

---

## REMARQUE SUR L'HYPOTHÈSE DE LAPLACE

*Bulletin astronomique*, t. 28, p. 251-266 (juillet 1911).

---

1. On sait que, dans l'hypothèse cosmogonique de Laplace, on suppose que la nébuleuse primitive en se contractant abandonne une série d'anneaux d'où dérivent ensuite les différentes planètes. On peut se demander quelles sont les conditions de stabilité de ces anneaux et quelle est la cause de leur destruction. Roche a déterminé les conditions de leur formation par l'analyse suivante. On est obligé de supposer que la nébuleuse est très fortement condensée au centre et se compose d'un noyau sensiblement sphérique et d'une atmosphère très raréfiée; la comparaison des moments de rotation nous impose absolument ces suppositions. Soient donc  $M$  la masse du noyau.  $\omega$  la vitesse de rotation supposée uniforme;  $r$  la distance du point  $x, y, z$  à l'origine; l'axe de rotation étant pris pour axe des  $x$ . L'équation de la surface libre de l'atmosphère sera

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C,$$

surface de révolution dont la section méridienne est

$$(1) \quad \frac{\omega^2 y^2}{2} + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

Pour certaines valeurs de la constante  $C$ , cette courbe présente deux points doubles, et c'est quand ces valeurs sont atteintes que les anneaux se forment aux dépens de l'atmosphère.

Si l'on donne à  $C$  ces valeurs, la courbe présente des branches infinies, de sorte que si l'équation (1) restait valable, les parties détachées de la masse centrale ne pourraient former des anneaux et seraient repoussées à l'infini. Mais il est clair que ces parties ne sauraient conserver la vitesse angulaire  $\omega$

que nous avons jusqu'ici supposée constante; une fois détachées, elles ne participeront plus à la rotation générale, et leur vitesse angulaire ira en décroissant conformément à la loi des aires à mesure qu'elles s'éloigneront de l'axe.

Ainsi, au moins au delà des points doubles, nous ne pouvons regarder  $\omega$  comme constant, et il est peu probable que cette uniformité de rotation ait pu se maintenir dans l'atmosphère de la nébuleuse qui est très raréfiée; nous supposerons donc désormais  $\omega$  variable suivant une loi quelconque; d'autre part, nous avons pour établir l'équation (1) négligé l'attraction de cette atmosphère à cause de sa faible densité; nous ne pouvons plus le faire; il est évident en effet, et l'on s'en rendra compte d'ailleurs dans la suite, qu'à supposer cette attraction nulle on serait conduit à conclure que les anneaux sont toujours instables.

Les équations de l'Hydrostatique nous donnent

$$\frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dP}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = \omega^2 y, \quad \frac{dP}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = \omega^2 z;$$

$p$  est la pression,  $\rho$  la densité du fluide,  $P$  le potentiel dû à l'attraction.

Ces équations peuvent s'écrire

$$(2) \quad dP + \frac{dp}{\rho} = \omega^2 R dR$$

en posant  $R^2 = y^2 + z^2$ . Supposons que  $p$  soit fonction de  $\rho$ , ce qui arrivera dans un grand nombre de cas et en particulier si la nébuleuse est, soit en équilibre isothermique, soit en équilibre adiabatique; alors  $\frac{dp}{\rho}$  est une différentielle exacte, et il doit en être de même de  $\omega^2 R dR$ , c'est-à-dire que  $\omega$  ne dépend que de  $R$ . Posons donc

$$\frac{dp}{\rho} = d\pi, \quad \omega^2 R dR = d\varphi(R),$$

L'équation (2) nous donnera

$$P + \pi = \varphi(R) + \text{const.}$$

A la surface libre  $\pi$  doit être nulle, de sorte que l'équation de cette surface libre sera

$$(3) \quad \varphi - P = C.$$

Si l'on suppose  $\omega$  constant et l'attraction de l'atmosphère négligeable, il vient

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2} R^2, \quad P = -\frac{M}{r}$$

et nous retombons sur l'équation de Roche,

$$\frac{\omega^2}{2} R + \frac{M}{r} = C.$$

Nous poserons dans le cas général,

$$P = -\frac{M}{r} + \delta P.$$

$\delta P$  étant le terme très petit dû à l'attraction de l'atmosphère. Discutons la forme de la surface (3); nous voyons d'abord que c'est une surface de révolution; par raison de symétrie, elle admettra en général un plan de symétrie équatorial, qui sera le plan  $x = 0$ . Supposons qu'on veuille étudier l'intersection de la surface par une droite parallèle à l'axe des  $x$ ; nous voyons que le long de cette droite  $\varphi$  est constant, tandis que  $\frac{M}{r}$  va en croissant quand  $|x|$  se rapproche de zéro. Si donc nous négligeons  $\delta P$ , nous serions amenés à conclure que le premier membre de (3), quand  $x$  varie seul, présente un maximum unique pour  $x = 0$  et, par conséquent, que toute droite parallèle à l'axe des  $x$  coupe la surface en deux points au plus. Cette conclusion ne sera pas altérée quand nous passerons aux approximations suivantes. Car l'expression  $-\delta P$ , due à l'attraction de l'atmosphère, aura également un maximum pour  $x = 0$ , puisqu'un mobile, assujéti à se mouvoir sur une droite parallèle à l'axe des  $x$  et soumis à l'attraction de l'atmosphère, tendra à se rapprocher du plan  $x = 0$ ; cela est évident si cette atmosphère est limitée par une surface que chaque droite parallèle à l'axe des  $x$  coupe au plus en deux points symétriques par rapport au plan  $x = 0$ . Or nous pouvons déterminer la forme de cette atmosphère par approximations successives. Nous négligerons d'abord  $\delta P$ ; en seconde approximation, nous prendrons pour  $\delta P$  le potentiel dû à l'attraction d'une atmosphère limitée par la surface calculée en première approximation et ainsi de suite. La surface limite satisfait à la condition en première approximation, et nous venons de voir que si elle satisfait en  $n^{\text{ième}}$  approximation, elle y satisfera encore en  $(n + 1)^{\text{ième}}$  approximation; elle y satisfera donc quelque loin que ces approximations soient poussées.

On pourrait objecter que la connaissance de la surface libre ne suffit pas pour déterminer  $\delta P$ ; et que la densité de l'atmosphère étant variable, il faut connaître toutes les surfaces d'égale densité, c'est-à-dire toutes les surfaces  $\pi = \text{const}$ . Mais toutes ces surfaces satisferont à la condition énoncée en

première approximation et l'on verrait également que, si elles y satisfont en  $n^{\text{ième}}$  approximation, elles y satisfont en  $(n + 1)^{\text{ième}}$  approximation.

La conclusion c'est que la surface (3) est coupée par une droite parallèle à l'axe des  $x$  au plus en deux points symétriques par rapport au plan équatorial  $x = 0$ .

Pour étudier cette surface, ou plutôt sa section méridienne, il suffit donc d'étudier les variations de l'expression

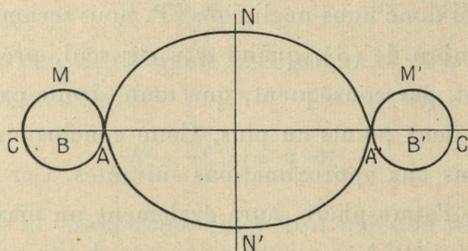
$$(4) \quad \varphi(y) - P(y),$$

c'est-à-dire du premier membre de (3) où l'on fait  $x = z = 0$ . Si

$$\varphi(y_0) - P(y_0) > C,$$

la surface (3) coupe en deux points la droite  $y = y_0, z = 0$ ; elle ne la coupe pas si

$$\varphi(y_0) - P(y_0) < C.$$



Si notre atmosphère ne s'étend pas à l'infini, l'expression (4) pour  $y$  très grand doit être plus petite que  $C$ ; elle est infinie pour  $y = 0$ , parce que  $\frac{M}{r} = \frac{M}{y} = +\infty$ . Nous devons envisager les maxima et les minima successifs de l'expression (4); l'un des cas les plus simples est celui où, quand  $y$  décroît de  $+\infty$  à 0, l'expression (4) croît d'abord, atteint un maximum pour  $y = y_0$ , décroît, atteint un minimum pour  $y = y_1$ , et croît ensuite jusqu'à l'infini.

Nous désignerons alors ce maximum par  $C_0$ , et ce minimum par  $C_1$ . Si nous prenons  $C = C_1$  la courbe méridienne, symétrique par rapport aux deux axes, présente deux points doubles comme l'indique la figure, les points doubles A et A' ont pour coordonnées

$$x = z = 0, \quad y = \pm y_1;$$

les points B et B' ont pour coordonnées

$$x = z = 0, \quad y = \pm y_0,$$

et correspondent au maximum de (4).

Si l'on fait tourner cette courbe méridienne autour de l'axe des  $x$ , elle engendrera une surface de révolution avec une courbe double, et l'on voit que l'anneau engendré par AMC et A'M'C' tend à se séparer de la masse centrale engendrée par ANA'N'.

Si nous négligeons d'abord  $\delta P$ , nous aurions

$$-P(y) = \frac{M}{y}.$$

Pour que l'expression (4) admit un minimum, il faudrait d'abord que

$$\frac{d}{dy}(\varphi - P) = \omega^2 y - \frac{M}{y^2} = 0,$$

c'est-à-dire que  $\omega^2 y^3 = M$ .  $\omega$  étant alors la vitesse angulaire sur une orbite circulaire de rayon  $y$ , donnée par la troisième loi de Képler; il faudrait ensuite

$$\frac{d^2}{dy^2}(\varphi - P) > 0$$

ou

$$\omega^2 + 2\omega\omega'y + \frac{2M}{y^3} = 3\omega^2 + 2\omega\omega'y < 0,$$

ce qui veut dire que  $\omega^2 y^3$  doit croître avec  $y$ . Toutes les lois de variation de  $\omega$  avec  $y$  ne sont donc pas compatibles avec la formation des anneaux. Si l'on suppose une nébuleuse où n'existent que de très faibles courants de convection, le frottement mutuel des diverses parties maintiendra l'uniformité de la rotation,  $\omega$  sera une constante,  $\omega^2 y^3$  une fonction croissante et la formation des anneaux sera possible. Si nous passons à l'extrême opposé et que nous supposions de très puissants courants de convection; en vertu du principe des aires, le produit  $\omega y^2$  tendra à se maintenir constant pour une masse gazeuse entraînée par ces courants; ces courants brassant toute la masse, la fonction  $\omega y^2$  deviendra constante, c'est ce qu'on pourrait appeler *l'équilibre adiabatique*, par analogie avec ce qui se passe pour l'équilibre thermique de notre atmosphère. Si  $\omega y^2$  est constant, la fonction  $\omega^2 y^3$  est décroissante et la formation des anneaux impossible; il faut donc admettre que, dans la nébuleuse de Laplace, les courants de convection étaient trop faibles pour contre-balancer l'influence du frottement et il en résulte évidemment que le processus a dû être excessivement lent.

2. Examinons maintenant la stabilité des anneaux une fois formés. Pour qu'un anneau se forme et qu'il reste stable, il faut d'abord que la surface libre

prenne la forme indiquée sur la figure et, par conséquent, que le maximum correspondant au point B existe. Au point B, on aura

$$\frac{d(\varphi - P)}{dy} = 0, \quad \frac{d^2(\varphi - P)}{dy^2} < 0.$$

La première condition nous donne à fort peu près  $\omega^2 y^3 = M$ . Cherchons alors quelles sont, au point B, les dérivées secondes des trois parties de  $\varphi - P$ ; nous trouverons :

Dérivée de.....	$\varphi$ .	$\frac{M}{r}$ .	$-\delta P$ .
$\frac{d^2}{dx^2}$ .....	0	$-\frac{M}{y^3} = -\omega^2 - \varepsilon'$	$-\varepsilon$
$\frac{d^2}{dy^2}$ .....	$\omega^2 + 2\omega\omega'y$	$2\omega^2 + 2\varepsilon'$	$-4\pi\rho + \varepsilon + \varepsilon'$
$\frac{d^2}{dz^2}$ .....	$\omega^2$	$-\omega^2 - \varepsilon'$	$-\varepsilon'$

En effet,  $\varphi$  ne dépend pas de  $x$ , ses dérivées secondes par rapport à  $y$  et à  $z$  se déduisent immédiatement de sa définition. D'autre part, on a

$$\frac{d^2}{dy^2} \frac{M}{r} = \frac{2M}{y^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} \frac{M}{r} = \frac{d^2}{dz^2} \frac{M}{r} = -\frac{M}{y^3}$$

et nous avons à très peu près

$$\frac{M}{y^3} = \omega^2.$$

Nous devrions, pour être rigoureux, écrire

$$\frac{M}{y^3} = \omega^2 + \frac{1}{y} \frac{d\delta P}{dy}.$$

En ce qui concerne  $\frac{d^2(-\delta P)}{dx^2}$ , il résulte de la remarque faite plus haut que  $-\delta P$ , sur une droite parallèle à l'axe des  $x$ , a un maximum unique pour  $x = 0$  et que, par conséquent, cette dérivée est négative.

D'autre part, en posant

$$\delta P = f(R), \quad \frac{d\delta P}{dR} = f'(R), \quad \dots,$$

on trouve (puisque d'ailleurs, au point B,  $z = 0$ )

$$\frac{1}{y} \frac{d\delta P}{dy} = +\frac{f'}{R}, \quad \frac{d^2\delta P}{dz^2} = \frac{f'}{R};$$

d'où

$$\frac{1}{y} \frac{d\delta P}{dy} = \varepsilon', \quad -\frac{d^2\delta P}{dz^2} = -\varepsilon';$$

on a d'ailleurs par l'équation de Poisson  $\Delta\delta P = +4\pi\rho$ ,  $\rho$  étant la densité du fluide; d'où

$$-\frac{d^2\delta P}{dy^2} = -4\pi\rho + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Nous devons donc regarder  $\varepsilon$  comme positif; mais nous ne connaissons pas le signe de  $\varepsilon'$ , bien que cette dérivée soit plus probablement positive.

Il vient alors

$$\frac{d^2(\varphi - \rho)}{dy^2} = 3\omega^2 + 2\omega\omega'y - 4\pi\rho + \varepsilon + 3\varepsilon' < 0.$$

Si  $\rho$  est très petit, il doit en être de même de  $\varepsilon$  et de  $3\varepsilon'$ , ce qui entraîne

$$3\omega^2 + 2\omega\omega'y < 0.$$

ce qui signifie que  $\omega^2y^3$  décroît quand  $y$  croît. Si donc dans le voisinage du point B la fonction  $\omega^2y^3$  est décroissante, la stabilité peut subsister quelque petite que soit la densité  $\rho$ ; mais si la fonction  $\omega^2y^3$  est croissante, l'anneau ne peut être stable que si cette densité reste supérieure à une certaine limite.

Pour préciser, supposons que la masse de l'anneau soit très petite, non seulement par rapport à celle du noyau central, mais par rapport à celle de l'atmosphère qui reste autour de ce noyau.

Posons alors

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon' = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2,$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon'_1$  se rapportant à l'attraction de l'atmosphère restée autour du noyau,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon'_2$  à celle de l'anneau. Dans ces conditions  $\varepsilon'_1$  est positif si nous supposons que la surface libre de l'atmosphère du noyau est une surface convexe; d'autre part,  $\varepsilon'_2$  est très petit par rapport à  $\varepsilon'_1$ ; le rapport de ces deux quantités est du même ordre de grandeur que le rapport des dimensions *linéaires* de la section méridienne de l'anneau et de la section méridienne de l'atmosphère du noyau.

On aura donc finalement  $\varepsilon' > 0$  et, par conséquent,

$$(5) \quad 4\pi\rho > 3\omega^2 + 2\omega\omega'y.$$

Si la rotation était uniforme, cela donnerait

$$4\pi\rho > 3\omega^2.$$

Nous remarquons que, pour que l'anneau se forme, la fonction  $\omega^2y^3$  doit être croissante au point A; pour qu'il soit stable, si la densité est très faible, cette fonction doit être décroissante au point B. Ces deux points étant voisins

l'un de l'autre, nous concluons que dans l'anneau, au moment de sa formation, la fonction  $\omega^2 y^3$  est sensiblement constante.

Nous venons de trouver une limite inférieure de la densité; ce résultat doit être rapproché de celui que j'ai donné autrefois pour l'anneau de Saturne, mais la limite est plus précise. Reprenons cependant dans le cas actuel le calcul que j'avais fait pour l'anneau de Saturne. On doit avoir en tous les points de la surface de l'anneau,

$$\frac{d}{dn}(\varphi - P) < 0,$$

la notation  $\frac{d}{dn}$  représentant la dérivée estimée suivant la normale dirigée vers l'extérieur. On aura donc, en vertu du théorème de Green,

$$\int \frac{d}{dn}(\varphi - P) d\sigma = \int \Delta(\varphi - P) d\tau < 0,$$

$d\sigma$  étant un élément de la surface de l'anneau et  $d\tau$  un élément de son volume.

Or

$$\Delta\varphi = 2\omega^2 + 2\omega\omega'y,$$

$$\Delta P = 4\pi\rho;$$

d'où

$$4\pi\rho > 2\omega^2 + 2\omega\omega'y.$$

3. La densité a également une limite supérieure. Pour l'établir, il suffit de se reporter au calcul de Maxwell sur l'anneau de Saturne dont je vais rappeler succinctement le principe. Soit un anneau formé de satellites répartis uniformément sur une circonférence de rayon  $a$ , et circulant sur cette circonférence d'un mouvement uniforme; soit alors  $a$  et  $\nu_0 + \omega t$  les coordonnées polaires d'un de ces satellites; supposons qu'il soit troublé et que ces coordonnées deviennent

$$a(1 + \varepsilon), \quad \nu_0 + \omega t + \sigma.$$

$\varepsilon$  et  $\sigma$  étant très petits. Soit  $V$  le potentiel dû à l'attraction mutuelle de ces satellites.

Les équations aux variations qui déterminent  $\varepsilon$  et  $\sigma$  sont les suivantes :

$\sigma', \dots$  représentent les dérivées de  $\sigma, \dots$ , par rapport au temps,

$$(6) \quad 3\omega^2\varepsilon + 2\omega\sigma' - \varepsilon'' = -\frac{1}{a^2} \frac{dV}{d\varepsilon}; \quad \sigma'' + 2\omega\varepsilon' = \frac{1}{a^2} \frac{dV}{d\sigma}.$$

Nous chercherons à satisfaire à ces équations (6) en faisant

$$\varepsilon = A \cos(m\nu_0 + nt), \quad \sigma = B \sin(m\nu_0 + nt).$$

Je m'explique; nous avons autant de couples d'équations (6) que de satellites;  $\varepsilon$  et  $\sigma$  ne sont pas les mêmes pour tous les satellites, ce sont donc des fonctions non seulement de  $t$ , mais de  $\nu_0$  longitude initiale du satellite, qui est la quantité qui distingue les satellites les uns des autres. Le coefficient  $m$  doit être un entier, en effet quand  $\nu_0$  augmente de  $2\pi$ , nous retombons sur le même satellite, il faut donc que  $\varepsilon$  et  $\sigma$  reviennent à la même valeur. Quant à  $n$  c'est notre inconnue. Dans ces conditions, nous aurons

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = a^2 A \alpha \cos(m\nu_0 + nt), \quad \frac{dV}{d\sigma} = a^2 B \beta \sin(m\nu_0 + nt);$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des coefficients constants que nous chercherons à déterminer un peu plus loin. Il vient alors en substituant dans les équations (6),

$$(3\omega^2 + n^2 + \alpha)A + 2\omega nB = 0, \quad 2\omega nA + (n^2 + \beta)B = 0,$$

ou en éliminant A et B,

$$(7) \quad (3\omega^2 + n^2 + \alpha)(n^2 + \beta) - 4\omega^2 n^2 = 0.$$

Pour la stabilité, cette équation doit avoir ses racines réelles. Si nous supposons la masse de l'anneau nulle, on aurait

$$\alpha = \beta = 0, \quad n^2(n^2 - \omega^2) = 0,$$

et la stabilité serait assurée; si l'on supposait  $\omega = 0$ , on trouverait

$$(n^2 + \alpha)(n^2 + \beta) = 0$$

et comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont généralement positifs, il y aurait instabilité. Cela nous indique déjà que pour la stabilité, il faut que la masse de l'anneau soit suffisante, et d'autant plus grande que  $\omega$  est plus grand.

Pour étendre ces résultats à un anneau continu, il faut d'abord un peu de bonne volonté, puisque dans un anneau continu,  $\omega$  n'est pas généralement constant, et qu'en tous cas  $\alpha$  est variable. Mais si la section méridienne de l'anneau est petite par rapport à son rayon, il n'est pas déraisonnable de supposer que l'équation (7) reste encore valable à fort peu près. Il reste à déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ .

Soit  $V_0$  le potentiel dû à l'anneau non troublé,  $V_0 + P$  le potentiel dû à l'anneau troublé, soit  $\rho$  la densité de l'anneau non troublé,  $\rho + \delta$  celle de l'anneau troublé, de sorte que  $\frac{P}{V}$  et  $\frac{\delta}{\rho}$  sont très petits.

Le nombre  $m$  ne figure pas explicitement dans l'équation (7); mais  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de  $m$ . Nous devons choisir ce nombre  $m$  de la manière la plus

défavorable à la stabilité, puisqu'il suffit que l'une quelconque des équations (7) ait des racines imaginaires pour que l'anneau soit instable. Or ce sont les grandes valeurs de  $m$  qui sont les plus défavorables. Nous supposons donc  $m$  très grand de sorte que si l'on se déplace le long d'une circonférence, les fonctions  $V$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  varieront beaucoup plus rapidement que si l'on se déplace suivant un rayon vecteur. Donc  $\frac{dV}{d\varepsilon}$ ,  $\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}$  seront très petits par rapport à  $\frac{dV}{d\sigma}$ ,  $\frac{d^2V}{d\sigma^2}$ ;  $\alpha$  très petit par rapport à  $\beta$ .

Prenons des axes rectangulaires, ayant pour origine le point considéré; l'axe des  $y$  est dirigé suivant le rayon vecteur allant au centre de la nébuleuse, l'axe des  $z$  est parallèle à l'axe de rotation, l'axe des  $x$  est tangent à la circonférence décrite par le point mobile.

Dans ces conditions, on aura

$$\Delta P = -4\pi\delta.$$

Mais les dérivées prises par rapport à  $y$  et à  $z$  sont, d'après l'hypothèse faite plus haut ( $m$  très grand), très petites par rapport aux dérivées prises par rapport à  $x$ . Dans ces conditions,  $\Delta P$  peut se réduire sensiblement à  $\frac{d^2P}{dx^2}$  et l'on peut écrire

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -4\pi\delta.$$

D'autre part, on a (par la relation entre les coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires  $\sigma$  et  $\varepsilon$ )

$$(8) \quad d\sigma = a dx$$

et, par conséquent,

$$\frac{dV}{d\sigma} = \frac{dP}{d\sigma} = a \frac{dP}{dx}.$$

L'équation de continuité nous donne

$$-\frac{\delta}{\rho} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z},$$

$\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  représentant les projections sur les trois axes du vecteur qui joint la position du satellite troublé à celle du satellite non troublé. Les dérivées par rapport à  $y$  et à  $z$  étant négligeables, nous pourrions écrire

$$\frac{\partial \delta y}{\partial y} = \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \delta x}{\partial x} = a \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

où la dérivée partielle

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial v_0} = \frac{mB}{a} \cos(mv_0 + nt)$$

n'a bien entendu rien de commun avec le rapport  $\frac{d\sigma}{dx}$  des différentielles qui figurent dans l'équation (8). L'équation de continuité devient donc

$$a \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\delta}{\rho},$$

d'où

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = 4\pi a \rho \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

En intégrant, nous trouvons

$$\frac{dP}{dx} = 4\pi a \rho \sigma,$$

d'où

$$\frac{1}{a^2} \frac{dV}{d\sigma} = 4\pi \rho \sigma, \quad \beta = 4\pi \rho.$$

Faisons donc, dans l'équation (7),

$$\alpha = 0, \quad \beta = 4\pi \rho,$$

il viendra

$$(9) \quad (3\omega^2 + n^2)(n^2 + 4\pi\rho) - 4\omega^2 n^2 = 0$$

ou

$$n^4 + n^2(4\pi\rho - \omega^2) + 12\pi\rho\omega^2 = 0.$$

Pour que les racines soient réelles, il faut

$$(4\pi\rho - \omega^2)^2 > 12\omega^2 4\pi\rho, \quad (4\pi\rho)^2 - 14\omega^2(4\pi\rho) + \omega^4 > 0.$$

Les valeurs de  $\frac{4\pi\rho}{\omega^2}$  qui annulent le premier membre sont voisines, l'une de  $\frac{1}{14}$ , l'autre de 14; c'est la première qui nous convient et nous en déduisons

$$(10) \quad 4\pi\rho < \frac{\omega^2}{14}.$$

4. La densité  $\rho$  se trouve ainsi comprise entre deux limites données par les inégalités (5) et (10). La limite inférieure donnée par (5) dépend de  $\omega'$ , elle ne dépend donc pas seulement de la vitesse angulaire moyenne, mais de la loi de distribution des vitesses angulaires; il n'en est pas ainsi pour la limite supérieure.

Au moment de la formation de l'anneau, la densité  $\rho$  est très petite, de sorte que l'inégalité (10) est satisfaite; d'autre part, la rotation n'est pas uniforme, et rien n'empêche de supposer que  $\omega^2 y^3$  est décroissant dans le voisinage du point B et, par conséquent, que l'anneau est stable.

Mais cette stabilité est promptement détruite par un triple mécanisme :

1° Le frottement tend à égaliser les rotations, si donc  $\omega' = 0$ , l'inégalité (5) devient

$$4\pi\rho > 3\omega^2$$

et est incompatible avec l'inégalité (10).

2° Par suite de la condensation, l'anneau se concentre de telle façon que sa section méridienne tend à se réduire à son centre de gravité; quel est l'effet de cette condensation? Soient  $y$  le rayon de la circonférence décrite par une particule et  $\omega$  sa vitesse angulaire; soient  $y_0$  et  $\omega_0$  les valeurs de  $y$  et  $\omega$  au moment de la formation de l'anneau. Nous pouvons supposer qu'à ce moment on a

$$\omega_0^2 y_0^3 = M.$$

D'autre part, en vertu de la loi des aires,

$$\omega_0 y_0^2 = \omega y^2.$$

Soit  $a$  le rayon de la circonférence moyenne

$$y_0 = a(1 + \varepsilon_0), \quad y = a(1 + \varepsilon).$$

Nous pouvons supposer que la contraction se fait d'une façon uniforme, de sorte que

$$\varepsilon = \lambda \varepsilon_0.$$

Il vient alors

$$\omega = \frac{\sqrt{y_0 M}}{y^2},$$

ou si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_0$  sont petits,

$$\omega = \sqrt{M} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2} - 2\varepsilon\right) = \sqrt{M} a^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{2} (1 - 4\lambda)\right].$$

On voit que, pour  $\lambda = \frac{1}{4}$ , la rotation devient uniforme. On trouve d'ailleurs

$$\omega = \sqrt{M} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{y}{a}\right)^\mu,$$

où

$$\mu = \frac{1-4\lambda}{2\lambda}.$$

Cela entraîne

$$\omega'y = \mu\omega$$

et l'inégalité (5) devient

$$4\pi\rho > (3+2\mu)\omega^2.$$

Pour qu'elle soit compatible avec l'inégalité (10), il faut

$$\frac{1}{14} > 3+2\mu = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

d'où

$$\lambda = \frac{14}{15}.$$

La stabilité cessera donc dès que les dimensions linéaires de la section méridienne auront diminué de  $\frac{1}{15}$ .

3° Enfin, par suite de la condensation,  $\rho$  ira en croissant, de sorte que l'inégalité (10) cessera d'être satisfaite.

Pour toutes ces raisons l'anneau ne tardera pas à se subdiviser en parties indépendantes qui circuleront chacune de leur côté conformément à la loi de Képler. Ces parties décrivant des orbites peu différentes finiront pas se choquer et se réunir en une seule.

5. Passons maintenant à la question du sens de la rotation des planètes. On a cherché à en rendre compte par les conditions de rotation de l'anneau; cette rotation étant rendue uniforme par le frottement, les vitesses linéaires des parties extérieures devaient être plus grandes que celles des parties intérieures. Cette vue doit être abandonnée. En effet, si les vitesses linéaires croissaient avec  $y$ , c'est-à-dire si  $\omega y$  était croissant, on aurait

$$\omega'y + \omega > 0$$

et, par conséquent,

$$4\pi\rho > 3\omega^2 + 2\omega\omega'y > \omega^2,$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité (10). L'anneau se rompra donc bien avant que sa rotation ne soit devenue uniforme.

Le sens *primitif* de la rotation de la planète sera donc déterminé par les

conditions du choc des diverses parties de l'anneau quand, après s'être séparées l'une de l'autre, elles entrèrent en collision et se fusionneront en un sphéroïde unique. A ce moment, ces parties obéiront séparément aux lois de Képler; les plus externes auront donc une vitesse linéaire moindre que les plus internes, de sorte que le sens primitif de la rotation sera toujours rétrograde.

Les rotations ne pourront devenir directes que par l'action des marées et par le mécanisme imaginé par Roche.

