

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

Revue générale des Sciences, t. 2, p. 1-5 (15 janvier 1891).

La loi de Newton est la plus simple de toutes les lois physiques; mais elle a pour expression mathématique une équation différentielle, et pour obtenir les coordonnées des astres, il faut intégrer cette équation. Ce problème est un des plus difficiles de l'Analyse, et malgré les recherches persévérantes des géomètres, il est encore bien loin d'être résolu.

I. — Quel sera le mouvement de n points matériels, s'attirant mutuellement en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré des distances? Si $n = 2$, c'est-à-dire si l'on a affaire à une planète isolée et au Soleil, en négligeant les perturbations dues aux autres planètes, l'intégration est facile; les deux corps décrivent des ellipses, en se conformant aux lois de Képler. La difficulté commence si le nombre n des corps est égal à trois; le *problème des trois corps* a défié jusqu'ici tous les efforts des analystes.

L'intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, les astronomes ont dû procéder par approximations successives; l'emploi de cette méthode était facilité par la petitesse des masses des planètes, comparées à celle du Soleil. On a donc été conduit à développer les coordonnées des astres suivant les puissances croissantes des masses.

Ce mode de développement n'est pas sans inconvénient; je n'en citerai qu'un : supposons qu'il entre dans l'expression d'une de ces coordonnées un terme périodique dont la période soit très longue, et d'autant plus longue que les masses troublantes sont plus petites, et développons ce terme suivant les puissances croissantes des masses; quelque loin que nous poussions l'approximation, la valeur approchée de ce terme ira en croissant indéfiniment, tandis

que la vraie valeur reste toujours finie. C'est ainsi qu'en développant $\sin mt$ suivant les puissances croissantes de m et négligeant les termes en m^3 , on trouve $mt - \frac{1}{6}m^3t^3$, polynôme susceptible de croître indéfiniment, tandis que $\sin mt$ est toujours plus petit que 1. La véritable nature de la fonction est donc complètement dissimulée.

Cette méthode a été cependant jusqu'ici très suffisante pour les besoins de la pratique; les masses sont, en effet, tellement petites qu'on peut, le plus souvent, négliger leurs carrés et se borner ainsi à la première approximation.

Mais on ne peut espérer qu'il en soit toujours ainsi; il ne s'agit pas seulement, en effet, de calculer les éphémérides des astres quelques années d'avance pour les besoins de la navigation ou pour que les astronomes puissent retrouver les petites planètes déjà connues. Le but final de la Mécanique céleste est plus élevé; il s'agit de résoudre cette importante question : la loi de Newton peut-elle expliquer à elle seule tous les phénomènes astronomiques? Le seul moyen d'y parvenir est de faire des observations aussi précises que possible, de les prolonger pendant de longues années ou même de longs siècles et de les comparer ensuite aux résultats du calcul. Il est donc inutile de demander au calcul plus de précision qu'aux observations, mais on ne doit pas non plus lui en demander moins. Aussi l'approximation dont nous pouvons nous contenter aujourd'hui deviendra-t-elle un jour insuffisante. Et, en effet, en admettant même, ce qui est très improbable, que les instruments de mesure ne se perfectionnent plus, l'accumulation seule des observations pendant plusieurs siècles nous fera connaître avec plus de précision les coefficients des diverses inégalités.

On peut donc prévoir le moment où les méthodes anciennes, malgré la perfection que leur a donnée Le Verrier, devront être abandonnées définitivement. Nous ne serons pas pris au dépourvu. Delaunay, Hill, Gylden, Lindstedt ont imaginé de nouveaux procédés d'approximation successive plus rapides et plus satisfaisants à tous égards que les anciens; en particulier, ils se sont affranchis de l'inconvénient que je signalais plus haut.

Les développements auxquels ils parviennent pourraient même être regardés comme une solution complète du problème des trois corps, si la convergence en était établie. Il n'en est malheureusement pas ainsi.

Faute de cette convergence, ils ne peuvent pas donner une approximation indéfinie; ils donneront plus de décimales exactes que les anciens procédés,

mais ils n'en donneront pas autant qu'on voudra. Si on l'oubliait, on serait conduit à des conséquences erronées. On en serait vite averti, d'ailleurs, car ces conséquences ne seraient pas les mêmes, selon qu'on appliquerait les méthodes de Delaunay ou celles de Lindstedt, et ces contradictions suffiraient pour montrer qu'un au moins des deux développements n'est pas convergent.

II. — Ne peut-on cependant établir aucun résultat relatif au mouvement des trois corps avec cette absolue rigueur à laquelle les géomètres sont habitués? S'il est possible d'en découvrir, ne pourrait-on y trouver un terrain solide sur lequel on s'appuierait pour marcher à de nouvelles conquêtes? N'aurait-on pas ouvert une brèche qui permettrait d'entrer enfin dans la forteresse? On ne peut s'empêcher de le penser, et c'est ce qui donne quelque prix aux rares théorèmes susceptibles d'une démonstration rigoureuse, quand même ils ne semblent pas immédiatement applicables à l'astronomie.

Telles sont les propriétés des solutions particulières remarquables du problème des trois corps.

Le mouvement des trois astres dépend en effet de leurs positions et de leurs vitesses initiales. Si l'on se donne ces conditions initiales du mouvement, on aura défini une solution particulière du problème. Il peut se faire que quelques-unes de ces solutions particulières soient plus simples, plus abordables au calcul, que la solution générale; il peut se faire que pour certaines positions initiales des trois corps, les lois de leur mouvement présentent des propriétés remarquables.

Parmi ces solutions particulières, les unes ne sont intéressantes que par leur bizarrerie; les autres sont, comme nous le verrons, susceptibles d'applications astronomiques, Lagrange et Laplace ont déjà abordé le problème par ce côté, et ils ont découvert ainsi un théorème important. Il peut arriver que les orbites des trois corps se réduisent à des ellipses. La position et la vitesse initiales de notre satellite auraient pu être telles, que la Lune fût constamment pleine; elles auraient pu être telles que la Lune fût constamment nouvelle; elles auraient pu aussi être telles que cet astre fût constamment à 60° du Soleil dans une phase intermédiaire entre la nouvelle lune et le premier quartier.

Ce sont là des solutions particulières très simples, il y en a de plus compliquées qui sont cependant remarquables. Si les conditions du mouvement avaient été différentes de ce qu'elles sont, les phases auraient pu suivre des lois bien étranges; dans une des solutions possibles, la Lune, d'abord nouvelle,

commence par croître; mais, avant d'atteindre le premier quartier, elle se met à décroître pour redevenir nouvelle et ainsi de suite; elle a donc constamment la forme d'un croissant. Dans une autre solution, plus étrange encore, elle passe trois fois par le premier quartier entre la nouvelle lune et la pleine lune; dans cet intervalle, elle croît d'abord, décroît ensuite, pour se mettre de nouveau à croître.

Ces solutions sont trop différentes des véritables trajectoires des astres, pour pouvoir jamais être réellement utiles à l'Astronomie. Elles n'ont qu'un intérêt de curiosité. Il n'en est pas de même de celles dont je vais maintenant parler.

Il y a d'abord les *solutions périodiques*. Ce sont celles où les distances des trois corps sont des fonctions périodiques du temps; à des intervalles périodiques, les trois corps se retrouvent donc dans les mêmes positions relatives. Les solutions périodiques sont de plusieurs sortes. Dans celles que j'ai appelées de la première sorte, les inclinaisons sont nulles et les trois corps se meuvent dans un même plan; les excentricités sont très petites et les orbites sont presque circulaires; les moyens mouvements ne sont pas commensurables; les deux planètes passent en même temps au périhélie, qui, loin d'être fixe, tourne avec une rapidité comparable à celle des planètes elles-mêmes, de telle façon que ces deux astres sont au périhélie à chaque conjonction. C'est à cette catégorie qu'appartient la première solution périodique qui ait été découverte et que son inventeur, M. Hill, a prise pour point de départ de sa théorie de la Lune.

Dans les solutions de la seconde sorte, les inclinaisons sont encore nulles, mais les excentricités sont finies; le mouvement du périhélie est très lent; les moyens mouvements sont près d'être commensurables; les périodes anomalistiques (on appelle ainsi le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de l'astre au périhélie), le sont exactement. A certaines époques, deux planètes passent en même temps au périhélie. Dans les solutions de la troisième sorte les inclinaisons sont finies, les orbites sont presque circulaires; le mouvement des périhélies est très lent et égal à celui des nœuds; les périodes anomalistiques sont commensurables; à certaines époques les planètes passent en même temps aux périhélies. Je laisse de côté de nombreuses catégories de solutions périodiques plus compliquées et qu'il serait trop long d'énumérer.

Il y a ensuite les *solutions asymptotiques*. Pour bien faire comprendre ce qu'on doit entendre par là, qu'on me permette d'employer un exemple simple. Imaginons d'abord une Terre et un Soleil isolés dans l'espace, se mouvant par

conséquent d'après les lois de Képler. Supposons encore pour simplifier, que leur mouvement soit circulaire. Donnons maintenant à cette Terre deux satellites L_1 et L_2 dont la masse sera infiniment petite, de telle sorte qu'ils ne troubleront pas le mouvement circulaire de la Terre et du Soleil, et qu'ils ne se troubleront pas non plus mutuellement, chacun d'eux se mouvant comme s'il était seul. Choisissons la position initiale de L_1 de façon que cette Lune décrive une orbite périodique; nous pourrons alors choisir celle de L_2 de façon que ce second satellite décrive ce que nous appellerons une orbite asymptotique. D'abord assez éloigné de L_1 , il s'en rapprochera indéfiniment, de sorte qu'après un temps infiniment long, son orbite différera infiniment peu de celle de L_1 . Supposons un observateur placé sur la Terre et tournant lentement sur lui-même de façon à regarder constamment le Soleil. Le Soleil lui paraîtra immobile et la Lune L_1 dont le mouvement est périodique lui semblera décrire une courbe fermée C . La Lune L_2 décrira alors pour lui une sorte de spirale dont les spires de plus en plus serrées se rapprocheront indéfiniment de la courbe C . Il y a une infinité de pareilles orbites asymptotiques. L'ensemble de ces orbites forme une surface continue S qui passe par la courbe C et sur laquelle sont tracées les spires dont je viens de parler ⁽¹⁾.

Mais il y a une autre catégorie de solutions asymptotiques. Il peut arriver, si l'on choisit convenablement la position initiale de L_2 , que cette Lune aille en s'éloignant de L_1 , de telle façon qu'à une époque très reculée dans le passé, son orbite diffère très peu de celle de L_1 . Pour notre observateur, ce satellite décrira encore une courbe en spirales dont les spires se rapprocheront indéfiniment de la courbe C ; mais il la décrira en sens contraire en s'éloignant constamment de C . L'ensemble de ces nouvelles orbites asymptotiques formera une seconde surface continue S' passant également par la courbe D .

Enfin il y a une infinité de solutions *doublement asymptotiques*; c'est là un point que j'ai eu beaucoup de peine à établir rigoureusement. Il peut arriver que le satellite L_2 , d'abord très rapproché de l'orbite de L_1 , s'en éloigne d'abord beaucoup et s'en rapproche ensuite de nouveau indéfiniment. A une époque très reculée dans le passé, cette Lune se trouvait sur la surface S' , et y décrivait des spires en s'éloignant de C ; elle s'est ensuite beaucoup éloignée de C ; mais dans un temps très long elle se retrouvera

⁽¹⁾ Il peut arriver, si l'inclinaison des orbites est nulle, que S se réduise à une surface infiniment aplatie, formée de plusieurs feuillets plans superposés, et analogues aux surfaces de Riemann.

sur la surface S et décrira de nouveau des spires en se rapprochant de C .

Soient $L_2, L_3, \dots, L_n, n-1$ lunes décrivant des orbites doublement asymptotiques; à une époque reculée, ces $n-1$ lunes se meuvent en suivant des spirales sur S' ; en parcourant cette surface, on rencontre ces $n-1$ orbites dans un certain ordre. Au bout d'un temps très long, nos satellites se retrouveront sur S et décriront de nouveau des spirales; mais, en parcourant cette surface S , on rencontrera les orbites des $n-1$ lunes *dans un ordre tout différent*. Ce fait, pour peu qu'on prenne la peine d'y réfléchir, semblera une preuve éclatante de la complexité du problème des trois corps et de l'impossibilité de le résoudre avec les instruments actuels de l'Analyse.

III. — L'Astronomie ne nous offre aucun exemple d'un système de trois ou de plusieurs corps dont les conditions initiales du mouvement soient telles qu'ils décrivent exactement des orbites périodiques ou asymptotiques. D'ailleurs *a priori* la probabilité pour que cette circonstance se présentât était manifestement nulle. On ne peut pas en conclure que les considérations précédentes ne sont intéressantes que pour le géomètre et inutiles à l'astronome. Il peut arriver, en effet, et il arrive quelquefois que les conditions initiales du mouvement diffèrent peu de celles qui correspondent à une solution périodique. L'étude de cette solution présente alors un double intérêt.

D'abord, le plus souvent, le mouvement de l'astre présentera une inégalité dont le coefficient sera très grand, mais très peu différent de ce qu'il serait si l'orbite était rigoureusement périodique. Le calcul de cette solution périodique fournira alors ce coefficient plus rapidement et plus exactement que les méthodes anciennes. C'est ce qui est arrivé dans la théorie de la Lune de M. Hill pour le calcul de cette grande inégalité appelée variation.

En second lieu, l'orbite périodique peut être prise comme première approximation, comme « orbite intermédiaire » pour employer le langage de M. Gylden. La seconde approximation conduit alors à un calcul relativement facile, parce que les équations sont linéaires et à coefficients périodiques. C'est ainsi que M. Hill a calculé le mouvement du périhélie et qu'il aurait pu calculer également le mouvement du nœud et la grande inégalité connue sous le nom d'évection.

Je pourrais citer beaucoup d'autres exemples. Un des satellites de Saturne a un mouvement très troublé : son péri-saturne tourne très rapidement; M. Tisserand a rattaché sa théorie à l'étude d'une solution périodique de la

première sorte. La même méthode est applicable à une certaine petite planète dont le moyen mouvement est sensiblement double de celui de Jupiter et que M. Harzer a étudiée.

Gauss a cru pouvoir affirmer que les mouvements moyens de Jupiter et de Pallas étaient entre eux exactement dans le rapport de 7 à 18. Si ses vues venaient à se confirmer, ce qui est encore douteux, la théorie de Pallas se ramènerait à celle d'une solution périodique de la seconde sorte.

Mais l'exemple le plus frappant nous est fourni par l'étude des satellites de Jupiter. Les relations qui ont lieu entre leurs moyens mouvements, et dont la découverte est le plus beau titre de gloire de Laplace, montrent que leur orbite diffère fort peu d'une orbite périodique; en y regardant de près, on voit que la méthode spéciale créée par le génie de ce grand géomètre ne diffère pas de celle que nous préconisons ici.

IV. — Les équations différentielles du problème des trois corps admettent un certain nombre d'intégrales qui sont connues depuis longtemps; ce sont celles du mouvement du centre de gravité, celles des aires, celles des forces vives. Il était extrêmement probable qu'elles ne pouvaient avoir d'autres intégrales algébriques; ce n'est cependant que dans ces dernières années que M. Bruns a pu le démontrer rigoureusement. Mais on ne peut aller plus loin; en dehors des intégrales connues, le problème des trois corps n'admet aucune intégrale analytique et uniforme; les propriétés des solutions périodiques et asymptotiques, étudiées avec attention, suffisent pour l'établir. On peut en conclure que les divers développements proposés jusqu'ici sont divergents; car leur convergence entraînerait l'existence d'une intégrale uniforme.

Dirai-je pour cela que le problème est insoluble? ce mot n'a pas de sens; nous savons depuis 1882 que la quadrature du cercle est impossible avec la règle et le compas, et pourtant nous connaissons π avec beaucoup plus de décimales que n'en pourrait donner aucune construction graphique. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que le problème des trois corps ne peut être résolu avec les instruments dont nous disposons actuellement; ceux qu'il faudra imaginer et employer pour obtenir la solution devront certainement être très différents et d'une nature beaucoup plus compliquée.

V. — Une des questions qui ont le plus préoccupé les chercheurs est celle de la stabilité du système solaire. C'est à vrai dire une question mathématique plutôt que physique. Si l'on découvrait une démonstration générale et

rigoureuse, on n'en devrait pas conclure que le système solaire est éternel. Il peut en effet être soumis à d'autres forces que celle de Newton, et les astres ne se réduisent pas à des points matériels. Bien des causes peuvent dissiper peu à peu l'énergie du système; on n'est pas absolument certain qu'il n'existe pas de milieu résistant; d'autre part, les marées absorbent de l'énergie qui est incessamment convertie en chaleur par la viscosité des mers, et cette énergie ne peut être empruntée qu'à la force vive des corps célestes. De plus, si tous les astres sont des aimants comme la Terre, leurs mouvements doivent produire, par une induction mutuelle, des courants dans leur masse et, par conséquent, de la chaleur qui est encore empruntée à leur force vive. Mais toutes ces causes de destruction agiraient beaucoup plus lentement que les perturbations, et si ces dernières n'étaient pas capables d'en altérer la stabilité, le système solaire serait assuré d'une existence beaucoup plus longue. La question de la stabilité conserve donc toujours un très grand intérêt.

Lagrange, par une démonstration d'une admirable simplicité, a montré que, si l'on néglige les carrés des masses, les grands axes des orbites demeurent invariables, ou plutôt que leurs variations se réduisent à des oscillations périodiques d'amplitude finie autour de leur valeur moyenne. Poisson a étendu la démonstration au cas où l'on tient compte des carrés des masses en négligeant leurs cubes; mais, malgré la virtuosité analytique dont il a fait preuve, son analyse montre déjà les défauts des anciennes méthodes. Il montre, en effet, que les grands axes éprouvent autour de leur valeur moyenne des oscillations périodiques; mais, d'après ses formules, l'amplitude de ces oscillations pourrait croître au delà de toute limite; ce n'est là qu'une apparence due au mode de développement, et si l'on ne négligeait pas certains termes, on pourrait prouver que cette amplitude reste finie. Après Poisson on a cherché à trouver une démonstration générale ou au moins à établir l'invariabilité des grands axes en tenant compte du cube des masses. Mathieu avait cru un instant y réussir; mais M. Spiru-Aretu a montré ensuite qu'il s'était trompé. Il avait ainsi plutôt condamné les anciennes méthodes que démontré l'instabilité du système. La question restait entière.

Toutes ces recherches ont exigé de grands efforts qui nous semblent aujourd'hui bien inutiles; les méthodes de M. Gylden et celles de M. Lindstedt ne donnent en effet, si loin que l'on pousse l'approximation, que des termes périodiques, de sorte que tous les éléments des orbites ne peuvent éprouver que des oscillations autour de leur valeur moyenne. La question

serait donc résolue, si ces développements étaient convergents. Nous savons malheureusement qu'il n'en est rien.

Incapables pour le moment de résoudre le problème général, nous pouvons nous borner à un cas particulier. Imaginons trois masses se mouvant dans un même plan, la première très grande, la seconde assez petite, la troisième infiniment petite et, par conséquent, hors d'état de troubler les deux autres. Supposons de plus que les deux grandes masses aient un mouvement circulaire et uniforme. Tel serait le cas du Soleil, de Jupiter et d'une petite planète, si l'on négligeait l'inclinaison des orbites et l'excentricité de Jupiter. Dans ce cas, MM. Hill et Bohlin ont démontré que le rayon vecteur de la petite planète reste toujours inférieur à une limite finie.

Cela ne suffit pas toutefois pour la stabilité; il faut encore que la petite masse repasse une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa position initiale.

Il est évident qu'il n'en est pas ainsi pour toutes les solutions particulières, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales du mouvement; l'existence des solutions asymptotiques en est une preuve suffisante. Mais, d'autre part, on peut rigoureusement démontrer que l'on peut choisir ces conditions initiales de façon que l'astre repasse une infinité de fois dans le voisinage de sa position primitive. Il y a donc une infinité de solutions particulières qui sont instables, au sens que nous venons de donner à ce mot et une infinité d'autres qui sont stables. J'ajouterai que les premières sont exceptionnelles (ce qui permet de dire qu'il y a stabilité en général). Voici ce que j'entends par là, car ce mot par lui-même n'a aucun sens. Je veux dire qu'il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable. On objectera qu'il y a une infinité de manières de définir cette probabilité; mais cela reste vrai quelle que soit la définition que l'on adopte, à une condition toutefois : soient x et y les coordonnées de la troisième masse, x' et y' les composantes de sa vitesse. J'appelle $P dx dy dx' dy'$ la probabilité pour que x soit compris entre x_0 et $x_0 + dx$, y entre y_0 et $y_0 + dy$, x' entre x'_0 et $x'_0 + dx'$, y' entre y'_0 et $y'_0 + dy'$. Nous pouvons définir la probabilité comme nous le voulons et, par conséquent, nous donner arbitrairement P en fonction de x_0, y_0, x'_0 et y'_0 . Eh bien, le résultat que j'ai énoncé plus haut reste vrai, quelle que soit cette fonction P , *pourvu qu'elle soit continue.*