

---

# LA DÉCIMALISATION DE L'HEURE

ET

## DE LA CIRCONFÉRENCE

---

*L'Éclairage électrique*, t. 11, p. 529-531 (12 juin 1897).

---

M. Cornu a publié, dans un des numéros précédents, un fort intéressant article sur les projets de décimalisation du temps et de la circonférence.

Pour faire connaître aux lecteurs de *L'Éclairage* toutes les opinions, je voudrais reproduire quelques-unes des raisons que j'ai fait valoir devant la Commission, instituée pour étudier cette question.

La question présente un aspect complexe : bien des intérêts différents étaient à ménager, on ne pouvait aboutir qu'à une cote mal taillée.

De pareilles solutions ne satisfont parfaitement personne et il est aisé, en les jugeant d'un point de vue exclusif, de les accabler de critiques.

Mais il suffit qu'elles réalisent un progrès pour que l'on s'y résigne.

Pour mon compte, mes préférences étaient pour le système Sarrauton; j'ai néanmoins accepté de faire le rapport bien qu'une solution différente ait prévalu.

Le seul point essentiel à mes yeux, c'est qu'on fera disparaître les « nombres complexes » tels que  $8^h 25^m 40^s$ ,  $25^o 17' 14''$ , etc.

Le choix des unités importe peu pourvu qu'elles soient divisées décimalement.

Je crois que les électriciens se sont exagéré les inconvénients qui résulteraient pour eux de la réforme; ceux qu'engendrerait la nécessité de renouveler les chronomètres et les cercles divisés sont bien autrement considérables.

Voici la portion du rapport qui est relative au système C. G. S.

« Pour les mécaniciens, les physiciens, les électriciens, l'unité de temps est la seconde; ils se servent rarement de l'heure et de la minute, de sorte qu'un changement d'unité serait pour eux une gêne presque sans compensation.

« Mais ce n'est pas tout; des trois unités fondamentales : longueur, masse et temps, dérivent toutes les unités secondaires, on ne pourrait toucher à la seconde sans modifier en même temps l'unité de force, et les unités électriques, ohm, ampère, volt, etc.

« A la suite de longues discussions, les physiciens sont arrivés à un système d'unités parfaitement cohérent et tout à fait satisfaisant pour l'esprit. Son avènement a paru un progrès comparable à l'invention du système métrique. Il est clair que les physiciens ne pourraient l'abandonner sans répugnance.

« Sans doute un changement ne rencontrerait pas des obstacles matériels insurmontables; mais l'uniformité des mesures électriques est une conquête trop récente et trop précieuse. On craindrait de la compromettre en remettant tout en discussion.

« Cependant les physiciens peuvent conserver la seconde, quand même les astronomes, les marins, ou même le public adopteraient l'heure décimalisée.

« Cette dualité aura-t-elle quelque inconvénient ? Je ne le crois pas.

« Les industriels ne s'en apercevront même pas.

« Pour les physiciens de laboratoire ce ne sera qu'une gêne insignifiante.

« L'industriel qui emploie l'ohm pour mesurer une résistance se rappelle-t-il bien que l'ohm est une vitesse ? En tout cas, ce souvenir ne peut ni le gêner, ni le servir. Peu lui importe, par conséquent, que l'unité de temps qui a servi à l'origine pour la définition de l'ohm soit ou ne soit pas celle dont les astronomes font usage dans des recherches toutes différentes.

« Cette circonstance ne pourrait devenir une gêne que dans les cas où l'on a à mesurer un temps.

« Or, dans les mesures *relatives*, les seules que les industriels aient à effectuer, le temps n'intervient pas. Ni dans la comparaison de deux résistances, ni dans celle de deux intensités, ni dans celle de deux forces électromotrices, on n'a à mesurer un temps. Toutes ces opérations peuvent se faire sans qu'à aucun moment on ait même besoin de se rappeler qu'elle est l'unité de temps employée; pas plus que le boutiquier qui mesure de la toile avec un mètre n'a besoin de se rappeler que ce mètre est la quarante-millionième partie du méridien terrestre.

« Le changement d'unité n'intéresse donc que les physiciens qui ont à faire des déterminations *absolues*, à déterminer par exemple l'ohm, l'ampère et le volt. Eh bien, dans ces recherches, on pourra continuer à se servir d'un chronomètre à secondes. Sans doute ce chronomètre sexagésimal ne pourra plus que difficilement être comparé aux horloges des observatoires devenues décimales. Mais qu'importe ? Ce chronomètre ne doit nous indiquer qu'un *intervalle* de temps, d'ailleurs très court; nous n'avons pas besoin de le remettre à l'heure.

« Mais poussons les choses à l'extrême; faisons une hypothèse qui ne se réalisera sans doute que dans un avenir fort éloigné; les astronomes ont adopté l'heure décimale; cet usage s'est répandu dans le public et il est devenu tellement général que l'on ne peut plus se procurer chez les horlogers de chronomètres à secondes.

« Quelle gêne en résultera-t-il pour les rares physiciens qui auront à déterminer la valeur absolue de l'ohm ? Il auront à effectuer une multiplication par 36.

« Et pour leur éviter cette opération, on imposerait quotidiennement des calculs fastidieux à des milliers de marins, à des millions d'élèves ou d'anciens élèves des écoles primaires.

« A-t-on plus souvent à déterminer la valeur absolue de l'ohm, ou bien à faire le point à la mer, à additionner deux angles ou deux temps ?

« Que reste-t-il donc ? Une anomalie purement théorique. Il y aura deux unités, l'heure pour les astronomes, la seconde pour les physiciens; cela est certainement peu satisfaisant pour l'esprit.

« Mais, en somme, ces deux unités existent déjà : les électriciens eux-mêmes emploient concurremment l'ampère-heure et le coulomb. Le rapport de la seconde à l'heure deviendra-t-il plus compliqué quand les astronomes ne compteront plus en secondes ?

« L'anomalie existe donc déjà; seulement elle paraîtra plus choquante, parce qu'elle aura disparu ailleurs.

« En résumé, on ne voit pas pourquoi les physiciens interdiraient un progrès aux astronomes et au public, uniquement parce qu'ils ne peuvent pas eux-mêmes en profiter. »

A cette citation, je n'ajouterai qu'un mot.

La question peut se poser ainsi :

Nous avons pour le moment quatre unités de temps; le jour, l'heure, la minute et la seconde.

Avec le nouveau système on en conservera trois, le jour et l'heure pour les astronomes et le public, la seconde pour les mécaniciens et les physiciens.

C'est là un inconvénient évident.

Mais cet inconvénient peut-on l'éviter ?

Les électriciens sont-ils disposés à renoncer à la seconde.

La campagne qu'ils mènent actuellement prouve bien le contraire.

Le public est-il disposé à renoncer à l'heure ?

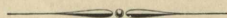
Les astronomes eux-mêmes peuvent-ils y renoncer ?

En tout cas, s'ils le faisaient, ce ne serait pas pour adopter la seconde, mais le jour; il y aurait donc encore deux unités, le jour et la seconde.

Si cet inconvénient est accepté, vaut-il mieux avoir à changer d'unité, de temps en temps par un calcul simple, toutes les fois que l'on passera de la lecture d'un traité d'astronomie à celle d'un traité d'électricité ?

Ou bien devra-t-on, comme par le passé, changer trois fois d'unité, *dans l'énoncé d'un seul nombre*, en disant 8<sup>h</sup>, 14<sup>m</sup>, 25<sup>s</sup>.

Un progrès partiel vaut-il mieux que pas de progrès du tout ?





---

## NOTES ET COMMENTAIRES

---

### PREMIÈRE PARTIE

---

#### FONCTION PERTURBATRICE ET PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES.

Soient deux corps attirés par un corps principal et  $\Delta$  leur distance mutuelle. Chaque corps soumis à la seule action du corps principal aurait un mouvement képlérien. Par suite de l'action réciproque des deux petits corps l'un sur l'autre, le mouvement réel n'est pas un mouvement képlérien. Les forces qui modifient le mouvement képlérien dérivent d'une fonction de force désignée sous le nom de fonction perturbatrice. La fonction perturbatrice se compose d'une partie principale et d'une partie complémentaire dont les développements en séries ainsi que ceux de leurs dérivées se déduisent du développement de  $\Delta^{-1}$ . Les coefficients du développement de cette quantité ont été étudiés par LAPLACE dans le cas où les orbites sont circulaires et leurs plans confondus (coefficients de Laplace), par TISSERAND dans le cas où les orbites sont circulaires et leur inclinaison mutuelle quelconque (polynômes de Tisserand), par NEWCOMB dans le cas général (opérateurs de Newcomb).

Les développements de la quantité  $\Delta^{-1}$  peuvent prendre la forme suivante :

$$\Delta^{-1} = \sum A_{m,m'} E^{i(ml+m'l')} = \sum B_{m,m'} E^{i(mu+m'u')},$$

avec

$$A_{m,m'} = \iint \frac{QE^\Omega dx dy}{x^{-m} y^{-m'} \sqrt{F}}, \quad \Omega = \frac{me}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) + \frac{m'e'}{2} \left( y - \frac{1}{y} \right),$$

l'intégration s'effectuant suivant les cercles  $|x|=1$ ,  $|y|=1$ .

On a posé :

$$l = u - e \sin u, \quad x = E^{iu}, \quad l' = u' - e' \sin u', \quad y = E^{iu'}.$$

Lorsque les moyens mouvements des petites planètes sont presque commensu-

rables, certains termes de la fonction perturbatrice acquièrent, malgré leur rang élevé, une importance considérable par suite de la présence de petits diviseurs. Après FLAMME, Poincaré a établi des principes qui, basés sur la détermination des points singuliers, sont propres au calcul des valeurs approchées de ces coefficients et cela sans connaître les termes qui précèdent.

Cette détermination des points singuliers est extrêmement difficile et elle n'a pu être appliquée qu'à des cas particuliers du problème des trois corps. (Voir chap. XXIII du t. 2 des *Leçons de Mécanique céleste*).

Poincaré a également calculé la valeur approchée des coefficients A et B pour de grandes valeurs de  $m$  et de  $m'$  en recherchant encore les points singuliers d'une certaine fonction.

Entre les coefficients de Laplace, il existe des relations de récurrence. Si des relations analogues existaient dans le cas général entre les coefficients  $Amm'$  ou  $Bmm'$ , le calcul de ces coefficients serait évidemment simplifié. Poincaré s'est attaqué à ce problème par la considération d'une intégrale double de la forme

$$\Pi = \iint \frac{HE\Omega}{xy F^s} dx dy.$$

(Voir chap. XXI du t. 2 des *Leçons de Mécanique céleste*.)

Les intégrales  $\Pi$  sont des fonctions des éléments, par exemple des grands axes, des excentricités et des inclinaisons et Poincaré montre qu'elles peuvent se réduire à un certain nombre d'entre elles linéairement indépendantes. Si  $f$  et  $\omega$  sont respectivement les degrés de  $F$  et de  $\Omega$ , il y a au plus  $8(f + \omega)^2$  expressions  $\Pi$  distinctes. Ce nombre se réduit à  $4(f + \omega)^2$  si les polynômes  $F$ ,  $\Omega$ ,  $H$  sont symétriques. En appliquant ces résultats aux coefficients  $Amm'$ ,  $Bmm'$ , Poincaré montre que le nombre des coefficients  $Amm'$  distincts est égal à 36 et que le nombre des coefficients  $Bmm'$  est égal à 16. Si les orbites sont circulaires, le nombre des coefficients indépendants est égal à 4.

LAMBERT (t. 26, 1920, *Mémoires (Ann. Observ. de Paris)*), supposant connus les quatre coefficients pour une valeur de l'inclinaison des orbites et pour une valeur particulière du rapport des rayons, a cherché quel parti on pouvait tirer de cette connaissance pour le cas où les éléments ont des valeurs différentes.

Poincaré a également indiqué une méthode propre à l'étude de la convergence des séries qui représentent les coefficients  $Amm'$  et  $Bmm'$  fonctions des puissances des excentricités et des inclinaisons (chap. XX du t. 2 des *Leçons de Mécanique céleste*). Cette méthode a été appliquée par Poincaré dans le cas où les excentricités sont nulles et celui où l'inclinaison est nulle et par H. VON ZEIPPEL dans le cas général (*Arkiv för matematik, astronomi o. fysik*, Bd 6, n° 33).

Les méthodes ingénieuses et originales que Poincaré a imaginées pour la résolution des différents problèmes énumérés ci-dessus sont d'une application très difficile et de nombreuses questions mériteraient encore une étude attentive et approfondie.

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

### FIGURE DE LA TERRE.

L'aplatissement de la Terre peut être déterminé par de délicates observations géodésiques. Les valeurs successivement admises pour l'inverse de l'aplatissement sont les suivantes :

Clarke (1880).....	293,5
Helmert (1907).....	298,3
Hayford (1909).....	297
Helmert (1915).....	296
Helbronner (1925).....	293,3.

En 1915, BROWN a montré que la valeur 294 conviendrait à la théorie de la Lune. A partir de mesures de parallaxes effectuées au Cap et à Greenwich, W. D. LAMBERT a obtenu en 1928 la valeur 293,5.

L'étude de la figure d'équilibre d'une masse fluide hétérogène discontinue et l'étude de la figure d'équilibre d'une masse fluide hétérogène continue permettent d'établir des relations entre la valeur de l'aplatissement et la constante de la précession déduite de la théorie de la rotation de la Terre et de l'observation.

En tenant compte des termes de l'ordre de la seconde puissance de la vitesse angulaire de la terre  $\omega$ , Poincaré montre qu'il y a désaccord entre les valeurs de l'aplatissement données par les mesures géodésiques (CLARKE, 293,5) et la théorie de la rotation de la Terre (298,3) (TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. 2, 1891, p. 224).

En tenant compte des termes de l'ordre de la quatrième puissance de la vitesse angulaire, M. WAVRE, montre qu'il y a accord entre les mesures géodésiques et les mesures précessionnelles. A partir des relations citées, M. WAVRE trouve que l'inverse de l'aplatissement de la Terre est compris entre 294,4 et 296,5, nombres plus approchés que le précédent de la valeur de Clarke (WAVRE, *Figures planétaires et géodésie*, 1932).

L'introduction par M. WAVRE des termes de la quatrième puissance de  $\omega$  a permis à M. TIERCY de trouver pour la densité superficielle de la Terre une valeur théo-



rique voisine de la valeur observée (2,65). La loi de Roche donne alors une valeur pouvant aller jusqu'à 2,6 au lieu de la valeur 2,1 obtenue en se limitant aux termes  $\omega^2$ .

Les études séismologiques modernes permettent de se représenter la structure de la Terre. La Terre serait formée d'un noyau central sur lequel reposeraient trois couches et l'écorce terrestre. M. BULLEN représente les densités  $\rho$  par les formules suivantes :

Entre	35 et 474 <sup>km</sup>	de profondeur.....	3,29 + 0,000 843 <i>d</i>
»	474 et 1100 <sup>km</sup>	» .....	3,92 + 0,000 655 <i>d</i>
»	1100 et 2900 <sup>km</sup>	.....	4,10 + 0,000 494 <i>d</i> .

Pour le noyau :

$$12,08 - 0,000\ 000\ 19\ r^2$$

$$(r = \text{rayon de la couche; } d = 6371^{\text{km}} - r).$$

(BULLEN, Suppl. géophysique des *Monthly Notices*, vol. III, n° 9, 1936.)

(FABRE, *Bull. astron.*, t. 11, p. 313-326.)

Page 138. — A partir de l'équation 3, le calcul de Poincaré comporte des erreurs de signes qui entachent les conclusions relatives à la loi des densités.

---

## TROISIÈME PARTIE

---

### THÉORIE DES MARÉES.

L'analyse de la Théorie des marées de Poincaré a été présentée magistralement par H. VON ZIEPEL dans le n° 38 des *Acta Mathematica*, 1921 et tout dernièrement par M. GOUGENHEIM dans une brillante Conférence faite à l'École Polytechnique.

La Théorie des marées de Poincaré repose sur deux méthodes : la méthode de Fredholm et la méthode de Ritz. L'application pratique de la méthode de Fredholm conduit à des calculs très compliqués et BLONDEL et M<sup>me</sup> CHANDON ont appliqué la méthode de Ritz à l'étude des marées de la mer Rouge.

La prédiction des marées en un lieu donné est pratiquement résolue au moyen des observations. Le phénomène des marées intéresse surtout les théoriciens qui désiraient connaître tous les aspects de l'influence de la marée en un point quelconque des Océans.

Parmi les œuvres les plus récentes qui traitent de la Théorie des marées, je citerai l'exposé critique de la Théorie des marées par FICHOT, *Annales du Bureau des Longitudes*, t. 11, 1938 et t. 12, 1949.

## QUATRIÈME PARTIE

## THÉORIE DE LA LUNE.

La complexité et les difficultés présentées par l'élaboration d'une Théorie de la Lune ont attiré les mathématiciens les plus illustres de NEWTON à BROWN. Poincaré ne devait pas échapper à l'attrait d'un problème réputé « infernal ». H. VON ZEIPPEL a analysé l'œuvre accomplie par Poincaré dans ce domaine (*Acta Mathematica*, t. 38, 1921).

Pour montrer le labeur énorme exigé par un tel travail, je signalerai que DELAUNAY tint compte de 1400 inégalités et qu'il fallut deux générations de calculateurs pour établir les tables basées sur sa théorie. NEWCOMB et BROWN consacrèrent presque entièrement leur vie à la résolution de ce problème qui n'avait apporté que des déceptions. Aucune théorie ne s'adaptait à la réalité et des écarts subsistaient toujours entre la théorie et l'observation. Les lois de Newton ne pouvaient être mises en doute et l'hypothèse de la variation de la vitesse de la rotation de la Terre permet l'explication des désaccords observés.

Le mouvement de la Lune ne satisfait à la théorie de Brown qu'à la condition d'introduire un terme empirique important et les petites fluctuations dues à l'irrégularité de la vitesse de rotation de la Terre. DE SITTER a montré qu'il était inutile de tenir compte du terme empirique de Brown si au lieu du temps terrestre on utilisait le temps newtonien.

Ainsi le génie des plus grands savants avait enfin dompté le mouvement si capricieux de notre satellite.

Disposant d'une théorie solidement établie, les astronomes ont orienté leurs recherches vers une confrontation systématique de la théorie et de l'observation et ils se sont surtout attachés à recueillir les observations les plus précises de la Lune. Aux observations méridiennes se sont ajoutées les observations des occultations des étoiles par la Lune. Le problème des occultations, en apparence si simple, présente pratiquement de nombreuses difficultés dues aux irrégularités du bord lunaire. Cette étude du bord lunaire est liée à une connaissance précise de la libration de la Lune. M. BANACHIEWICZ, M. KOZIEF, M. YAKOVKIN ont apporté leur contribution à l'étude de la libration et M. WEIMER et M. WATTS ont entrepris les travaux de détermination du bord lunaire.

Les discussions des observations des occultations sont publiées dans l'*Astronomical*

*Journal* sous la direction de M. BROUWER et les résultats obtenus permettent non seulement l'étude de la trajectoire de la Lune mais aussi celle de la rotation de la Terre.

---

## CINQUIÈME PARTIE

---

### THEORIE DES PLANÈTES.

#### Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace.

Du point de vue pédagogique, la méthode de Laplace est d'une exposition plus facile que toutes les autres méthodes. Cependant, elle a été délaissée par tous les calculateurs.

Après avoir présenté tous les avantages de cette méthode, Poincaré en a publié une nouvelle étude qui, pratiquement, n'a pas eu de succès. Si les calculs de Poincaré portent bien la marque de son imagination fertile, ils ne sont pas pour autant d'une application facile.

Il appartenait à M. DANJON de rendre pratique la méthode de Laplace (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 673-676).

A partir de trois observations, M. DANJON introduit une méthode des positions fictives qui, par itération, fournit une orbite provisoire ; cette orbite provisoire est ensuite corrigée en utilisant toutes les observations disponibles.

Des erreurs de signes commises par Poincaré dans son étude *Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace*, n'altèrent en rien sa conclusion.

#### Solutions périodiques.

A l'analyse pénétrante de H. VON ZEIPEL sur les travaux de Poincaré relatifs aux solutions périodiques, il faut ajouter l'analyse claire et précise de M. CHAZY donnée dans une Conférence faite à l'École polytechnique, le 25 juin 1950.

La seule contribution à présenter ici ne peut concerner que les nombreux travaux qui ont eu leur origine dans les découvertes géniales de Poincaré.

L'étude classique du mouvement d'un corps s'effectue en deux temps :

1° Les éléments de l'orbite sont d'abord déterminés en supposant le corps attiré par le Soleil ;

2° Puis il est tenu compte de l'attraction de tous les autres corps (calcul des perturbations).

En 1877, HILL prenait comme point de départ de sa théorie de l'orbite lunaire une trajectoire voisine de celle de la Lune, mais décrite périodiquement par un astre idéal. Poincaré généralisait le Mémoire de HILL et mettait en évidence l'existence de solutions périodiques dans le problème général des trois corps :

1° Solutions périodiques de la 1<sup>re</sup> sorte : les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites;

2° Solutions périodiques de la 2<sup>e</sup> sorte : les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies;

3° Solutions périodiques de la 3<sup>e</sup> sorte : les inclinaisons ne sont plus nulles.

Toutes les solutions périodiques de Poincaré dépendent d'un nombre de constantes inférieur à celui du problème des trois corps. Il en résulte que ces solutions sont particulières et n'auront qu'un domaine d'application restreint :

1° Cas où le rapport des moyens mouvements des deux corps soumis à l'attraction du Soleil est voisin de la valeur  $\frac{j-1}{j}$  ( $j$  étant un entier);

2° Cas où le mouvement du corps étudié présente une grande inégalité.

Ces deux cas sont justement ceux qui défient ou qui rendent difficilement applicable la méthode classique de détermination des orbites.

DARWIN a étudié par voie numérique les solutions périodiques du problème des trois corps en supposant une masse principale et deux autres masses finies dont le rapport des masses était 10.

L'École danoise avec ses brillants mathématiciens BURRAU, THIELE, E. STRÖMGREN, s'est spécialisée dans la recherche systématique des orbites simples du problème restreint généralisé, par application d'une méthode d'intégration numérique des équations différentielles du problème. Cette méthode consiste à calculer pas à pas les forces agissantes et à en déduire le mouvement résultant. DARWIN et BROWN ont également étudié analytiquement les solutions périodiques dans le cas du problème restreint.

PERCHOT et MASCART ont appliqué à cette question la théorie des solutions périodiques de Poincaré.

SIMONIN, HILL, SCHWARZSCHILD ont montré combien les solutions périodiques étaient favorables au calcul des perturbations des petites planètes dont la durée de révolution est en rapport presque rationnel avec celle de Jupiter.

Dans tous les travaux énumérés ci-dessus, il est supposé que les trois corps restent dans le même plan et ce sont donc des solutions de la 1<sup>re</sup> et de la 2<sup>e</sup> sorte qui ont été étudiés. H. VON ZEIPPEL a considéré les solutions de la 3<sup>e</sup> sorte dont il a donné

une classification des différents types et une discussion des conditions de stabilité (*Recherches sur les solutions périodiques de la 3<sup>e</sup> sorte dans le problème de Jupiter*, Soc. Roy. des Sciences d'Upsala, 1904). En 1915 (*Ark.*, t. 10, n<sup>o</sup> 30) H. VON ZEIPPEL publiait un Mémoire sur la stabilité des solutions périodiques de la 1<sup>re</sup> sorte en supposant que le mouvement des petites planètes ne se poursuit pas dans le plan de l'orbite de Jupiter.

L'application des méthodes de Poincaré à la détermination des orbites des petites planètes présente de grandes difficultés, par suite de l'introduction de petits diviseurs qui conduisent à la divergence des séries représentant les solutions du problème. En décomposant l'orbite en parties extrêmement petites et en assimilant chaque partie à l'orbite osculatrice obtenue par intégration des équations différentielles, HEINRICH a mis en évidence la présence de ces diviseurs. Ceux-ci étant connus, HEINRICH choisit pour solution périodique de départ une solution ne conduisant pas à l'introduction des petits diviseurs, et il tient également compte de la remarque suivante : « les oscillations séculaires des lignes des apsides sont la vraie cause de l'immensité de l'amplitude des oscillations instantanées et, par là, de la divergence des séries pour ce qui concerne les équations aux variations ».

La méthode de Heinrich s'est montrée féconde et, par son application, il a mis en évidence pour le type de commensurabilité  $\frac{p+q}{p}$  une multiple infinité de solutions à période séculaire formant la continuation analytique des solutions de 1<sup>re</sup> sorte de Poincaré à courte période.

Parmi les travaux les plus remarquables parus ces dernières années, je citerai la thèse de M. FABRE sur *Les mouvements récurrents en Mécanique céleste et la variation des éléments des orbites* (*Bull. astron.*, t. 10, 1937, et 11, 1938). Un corps céleste est mobile sous l'action d'un corps central fixe et d'un anneau substitué aux astres perturbateurs. Dans le cas où le champ de forces possède un axe de révolution et un équateur, M. FABRE applique les méthodes de Birköf pour établir l'existence de solutions à longues périodes pour les équations du mouvement relatif dans le plan méridien. M. FABRE utilise les solutions périodiques de Poincaré lorsque le potentiel est une fonction périodique du temps et lorsqu'il y a commensurabilité approchée entre les moyens mouvements de la planète perturbée et de la planète perturbatrice.

