besitzt, wenn die Gothaer Versicherungsgesellschaft diese Zahlen noch zu überbieten vermag, wenn andere Gegenseitigkeitsgesellschaften zu ähnlichen Veröffentlichungen berechtigt sind, so kann von einer Gefahr der Nachzahlung nicht ernstlich die Rede sein. Rentenversicherungsanstalten sind noch weniger gefährdet, weil die auszuzahlenden Renten auch bei Hochversicherten nicht solche Summen wie bei Lebensversicherungen darstellen, und weil mithin in einem Mifsjahre nicht plötzlich sehr hohe Beträge flüssig gemacht zu werden haben. Das ist der Grund dafür, dafs Rentenanstalten sich mit einem erheblich geringeren Zuschlage zur Nettoprämie als Lebensversicherungsanstalten begnügen können (Nr. 107), und dafs trotzdem Gegenseitigkeitsanstalten wie die Preufsische Rentenversicherungsanstalt in Berlin ein Vertrauen geniefsen, welches durch keine Furcht vor unvermuteten Nachzahlungen beeinträchtigt zu werden braucht. Was wir ferner von dem Erfordernisse eines grofsen Versicherungsgebietes sagten, wird von den Gegenseitigkeitsanstalten wohl beachtet. Wo eine besondere Versicherungsart in engen Schranken bleibt, wo also, um die Ausdrücke der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden, das Gesetz der grofsen Zahlen nicht zutrifft, verzichtet eine vorsichtige Anstalt auf die Ausbeutung dieses besonderen Gebietes. So geht die Karlsruher Versorgungsanstalt seit 1885 keine neuen Rentenversicherungsverträge mehr ein und läfst die noch bestehenden Verträge durch den allmählich eintretenden Tod der Rentenbezieher von selbst erlöschen, während neu geschlossene Lebensversicherungsverträge das anhaltende Wachstum der Anstalt bezeugen. Im Gegensatze zu ihr legt die Preufsische Rentenversicherungsanstalt in Berlin das Schwergewicht ihrer Bemühungen gerade auf Rentenversicherung.

109] Nicht blofs die uns persönlich anhaftende Vorliebe für Gegenseitigkeitsanstalten führt uns dazu, die bei denselben übliche Dividendenverteilung noch näher zu besprechen, der Gegenstand selbst verdient, dafs man ihm Aufmerksamkeit zuwende, weil jene Verteilung nach sehr verschiedenen Auffassungen vorgenommen wird. Eine gemeinsame Bestimmung findet sich zwar in den Satzungen aller Gegenseitigkeitsanstalten, nämlich die Einführung einer Karenzzeit, innerhalb deren der Versicherte überhaupt keine Dividende bezieht. Mifsjahren zu begegnen ist, wie (Nr. 108) hervorgehoben wurde, eine Sicherheitsreserve vorgesehen, deren Schaffung demzufolge eine Bedingung des gesicherten Bestandes der Anstalt ist, wie sie dieser ihrer Tragweite auch den Namen entlehnt hat. Bei der Gründung einer Versicherungsanstalt auf Gegenseitigkeit ist der Natur der Dinge nach eine Sicherheitsreserve noch nicht vorhanden, und in jenem Augenblicke ist zweifellos die Gefahr der Nachzahlungspflicht für die Gründer, d. h. für die Erstversicherten vorhanden, eine Gefahr, der sie sich in der Hoffnung baldigen Dividendenbezugs freiwillig aussetzten. Diese Gefahr aufzuheben, legten sich die Gründer während einiger Jahre den Verzicht auf jegliche Überschufsverteilung als Pflicht auf, denn nur durch Ansammlung aller Überschüsse kann eine stattliche Sicherheitsreserve sich bilden. Die Karlsruher Versorgungsanstalt z. B. schlofs 1864 die ersten Lebensversicherungsverträge ab, und durch Ansammlung der Überschüsse gestalteten sich Deckungsfond und Sicherheitsreserve wie folgt:

Jahrgang	Zahl der Versicherten	Deckungsfond	Sicherheits-reserve
1864	20	5174	734
1865	104	17790	4318
1866	295	67462	12066
1867	733	132143	9928
1868	1713	240876	52934

Im Jahre 1867 nahm die Sicherheitsreserve, anstatt sich zu steigern, einen auffälligen Rückgang, der dieses Jahr als Mifsjahr kennzeichnet. Im darauffolgenden Jahre 1868 nahm die Zahl der Versicherten rascher als früher zu, aber auch die Sicherheitsreserve wuchs in ungeahntem Mafsstabe. Jetzt wurde im 5. Jahre des Bestehens die erste Dividende ausgeteilt. Konnte man den 20 Erstversicherten, welche 4 Jahre lang nur Ausgaben ohne Einnahmen zu verzeichnen hatten, zumuten, sofort alle inzwischen Versicherte mit sich gleichzustellen, mit Allen nach irgend einem Teilungsverhältnisse den Überschufs des Jahres zu teilen? Eine Bejahung dieser Frage entspräche kaum der Billigkeit. Die Entsagung, welche jene 20 Erstversicherte freiwillig übten, war auch den später Versicherten mit Fug und Recht aufzuerlegen. Dementsprechend bestimmen die Satzungen, dafs erst vom 5. Versicherungsjahre an Dividendenberechtigung eintrete, während die 4 vorhergehenden Jahre die Karenzzeit bilden. Wir haben den uns vorliegenden Berichten der Karlsruher Versorgungsanstalt die mitgeteilten Zahlen entnommen, woraus aber unsere Leser nicht den Schlufs ziehen wollen, bei ihr sei zuerst die Karenzzeit eingeführt worden; sie entlehnte vielmehr die Bestimmung sämtlichen früher entstandenen Gegenseitigkeitsanstalten, von denen in Deutschland die Gothaer die älteste ist. Nur die Dauer der Karenzzeit ist eine bei den einzelnen Anstalten zwischen 3 und 4 Jahren wechselnde.

110] Nach Ablauf der Karenzzeit erhält jeder Versicherte eine

Dividende. Es frägt sich, wie dieselbe zu bemessen sei? Die Feuerversicherungsanstalt auf Gegenseitigkeit verteilt ihren Jahresüberschufs unter die Versicherten im Verhältnis der von diesen gezahlten Jahresprämien (Nr. 82), weil er aus diesen Jahresprämien stammt, und weil mithin jede derselben im Verhältnis ihrer Höhe zur Entstehung des Überschusses beigetragen hat. Ebenso verfuhr man bei den Lebensversicherungsanstalten und rechtfertigte diese Handlungsweise wie folgt. Die Bruttoprämie 100 besteht (wenn wir die Zahlen der Karlsruher Versorgungsanstalt benutzen, was um so eher gestattet sein mag, als es sich nur um ein Beispiel handelt, welches mit dem gleichen Rechte andere Zahlen zu Grunde legen dürfte) aus 81 Nettoprämie und 19 Zuschlag; von diesem Zuschlag sind 8 zur Deckung der Verwaltungskosten bestimmt, 11 zur Bildung der Sicherheitsreserve, beziehungsweise zur Rückgabe an den Versicherten unter dem Namen der Dividende, falls keine Übersterblichkeit eintritt, welche das Zustandekommen eines Überschusses nicht gestattet. Der Versicherte hat also ein Recht auf die Rückzahlung von 11 % der von ihm erlegten Jahresprämie, beziehungsweise von einem kleineren Bruchteil, wenn nicht die vollen 11 % sich erübrigen liefsen. Dagegen ist hauptsächlich der Einwand erhoben worden, an dem Übrigbleiben der beiläufig 11 % der Prämie sei das Innehalten der Sterblichkeitsordnung der Versicherungsgesellschaft Schuld, und die Wahrscheinlichkeit dieses Zusammentreffens der Thatsache mit der Erwartung hänge von dem Alter des Versicherten ab. Daneben wird bemerkt, ein Teil der Sicherheitsreserve, also auch der Dividende, stamme aus dem Zinsertrage der angelegten Kapitalien, welcher vielfach höher sei als die der Berechnung des Deckungsfond zu Grunde liegenden $3\frac{1}{2}$ %. Wird dieser Überschufs nicht sofort verteilt, sondern kommt er zur eigentlichen Sicherheitsreserve, so wirkt er im nächstfolgenden Jahre bereits wieder zinstragend zur Erhöhung des Jahresüberschusses mit und so fortfahrend immer kräftiger, je länger ein Versicherter der Anstalt angehört. Auch auf einen dritten Gesichtspunkt wird hingewiesen. Die Sicherheit der Versicherungsanstalt wächst, wie wiederholt betont worden ist, mit ihrer Ausdehnung. Nach dieser Richtung hin dient jeder neu geschlossene Versicherungsvertrag als Stütze der Anstalt, man kann jeden Versicherten einen unbewufsten Agenten nennen, welcher neue Versicherungen einleitet und begründet, um so zahlreichere, je länger er selbst der Anstalt angehört. Alle diese Erwägungen zusammengefafst führen dazu, anstatt einer bei gleichen Jahresüberschüssen prozentual zur Prämie für alle Versicherte gleichen Dividende, vielmehr eine mit der Versicherungsdauer ansteigende Dividende zu fordern. In Deutschland hat die Karlsruher Versorgungsanstalt zuerst diese Forderung erhoben und durch ihre Satzungen verwirklicht. Wie bei allen Neuerungen fehlte es anfangs nicht an Widerspruch wettbewerbender Anstalten, der aber nachgerade verstummt ist, sodafs kaum eine Lebensversicherungsgesellschaft mehr vorhanden ist, welche nicht mindestens als eine Abart ihrer Versicherungsverträge zuläfst, dafs beim Abschlusse die Auszahlung steigender Dividenden bedungen werde.

111] Wenn nun mit der Versicherungsdauer ansteigende Dividenden ausbezahlt werden sollen, so kann dem auf verschiedene Weise entsprochen werden. In Frankreich entstand die auch von einzelnen deutschen Anstalten übernommene Methode, die Dividende im Verhältnisse zur Summe aller gezahlten Jahresprämien zu berechnen. Da diese Summe naturgemäfs von Jahr zu Jahr steigt, und da beispielsweise wer 20mal jährlich p_h bezahlt hat die 4fache Prämiensumme entrichtete als wer 5mal jährlich p_h bezahlte und deshalb 4mal soviel Dividende als jener erhält, so ist dem Wunsche nach ansteigenden Dividenden durch diese Verteilungsart genügt. Eines aber ist gegen sie einzuwenden: dafs die einzelnen Prämien, in welchem Jahre sie auch bezahlt wurden, einfach addiert werden, ohne zu berücksichtigen, dafs die Sicherheitsreserve, wie in der vorigen Nummer bemerkt wurde, fortwährenden Zinszuwachs erhält.

112] So viel wir wissen, hat diesem Bedenken gegenüber zuerst J. Dienger den Vorschlag gemacht, die Dividende im Verhältnisse zum Deckungsfond der zum Dividendenbezug Berechtigten zu verteilen, und die Karlsruher Versorgungsanstalt war es, die in Deutschland zuerst diese Verteilungsart in ihre Satzungen aufnahm. Eine Rechtfertigung des Verfahrens erscheint nicht schwierig. Man kann jeden Versicherten als Gläubiger der Versicherungsanstalt auffassen, und zwar mit einer Forderung, welche genau der Höhe des für ihn berechneten Deckungsfond gleichkommt. Wollte, oder müfste eine Gegenseitigkeitsanstalt sich auflösen, weil der Deckungsfond sich auf *M.* 100000000 berechnet, während als Reinvermögen nur noch *M.* 80000000 vorhanden sind, so kann keinem Zweifel unterliegen, dafs jeder Versicherte als Gläubiger der Anstalt sich mit 80% seiner Forderung, d. h. des Deckungsfond begnügen müfste. Wären genau *M.* 100000000 als Reinvermögen vorhanden, so würde ebenso unzweifelhaft jeder Versicherte genau seinen Deckungsfond ausgezahlt erhalten. Nun denken wir uns die Auflösung der Gesellschaft einstimmig beschlossen und durchgeführt, während dem berechneten Deckungsfond von *M.* 100000000 ein Reinvermögen von *M.* 123333333 gegenüber stände. Man wird zu keiner anderen Verteilung kommen können, als dafs jeder Versicherte $123\frac{1}{3}$% seines Deckungsfond erhält. Wir gehen in der Annahme durchaus unwahrscheinlicher, aber doch denkbarer Thatbestände einen letzten Schritt weiter. Die Versicherungsgesellschaft, welche sich eben erst auflöste, tritt neuerdings zusammen und will sogleich einen Deckungsfond von *M.* 100000000, eine Sicherheitsreserve von *M.* 20000000 bereit haben, denen jeder Gesellschafter mit seinen alten Rechten gegenüber zu stehen wünscht. Zu diesem Zwecke wird jeder 120%

seines früheren Deckungsfond einzuschiefsen haben, und die ganze umständliche Hinundherzahlerei endet damit, dafs $3\frac{1}{3}$ % des Deckungsfond an jeden einzelnen Versicherten ausgezahlt blieben. Sie bilden die Dividende der früher Versicherten, welche wir in diesem erfundenen Beispiele allerdings insgesamt als bereits dividendenberechtigt angesehen haben. Der Satz von $3\frac{1}{3}$ % als Dividende ist selbstverständlich kein endgiltig festgelegter, so wenig wie die Dividende irgend eines industriellen Unternehmens eine als unveränderlich zu verbürgende Höhe besitzt. Jedes Jahr erfordert eine neue Abschätzung dessen, was möglich und was ratsam ist. Eine fürsorgliche Leitung wird lieber etwas weniger verteilen, etwas mehr der Sicherheitsreserve zuführen, über deren Höhe von einem gewissen Betrage an nur die Leitung beschliefst. In den Satzungen der Karlsruher Versorgungsanstalt heifst es zwar: Die Normalhöhe der Reserve soll mindestens 2 und höchstens 8 % der Normalhöhe des Deckungsfond betragen. Übersteigt die Reserve den höchsten Betrag ihrer Normalhöhe, so kann der Mehrbetrag ganz oder zum Teil als Dividende unter die Berechtigten verteilt werden. Aber unmittelbar an diese Sätze schliefst sich der weitere Satz an: Ob und in welchem Betrage eine solche Verteilung stattzufinden habe, entscheidet der Verwaltungsrat und Ausschufs. Mit Hilfe dieser Klausel hat (Nr. 108) die Leitung der Karlsruher Versorgungsanstalt die Sicherheitsreserve zur Höhe von mehr als 20 % des Deckungsfond ansteigen lassen und in ihrem Berichte für 1897 eine mit unserem Beispiele übereinstimmende Dividendenverteilung von nur $3\frac{1}{3}$ % des Deckungsfond beschlossen. Wie wenig die naturgemäfse Verteilung des Überschusses im Verhältnisse des Deckungsfond anfangs verstanden wurde, mag man daraus entnehmen, dafs noch 1879 ein Versicherungsmathematiker herausrechnete, dafs die Sicherheitsreserve der Karlsruher Versorgungsanstalt im Jahre 1893 auf $\frac{1}{2}$ % des Deckungsfond herabgesunken sein werde, um alsdann ganz zu verschwinden, wenn die Anstalt es wage, fortgesetzt 3 % des Deckungsfond als Dividende zu verteilen. In Wahrheit war 1893 der Deckungsfond 57 824 383, die Sicherheitsreserve 11 428 731 oder $19\frac{3}{4}$ % des Deckungsfond, eine relative Höhe, welche sie, wie wir wissen, seitdem überstiegen hat. Eine kleine Schwierigkeit bildet die Dividendenberechnung für die durch einmalige Einlage Versicherten. Die Satzungen der Karlsruher Versorgungsanstalt schreiben dafür vor: Die Verträge gegen einmalige Einlagen erhalten nur diejenige Dividende, welche ihnen zufallen würde, wenn die Zahlung entsprechender jährlicher Prämien während der ganzen Dauer des Vertrags festgesetzt wäre. An der Hand der Formeln von Nr. 103 bedeutet das, der Dividendenbezug desjenigen, der als h jähriger sich auf $\mathcal{M}$ 1000 durch Zahlung von P_h versicherte, richte sich nach weiteren k Jahren, nicht nach dem wirklichen Deckungsfond P_{h+k}, sondern nach dem etwas niedrigeren $\frac{p_{h+k} - p_h}{p_{h+k}} P_{h+k}$. Darin liegt eine Benachteiligung der auf solche Weise Versicherten, deren Grund wir nicht einsehen, wenn wir auch zugeben, dafs man das Recht hat, satzungsmäfsige Unterschiede zu Ungunsten von solchen Mitgliedern einzuführen, welche eine verhältnismäfsig kleine Gruppe bilden.

113] Als eine zweifache Abart der Dividende nennen wir den Bonus und den Tontinensparfond. Unter Bonus verstehen englische Gegenseitigkeitsgesellschaften die Einrichtung, dafs die Dividende dem Berechtigten nicht ausbezahlt, sondern zurückbehalten wird und zur Erhöhung des versicherten Kapitals dient. Man hat darin eine Bevormundung des Versicherten gesehen, welchem man besser überlasse, was er mit dem Ertrag der Dividende anfangen wolle. Man kann aber auf der anderen Seite den Vorzug der Gutschrift der Dividende, welche auch in dem Namen des Bonus angedeutet ist, hervorheben, der darin liegt, dafs sie die Erhöhung der Versicherungsumme ohne neue ärztliche Untersuchung des Versicherten und ohne Kosten für ihn hervorbringt. Die eigentliche Tontine wurde im 17. Jahrhundert von einem Italiener Lorenzo Tonti erfunden und 1633 durch ihn in Frankreich eingeführt. Gegen Preisgabe einer gewissen Summe erhielten zu einer Versicherungsgruppe zusammentretende Persönlichkeiten eine Leibrente, welche bei dem Tode eines Versicherten den überlebenden Mitgliedern zu gut kam. Mit dem Tode des letzten Mitgliedes hörte jede Rentenzahlung auf. Die Gesamtrente war, weil an das Leben einer ganzen Gruppe geknüpft und darum erheblich später aufhörend, als wenn sie schon beim Tode eines einzelnen Rentenbeziehers erlöschte, wesentlich geringer als die Summe der Renten, welche die einzelnen Mitglieder mit dem gleichen Prämienbetrage sich hätten verschaffen können. Beim Absterben der einzelnen Mitglieder wurde aber die Gesamtrente unter immer weniger Personen geteilt und erreichte dadurch für die zuletzt Lebenden eine sehr bedeutende Höhe. Dem gleichen Gedanken der Erblichkeit der Bezugsrechte huldigt die in Amerika ziemlich beliebte Einrichtung des Tontinensparfond. Die Dividenden von zu einer Gruppe zusammentretenden Versicherten werden nicht ausgezahlt, sondern von der Gesellschaftsleitung verwaltet, und nach 10, 15 oder 20 Jahren, je nach der Frist, welche zur Zeit der Versicherungsnahme vom Antragsteller gewählt wurde, wird Rechnung über die angesammelten Dividenden gestellt und der Betrag unter die lebenden Mitglieder des Tontinensparfond verteilt. Der Betrag jeder Police, welche inzwischen durch Tod des Versicherten fällig wurde, wird selbstverständlich ohne Dividende an den Bezieher ausbezahlt, dagegen erhalten dem Tontinensparfond angehörende Policeninhaber, die ihre Versicherung vor der Zeit fallen lassen, keinen Rückkaufswert für ihre Policen, da dieser Rückkaufswert in den Tontinensparfond fällt.

Neuntes Kapitel.

Weniger einfache Versicherungsarten auf Grundlage der Sterblichkeit.

114] Wir kehren zu dem Gebiete der eigentlichen Versicherungen zurück, auf welchem neben den im siebenten Kapitel behandelten einfachen Lebensversicherungen und sofort beginnender vorschüssigen Rentenversicherung noch manche andere Versicherungsart eine Besprechung fordert. Wir wenden uns den aufgeschobenen Renten zu. Der Versicherungslustige ist h Jahre alt und verlangt, dafs ihm nach k Jahren, wenn er also, falls er noch am Leben ist, $h+k$ Jahre alt ist, eine alsdann erstmals und fortwährend am Anfang jedes erlebten Jahres zu erlegende Rente 1 ausgezahlt werde; was ist der Barwert ${}_{(k)}R_h$ dieser aufgeschobenen Rente? Denken wir uns die Rente als sofort beginnende vorschüssige Rente am Tage ihrer ersten Auszahlung erworben, so hat sie alsdann den Wert R_{h+k}, und da in jenem Augenblicke λ_{h+k} Lebende diese Rente erwerben können, so zahlen sie zusammen $\lambda_{h+k}\ R_{h+k}$. Die Rabattierung dieser Summe auf einen um k Jahre früheren Zeitpunkt liefert bei $3\frac{1}{2}$ % als dem von uns fortwährend benutzten Zinsfufse

$$\frac{\lambda_{h+k}\ R_{h+k}}{1{,}035^k}.$$

Zur Zahlung dieser Summe sind aber λ_h Lebende gemeinsam verpflichtet, und jeder Einzelne zahlt

$${}_{(k)}R_h = \frac{\lambda_{h+k}\ R_{h+k}}{1{,}035^k \cdot \lambda_h}.$$

Es ist nicht schwer, der Formel eine geschmeidigere Gestalt zu erteilen. Man hat nur den Zähler wie den Nenner des Bruches rechts vom Gleichheitszeichen durch $1{,}035^{h+k}$ zu dividieren, so erscheint im Zähler neben R_{h+k} noch

$$\frac{\lambda_{h+k}}{1{,}035^{h+k}} = v_{h+k}$$

und im Nenner

$$\frac{1{,}035^k \cdot \lambda_h}{1{,}035^{h+k}} = \frac{\lambda_h}{1{,}035^h} = v_h\,,$$

also im ganzen

$${}_{(k)}R_h = \frac{v_{h+k} \cdot R_{h+k}}{v_h}.$$

115] Der einfachste Fall besteht in $k=1$, d. h. die erste Auszahlung der Rente findet 1 Jahr nach dem Abschlusse des Vertrages statt. Dadurch verwandelt sich die vorschüssige Rente in eine nachschüssige Rente im Betrage 1, und ihr Barwert ist

$$_{(1)}R_h = \frac{v_{h+1} R_{h+1}}{v_h}.$$

Statt der deutschen Namen vorschüssig und nachschüssig sind vielfach auch die Fremdwörter *praenumerando* und *postnumerando* in Gebrauch. Wir wissen aus Nr. 101, dafs $R_h = \frac{\Sigma v_h}{v_h}$ und entsprechend auch $R_{h+1} = \frac{\Sigma v_{h+1}}{v_{h+1}} = \frac{\Sigma v_h - v_h}{v_{h+1}}$ ist. Daraus folgt

$$v_{h+1} R_{h+1} = \Sigma v_h - v_h$$

und

$$\frac{v_{h+1} R_{h+1}}{v_h} = \frac{\Sigma v_h}{v_h} - 1 = R_h - 1$$

oder

$$_{(1)}R_h = R_h - 1.$$

Der Sinn dieser letzten Gleichung ist aber einleuchtend. Wer im Alter von h Jahren eine vorschüssige Rente 1 erwirbt und dafür R_h zahlt, erhält sofort die erste Rente 1 zurück. Er kann ihren Betrag gegen seine Zahlung wettschlagen und nur $R_h - 1$ entrichten, wogegen die erste von ihm thatsächlich zu beziehende Rente am Anfange des zweiten Rentenjahres, der zeitlich mit dem Ende des ersten Rentenjahres zusammentrifft, fällig wird. Dann ist aber eben durch diese Verschiebung die vorschüssige Rente zu einer nachschüssigen geworden, und man hat ohne eigentliche Rechnung neuerdings das soeben hergeleitete

$$_{(1)}R_h = R_h - 1.$$

War also $R_{30} = 19{,}82$, so ist $_{(1)}R_{30} = 18{,}82$. Ferner ist $\lambda_{30} = 76\,058$, $v_{30} = \frac{76\,058}{1{,}035^{30}} = 27\,097$, $\lambda_{50} = 62\,317$, $v_{50} = \frac{62\,317}{1{,}035^{50}} = 11\,158$, $R_{50} = 15{,}05$ und $_{(20)}R_{30} = 15{,}05 \cdot \frac{11\,158}{27\,097} = 6{,}20$. Der 30jährige erwirbt also eine nachschüssige Rente 1 mit der Barzahlung 18,82, eine an seinem 50. Geburtstage beginnende Rente 1 mit der Barzahlung 6,20. Wir haben in diesen Beispielen und in allen folgenden ausschliefslich Nettowerte vor uns.

116] Der aufgeschobenen Rente steht die aufhörende oder temporäre Rente gegenüber, welche vorschüssig zahlbar etwa k Jahre lang zur Auszahlung gelangt, vorausgesetzt, dafs der Rentenbezieher nicht in der Zwischenzeit stirbt, wodurch die Rente vorzeitig erlischt. Der Barwert dieser Rente heifse ${}^{(k)}R_h$. Man kann sich die Sache so denken: der Rentenbezieher erhält eine sofort beginnende vorschüssige Rente 1, welche bis zu seinem Tode ausgezahlt wird, welche er aber, nachdem er sie $k$mal erhalten, also nachdem er $h+k-1$ Jahre alt geworden, nicht mehr behält, sondern von dem $h+k^{\text{ten}}$ Geburtstage an der Rentenanstalt zurückerstattet. Folglich ist

$$^{(k)}R_h = R_h - {}_{(k)}R_h\,.$$

Durch Einsetzung von ${}_{(k)}R_h = \frac{v_{h+k} R_{h+k}}{v_h}$ entsteht:

$$^{(k)}R_h = \frac{v_h R_h - v_{h+k} R_{h+k}}{v_h}\,.$$

Erinnert man sich aus Nr. 101 der Formel $R_h = \frac{\Sigma v_h}{v_h}$, aus welcher $v_h R_h = \Sigma v_h$ und ähnlicherweise $v_{h+k} R_{h+k} = \Sigma v_{h+k}$ folgt, so kann man auch schreiben:

$$^{(k)}R_h = \frac{\Sigma v_h - \Sigma v_{h+k}}{v_h}\,.$$

Ganz naturgemäfs mufs auch diese letzte Formel durch unmittelbare Herleitung entstehen. Die benutzten Summenzeichen bedeuten bekanntlich

$$\Sigma v_h = v_h + v_{h+1} + \cdots + v_{h+k-1} + v_{h+k} + \cdots + v_{85} + \cdots$$

und

$$\Sigma v_{h+k} = v_{h+k} + \cdots + v_{85} + \cdots,$$

also

$$\begin{aligned}\Sigma v_h - \Sigma v_{h+k} &= v_h + v_{h+1} + \cdots + v_{h+k-1}\\ &= \frac{\lambda_h}{1{,}035^h} + \frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035^{h+1}} + \cdots + \frac{\lambda_{h+k-1}}{1{,}035^{h+k-1}},\end{aligned}$$

während

$$v_h = \frac{\lambda_h}{1{,}035^h}\,.$$

Demnach wird

$$\frac{\Sigma v_h - \Sigma v_{h+k}}{v_h} = \frac{1}{\lambda_h}\left[\lambda_h + \frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035} + \cdots + \frac{\lambda_{h+k-1}}{1{,}035^{k-1}}\right],$$

und in der That ist ${}^{(k)}R_h$ der von λ_h Lebenden zu entrichtende Barwert der Rente 1, welche sofort von λ_h, nach einem Jahre von λ_{h+1}, nach $k-1$ Jahren von λ_{h+k-1} Lebenden bezogen wird.

In einem Zahlenbeispiele ist

$$^{(20)}R_{30} = \frac{v_{30} R_{30} - v_{50} R_{50}}{v_{30}} = \frac{27\,097 \cdot 19{,}82 - 11\,158 \cdot 15{,}05}{27\,097} = 13{,}62\,,$$

oder 13,62 ist der Barwert einer von einem 30jährigen 20mal zu beziehenden vorschüssigen Rente 1.

117] Man kann auch aufgeschobene temporäre Renten der Berechnung unterziehen. Sie entsprechen dem Falle, dafs der h jährige nach k Jahren erstmals und im ganzen $l$mal die Rente 1 zu beziehen wünscht; immer unter der Voraussetzung, dafs die Rente durch den Tod des Beziehers erlösche. Der gesuchte Barwert sei durch ${}^{(k+l)}_{(k)}R_h$ bezeichnet. Es leuchtet ein, dafs die gewünschten Zahlungen erfolgen, wenn der Versicherte eine um k Jahre aufgeschobene Rente erwirbt, eine um $k+l$ Jahre aufgeschobene Rente verspricht. Man hat also

$${}^{(k+l)}_{(k)}R_h = {}_{(k)}R_h - {}_{(k+l)}R_h$$

oder

$${}^{(k+l)}_{(k)}R_h = \frac{v_{h+k} R_{h+k} - v_{h+k+l} R_{h+k+l}}{v_h}$$

oder

$${}^{(k+l)}_{(k)}R_h = \frac{\Sigma v_{h+k} - \Sigma v_{h+k+l}}{v_h}.$$

Die Anwendung dieser Formel kommt insbesondere bei Militärversicherungen und Studienversicherungen in Betracht. Ein Vater wünscht seinem noch in den ersten Lebensjahren stehenden männlichen Kinde eine Rente zu erwerben, welche es dereinst während der Zeit seines Dienstes im Heere oder während seiner Studienzeit beziehen soll, falls es so lange am Leben bleibt.

118] Aufgeschobene Renten, mögen sie lebenslänglich oder temporär bezogen werden wollen, werden nur in den seltensten Fällen durch eine einmalige Barzahlung erworben, weil die auf einmal zu erlegenden Beträge eine beträchtliche Höhe erreichen. Wir fanden (Nr. 115) den Nettowert ${}_{(20)}R_{30} = 6{,}20$. Will also eine 30jährige Persönlichkeit sich eine mit dem 50. Jahre beginnende Rente von *M.* 1000 erwerben, so mufs sie *M.* 6200 erlegen, und dazu ist sie vielleicht nicht imstande, oder, wenn auch vielleicht Ersparnisse in diesem Betrage vorhanden sind, will sie dieselben nicht opfern, weil im Laufe der 20 Jahre, welche bis zum Fälligwerden der Rente verstreichen müssen, Ereignisse eintreten können, denen zu begegnen Barmittel erforderlich sind. Die voraussichtliche Erwerbsfähigkeit dagegen ist während der 20jährigen Zwischenzeit eine solche, dafs eine kleinere Summe jährlich erübrigt werden kann, und deshalb will die aufgeschobene Rente mittels Jahresprämien erworben werden. Zur Bezeichnung der Jahresprämie der um k Jahre aufgeschobenen Rente 1 im Alter des Versicherten von h Jahren dient $p\left[{}_{(k)}R_h\right]$. Der Barwert der $k$mal zu entrichtenden Jahreszahlung 1 ist ${}^{(k)}R_h$, und soll jährlich die Zahlung p, wie wir abkürzend schreiben wollen, erfolgen, so ist $p \cdot {}^{(k)}R_h$ ihr Barwert. Andererseits ist ${}_{(k)}R_h$ der Barwert der aufgeschobenen Rente 1. Bei der notwendigen Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ist also

$$p \cdot {}^{(k)}R_h = {}_{(k)}R_h\,,$$

und daraus folgt

$$p\left[{}_{(k)}R_h\right] = \frac{{}_{(k)}R_h}{{}^{(k)}R_h}\,.$$

Wir hatten in Nr. 115 und Nr. 116 die Zahlenwerte ${}_{(20)}R_{30} = 6{,}20$ und ${}^{(20)}R_{30} = 13{,}62$. Demzufolge wird $p\left[{}_{(20)}R_{30}\right] = \frac{6{,}20}{13{,}62} = 0{,}45$. Will der Rentenbetrag von ℳ 1000 erworben werden, so ist die jährliche Nettoprämie beiläufig ℳ 450. Auf grofse Genauigkeit macht diese mit nur 2 Decimalstellen in den wichtigsten Zahlen angestellte Rechnung keinen Anspruch.

119] Wenn wir in der vorigen Nummer mit der Herleitung der in ihr zur Kenntnis gebrachten Formel die Schilderung eines der Wirklichkeit entnommenen Falles, in welchem jene Formel Anwendung findet, verbanden, so wollen wir rückgreifend auch einen Fall schildern, welcher die Anwendung der Formel R_h betrifft, also die Preisgabe einer gröfseren Summe zum Zwecke des Erwerbes einer lebenslänglichen Rente. Der Fall, welchen wir wörtlich den Veröffentlichungen der Preufsischen Rentenversicherungsanstalt in Berlin entnehmen, und in welchem Bruttozahlen, nicht wie in unseren seitherigen Beispielen Nettozahlen, in Anwendung kommen, ist folgender. Ein Vater im Alter von 63 Jahren hat sein Vermögen von ℳ 100000 in $3\frac{1}{2}$%igen Staatspapieren angelegt und braucht den ihm dadurch erwachsenden Jahreszins von ℳ 3500 in seinem Haushalt. Er kann aber die gleiche lebenslängliche Rente von ℳ 3500 von der Rentenanstalt um rund ℳ 35000 erwerben. Er schmälert durch die Erwerbung allerdings die Erbschaft seiner Kinder um ℳ 35000, ist aber dafür imstande, ihnen sofort ℳ 65000 in die Hände zu geben, was für die Kinder meistens wertvoller sein wird, als die Aussicht auf ℳ 100000 beim Tode des Vaters.

120] Alle bisher gefundenen auf Renten bezügliche Formeln gehen von der Voraussetzung jährlich fälliger Renten aus. Für den Rentenbezieher ist es in den meisten Fällen angenehmer, wenn er die Rente ratenweise, etwa halbjährlich oder vierteljährlich, ausbezahlt erhält, bei jeder Zahlung die Hälfte oder den vierten Teil der ausbedungenen Rente. Dafs die von dem Versicherten zu fordernde Gegenleistung unter dieser Voraussetzung eine andere sein mufs, als in unseren seitherigen Formeln, oder anders ausgesprochen, dafs die Versicherungsanstalt sich nicht ohne weitere Entschädigung zur ratenweisen Rentenauszahlung verstehen wird, ist klar. Eine Änderung der betreffenden Gegenwerte wird in zweifacher Beziehung stattfinden müssen, und wenn wir auch nicht beabsichtigen, die Änderung selbst erschöpfend zu erörtern, so müssen wir doch die Richtungen andeuten, nach welchen sie erfolgt. Erstens ist die Sterblichkeitstafel im Sinne der neuen Zeiteinheit zu ergänzen. Das ist so gemeint. In der Sterblichkeitstafel sind die Zahlen λ_h, λ_{h+1}, $\tau_h = \lambda_h - \lambda_{h+1}$ angegeben. Man weifs also, dafs τ_h Todesfälle innerhalb des Jahres vorkommen, welches zwischen dem Vorhandensein von λ_h und von λ_{h+1} Lebenden verflossen ist, und diese Kenntnis genügt vollständig bei Jahresrenten, wo die Versicherungsanstalt an einem Zahlungstage λ_h an ebenso viele Rentenbezieher verabfolgt und am nächsten Zahlungstage λ_{h+1} wiederum an ebenso viele Rentenbezieher. Zerfällt aber das Jahr in $\frac{n}{n}$ kleinere Zeiteinheiten, z. B. in $\frac{4}{4}$, wenn vierteljährlich, in $\frac{12}{12}$, wenn monatliche Rentenzahlung erfolgt, welches letztere vorschüssig bei den Alters- und Invalidenversicherungen der Fall ist, welche die Deutsche Reichsgesetzgebung eingeführt hat, so bedarf man, da die fällige Rate stets nur an die Lebenden ausgezahlt wird, derjenigen Zwischenzahlen zwischen λ_h und λ_{h+1}, welche durch die ihnen naturgemäfse Bezeichnung $\lambda_{h+\frac{1}{n}}$, $\lambda_{h+\frac{2}{n}}$, $\cdots \lambda_{h+\frac{n-1}{n}}$ angedeutet werden. Wir haben in Nr. 90 von der üblichen Herstellung der Sterblichkeitstafeln gesprochen. Theoretisch hätte es nicht die geringste Schwierigkeit auch unter Innehaltung der viel engeren Grenzen von je $\frac{1}{n}$ Jahr eine neue Sterblichkeitstafel für ratenweisen Rentenbezug herzustellen, aber praktisch hat man die mit dieser Herstellung verbundene Mühe gescheut, und es ist kaum anzunehmen, man werde so bald von dieser Scheu zurückkommen. Wären alle λ_h am 1. Januar geboren, so würde eine erfahrungsmäfsige Herstellung neuer Sterblichkeitstafeln von Monat zu Monat höchst wahrscheinlich in Angriff genommen werden, weil sie nicht allein zur Berechnung von Monatsrenten dienen, sondern auch einen Einblick in den Einflufs der Jahreszeiten auf die Sterblichkeit überhaupt und auf die Sterblichkeit in verschiedenen Lebensaltern insbesondere gewähren würde. Aber die Geburten verteilen sich über das ganze Jahr, in jedem Monate werden also Todesfälle vorkommen, welche als $\tau_{h+\frac{m}{n}}$ bezeichnet werden müssen, und der erwähnte Vorteil würde aus der Anfertigung von Monats-Sterblichkeitstafeln nicht zu erzielen sein. Man hilft sich deshalb mit der Annahme, innerhalb eines Lebensjahres verteilten sich die Todesfälle gleichmäfsig, oder es sei

$$\tau_{h+\frac{0}{n}} = \tau_{h+\frac{1}{n}} = \cdots = \tau_{h+\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\,\tau_h = \frac{\lambda_h - \lambda_{h+1}}{n}.$$

Mittels dieser Annahme ist aber auch jedes $\lambda_{h+\frac{m}{n}}$ gegeben. Man erkennt sofort:

$$\begin{aligned}
\lambda_h &= \frac{n}{n}\,\lambda_h \\
\lambda_{h+\frac{1}{n}} &= \lambda_h - \frac{1}{n}\left(\lambda_h - \lambda_{h+1}\right) = \frac{n-1}{n}\,\lambda_h + \frac{1}{n}\,\lambda_{h+1} \\
\lambda_{h+\frac{2}{n}} &= \lambda_{h+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\left(\lambda_h - \lambda_{h+1}\right) = \frac{n-2}{n}\,\lambda_h + \frac{2}{n}\,\lambda_{h+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_{h+\frac{m}{n}} &= \lambda_{h+\frac{m-1}{n}} - \frac{1}{n}\left(\lambda_h - \lambda_{h+1}\right) = \frac{n-m}{n}\,\lambda_h + \frac{m}{n}\,\lambda_{h+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_{h+\frac{n-1}{n}} &= \lambda_{h+\frac{n-2}{n}} - \frac{1}{n}\left(\lambda_h - \lambda_{h+1}\right) = \frac{1}{n}\,\lambda_h + \frac{n-1}{n}\,\lambda_{h+1}.
\end{aligned}$$

Ist 1 der Betrag der Jahresrente, so wird $\frac{1}{n}$ der Betrag einer jeden der n Raten sein, in welchen die Jahresrente zur Zahlung gelangt; an die $\lambda_{h+\frac{m}{n}}$ ist also der Betrag $\frac{(n-m)}{n^2}\,\lambda_h + \frac{m}{n^2}\,\lambda_{h+1}$ auszuzahlen. Zur Berechnung des Barwertes der einzelnen Ratenzahlungen ist deren Diskontierung vorzunehmen, und hier ist die zweite Richtung, nach welcher eine Abänderung der früheren Formeln nötig fällt: Zweitens mufs der Zinsfufs der neuen Zeiteinheit entsprechen.

Wir wissen aus Nr. 46, das $K_0 = \frac{K_n}{1{,}0p^n}$ aufhört richtig zu sein, wenn n keine ganze Zahl ist, und aus Nr. 47, dafs man alsdann auf den relativen Zinsfufs zurückzugreifen hat. Ist $3\frac{1}{2}\,\%$ fortwährend der Jahreszinsfufs, so wird bei Halbjahresrenten der relative Zinsfufs $1\frac{3}{4}\,\%$, bei Vierteljahresrenten wird er $\frac{7}{8}\,\%$, bei Monatsrenten $\frac{7}{24}\,\%$, und dem entsprechend wird $1{,}0p$ für die betreffende Zeiteinheit $\frac{407}{400}$, $\frac{807}{800}$, $\frac{2407}{2400}$. Sind n Raten zur Auszahlung der Rente bedungen, so ist $\frac{200n+7}{200n}$ an die Stelle von $1{,}0p$ zu setzen, während als Zeit das $n$fache des Stellenzeigers des betreffenden λ gewählt werden mufs, um v aus λ herzustellen. Man hat also den auf die Geburtszeit zurückgeführten Wert der an $\lambda_{h+\frac{m}{n}}$ auszuzahlenden Rentenrate, welchen man $v_{h+\frac{m}{n}}$ nennen kann:

$$v_{h+\frac{m}{n}} = \left(\frac{200n}{200n+7}\right)^{nh+m} \cdot \left[\frac{n-m}{n^2}\lambda_h + \frac{m}{n^2}\lambda_{h+1}\right].$$

Mit diesen v mit gebrochenem Stellenzeiger ist alsdann weiter zu rechnen, wie wir es bei den früheren, ganzjährige Renten voraussetzenden Aufgaben mit den v mit ganzzahligem Stellenzeiger gethan haben.

121] Als Abart der einfachen Lebensversicherung ist die abgekürzte Lebensversicherung zu erwähnen. Die Abkürzung besteht darin, dafs die Versicherungssumme, abgesehen von ihrem Fälligwerden beim Tode des Versicherten, nicht erst (Nr. 99) nach zurückgelegtem 85. Lebensjahre, sondern zu einem früheren Zeitpunkte ausgezahlt wird. Als dieser Zeitpunkt gilt meistens das erreichte Alter von 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 oder 70 Jahren. Zwischen dem Zeitpunkte des Vertragsabschlusses, der (Nr. 98) nach der Vollendung des 18. Lebensjahres des Versicherten gestattet ist, und jenem, nach welchem auch bei Lebzeiten des Versicherten das versicherte Kapital ausgezahlt werden soll, müssen mindestens 10 Jahre liegen. Die Prämienberechnung ist genau nach den Formeln der einfachen Lebensversicherung, aber unter Innehaltung der Regel auszuführen, dafs, wenn der Zeitpunkt der Auszahlung bei Lebzeiten das vollendete m^{te} Lebensjahr ist, $\tau_m = \lambda_m$ gesetzt werden mufs und die Summe der diskontierten Lebenden entsprechend früher abbricht. Die abgekürzte Lebensversicherung wird unter Zugrundelegung der Sterblichkeitstafel Nr. 93 abgeschlossen. Eine einfache oder auch abgekürzte Lebensversicherung, welche schon in ganz jugendlichem Alter des Versicherten abgeschlossen würde, gehen die Lebensversicherungsanstalten im engeren Sinne des Wortes nicht ein. Dafür gestatten die Rentenanstalten eine unter Zugrundelegung der Sterblichkeitstafel Nr. 94 abgeschlossene Kapitalversicherung auf den Erlebensfall, welche sich in manchen Fällen als Ausstattungsversicherung darstellt. Ist k das Alter, auf welches das Fälligwerden der Versicherungssumme 1 ausbedungen ist, so ist λ_k diskontiert auf den Augenblick des Vertragsabschlusses die

Leistung der Rentenanstalt, während die Gegenleistung des Versicherten entweder eine einmalige jenem diskontierten Betrage gleiche Zahlung sein mufs oder eine ihr gleichwertige Jahresprämie, welche als beim Anfang des k^{ten} Jahres des Versicherten aufhörende vom Versicherten zu zahlende Rente zu betrachten ist.

122] Die Kapitalversicherung auf den Erlebensfall unterscheidet sich von der abgekürzten Lebensversicherung, abgesehen von dem Zeitpunkte des gestatteten Vertragsabschlusses wesentlich dadurch, dafs, finanziell gesprochen, der vor dem Zeitpunkte der Auszahlung bei Lebzeiten eintretende Tod des Versicherten bei der Versicherung für den Erlebensfall für die Versicherungsanstalt erwünscht ist, weil sie alsdann überhaupt nichts zu zahlen hat, bei der abgekürzten Lebensversicherung unerwünscht, weil alsdann die Zahlungspflicht für die Anstalt früher eintritt, als es nötig wäre. Wünscht der Versicherte, dafs seine der Anstalt gegenüber erfüllte Leistung unter keinen Umständen ganz verloren gehe, so kann er eine sogenannte Rückgewähr bedingen, welche darin besteht, dafs die von dem Versicherten bezahlten Prämien ihrem Nettobetrage nach (also bei der Preufsischen Rentenversicherungsanstalt in Berlin mit 95 % des Bruttobetrages gemäfs Nr. 107) zurückbezahlt werden, wenn der Versicherte stirbt, bevor er das auf den Erlebensfall ausbedungene Kapital oder die erste Auszahlung einer aufgeschobenen Rente erhalten hat. Selbstverständlich mufs für diese Vergünstigung eine besondere Rückgewährprämie bezahlt werden, deren Berechnung wir uns zuwenden. Im Alter von h Jahren zahlt von den λ_h Lebenden jeder die Prämie $p\left[{}_{(k)}R_h\right]$, welche auch kurzweg p heifsen mag, und auch in den folgenden Jahren zahlt jeder Lebende die Prämie p, damit nach Ablauf von k Jahren jeder Lebende jährlich die Rente 1 beziehe (Nr. 118). Gleichzeitig mit der Prämie p zahlt jeder Lebende auch die Rückgewährprämie $\mathfrak{p}$, welche wir suchen. Die Einnahmen der Versicherungsanstalt, welche aus der Rückgewährprämie herstammen, sind auf den Augenblick des Vertragsabschlusses zurückdiskontiert

$$\left[\lambda_h + \frac{\lambda_{h+1}}{1{,}035} + \frac{\lambda_{h+2}}{1{,}035^2} + \cdots + \frac{\lambda_{h+k-1}}{1{,}035^{k-1}}\right]\mathfrak{p}$$

$$= 1{,}035^h \cdot \mathfrak{p}\left[v_h + v_{h+1} + v_{h+2} + \cdots + v_{h+k-1}\right]$$

$$= 1{,}035^h \cdot \mathfrak{p}\left[\Sigma v_h - \Sigma v_{h+k}\right].$$

Nun fragen wir nach den aus der Rückgewähr stammenden Ausgaben der Versicherungsanstalt, welche stets am Ende des Jahres, in welchem sie fällig werden, ausbezahlt und sämtlich auf den Augenblick des Vertragsabschlusses zurückdiskontiert werden. Im ersten Vertragsjahre sterben τ_h, von welchen jeder 1mal $p + \mathfrak{p}$ gezahlt hat, zusammen $1 \cdot \tau_h(p+\mathfrak{p})$ mit dem Barwerte $\frac{1 \cdot \tau_h}{1{,}035}(p+\mathfrak{p})$. Im zweiten Vertragsjahre sterben τ_{h+1}, von welchen jeder 2mal $p+\mathfrak{p}$ gezahlt hat, zusammen $2 \cdot \tau_{h+1}(p+\mathfrak{p})$ mit dem Barwerte $\frac{2 \cdot \tau_{h+1}}{1{,}035^2}(p+\mathfrak{p})$. Im k^{ten} Vertragsjahre sterben τ_{h+k-1}, von welchen jeder $k$mal $p+\mathfrak{p}$ gezahlt hat, zusammen $k \cdot \tau_{h+k-1}(p+\mathfrak{p})$ mit dem Barwerte $\frac{k \cdot \tau_{h+k-1}}{1{,}035^k}(p+\mathfrak{p})$. Die Gesamtleistung berechnet sich folglich auf

$$\left[\frac{1 \cdot \tau_h}{1{,}035}+\frac{2 \cdot \tau_{h+1}}{1{,}035^2}+\frac{3 \cdot \tau_{h+2}}{1{,}035^3}+\cdots+\frac{k \cdot \tau_{h+k-1}}{1{,}035^k}\right](p+\mathfrak{p})$$

$$=1{,}035^h(p+\mathfrak{p})\left[1 \cdot m_h+2 \cdot m_{h+1}+\cdots+k \cdot m_{h+k-1}\right].$$

Leistung und Gegenleistung müssen einander gleich sein. Wir haben folglich

$$1{,}035^h\,\mathfrak{p}\left[v_h+v_{h+1}+\cdots+v_{h+k-1}\right]$$
$$=1{,}035^h(\mathfrak{p}+p)\left[1 \cdot m_h+2 \cdot m_{h+1}+\cdots+k \cdot m_{h+k-1}\right]$$

$$\mathfrak{p}\left[(v_h-1 \cdot m_h)+(v_{h+1}-2 \cdot m_{h+1})+\cdots+(v_{h+k-1}-k \cdot m_{h+k-1})\right]$$
$$=p\left[1 \cdot m_h+2 \cdot m_{h+1}+\cdots+k \cdot m_{h+k-1}\right]$$

und endlich:

$$\mathfrak{p}=p \cdot \frac{1 \cdot m_h+2 \cdot m_{h+1}+\cdots+k \cdot m_{h+k-1}}{(v_h-1 \cdot m_h)+(v_{h+1}-2 \cdot m_{h+1})+\cdots+(v_{h+k-1}-k \cdot m_{h+k-1})}.$$

In anderen Fällen erfolgt die Berechnung der Rückgewährprämie nach ähnlichem Gedankengang.

123] In unseren seitherigen Untersuchungen war das Leben und Sterben einer Persönlichkeit ausschlaggebend für die Leistungen des Versicherten an die Versicherungsanstalt und für deren Gegenleistung. Man kann aber auch Versicherungen eingehen, bei denen das Leben zweier Persönlichkeiten zu beobachten ist. Wir meinen zunächst die Verbindungsrente. Man versteht darunter eine sofort beginnende vorschüssige Rente 1, welche so lange bezogen wird, als zwei Personen, deren eine beim Vertragsabschlufs h, die andere k Jahre alt ist, beide noch leben. Der Barwert dieser Rente soll $R_{h,k}$ sein. Aus λ_h Personen, die im Alter von h Jahren, und λ_k Personen, die im Alter von k Jahren stehen, lassen sich, wenn jeder Lebende des einen Alters mit jedem Lebenden des anderen Alters abgepaart wird, $\lambda_h \cdot \lambda_k$ Paare bilden, von welchen man annimmt, dafs sie insgesamt die Versicherung eingehen. Die Rentenanstalt hat also zu Beginn $\lambda_h \cdot \lambda_k$ zu zahlen. Nach Jahresumlauf sind noch λ_{h+1} Lebende der einen, λ_{k+1} Lebende der anderen Klasse vorhanden, die sich zu $\lambda_{h+1} \cdot \lambda_{k+1}$ Paaren vereinigen, und ihnen hat die Rentenanstalt $\lambda_{h+1} \cdot \lambda_{k+1}$ zu zahlen, welcher Betrag auf die Zeit des Vertragsabschlusses diskontiert den Barwert $\frac{\lambda_{h+1} \cdot \lambda_{k+1}}{1{,}035}$ besitzt. Die ähnlichen Schlüsse führen zu $\frac{\lambda_{h+2} \cdot \lambda_{k+2}}{1{,}035^2}$ als Barwert der von der Rentenanstalt nach 2 Jahren zu leistenden Zahlung u. s. w. Die Gesamtleistung der Rentenanstalt hat also den Barwert

$$\lambda_h \cdot \lambda_k + \frac{\lambda_{h+1} \cdot \lambda_{k+1}}{1{,}035} + \frac{\lambda_{h+2} \cdot \lambda_{k+2}}{1{,}035^2} + \cdots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn λ_{h+n} oder λ_{k+n} zu Null wird, was der Sterblichkeitstafel nach zuerst bei λ_{h+n} zutreffen wird, wenn wir $h > k$ annehmen. Ist $h = k$, so verschwinden λ_{h+n} und λ_{k+n} gleichzeitig. Die als Gegenleistung der Versicherten zu zahlende Summe ist $\lambda_h \cdot \lambda_k \cdot R_{h,k}$, da wir $\lambda_h \cdot \lambda_k$ sich versichernde Paare voraussetzten. Demzufolge ist

$$R_{h,k} = \frac{\lambda_h \cdot \lambda_k + \frac{\lambda_{h+1} \cdot \lambda_{k+1}}{1{,}035} + \frac{\lambda_{h+2} \cdot \lambda_{k+2}}{1{,}035^2} + \cdots}{\lambda_h \cdot \lambda_k}.$$

Man kann dieser Formel unter Anwendung der v eine andere Gestalt geben, indem man Zähler und Nenner des rechts befindlichen Bruches entweder durch $1{,}035^h$ oder durch $1{,}035^k$ dividiert So entsteht

$$R_{h,k} = \frac{v_h \cdot \lambda_k + v_{h+1} \cdot \lambda_{k+1} + v_{h+2} \cdot \lambda_{k+2} + \cdots}{v_h \cdot \lambda_k} = \frac{\Sigma v_h \lambda_k}{v_h \lambda_k}$$

oder

$$R_{h,k} = \frac{\lambda_h \cdot v_k + \lambda_{h+1} \cdot v_{k+1} + \lambda_{h+2} \cdot v_{k+2} + \cdots}{\lambda_h \cdot v_k} = \frac{\Sigma v_k \lambda_h}{v_k \lambda_h}$$

mit leicht verständlichem Sinne der durch das Summenzeichen Σ vermittelten Abkürzungen. Verbindungsrenten selbst werden thatsächlich kaum jemals ausbedungen werden, wohl aber dient das einmal berechnete $R_{h,k}$ zur Lösung anderer, wirklichen Verhältnissen entsprechender Aufgaben.

124] Ein der Wirklichkeit entnommener Fall ist der, dafs man zwei Personen, etwa einem Ehepaar, dadurch ein sorgenloses Alter verschaffen will, dafs man ihnen eine Rente 1 sichert, welche wieder sofort beginnt und vorschüssig bezogen wird, aber nicht aufhören soll, wenn eine der beiden das Paar bildenden Personen stirbt, sondern bis zum Tode auch des überlebenden Teiles fortdauert. Als Zeichen für den Barwert dieser Rente für zwei Personen bis zum Tode der zuletzt sterbenden Person ist ${}^{\mathrm{II}}R_{h,k}$. Man könnte die zur Kenntnis dieses Barwertes führende Formel unmittelbar herleiten, aber mittelbar ist dieselbe wesentlich einfacher zu erhalten. Versichert man die h jährige Person und ebenso die k jährige, eine jede allein, mit der Rente 1, so mufs dafür an die Rentenanstalt $R_h + R_k$ gezahlt werden. Der Erfolg ist, dafs die Rentenanstalt, so lange beide Personen leben, jährlich 2 und nach dem Tode der Zuerststerbenden noch jährlich 1 zu zahlen hat. Sie möchte aber jährlich nur 1 bezahlen, mufs sich also von der Zahlungspflicht 1, so lange beide Personen leben, befreien; dieses geschieht durch Rückerstattung des Barwertes $R_{h,k}$ einer Verbindungsrente 1. Demnach ist

$${}^{\mathrm{II}}R_{h,k} = R_h + R_k - R_{h,k}.$$

125] Überlebensrente mit dem Barwerte ${}_{\mathrm{I}}R_{h,k}$ wird die vorschüssige Rente 1 genannt, welche mit dem Tode einer von zwei Persönlichkeiten, die beim Vertragsschlusse im Alter von h und von k Jahren stehen, beginnt und bis zum Tode des Überlebenden andauert. Die Überlebensrente ist ersichtlich nichts anderes, als eine um die Verbindungsrente verkürzte Rente für zwei Personen bis zum Tode der zuletzt sterbenden Person, oder es ist

$${}_{\mathrm{I}}R_{h,k} = {}^{\mathrm{II}}R_{h,k} - R_{h,k}.$$

Führt man den in der vorigen Nummer gewonnenen Wert von ${}^{\mathrm{II}}R_{h,k}$ ein, so entsteht

$${}_{\mathrm{I}}R_{h,k} = R_h + R_k - 2R_{h,k}.$$

Auch diese letztere Formel ist in ihren einzelnen Teilen leicht verständlich. Sie sagt aus, eine Überlebensrente 1 entstehe, wenn sowohl dem $h$jährigen als dem $k$jährigen Gliede des versicherten Paares die Rente 1 zukomme, wogegen, so lange beide leben, die Rente 2 zurückgegeben werde. In der That hat dem entsprechend, so lange das Paar lebt, die Rentenanstalt gar nichts zu zahlen, und bei dem Tode des Zuerststerbenden erlischt mit der Verbindungsrente auch dessen eigene Rente, sodafs nur die Verpflichtung zur Zahlung der Rente an den Überlebenden der Rentenanstalt zur Last fällt.

126] Die Überlebensrente wird zur Versorgungsrente oder einseitigen Überlebensrente mit dem Barwerte $R_{[h],k}$, wenn die Rente nur durch die beim Vertragsabschlusse $k$jährige Person, falls sie die damals $h$jährige überlebt, von deren Tode an bezogen werden soll. Offenbar entspricht es den Bedingungen der Aufgabe, wenn für die zu versorgende Persönlichkeit eine Lebensrente 1 erworben und dieselbe um die Verbindungsrente 1 verkürzt wird. Man hat demnach

$$R_{[h],k} = R_k - R_{h,k}.$$

Gleichzeitiges Erwerben einer Versorgungsrente für beide Glieder des versicherten Paares bringt eine Überlebensrente hervor, oder es mufs sein:

$$R_{[h],k} + R_{[k],h} = {}_1R_{h,k}.$$

Das bestätigt sich mittels

$$R_{[k],h} = R_h - R_{h,k},$$

welches zu dem Werte von $R_{[h],k}$ addiert die Summe

$$R_{[h],k} + R_{[k],h} = R_h + R_k - 2R_{h,k} = {}_1R_{h,k}$$

liefert, wenn Nr. 125 berücksichtigt wird.

127] Will man die Versorgungsrente nicht durch einmalige Einzahlung von $R_{[h],k}$, sondern durch eine Jahresprämie erwerben, welche, entsprechend der Bezeichnung von Nr. 118, durch $p[R_{[h],k}]$ oder schlechtweg durch p dargestellt sein soll, und welche jährlich bezahlt werden mufs, so lange der Versorger und der Versorgte zugleich am Leben sind, so enthüllt sich die Prämienzahlung dieser Festsetzung nach als Verbindungsrente des Versorgers und des Versorgten. Diese Verbindungsrente hat (Nr. 123) den Barwert $R_{h,k}$, wenn sie im Betrage 1 auszuzahlen ist, und $p \cdot R_{h,k}$, wenn ihr Betrag zu p angenommen ist. Gleichheit zwischen Leistung und Gegenleistung fordert demnach:

$$p \cdot R_{h,k} = R_{[h],k} = R_k - R_{h,k},$$

und daraus erkennt man

$$p[R_{[h],k}] = \frac{R_k}{R_{h,k}} - 1,$$

d. h. die Jahresprämie für eine Versorgungsrente im Betrage 1 ist um 1 geringer als der Quotient aus der Lebensrente des Versorgten durch die Verbindungsrente des Versorgers und des Versorgten.

Damit dürften die wichtigsten in den Rechnungen der Lebensversicherungs- und der Rentenanstalten zur Anwendung kommenden Formeln angegeben sein. Wir bemerken dazu, dafs unsere Bezeichnungen diejenigen sind, deren die deutschen Anstalten sich bedienen, und welche fast alle auch in dem von den Versicherungsmathematikern oft benutzten Werke: *Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen systematisch entwickelt* von Dr. August Zillmer vorkommen.

Anhang.

Tafel für $1,0p^n$ und $1,0p^{-n}$ bei $p=3, p=3\frac{1}{2}, p=4$ und $n=1$ bis $n=100$.

$n=$	$1,03^n$	$1,03^{-n}$	$1,035^n$	$1,035^{-n}$	$1,04^n$	$1,04^{-n}$
1	1,0300000	0,9708738	1,0350000	0,9661836	1,0400000	0,9615385
2	1,0609000	0,9425959	1,0712250	0,9335107	1,0816000	0,9245562
3	1,0927270	0,9151417	1,1087179	0,9019427	1,1248640	0,8889964
4	1,1255088	0,8884870	1,1475230	0,8714422	1,1698586	0,8548042
5	1,1592741	0,8626088	1,1876863	0,8419732	1,2166529	0,8219271
6	1,1940523	0,8374843	1,2292553	0,8135006	1,2653190	0,7903145
7	1,2298739	0,8130915	1,2722793	0,7859910	1,3159318	0,7599178
8	1,2667701	0,7894092	1,3168090	0,7594116	1,3685690	0,7306902
9	1,3047732	0,7664167	1,3628973	0,7337310	1,4233118	0,7025867
10	1,3439164	0,7440939	1,4105988	0,7089188	1,4802443	0,6755642
11	1,3842339	0,7224213	1,4599697	0,6849457	1,5394541	0,6495809
12	1,4257609	0,7013799	1,5110687	0,6617833	1,6010322	0,6245970
13	1,4685337	0,6809513	1,5639561	0,6394042	1,6650735	0,6005741
14	1,5125897	0,6611178	1,6186945	0,6177818	1,7316764	0,5774751
15	1,5579674	0,6418619	1,6753488	0,5968906	1,8009435	0,5552645
16	1,6047064	0,6231669	1,7339860	0,5767059	1,8729812	0,5339082
17	1,6528476	0,6050164	1,7946755	0,5572038	1,9479005	0,5133732
18	1,7024331	0,5873946	1,8574892	0,5383611	2,0258165	0,4936281
19	1,7535060	0,5702860	1,9225013	0,5201557	2,1068492	0,4746424
20	1,8061112	0,5536758	1,9897889	0,5025659	2,1911231	0,4563869
21	1,8602946	0,5375493	2,0594315	0,4855709	2,2787681	0,4388336
22	1,9161034	0,5218925	2,1315116	0,4691506	2,3699188	0,4219554
23	1,9735865	0,5066917	2,2061145	0,4532856	2,4647155	0,4057263
24	2,0327941	0,4919337	2,2833285	0,4379571	2,5633042	0,3901215
25	2,0937779	0,4776056	2,3632450	0,4231470	2,6658363	0,3751168
26	2,1565913	0,4636947	2,4459586	0,4088377	2,7724698	0,3606892
27	2,2212890	0,4501891	2,5315671	0,3950122	2,8833686	0,3468166
28	2,2879277	0,4370768	2,6201720	0,3816543	2,9987033	0,3334775
29	2,3565655	0,4243464	2,7118780	0,3687482	3,1186514	0,3206514
30	2,4272625	0,4119868	2,8067937	0,3562784	3,2433975	0,3083187
31	2,5000803	0,3999871	2,9050315	0,3442303	3,3731334	0,2964603
32	2,5750828	0,3883370	3,0067076	0,3325897	3,5080587	0,2850579
33	2,6523352	0,3770262	3,1119423	0,3213427	3,6483811	0,2740942
34	2,7319053	0,3660449	3,2208603	0,3104761	3,7943163	0,2635521
35	2,8138624	0,3553834	3,3335904	0,2999769	3,9460890	0,2534155
36	2,8982783	0,3450324	3,4502661	0,2898327	4,1039325	0,2436687
37	2,9852267	0,3349829	3,5710254	0,2800316	4,2680899	0,2342968
38	3,0747835	0,3252262	3,6960113	0,2705619	4,4388134	0,2252854
39	3,1670270	0,3157535	3,8253717	0,2614125	4,6163660	0,2166206
40	3,2620378	0,3065568	3,9592597	0,2525725	4,8010206	0,2082890
41	3,3598989	0,2976280	4,0978338	0,2440314	4,9930614	0,2002779
42	3,4606959	0,2889592	4,2412580	0,2357791	5,1927839	0,1925749
43	3,5645168	0,2805429	4,3897020	0,2278059	5,4004953	0,1851682
44	3,6714523	0,2723718	4,5433416	0,2201023	5,6165151	0,1780463
45	3,7815598	0,2644386	4,7023585	0,2126592	5,8411757	0,1711984
46	3,8950437	0,2567365	4,8669411	0,2054679	6,0748227	0,1646139
47	4,0118950	0,2492588	5,0372840	0,1985197	6,3178156	0,1582826
48	4,1322519	0,2419988	5,2135890	0,1918065	6,5705282	0,1521948
49	4,2562194	0,2349503	5,3960646	0,1853202	6,8333494	0,1463411

$n=$	$1{,}03^{n}$	$1{,}03^{-n}$	$1{,}035^{n}$	$1{,}035^{-n}$	$1{,}04^{n}$	$1{,}04^{-n}$
50	4,3839060	0,2281071	5,5849269	0,1790534	7,1066833	0,1407126
51	4,5154232	0,2214632	5,7803993	0,1729984	7,3909507	0,1353006
52	4,6508859	0,2150128	5,9827133	0,1671482	7,6865887	0,1300967
53	4,7904125	0,2087503	6,1921082	0,1614959	7,9940523	0,1250930
54	4,9341248	0,2026702	6,4088320	0,1560347	8,3138143	0,1202817
55	5,0821486	0,1967672	6,6331411	0,1507581	8,6463669	0,1156555
56	5,2346130	0,1910361	6,8653011	0,1456600	8,9922216	0,1112072
57	5,3916514	0,1854719	7,1055866	0,1407343	9,3519105	0,1069300
58	5,5534010	0,1800698	7,3542821	0,1359752	9,7259869	0,1028173
59	5,7200030	0,1748251	7,6116820	0,1313770	10,1150264	0,0988628
60	5,8916031	0,1697331	7,8780909	0,1269343	10,5196274	0,0950604
61	6,0683512	0,1647894	8,1538241	0,1226418	10,9404125	0,0914042
62	6,2504017	0,1599897	8,4392079	0,1184945	11,3780290	0,0878887
63	6,4379138	0,1553298	8,7345802	0,1144875	11,8331502	0,0845084
64	6,6310512	0,1508057	9,0402905	0,1106159	12,3064762	0,0812580
65	6,8299827	0,1464133	9,3567007	0,1068753	12,7987352	0,0781327
66	7,0348822	0,1421488	9,6841852	0,1032611	13,3106846	0,0751276
67	7,2459287	0,1380085	10,0231317	0,0997692	13,8431120	0,0722381
68	7,4633065	0,1339889	10,3739413	0,0963954	14,3968365	0,0694597
69	7,6872057	0,1300863	10,7370292	0,0931356	14,9727099	0,0667882
70	7,9178219	0,1262974	11,1128253	0,0899861	15,5716183	0,0642194
71	8,1553566	0,1226188	11,5017741	0,0869431	16,1944831	0,0617494
72	8,4000173	0,1190474	11,9043362	0,0840030	16,8422624	0,0593744
73	8,6520178	0,1155800	12,3209880	0,0811623	17,5159529	0,0570908
74	8,9115783	0,1122136	12,7522226	0,0784177	18,2165910	0,0548950
75	9,1789257	0,1089452	13,1985504	0,0757659	18,9452547	0,0527837
76	9,4542934	0,1057721	13,6604997	0,0732038	19,7030648	0,0507535
77	9,7379222	0,1026913	14,1386171	0,0707283	20,4911874	0,0488015
78	10,0300599	0,0997003	14,6334687	0,0683365	21,3108349	0,0469245
79	10,3309617	0,0967964	15,1456401	0,0660256	22,1632683	0,0451197
80	10,6408906	0,0939771	15,6757375	0,0637929	23,0497991	0,0433843
81	10,9601173	0,0912399	16,2243883	0,0616356	23,9717910	0,0417157
82	11,2889208	0,0885824	16,7922419	0,0595513	24,9306627	0,0401112
83	11,6275884	0,0860024	17,3799704	0,0575375	25,9278892	0,0385685
84	11,9764161	0,0834974	17,9882694	0,0555918	26,9650047	0,0370851
85	12,3357085	0,0810655	18,6178588	0,0537119	28,0436049	0,0356588
86	12,7057798	0,0787043	19,2694839	0,0518955	29,1653491	0,0342873
87	13,0869532	0,0764120	19,9439158	0,0501406	30,3319631	0,0329685
88	13,4795618	0,0741864	20,6419528	0,0484450	31,5452416	0,0317005
89	13,8839486	0,0720256	21,3644212	0,0468068	32,8070513	0,0304813
90	14,3004671	0,0699278	22,1121759	0,0452240	34,1193333	0,0293089
91	14,7294811	0,0678911	22,8861021	0,0436946	35,4841067	0,0281816
92	15,1713656	0,0659136	23,6871157	0,0422170	36,9034709	0,0270977
93	15,6265065	0,0639938	24,5161647	0,0407894	38,3796098	0,0260555
94	16,0953017	0,0621299	25,3742305	0,0394101	39,9147942	0,0250534
95	16,5781608	0,0603203	26,2623286	0,0380774	41,5113859	0,0240898
96	17,0755056	0,0585634	27,1815101	0,0367897	43,1718414	0,0231632
97	17,5877708	0,0568577	28,1328629	0,0355456	44,8987150	0,0222724
98	18,1154039	0,0552016	29,1175131	0,0343436	46,6946636	0,0214157
99	18,6588660	0,0535938	30,1366261	0,0331822	48,5624502	0,0205920
100	19,2186320	0,0520328	31,1914080	0,0320601	50,5049482	0,0198000