SUR

LA PRÉCESSION DES CORPS DÉFORMABLES

Bulletin astronomique, t. 27, p 321-356 (septembre 1910).

I. — Croûte solide et noyau liquide.

1. Lord Kelvin s'est, l'un des premiers, prononcé en faveur de la solidité du globe terrestre, et il a cherché de tous côtés des arguments en faveur de son opinion; quelques-uns sont fondés sur les observations de précession et de nutation. Je renverrai en particulier à ses *Popular Lectures*, vol. III, page 244 et à ses *Mathematical Papers*, vol. III, page 320. Dans ses investigations, il envisage l'hypothèse d'une croûte solide *invariable*, à l'intérieur de laquelle se trouve un liquide homogène; il suppose que la surface extérieure de cette croûte solide est un ellipsoïde et que la cavité interne est également ellipsoïdale.

Il avait d'abord annoncé que la constante de la précession aurait dû, dans cette hypothèse, différer considérablement de celle qui conviendrait à une terre solide et qui est celle que donne l'observation. Il en serait manifestement ainsi si la cavité interne était sphérique; la sphère liquide interne aurait alors eu un axe de rotation différent de celui de la croûte solide; le premier de ces axes aurait été fixe, tandis que le second aurait seul subi l'effet de la précession; la constante de la précession aurait donc été la même que si la croûte solide avait seule existé.

Il crut d'abord que l'aplatissement étant très faible ne pouvait sensiblement altérer ce résultat, mais en réfléchissant à la question, ainsi qu'il nous le raconte, il se convainquit de son erreur. Par l'effet de ce qu'il appelle *la rigidité gyrostatique*, le corps complexe qu'il envisage tend à se comporter comme un corps solide. Cette rigidité a son plein effet si la période de l'inégalité envisagée, exprimée en jours, est très grande par rapport à l'inverse de l'aplatissement; elle est donc parfaite en ce qui concerne la précession qui doit suivre les lois théoriques, mais il n'en est plus de même pour la nutation de Bradley dont la période n'est plus que 23 fois l'inverse de l'aplatissement, ni, *a fortiori*, pour les nutations semi-mensuelle et semi-annuelle dont les périodes sont plus courtes que cette inverse. Les divergences seraient énormes et auraient été certainement décelées par l'observation.

2. Il ne sera pas inutile, avant d'aller plus loin, de montrer comment la théorie de Kelvin peut être présentée sous une forme nouvelle et assez simple. Je commence par introduire la notion du *mouvement simple*. Je dirai que le mouvement d'un liquide est simple, si les composantes de la vitesse d'une molécule sont des fonctions linéaires des coordonnées. Il est aisé d'établir, en s'appuyant sur la théorie des tourbillons de Helmholtz, que si le mouvement est simple à l'origine des temps, il restera toujours simple, pourvu que le liquide remplisse entièrement un vase ellipsoïdal invariable, ou même si ce vase se déplace ou se déforme, mais en restant toujours ellipsoïdal. Cela nous autorise à n'envisager que des mouvements simples. Soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes et que nous supposerons d'abord fixe.

A la molécule liquide x, y, z, dont la vitesse est u, v, w, correspondra une molécule fictive dont les coordonnées seront

$$x' = x\sqrt{a}, \qquad y' = y\sqrt{b}, \qquad z' = z\sqrt{c}$$

et la vitesse

$$u' = u\sqrt{a}, \qquad v' = v\sqrt{b}, \qquad w' = w\sqrt{c}.$$

L'ensemble de ces molécules fictives remplira une sphère S qui aura pour équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Il est aisé de voir que, si le mouvement du liquide est simple, ces molécules fictives se déplaceront comme le feraient les molécules d'un corps solide, de sorte que tout se réduira à une rotation de la sphère S. Soient p_1, q_1, r_1 les composantes de cette rotation suivant les trois axes; on aura

$$u = r_1\sqrt{\frac{a}{b}}\,y - q_1\sqrt{\frac{c}{a}}\,z,$$
$$v = p_1\sqrt{\frac{c}{b}}\,z - r_1\sqrt{\frac{a}{b}}\,x,$$
$$w = q_1\sqrt{\frac{a}{c}}\,x - p_1\sqrt{\frac{b}{c}}\,y.$$

Nous avons supposé jusqu'ici que l'ellipsoïde est fixe. Supposons maintenant que cet ellipsoïde soit indéformable, mais mobile; les mêmes formules subsisteront encore pourvu que l'on considère le mouvement *relatif* du liquide par rapport à la croûte solide. Pour avoir le mouvement absolu, il faut y ajouter le mouvement d'entraînement qui se réduit à une rotation de la croûte solide et des axes mobiles. Soient p, q, r les projections de cette rotation *sur les axes mobiles;* on aura pour les vitesses absolues

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= r_1\sqrt{\frac{b}{a}}\,y - q_1\sqrt{\frac{c}{a}}\,z + ry - qz,\\ v &= p_1\sqrt{\frac{c}{b}}\,z - r_1\sqrt{\frac{a}{b}}\,x + pz - rx,\\ w &= q_1\sqrt{\frac{a}{c}}\,x - p_1\sqrt{\frac{b}{c}}\,y + qx - py,\end{aligned}\right.$$

les axes, étant ceux de l'ellipsoïde, sont mobiles.

3. Il est aisé de calculer la force vive dans le mouvement relatif, on trouve

$$\frac{1}{2}(A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2),$$

avec

$$A_1 = \frac{4\pi d}{15}\,\frac{1}{\sqrt{abc}}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

et des expressions analogues pour B_1 et C_1; d est la densité du liquide.

De même, les trois composantes du moment de rotation dans le mouvement relatif sont

$$A'_1 p_1, \quad B'_1 q_1, \quad C'_1 r_1,$$

où

$$A'_1 = \frac{8\pi d}{15}\,\frac{1}{\sqrt{abc}}\,\frac{1}{\sqrt{bc}}.$$

On voit que si l'aplatissement est très petit, on a $A_1 = A'_1$ à des termes près de l'ordre du carré de l'aplatissement.

Quant à la force vive dans le mouvement d'entraînement, ce sera

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

A, B, C étant les trois moments d'inertie du corps *complet* (croûte solide plus contenu liquide).

La force vive dans le mouvement absolu est alors

$$T = \frac{1}{2}\sum Ap^2 + \sum A'_1 pp_1 + \frac{1}{2}\sum A_1 p_1^2. \tag{2}$$

4. Les équations du mouvement peuvent se mettre sous une forme particulièrement simple. On peut les écrire

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dp} + r\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr} = -L, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dp_1} - r_1\frac{dT}{dq_1} + q_1\frac{dT}{dr_1} = 0, \tag{4}$$

avec celles qu'on en déduit par symétrie; L, M, N sont les moments de la force extérieure. On remarquera que ces équations présentent une divergence au premier abord déconcertante.

Dans l'équation (3), le second terme est affecté du signe + et le troisième du signe —; c'est le contraire dans l'équation (4). Cela s'explique très aisément. La rotation p, q, r, c'est la rotation absolue de l'ellipsoïde; nous la projetons sur les trois axes de l'ellipsoïde qui sont des *axes mobiles*. Au contraire, la rotation p_1, q_1, r_1 est la rotation *relative* de la sphère S par rapport à l'ellipsoïde; nous la projetons encore sur les trois axes de l'ellipsoïde qui, en ce qui concerne cette rotation relative, sont des axes fixes.

Ces équations peuvent s'établir de bien des manières; j'en citerai deux: je m'appuierai d'abord sur un théorème que j'ai démontré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **132**, p. 369. Voici ce théorème :

Soit un système mécanique défini par r variables x_i. Envisageons un groupe simplement transitif de transformations de Lie. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_r$ *les r transformations infinitésimales de ce groupe, de telle sorte que* X_k *par exemple change x_i en une fonction des x différant très peu de x_i. Nous écrirons les* équations de structure *du groupe sous la forme*

$$X_i X_k - X_k X_i = \Sigma c_{iks} X_s,$$

les c sont des constantes, et le sens de ces notations est bien connu des *personnes familières avec les travaux de Lie; si, par exemple, on a*

$$X_i X_k - X_k X_i = 0,$$

cela veut dire que les deux transformations X_i *et* X_k *sont permutables.*

Cela posé, au bout du temps dt, les variables x_i se changent en $x_i + \frac{dx_i}{dt} dt$; ce qui revient à dire qu'elles subissent la transformation infinitésimale

$$dt(\eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \ldots + \eta_r X_r).$$

Soient T l'énergie cinétique du système et U son énergie potentielle; T sera une fonction des x et des η et U une fonction des x. Donnons maintenant aux x_i des accroissements virtuels δx_i; cela revient à leur faire subir la transformation infinitésimale

$$\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \ldots + \omega_r X_r.$$

Supposons alors que les Ω_i soient définis par l'identité

$$\sum \left(\frac{dT}{dx} - \frac{dU}{dx} \right) \delta x = \Sigma \Omega_i \omega_i.$$

Ces notations étant définies, le théorème en question nous apprend que les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme suivante (qui contient, comme cas particulier, les équations de Lagrange, ainsi que les équations d'Euler pour la rotation des corps solides) :

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\eta_s} = \sum c_{ski} \frac{dT}{d\eta_i} \eta_k + \Omega_s. \tag{5}$$

Cette formule s'applique immédiatement au cas qui nous occupe; nous avons six degrés de liberté; les six transformations infinitésimales possibles sont : 1° une rotation du corps complet autour de l'un des axes de l'ellipsoïde; 2° le mouvement simple du liquide correspondant à une rotation de la sphère S autour de l'un des axes de l'ellipsoïde, la croûte solide demeurant fixe. Soient X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, ces six transformations. Les règles de la composition des rotations nous fournissent les équations de structure du groupe

$$\begin{aligned} XY - YX &= Z, & X_1 Y_1 - Y_1 X_1 &= -Z_1, \\ YZ - ZY &= X, & Y_1 Z_1 - Z_1 Y_1 &= -X_1, \\ ZX - XZ &= Y, & Z_1 X_1 - X_1 Z_1 &= -Y_1. \end{aligned}$$

D'autre part, une quelconque des transformations X, Y, Z est permutable avec une quelconque des transformations X_1, Y_1, Z_1; on voit donc que toutes les constantes c sont égales à 0, $+1$ ou -1.

Au bout du temps dt, la croûte solide a subi une rotation infiniment petite dont les composantes sont $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$; et la sphère S a subi, par rapport à la croûte solide, une rotation dont les composantes sont $p_1\,dt$, $q_1\,dt$, $r_1\,dt$, de sorte que nos variables ont subi la transformation infinitésimale

$$dt(p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + r\mathrm{Z} + p_1\mathrm{X}_1 + q_1\mathrm{Y}_1 + r_1\mathrm{Z}_1),$$

ce qui montre que les η ne sont autre chose que p, q, r, p_1, q_1, r_1.

On voit que T ne dépend que des η, de sorte qu'on a

$$-\sum \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,\delta x = \sum \Omega\omega,$$

ce qui veut dire que $\Sigma\Omega\omega$ représentent le travail virtuel des forces extérieures pour un déplacement très petit du système; les trois premiers Ω sont donc les moments des forces extérieures; quant aux trois derniers ils sont nuls, puisque les transformations X_1, Y_1, Z_1 ne produisent aucun travail. L'application de la formule (5) nous conduit ainsi aux équations (3) et (4).

5. On peut arriver aux mêmes équations par une autre voie. L'équation (3) n'est autre chose que l'intégrale des aires; en effet, le moment de rotation a pour composantes (sur les trois axes mobiles)

$$\frac{d\mathrm{T}}{dp}, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dq}, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dr},$$

et l'équation (3) exprime que la vitesse *absolue* de l'extrémité de ce vecteur est représentée en grandeur et direction par le moment des forces extérieures.

Quant à l'équation (4), c'est l'expression du théorème de Helmholtz sur les tourbillons. L'intégrale de Helmholtz

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

étendue à une section plane diamétrale quelconque de l'ellipsoïde, est à un facteur constant près

$$\frac{d\mathrm{T}}{dp_1}\cos\alpha + \frac{d\mathrm{T}}{dq_1}\cos\beta + \frac{d\mathrm{T}}{dr_1}\cos\gamma,$$

α, β, γ représentant les cosinus directeurs du plan du grand cercle de la sphère S qui correspond à la section diamétrale considérée. Il suffit pour s'en assurer de se reporter aux équations (1) et (2). Le théorème de Helmholtz nous apprend donc que le vecteur $\frac{d\mathrm{T}}{dp_1}$, $\frac{d\mathrm{T}}{dq_1}$, $\frac{d\mathrm{T}}{dr_1}$ est invariablement lié à la sphère S, ce qui s'exprime précisément par l'équation (4).

6. Si nous nous rappelons l'expression de T, nous pouvons écrire les équations (3) et (4) sous la forme

$$(6)\qquad A p' + A'_1 p'_1 + r(Bq + B'_1 q_1) - q(Cr + C'_1 r_1) = -L,$$
$$(7)\qquad A'_1 p' + A_1 p'_1 - r_1(B'_1 q + B_1 q_1) + q_1(C'_1 r + C_1 r_1) = 0,$$

avec celles qu'on en déduit par symétrie; p' et p'_1 sont les dérivées de p et p_1 par rapport au temps.

Une première conséquence de ces équations, c'est que si la croûte solide est maintenue fixe, le mouvement interne du liquide suivra les lois du mouvement à la Poinsot.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures,

$$L = M = N = 0,$$

on trouve aisément les intégrales suivantes :

$$(8)\qquad T = \text{const.},\qquad \sum\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 = \text{const.},\qquad \sum\left(\frac{dT}{dp_1}\right)^2 = \text{const.}$$

Si la capacité interne est supposée sphérique, on a

$$A_1 = A'_1 = B_1 = B'_1 = C_1 = C'_1;$$

on trouve alors, en retranchant les équations (6) et (7),

$$(A - A_1)p' + rq(B - C) = -L,$$

ce qui montre que le mouvement de la croûte solide est le même que si ses moments d'inertie étaient $A - A_1$, $B - A_1$, $C - A_1$, c'est-à-dire *si elle existait seule*.

7. Supposons maintenant que le corps soit de révolution; on aura

$$(9)\qquad A = B,\qquad A_1 = B_1,\qquad A'_1 = B'_1,\qquad C_1 = C'_1,\qquad N = 0$$

et nous aurons les équations

$$Cr' + C_1 r'_1 + B'_1(qp_1 - pq_1) = 0,$$
$$C_1 r' + C_1 r'_1 + B'_1(qp_1 - pq_1) = 0$$

qu'on déduit de (6) et (7) par symétrie et, en tenant compte des relations (9), on en déduit aisément

$$r' = 0,\qquad r = \text{const.}$$

et

$$(10)\qquad C_1 r'_1 + B'_1(qp_1 - pq_1) = 0.$$

Si l'on suppose de plus $L = M = 0$, on pourra achever l'intégration par quadratures.

Les équations (8) nous donneront

$$p^2 + q^2,\quad p_1^2 + q_1^2,\quad pp_1 + qq_1,\quad (qp_1 - pq_1)^2$$

sous la forme de polynomes du deuxième et du quatrième degré en r_1, en nous rappelant que r est une constante. L'équation (10) nous donne alors r_1 en fonction elliptique du temps. On montrerait enfin que, par exemple, la dérivée par rapport au temps de

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{A p + A'_1 p_1}{A q + A'_1 q_1}$$

est une fonction connue du temps.

8. Le cas qui nous intéresse est celui où p, q, p_1, q_1 sont très petits du premier ordre. La relation (10) nous apprend alors que r_1 est très petit du deuxième ordre et peut être négligé. Nous poserons

$$-L = K \cos kt, \qquad -M = -K \sin kt, \qquad N = 0.$$

Voici ce qui nous y autorise : L et M sont des fonctions périodiques du temps développables en séries de Fourier; nous considérerons seulement l'un des termes; si maintenant nous attribuons au sinus et au cosinus le même coefficient, c'est qu'on peut toujous écrire

$$\begin{aligned} C \cos kt &= A \cos kt + A' \cos(-kt);\\ D \sin kt &= A \sin(kt) + A' \sin(-kt) \end{aligned}$$

en posant

$$C = A + A', \qquad D = A - A'.$$

Nos équations, en négligeant r_1 et tenant compte de (9), deviennent

$$\begin{aligned} &A p' + A'_1 p'_1 + r(A q + A'_1 q_1) - q C r = K \cos kt,\\ &A q' + A'_1 q'_1 - r(A p + A'_1 p_1) + p C r = -K \sin kt,\\ &A'_1 p' + A_1 p'_1 + q_1 C_1 r = 0,\\ &A'_1 q' + A_1 q'_1 - p_1 C_1 r = 0. \end{aligned}$$

Nous y satisferons en posant

$$p = \alpha \sin kt, \qquad q = \alpha \cos kt, \qquad p_1 = \alpha_1 \sin kt, \qquad q_1 = \alpha_1 \cos kt,$$

ce qui donnera

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} (A\alpha + A'_1 \alpha_1)(k + r) - \alpha C r &= K,\\ (A'_1 \alpha + A_1 \alpha_1) k + C_1 \alpha_1 r &= 0. \end{aligned} \right.$$

9. Pour discuter les équations (11) nous supposerons l'aplatissement très petit, ce qui nous permettra, comme nous l'avons expliqué plus haut, de supposer $A_1 = A'_1$. De plus, nous supposerons que les deux ellipsoïdes externe et interne sont sensiblement semblables, ce que nous exprimerons en écrivant

$$\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1}$$

ou

$$\frac{C - A}{A} = \frac{C_1 - A_1}{A_1} = \varepsilon,$$

ε étant de l'ordre de l'aplatissement. Nous poserons alors

$$A = 1, \qquad A_1 = \lambda, \qquad C = 1 + \varepsilon, \qquad C_1 = \lambda(1 + \varepsilon), \qquad \lambda\alpha_1 = \beta,$$

ce qui est permis en choisissant les unités. Alors pour un corps solide on aurait $\lambda = 0$ et, pour un liquide recouvert d'une croûte très mince, $\lambda = 1$; les équations (11) deviennent alors

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha(k - \varepsilon r) + \beta(k + r) = K, \\ \alpha\lambda k + \beta(k + r + \varepsilon r) = 0; \end{cases}$$

d'où

$$\alpha\Delta = K(k + r + \varepsilon r),$$

$\Delta = (k - \varepsilon r)(k + r + \varepsilon r) - \lambda k(k + r)$ étant le déterminant des équations (12). Il s'agit de savoir comment l'amplitude α de la nutation varie en fonction de λ (c'est-à-dire comment elle dépend de l'épaisseur de la croûte solide).

Comme $k + r + \varepsilon r$ ne dépend pas de λ, on voit que α est en raison inverse de Δ.

Soit N le nombre de jours de la période de la nutation considérée, on aura

$$\frac{k + r}{1} = \frac{r}{-N} = \frac{k}{N + 1}.$$

Donc Δ est proportionnel à $(N + 1 + \varepsilon N)(1 - \varepsilon N) - \lambda(N + 1)$, ou, puisque εN est négligeable devant $N + 1$, à $(N + 1)(1 - \varepsilon N - \lambda)$ ou à $1 - \varepsilon N - \lambda$. Si donc nous désignons par α_0 l'amplitude de la nutation pour un corps solide, c'est-à-dire pour $\lambda = 0$, nous aurons

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\varepsilon N - 1}{\varepsilon N - 1 + \lambda}.$$

On voit que si εN est très grand, c'est-à-dire si le nombre de jours de la nutation est très grand par rapport à l'inverse de l'aplatissement, le rapport $\frac{\alpha}{\alpha_0}$

est sensiblement égal à 1, de sorte que la nutation diffère peu de sa valeur théorique, mais qu'il n'en est pas ainsi pour les nutations courtes, comme les nutations semi-annuelle et semi-mensuelle, à tel point qu'elles peuvent changer de signe et deviennent infinies pour une certaine valeur de l'épaisseur, celle pour laquelle on a

$$\varepsilon N = 1 - \lambda.$$

Les conclusions générales de lord Kelvin se trouvent donc vérifiées; cependant les valeurs numériques obtenues ne sont pas les mêmes; je lui ai autrefois écrit à ce sujet et il m'a répondu que cette rectification lui avait déjà été signalée par un savant irlandais; j'ignore si ce savant a publié quelque chose à ce sujet.

On peut également se demander quelle est la période de la nutation propre du système; elle correspond au cas où Δ s'annule, ce qui donne

$$N = \frac{1-\lambda}{\varepsilon}.$$

Ce serait une période plus courte que celle d'Euler; on sait que la période de Chandler, donnée par l'observation, est au contraire plus longue.

II. — Liquide homogène.

10. Après avoir exposé les résultats qui précèdent, lord Kelvin se demande quelle serait la précession d'une masse liquide libre et il annonce qu'elle doit se comporter comme un corps solide :

« Although, dit-il, the full problem has not yet been coherently worked out: I think I see far enough towards a complete solution to say that precession and nutation will be practically the same as in a solid globe. »

Nous allons voir que ces prévisions sont parfaitement justifiées.

Nous supposerons d'abord que le liquide est *homogène :*

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées initiales d'une de ses molécules; x, y, z ses coordonnées actuelles; si le mouvement est simple, ce que, comme nous le verrons, il nous est permis de supposer, x, y, z sont des fonctions linéaires de x_0, y_0, z_0 et nous pouvons écrire :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0, \\ y = \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0, \\ z = \alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0, \end{cases}$$

les α, β, γ étant des fonctions du temps. Le liquide étant incompressible, le déterminant Δ de ces neuf coefficients est égal à 1.

Nous supposerons que la surface libre initiale du liquide a la forme d'un ellipsoïde; le mouvement étant simple, cette surface libre conservera toujours la forme d'un ellipsoïde. Rien ne nous force à considérer comme situation *initiale* une situation qui ait été à un moment quelconque effectivement réalisée; nous pouvons choisir une situation initiale idéale d'où l'on puisse passer à la situation actuelle par un mouvement simple, mais d'ailleurs quelconque. Nous pourrons donc supposer que la surface libre initiale a pour équation

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Mais comme les molécules qui sont initialement à la surface restent à la surface, l'équation de la surface libre sera toujours

$$\Sigma x_0^2 = 1.$$

Les équations de l'Hydrodynamique nous donnent

$$\sum x'' \, dx = \frac{dp}{\rho} - dV,$$

où $x'' = \alpha''_1 x_0 + \beta''_1 y_0 + \gamma''_1 z_0$ est la dérivée seconde de x par rapport au temps; où p est la pression, ρ la densité du liquide et V le potentiel. Le liquide étant homogène, nous pouvons prendre $\rho = 1$; quand au potentiel, il se compose de deux parties : le potentiel intérieur V_i dû à l'attraction du liquide sur lui-même; le potentiel extérieur V_e dû à l'action des astres troublants. Nous pourrons donc finalement écrire l'équation sous la forme

$$\Sigma x'' \, dx = dp - dV_i - dV_e. \tag{2}$$

11. Pour justifier nos hypothèses nous devons montrer que les deux membres peuvent être égalés à la différentielle d'un polynome du second degré.

Le premier membre doit être une différentielle exacte, et ce ne peut être que celle d'un polynome du deuxième degré si, le mouvement étant simple, x'' et x sont des polynomes du premier degré; passons au deuxième membre :

1° V_i sera un polynome du deuxième degré, si la surface libre est un ellipsoïde, puisque le potentiel dû à l'attraction d'un ellipsoïde est un polynome du deuxième degré *à l'intérieur de cet ellipsoïde;*

2° V_e sera un polynome du deuxième degré; en effet, V_e peut être développé suivant les puissances de x, y, z; les termes de degré 0 et 1 doivent être laissés de côté dans l'étude du mouvement d'un corps autour de son centre de gravité; les termes de degré supérieur à 2 doivent être négligés comme très petits; il restera donc les termes de degré 2;

3° Quant à la pression P, elle n'est assujettie qu'à une condition, celle d'être constante à la surface libre. Cette surface libre étant un ellipsoïde $\psi = 1$, il suffira de prendre y proportionnel à ψ pour satisfaire à cette condition et pour qu'en même temps, comme il convient, p soit un polynome du deuxième degré. Nos hypothèses se trouvent ainsi justifiées.

12. Soit $\psi = 1$ l'équation de la surface libre, que nous supposerons peu différente d'une sphère.

En prenant pour un instant pour axes ceux de l'ellipsoïde, je puis écrire

$$\psi = (1 + a)x^2 + (1 + b)y^2 + (1 + c)z^2,$$

a, b et c étant très petits et assujettis à la condition d'incompressibilité

$$a + b + c = 0.$$

D'après la théorie de l'attraction des ellipsoïdes, nous pouvons écrire

$$V_i = (1 + k'a)x^2 + (1 + k'b)y^2 + (1 + k'c)z^2,$$

où $k' = \frac{3}{5}$; nous supposons les unités choisies de telle sorte que pour la sphère on ait $V_i = \Sigma x^2$.

Comme, d'autre part, $\psi = \Sigma x_0^2$, nous aurons

$$V_i = k'\Sigma x_0^2 + (1 - k')\Sigma x^2 \tag{3}$$

et cette formule sera indépendante du choix des axes. Nous supposerons, d'autre part

$$p = \lambda'\Sigma x_0^2 + \text{const.}$$

et nous substituerons ces valeurs de p et de V_i dans l'équation (2), où nous supposerons d'abord $V_e = 0$. En identifiant les coefficients de $x_0\,dx_0$, $y_0\,dx_0$, $x_0\,dy_0$, on trouve

$$\Sigma\alpha\alpha'' = k\Sigma\alpha^2 + \lambda, \tag{4}$$

$$\Sigma\alpha''\beta = \Sigma\alpha\beta'' = k\Sigma\alpha\beta \tag{5}$$

en posant pour abréger

$$\lambda = 2\lambda' - 2k', \qquad k = 2(k' - 1) = -\frac{4}{5}.$$

Si l'on tenait compte de V_e, on aurait

$$(6)\qquad \Sigma\alpha\alpha'' = k\Sigma\alpha^2 + \lambda - \frac{d^2 V_e}{dx_0^2},$$

$$(7)\qquad \Sigma\alpha''\beta = \Sigma\alpha\beta'' = k\Sigma\alpha\beta - \frac{d^2 V_e}{dx_0\, dy_0}.$$

A ces équations il faudrait, bien entendu, adjoindre celles qu'on peut déduire par symétrie. On y voit figurer des sommes telles que $\Sigma\alpha''\beta$ qui signifient, bien entendu,

$$\Sigma\alpha''\beta = \alpha''_1\beta_1 + \alpha''_2\beta_2 + \alpha''_3\beta_3;$$

mais nous aurons bientôt à envisager d'autres sommes analogues où la sommation se fait d'une manière différente; telle sera, par exemple,

$$\alpha''_1\alpha_2 + \beta''_1\beta_2 + \gamma''_1\gamma_2$$

que j'écrirai $\Sigma\alpha''_1\alpha_2$, où je mettrai les indices en évidence, de sorte que toute confusion deviendra impossible.

13. Ces équations admettent des intégrales particulières; si nous supposons $V_e = 0$, nous aurons l'intégrale des forces vives et celle des aires. Cette dernière peut s'écrire

$$\Sigma m(x'y - xy') = \text{const.},$$

m étant la masse d'une molécule; en y remplaçant x, y, z par leurs valeurs (1), cela peut s'écrire

$$(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha'_2\alpha_1)\Sigma m x_0^2 + (\alpha'_1\beta_2 - \beta'_2\alpha_1 + \alpha_2\beta'_1 - \alpha'_2\beta_1)\Sigma m x_0 y_0 + \ldots = \text{const.}$$

Mais la figure initiale est une sphère $\Sigma x_0^2 = 1$; on aura donc

$$\Sigma m x_0^2 = \Sigma m y_0^2 = \Sigma m z_0^2, \qquad \Sigma m x_0 y_0 = \Sigma m x_0 z_0 = \Sigma m y_0 z_0 = 0.$$

L'équation des aires se réduit donc à

$$(8)\qquad \Sigma(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha'_2\alpha_1) = \text{const.},$$

la sommation ayant le sens qui a été expliqué à la fin du numéro précédent. Supposons maintenant qu'on tienne compte de V_e. Le premier membre de (8) représente à un facteur numérique près la constante des aires; la dérivée de ce premier membre sera donc égale à ce facteur numérique près au moment de la force extérieure.

Le théorème de Helmholtz nous apprend ensuite que l'intégrale

$$\int x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz$$

prise le long d'un contour fermé est constante; or cette intégrale est égale à

$$\Sigma\alpha'\alpha \int x_0\, dx_0 + \Sigma\alpha'\beta \int x_0\, dy_0 + \Sigma\alpha\beta' \int y_0\, dx_0 + \ldots.$$

Si l'on observe que la courbe étant fermée on a

$$\int x_0\, dx_0 = \int (x_0\, dy_0 + y_0\, dx_0) = 0,$$

on voit que le théorème de Helmholtz entraîne l'équation

$$\Sigma(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \text{const.} \tag{9}$$

et celles qu'on en déduit par symétrie.

L'équation (9) est vraie que V_e soit nul ou non.

Il faudrait des calculs compliqués pour déduire (8) de (4) et (5); il n'en est pas de même de (9) qui résulte immédiatement de l'intégration de

$$\Sigma\alpha\beta'' = \Sigma\alpha''\beta.$$

14. Les équations (4) et (5) admettent une solution particulière simple; il suffit de poser

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = \rho\cos\omega t, & \alpha_2 = -\rho\sin\omega t, & \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = \rho\sin\omega t, & \beta_2 = \rho\cos\omega t, & \beta_3 = 0, \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 0, \end{array}\right. \tag{10}$$

d'où

$$\rho^2(\omega^2 + k) + \lambda = kc^2 + \lambda = 0; \qquad k = \frac{\omega^2\rho^2}{c^2 - \rho^2}.$$

On aura, d'autre part, la relation d'incompressibilité $\Delta = 1$ qui s'écrira

$$\rho^2 c = 1.$$

Cette solution s'applique au cas où la masse liquide prend une vitesse de rotation uniforme et subit un aplatissement; les deux axes de l'ellipsoïde sont ρ et c.

15. Les solutions que nous aurons à envisager sont celles qui s'éloignent peu de la solution (10), soit que nous fassions $V_e = 0$, soit que nous envisagions les équations (6) et (7), lesquelles admettront des solutions très peu différentes de (10) parce que nous supposons V_e très petit; nous allons appliquer la méthode des *équations aux variations*, c'est-à-dire que nous allons remplacer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ par

$$\alpha_1 + \delta\alpha_1 = \rho\cos\omega t + \delta\alpha_1, \qquad \alpha_2 + \delta\alpha_2 = -\rho\sin\omega t + \delta\alpha_2,$$
$$\alpha_3 + \delta\alpha_3 = \delta\alpha_3, \qquad \ldots,$$

et négliger les carrés des variations $\delta\alpha_1, \ldots$; nous obtiendrons ainsi des équations différentielles linéaires pour ces variations $\delta\alpha_1$; ces équations seront dépourvues de deuxième membre, si nous faisons $V_e = 0$, elles en posséderont un si nous partons des équations (6) et (7).

Le point remarquable, c'est que ces équations linéaires se répartiront en deux groupes distincts.

Les équations déduites de $\Delta = 1$ et des équations (4) et (5) en $\alpha\alpha''$, $\alpha''\beta$, $\alpha\beta''$, $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$ ne contiendront d'autres inconnues que

$$\delta\alpha_1, \quad \delta\alpha_2, \quad \delta\beta_1, \quad \delta\beta_2, \quad \delta\gamma_3, \quad \delta\lambda.$$

Au contraire, les équations déduites des équations (4) et (5) en $\alpha\gamma''$, $\alpha''\gamma$, $\beta\gamma''$, $\beta''\gamma$ ne contiendront d'autres inconnues que

$$\delta\alpha_3, \quad \delta\beta_3, \quad \delta\gamma_1, \quad \delta\gamma_2.$$

Celles du premier groupe correspondent, dans le cas de $V_e = 0$, à la solution qui correspond à une vitesse de rotation uniforme peu différente de ω, et aux oscillations propres du liquide dans lesquelles le plan des xy reste un plan de symétrie. Dans le cas où V_e n'est pas nul, elles nous font connaître les marées du liquide sous l'influence du corps troublant.

Ce sont celles du deuxième groupe qui nous font connaître les phénomènes de nutation et qu'il convient d'envisager.

16. Cherchons donc à former les équations du deuxième groupe; nous trouverons

$$\delta\Sigma\alpha\gamma = \Sigma\alpha\delta\gamma + \Sigma\gamma\delta\alpha,$$

et, par exemple,

$$\Sigma\alpha\delta\gamma = \alpha_1\,\delta\gamma_1 + \alpha_2\,\delta\gamma_2 + \alpha_3\,\delta\gamma_3 = \rho\cos\omega t\,\delta\gamma_1 - \rho\sin\omega t\,\delta\gamma_2,$$

et, en continuant le calcul de la même façon, on aurait

$$\delta\Sigma\alpha\gamma + i\,\delta\Sigma\beta\gamma = \rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta,$$

en posant

$$\delta\gamma_1 + i\,\delta\gamma_2 = \xi, \qquad \delta\alpha_3 + i\,\delta\beta_3 = \eta,$$

(de façon à n'avoir plus que deux inconnues ξ et η dont les parties réelles et imaginaires sont nos anciennes inconnues $\delta\gamma$ et $\delta\alpha$), on trouverait de même

$$\delta\Sigma\alpha''\gamma + i\,\delta\Sigma\beta''\gamma = -\,\omega^2\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta'',$$
$$\delta\Sigma\alpha\gamma'' + i\,\delta\Sigma\beta\gamma'' = \rho\, e^{i\omega t}\xi''.$$

Or des équations (4) et (5) on peut déduire comme équations aux variations

$$\delta\Sigma\alpha\gamma'' + i\,\delta\Sigma\beta\gamma'' = \delta\Sigma\alpha''\gamma + i\,\delta\Sigma\beta''\gamma = k(\delta\Sigma\alpha\gamma + i\delta\Sigma\beta\gamma)$$

ou

$$(11)\qquad \rho\, e^{i\omega t}\xi'' = -\,\omega^2\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta'' = k(\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta).$$

On trouve aussi l'équation de Helmholtz qu'on peut déduire par variation de (9) et des équations qu'on en tire par symétrie, ce qui donne

$$(12)\qquad \rho\, e^{i\omega t}\xi' - i\omega\rho\, e^{i\omega t}\xi - c\eta' = \text{const.}$$

et l'équation des aires qu'on peut déduire par variaion de (9) (et des équations qu'on en tire par symétrie) et qui s'écrit

$$(13)\qquad \rho\, e^{-i\omega t}(\eta' + i\omega\eta) - c\xi' = \text{const.}$$

La différentiation de (13) donnerait

$$(14)\qquad \rho\, e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = 0.$$

Si dans (14) nous remplaçons ξ'' et η'' par leurs valeurs tirées de (11), cette équation devient une identité en tenant compte de $k(c^2 - \rho^2) = \omega^2\rho^2$.

Si l'on tient compte maintenant de V_e, il faut ajouter au dernier membre de (11)

$$-\left(\frac{d^2V_e}{dx_0\,dz_0} + i\frac{d^2V_e}{dy_0\,dz_0}\right).$$

Mais V_e étant très petit, nous pouvons dans ces termes correctifs faire

$$\rho = c = 1, \qquad \delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = 0;$$

d'où

$$x = x_0\cos\omega t + y_0\sin\omega t, \qquad y = -\,x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t, \qquad z = z_0,$$

d'où enfin

$$\frac{dF}{dx_0} + i\frac{dF}{dy_0} = \left(\frac{dF}{dx} + i\frac{dF}{dy}\right)e^{i\omega t},$$

de sorte que le terme à ajouter au dernier membre de (11) est

$$(15)\qquad -\left(\frac{d^2V_e}{dx\,dz} + i\frac{d^2V_e}{dy\,dz}\right)e^{i\omega t}.$$

Si le liquide se déplace comme un corps solide, Σx^2 devra être indépendant du temps, égal par conséquent à sa valeur dans la solution (10), c'est-à-dire qu'on aura $\Sigma x^2 = \rho^2(x_0^2 + y_0^2) + c^2 z_0^2$; on déduit de là

$$\Sigma\alpha\gamma = \Sigma\beta\gamma = 0,$$

ou

$$\delta\Sigma\alpha\gamma + i\,\delta\Sigma\beta\gamma = 0,$$

ou

$$\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta = 0. \tag{16}$$

17. Le potentiel V_e est une fonction connue des coordonnées du point attiré x, y, z et du temps, puisque les coordonnées de l'astre troublant sont connues en fonctions du temps. L'expression (15) est donc une fonction connue du temps; elle peut être développée en série de Fourier, les périodes des différents termes de

$$\frac{d^2 V_e}{dx\,dz} + i\frac{d^2 V_e}{dy\,dz} \tag{17}$$

sont relativement longues puisque ce sont celles des diverses nutations. Si donc je désigne par $A e^{i\varepsilon t}$ un des termes du développement de (17) et, par conséquent par $-A e^{i(\omega+\varepsilon)t}$ le terme correspondant du développement de (15), ε sera petit par rapport à ω.

Je puis isoler ce terme, et les équations (11) deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned} &k(\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta) - \rho\, e^{i\omega t}\xi'' = A\, e^{i(\omega+\varepsilon)t}, \\ &\omega^2\rho\, e^{i\omega t}\xi - c\eta'' + \rho\, e^{i\omega t}\xi'' = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Nous y satisferons en posant

$$\rho\xi = a\, e^{i\varepsilon t}, \qquad c\eta = b\, e^{i(\omega+\varepsilon)t},$$

ce qui donnera

$$\left\{\begin{aligned} a(k+\varepsilon^2) + bk &= A, \\ a(\omega^2 - \varepsilon^2) + b(\omega+\varepsilon)^2 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Le déterminant des équations (19) est

$$\Delta = (2k + \varepsilon\omega + \varepsilon^2)\varepsilon(\omega + \varepsilon).$$

Pour obtenir les oscillations *propres* du système, il faut faire $A = 0$ et résoudre par rapport à ε, a et b. On aura donc $\Delta = 0$, ce qui conduit aux solutions suivantes :

1° $\varepsilon = 0$, ce qui correspond à une rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour d'un axe très peu différent de l'axe des z;

2° $\omega + \varepsilon = 0$, ce qui correspond à l'hypothèse suivante : supposons qu'avant d'imprimer au liquide une rotation uniforme autour de l'axe des z, nous déplaçions les molécules de très petites quantités à l'intérieur du liquide, *sans altérer sa forme extérieure;* nous aurons une solution très peu différente de la solution (10), correspondant à la même rotation tant en grandeur qu'en direction, au même aplatissement, à la même orientation des axes de l'ellipsoïde, et qui ne se distingue en un mot de la solution (10) que parce que certaines molécules se sont échangées avec d'autres;

3° $2k + \varepsilon\omega + \varepsilon^2 = 0$, ce qui correspond à des oscillations propres de période très courte, un peu plus d'une heure.

Si nous voulons maintenant tenir compte de l'action de l'astre troublant, nous ne ferons plus $A = 0$, et il viendra

$$a = \frac{A(\omega + \varepsilon)^2}{\Delta} = \frac{A(\omega + \varepsilon)}{\varepsilon(2k + \varepsilon\omega + \varepsilon^2)},$$

$$b = -\frac{A(\omega^2 - \varepsilon^2)}{\Delta} = -\frac{A(\omega - \varepsilon)}{\varepsilon(2k + \varepsilon\omega + \varepsilon^2)}.$$

D'après nos hypothèses, ε est très petit par rapport à ω, et $\frac{\omega^2}{k}$ est de l'ordre de l'aplatissement; nous pouvons donc négliger ε devant ω et $\varepsilon\omega + \varepsilon^2$ devant $2k$, ce qui donne

$$a = \frac{A\omega}{2k\varepsilon}, \qquad b = -\frac{A\omega}{2k\varepsilon};$$

d'où

$$a + b = 0.$$

Mais cette relation $a + b = 0$ est équivalente à la relation (16); elle signifie donc que le liquide se comporte comme un corps solide.

18. Ce résultat peut être présenté sous une autre forme. Écrivons l'équation des aires, qui n'est autre chose que l'équation (13) quand $V_e = 0$. Si V_e n'est pas nul, nous devrons écrire que la dérivée de la constante des aires est égale au moment de la force extérieure. Or le premier membre de (13) a la signification suivante : c'est à un facteur numérique près la constante des aires relative au plan des xz, plus $\sqrt{-1}$ multiplié par la constante des aires relative au plan des yz. Donc la dérivée de ce premier membre, c'est-à-dire le premier membre de (14), doit être égale à $M + iL$, L et M étant, à un facteur numé-

rique près, les moments de la force extérieure par rapport aux axes des x et des y. On aura donc

$$(14\ bis) \qquad \rho\, e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = \mathrm{M} + i\mathrm{N}.$$

Le deuxième membre peut être développé en série de Fourier; soit $\mathrm{B}\, e^{i\varepsilon t}$ un de ses termes; nous isolerons ce terme et nous écrirons

$$(14\ ter) \qquad \rho\, e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = \mathrm{B}\, e^{i\varepsilon t}.$$

Cette équation est vraie tant pour un corps solide que pour un liquide. Dans le cas d'un liquide, cette équation doit être complétée par l'équation de Helmholtz, c'est-à-dire par la deuxième équation (18) et dans le cas d'un solide par l'équation (16). On trouve ainsi

$$\frac{\rho b}{c}[\omega^2 - (\omega + \varepsilon)^2] + \frac{ca}{\rho}\varepsilon^2 = \mathrm{B} \qquad \text{(solide ou liquide)},$$
$$a(\omega - \varepsilon) + b(\omega + \varepsilon) = 0 \qquad \text{(liquide)},$$
$$a + b = 0 \qquad \text{(solide)}.$$

On voit que pour ε très petit par rapport à ω les deux dernières équations concordent, de sorte que les deux corps, solide ou liquide, se comporteront sensiblement de la même manière. Cette analyse des mouvements d'un liquide homogène doit être rapprochée de celle que j'ai faite dans le tome VII des *Acta mathematica* pages 347 et suivantes; là on voit déjà à l'endroit cité que les oscillations d'un ellipsoïde peuvent être réparties en groupes susceptibles d'être étudiés séparément; dans chacun de ces groupes n'interviennent que des fonctions de Lamé d'un ordre déterminé. Les mouvements que nous avons considérés ici correspondent aux fonctions de Lamé du premier ordre.

III. — Rigidité gyrostatique.

1. Examinons maintenant ce qui se passe dans le cas d'un liquide hétérogène. Les équations de l'Hydrodynamique nous donnent encore comme au paragraphe II,

$$(1) \qquad \Sigma\, x''\, dx = \frac{dp}{\mathrm{D}} - d\mathrm{V}_i - d\mathrm{V}_e.$$

Je désigne par D la densité du liquide que je n'ai plus le droit de prendre pour unité puisque le liquide est hétérogène. Une solution particulière est celle où le liquide soustrait à toute action extérieure est animé d'une vitesse de rotation uniforme ω autour de l'axe des z. Dans ce cas on a $\mathrm{V}_e = 0$; nous affecterons de l'indice 1 les lettres relatives à cette solution et nous écrirons

$$\Sigma x_1'' \, dx_1 = \frac{dp_1}{D} - dV_{1,i}. \tag{2}$$

D seul n'ayant pas changé. Comparons maintenant à un liquide homogène soumis aux mêmes actions extérieures, et affectons de l'indice 2 les lettres correspondantes ; nous aurons

$$\Sigma x_2'' \, dx_2 = dp_2 - dV_{2i} - dV_e. \tag{3}$$

D est devenu égal à 1 et V_e par hypothèse est le même que dans le premier cas. Considérons enfin le cas d'un liquide homogène soustrait à toute action extérieure et animé d'une rotation uniforme ; nous aurons, en affectant les lettres de l'indice 3,

$$\Sigma x_3'' \, dx_3 = dp_3 - dV_{3i}. \tag{4}$$

Nous avons vu au paragraphe II que, si *la nutation est de période longue*, le liquide homogène se comportera sensiblement comme un solide ; il en résulte que le potentiel V_i sera le même dans les deux cas (pour une même molécule x_0, y_0, z_0) ; en effet ce potentiel est dû à l'attraction de l'ellipsoïde, et cet ellipsoïde s'est déplacé sans se déformer et en entraînant dans son mouvement le point attiré x_0, y_0, z_0 ; on aura donc

$$V_{2i} = V_{3i} ;$$

on a également

$$p_2 = p_3$$

(la valeur des constantes λ et λ' du paragraphe II étant les mêmes dans les deux cas). Il reste donc, en retranchant (3) de (4),

$$dV_e = \Sigma x_3'' \, dx_3 - \Sigma x_2'' \, dx_2. \tag{5}$$

Observons encore que le mouvement du liquide hétérogène dans le cas de l'équation (2) est le même que celui du liquide homogène dans le cas de l'équation (4), de sorte qu'on a

$$x_1 = x_3, \qquad x_1'' = x_3'', \qquad \Sigma x_1'' \, dx_1 = \Sigma x_3'' \, dx_3.$$

Je dis maintenant qu'on pourra satisfaire à l'équation (1), en supposant que le liquide hétérogène se déplace d'après les mêmes lois que le liquide homogène dans le cas de l'équation (3), c'est-à-dire de telle façon que $x = x_2$, ce qui entraîne

$$x'' = x_2'', \qquad \Sigma x'' \, dx = \Sigma x_2'' \, dx_2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette solution soit acceptable, c'est qu'elle conduise pour dp à une expression qui soit la différentielle exacte d'une fonction qui s'annule sur la surface libre.

Si l'on a $x = x_2$, le liquide se comporte sensiblement comme un corps solide et l'on peut, en répétant le raisonnement qui nous a fait voir que $V_{2,i} = V_{3,i}$, montrer que

$$V_i = V_{1,i}.$$

Dans ces conditions, les équations (1) et (2) deviennent

$$(1\ bis) \qquad \Sigma x''_2\, dx_2 = \frac{dp}{D} - dV_i - dV_e,$$

$$(2\ bis) \qquad \Sigma x''_3\, dx_3 = \frac{dp_1}{D} - dV_i,$$

en les retranchant et en tenant compte de (5), on trouve

$$dp = dp_1,$$

ce qui montre que dp est la différentielle exacte de la fonction p_1 qui s'annule à la surface libre. C. Q. F. D.

Ainsi, *aussi bien pour un liquide hétérogène* libre *que pour un liquide homogène* libre, *la précession et les nutations seront les mêmes que pour un corps solide.*

2. Ce qui précède rentre évidemment dans un fait très général connu sous le nom de *rigidité gyrostatique*, et l'on peut alors se demander pourquoi le même raisonnement n'est pas applicable au cas traité dans le paragraphe I, cas dans lequel nous avons obtenu des résultats absolument différents. En réalité, il reste applicable, mais il y a une différence importante. Rappelons la formule du dernier numéro du paragraphe I :

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\varepsilon N - 1}{\varepsilon N - 1 + \lambda}.$$

Lorsque N tend vers l'infini, le rapport $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ tend vers 1, c'est-à-dire que le corps envisagé tend à se comporter comme un corps solide : seulement, ce qui figure dans la formule, ce n'est pas N, c'est εN, et N peut être très grand sans que εN le soit; si εN est très grand, c'est-à-dire si la période de la nutation exprimée en jours est très grande, non seulement d'une manière absolue, mais par rapport à l'inverse de l'aplatissement, la rigidité gyrostatique aura son plein effet, et la nutation sera la même que pour un corps solide. Mais il n'en sera plus ainsi si εN est fini. C'est ce qu'avait déjà expliqué lord Kelvin, mais il est nécessaire d'entrer dans plus de détails.

3. Quelle est l'origine de la rigidité gyrostatique; cette rigidité n'est autre chose qu'un cas particulier d'un phénomène beaucoup plus général, la résonance.

Envisageons un système quelconque en équilibre absolu ou relatif et étudions ses petits mouvements dans le voisinage de sa position d'équilibre. Ces petits mouvements pourront être définis par des équations linéaires; et si x, y, z, ... représentent les coordonnées du système (qui s'annulent dans la position d'équilibre), on aura des équations de la forme

$$D(x, y, z, \dots) = \Sigma A e^{i\varepsilon t},$$

D est une expression linéaire à coefficients constants par rapport à x, y, z, ... et à leurs dérivées; $\Sigma A e^{i\varepsilon t}$ représente l'ensemble des termes dus aux forces perturbatrices extérieures et qui seront développables en série de Fourier. Nous envisagerons en particulier les équations sans second membre

$$D(x, y, z, \dots) = 0, \tag{6}$$

qui définissent les oscillations propres du système et les équations

$$D(x, y, z, \dots) = A e^{i\varepsilon t}, \tag{7}$$

qui représentent l'effet de l'une des composantes des forces perturbatrices.

On satisfera à l'équation (7) en posant

$$x = a e^{i\varepsilon t}, \quad y = b e^{i\varepsilon t}, \quad z = c e^{i\varepsilon t}, \quad \dots, \tag{8}$$

On verra que a, b, c, ... sont donnés par des équations du premier degré dont les coefficients dépendent de ε, et l'on aura

$$a = \frac{P_1(\varepsilon)}{\Delta}, \quad b = \frac{P_2(\varepsilon)}{\Delta}, \quad \dots,$$

Δ est un polynome entier en ε, indépendant des coefficients A : c'est le déterminant des équations du premier degré; P_1, P_2 sont des polynomes entiers en ε, linéaires par rapport aux A. Les zéros du polynome Δ, que j'appelle ε_1, ε_2, ..., correspondent aux périodes des oscillations propres du système définies par l'équation (6). Les fractions rationnelles $\frac{P_1}{\Delta}, \frac{P_2}{\Delta}, \dots$ peuvent être décomposées en éléments simples; on trouve ainsi

$$a = \frac{a_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon - \varepsilon_2} + \dots,$$

$$b = \frac{b_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} + \frac{b_2}{\varepsilon - \varepsilon_2} + \dots.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On voit aisément qu'on satisfait à l'équation (6) en posant

$$(9) \qquad x = a_1 e^{i\varepsilon_1 t}, \qquad y = b_1 e^{i\varepsilon_1 t}, \qquad z = c_1 e^{i\varepsilon_1 t}, \qquad \dots.$$

Si ε est très voisin de ε_1, a, b, c. ... deviennent très grands; c'est le phénomène de la résonance. Dans ce cas, le terme qui a pour dénominateur $\varepsilon - \varepsilon_1$ devient tout à fait prépondérant; et l'on a sensiblement

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \dots,$$

c'est-à-dire que le système se comporte sensiblement comme dans l'oscillation propre (9) avec laquelle il y a résonance.

Donc, *si la période de la force perturbatrice devient très voisine de la période de l'une des oscillations propres du système, le système se comporte sensiblement comme dans cette oscillation propre.*

Ce résultat cesse d'être vrai si les deux coefficients ε_1 et ε_2 diffèrent très peu et si ε est voisin à la fois de ε_1 et de ε_2 de telle sorte que $\varepsilon - \varepsilon_1$ et $\varepsilon - \varepsilon_2$ soient du même ordre. Il n'y a plus alors de terme prépondérant. C'est le phénomène de la *double résonanec*.

4. Appliquons ces principes au cas de la rigidité gyrostatique. Considérons un système mécanique quelconque en équilibre relatif par rapport à des axes mobiles tournant autour de l'axe des z avec une vitesse uniforme ω. Ce système pourra osciller autour de cette position d'équilibre relatif, et nous distinguerons ses oscillations propres, c'est-à-dire celles qu'il prend lorsqu'il est soustrait à toute force perturbatrice extérieure, et ses oscillations contraintes dont la période sera la même que celle de la force pertubatrice.

Si les forces perturbatrices paraissent varier très lentement à un observateur fixe, pour un observateur lié aux axes mobiles elles paraîtront tourner autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire $-\omega$, c'est-à-dire que leur période sera à peu près $\frac{2\pi}{\omega}$.

Or parmi les oscillations propres du système nous devons distinguer la suivante : le système par hypothèse peut tourner avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe des z, c'est alors qu'il est en équilibre relatif par rapport aux axes tournants; mais s'il est soustrait à toute action extérieure, il pourra également tourner avec une vitesse uniforme ω autour d'un axe très peu différent de l'axe des z. Dans ces conditions, il s'écartera très peu de l'équilibre relatif et ce sera là une oscillation propre dont la période sera précisément $\frac{2\pi}{\omega}$. Dans cette oscillation propre, le système se comportera comme un corps solide.

Il y aura donc résonance et, dans l'oscillation contrainte, le système se comportera à peu près comme un corps solide; il y aura rigidité gyrostatique; *il n'y aura d'exception que s'il y a double résonance*, c'est-à-dire si le système est susceptible d'une autre oscillation propre, où il ne se comporte pas comme un corps solide et dont la période est voisine de $\frac{2\pi}{\omega}$.

5. C'est précisément ce qui arrive dans le cas du paragraphe I. Il existe une oscillation propre dont la période est donnée par la formule

$$N = \frac{1 - \lambda}{\varepsilon},$$

(en reprenant pour un instant les notations du paragraphe I). Cette période est très longue, c'est-à-dire qu'elle est à peu près la même que celle des forces perturbatrices.

Pour mieux nous en rendre compte, il convient de reprendre le problème du paragraphe I avec les notations et les méthodes du paragraphe II; on facilitera ainsi la comparaison des résultats de ces deux paragraphes et l'étude des cas intermédiaires.

La relation entre les coordonnées actuelles x, y, z et les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 seront, aussi bien pour la croûte solide que pour le noyau liquide, exprimées par les formules (1) du paragraphe II, seulement les fonctions α, β, γ ne seront pas les mêmes dans les deux cas. Nous supposerons que, pour la surface commune qui limite intérieurement la croûte solide et extérieurement le noyau liquide, on a

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Cela oblige à supposer que la croûte solide était encore liquide dans la position initiale idéale, et qu'elle s'est solidifiée dans une phase ultérieure après avoir acquis sa forme définitive. Cette hypothèse peut être faite sans inconvénient puisqu'il s'agit d'une position initiale idéale.

Nous envisagerons une solution particulière où tout le système est animé d'une rotation ω; où par conséquent on a les relations (10) du paragraphe II aussi bien pour la croûte que pour le noyau, ainsi que les solutions très peu différentes. Nous continuerons à poser

$$\xi = \delta\gamma_1 + i\,\delta\gamma_2 = \gamma_1 + i\gamma_2, \qquad \eta = \delta\alpha_3 + i\,\delta\beta_3 = \alpha_3 + i\beta_3,$$

en ce qui concerne le liquide, et nous appellerons ξ_1 et η_1 les quantités correspondantes pour la croûte solide.

Cette croûte étant solide devra satisfaire à la condition (16) du n° 16 du paragraphe II; c'est-à-dire qu'on aura

$$(10) \qquad \rho\, e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1 = 0.$$

Exprimons maintenant que la surface externe du liquide coïncide avec la surface interne du solide. Quelle serait d'abord la condition pour que la surface libre du liquide ne se déformât pas. On devrait avoir

$$\Sigma x_0^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

d'où

$$\frac{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2}{\rho^2} + \frac{\alpha_3\gamma_3}{c^2} = \frac{\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2}{\rho^2} + \frac{\beta_3\gamma_3}{c^2} = 0.$$

En remplaçant dans ces formules α_1, α_2, β_1, β_2, γ_3 par $\rho\cos\omega t$, $-\rho\sin\omega t$, $\rho\sin\omega t$, $\rho\cos\omega t$, c, $\gamma_1 + i\gamma_2$ et $\alpha_3 + i\beta_3$ par ξ et η; on trouvera, par un calcul pareil à celui du n° 16 du paragraphe II

$$\frac{e^{i\omega t}\xi}{\rho} + \frac{\eta}{c} = 0$$

ou

$$c\, e^{i\omega t}\xi + \rho\eta = 0.$$

Si nous écrivons que la surface interne du solide et la surface externe du liquide éprouvent la même déformation, nous aurons

$$(11) \qquad c\, e^{i\omega t}(\xi - \xi_1) + \rho(\eta - \eta_1) = 0.$$

6. Nous avons trouvé au n° 13 du paragraphe II la constante des aires pour le liquide; faisons le même calcul pour la croûte solide. Nous aurons encore

$$\Sigma m(x'y - xy') = (\alpha'_1\alpha_2 - \alpha'_2\alpha_1)\Sigma mx_0^2 + \Sigma mx_0y_0(\ldots) + \ldots.$$

Mais nous ne pourrons plus écrire

$$\Sigma mx_0^2 = \Sigma my_0^2 = \Sigma mz_0^2.$$

Toutefois, comme le corps doit être regardé comme de révolution, nous pourrons écrire

$$\Sigma mx_0y_0 = \Sigma my_0z_0 = \Sigma mx_0z_0 = 0,$$
$$\Sigma mx_0^2 = \Sigma my_0^2 = \mathrm{A}, \qquad \Sigma mz_0^2 = \mathrm{C},$$

les constantes A et C n'ayant pas la même signification qu'au paragraphe II, il vient ainsi

$$\Sigma m(x'y - xy') = \mathrm{A}[(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha'_2\alpha_1) + (\beta'_1\beta_2 - \beta'_2\beta_1)] + \mathrm{C}(\gamma'_1\gamma_2 - \gamma'_2\gamma_1).$$

On trouve de même

$$\mathfrak{M} = \Sigma m(x'z - xz') = \mathrm{A}[(\alpha'_1\alpha_3 - \alpha'_3\alpha_1) + (\beta'_1\beta_3 - \beta'_3\beta_1)] + \mathrm{C}(\gamma'_1\gamma_3 - \gamma'_3\gamma_1),$$
$$\mathfrak{L} = \Sigma m(y'z - yz') = \mathrm{A}[(\alpha'_2\alpha_3 - \alpha'_3\alpha_2) + (\beta'_2\beta_3 - \beta'_3\beta_2)] + \mathrm{C}(\gamma'_2\gamma_3 - \gamma'_3\gamma_2),$$

Formons l'expression

$$-\mathfrak{M} - i\mathfrak{L},$$

en y remplaçant

$$\alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta_1 + i\beta_2, \quad \gamma_3, \quad \alpha_3 + i\beta_3, \quad \gamma_1 + i\gamma_2$$

par leurs valeurs

$$\rho e^{-i\omega t}, \quad i\rho e^{-i\omega t}, \quad c, \quad \eta_1, \quad \xi_1$$

(je dis η_1, ξ_1 parce qu'il s'agit de la croûte solide); on trouve

$$-\mathfrak{M} - i\mathfrak{L} = \mathrm{A}\rho e^{-i\omega t}(\eta'_1 + i\omega\eta_1) - \mathrm{C}c\xi'_1.$$

C'est le calcul même par lequel nous avons obtenu l'équation (13) du n° 16 du paragraphe II. Pour avoir l'expression analogue à $-\mathfrak{M} - i\mathfrak{L}$ relative au corps tout entier, il faut ajouter le premier membre de cette équation (13), ce qui donne

$$\mathrm{A}\rho e^{-i\omega t}(\eta'_1 + i\omega\eta_1) - \mathrm{C}c\xi'_1 + \rho e^{-i\omega t}(\eta' + i\omega\eta) - c\xi'.$$

Cette expression, en vertu de la loi des aires, doit être une constante s'il n'y a pas de force extérieure et, s'il y en a, sa dérivée

$$\mathrm{A}\rho e^{-i\omega t}(\eta''_1 + \omega^2\eta_1) - \mathrm{C}c\xi''_1 + \rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi''$$

doit être égale à une combinaison simple des moments des forces extérieures, c'est-à-dire à une fonction connue du temps, développable en série de Fourier; j'écris

$$(12) \qquad \mathrm{A}\rho e^{-i\omega t}(\eta''_1 + \omega^2\eta_1) - \mathrm{C}c\xi''_1 + \rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = \Sigma \mathrm{B}\, e^{i\varepsilon t}.$$

7. Nous avons, en outre, la deuxième équation (18) du paragraphe II, qui subsiste puisqu'elle n'est autre chose que la dérivée de l'équation (12) de Helmholtz du paragraphe II. Elle complète avec (10), (11) et (12) le système complet de nos équations qui s'écrit, en isolant l'un des termes du deuxième membre de (12),

$$A\,\rho\, e^{-i\omega t}(\eta_1'' + \omega^2\eta_1) - C\,c\,\xi_1'' + \rho\, e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\,\xi'' = B\, e^{i\varepsilon t};$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho\, e^{i\omega t}\xi_1 + c\,\eta_1 = 0,\\ &c\, e^{i\omega t}(\xi - \xi_1) + \rho(\eta - \eta_1) = 0,\\ &\omega^2\rho\, e^{i\omega t}\xi - c\,\eta'' + \rho\, e^{i\omega t}\xi'' = 0.\end{aligned}\right.$$

On les intégrera en posant

$$\rho\xi = a\, e^{i\varepsilon t},\qquad c\eta = b\, e^{i(\omega+\varepsilon)t},\qquad \rho\xi_1 = a_1 e^{i\varepsilon t},\qquad c\eta_1 = b_1\, e^{i(\omega+\varepsilon)t},$$

ce qui donne

$$\frac{C a_1 + a}{\rho^2}\varepsilon^2 - \frac{A b_1 + b}{c^2}(2\omega\varepsilon + \varepsilon^2) = \frac{B}{\rho c};$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_1 + b_1 = 0,\\ &\frac{a - a_1}{\rho^2} + \frac{b - b_1}{c^2} = 0,\\ &a(\omega^2 - \varepsilon^2) + b(\omega + \varepsilon)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Le déterminant de ces équations s'écrit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\varepsilon^2}{\rho^2} & \dfrac{C\varepsilon^2}{\rho^2} & -\dfrac{2\omega\varepsilon + \varepsilon^2}{c^2} & -A\,\dfrac{2\omega\varepsilon + \varepsilon^2}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & -\dfrac{1}{\rho^2} & \dfrac{1}{c^2} & -\dfrac{1}{c^2} \\ \omega^2 - \varepsilon^2 & 0 & (\omega+\varepsilon)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

La première ligne du déterminant est divisible par ε, donc Δ est divisible par ε.

Le coefficient de ε est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{2\omega}{c^2} & -\dfrac{2A\omega}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & -\dfrac{1}{\rho^2} & \dfrac{1}{c^2} & -\dfrac{1}{c^2} \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{2\omega^3}{c^2}(1 + A).$$

Donc Δ n'est pas divisible par ε^2 à moins que $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{c^2}$, c'est-à-dire que la cavité interne ne soit sphérique. Dans ce dernier cas, il vient

$$\Delta = 2\varepsilon^2(\omega + \varepsilon)(2A\omega + A\varepsilon + C\varepsilon)\frac{1}{c^4}.$$

Donc l'équation $\Delta = 0$ admettra, si $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{c^2}$ est très petit, quatre racines, dont une nulle, une très petite, une égale à $-\omega$. et la quatrième voisine de $-\frac{2A\omega}{A+C}$. Nous avons vu quelle est la signification de la première (rotation du corps en bloc autour d'un axe très peu différent de l'axe des z) et de la troisième (déplacement préalable des molécules liquides à l'intérieur du noyau liquide, de sorte que ces molécules se sont simplement substituées les unes aux autres).

C'est à la présence de la deuxième racine, qui est très petite, que nous devons les particularités du phénomène; la période de la force perturbatrice correspond à un ε très petit, d'où résulte une résonance avec la racine nulle; si cette résonance existait seule, le corps se comporterait à peu près comme dans l'oscillation propre qui correspond à cette racine nulle, c'est-à-dire comme un corps solide; il y aurait *rigidité gyrostatique*. C'est ce qui arriverait si l'aplatissement de la cavité elliptique interne n'était pas très petit. Mais s'il est très petit, l'équation $\Delta = 0$ admettra une racine très petite. Il y aura *double résonance*, et l'amplitude de la nutation sera très différente de ce qu'elle est avec un corps solide.

IV. — Influence de l'élasticité.

Il conviendrait maintenant d'examiner ce qui arrive si l'on suppose que la partie solide de la Terre n'est pas un solide invariable, mais un solide élastique. Supposons donc d'abord que la Terre est un sphéroïde solide plein élastique, et ensuite qu'elle est un sphéroïde solide creux élastique rempli de liquide.

Considérons d'abord la première hypothèse; l'amplitude des diverses nutations sera-t-elle altérée ? D'après le paragraphe précédent, cette question se ramène à la suivante : y a-t-il simple résonance ou double résonance ? En d'autres termes, l'équation en ε analogue à l'équation $\Delta = 0$ du paragraphe précédent a-t-elle une racine nulle, et toutes les autres finies, ou bien une racine nulle et une autre très petite ? La question se résout immédiatement; dans le cas limite du solide invariable, c'est-à-dire quand on suppose la rigidité infinie, il y a simple résonance; il y a une racine nulle et les autres finies;

il faut donc que ces racines soient finies pour une rigidité quelconque ; car si l'une d'elles était très petite pour une rigidité quelconque, elle resterait telle pour une rigidité infinie. Il y a donc simple résonance, la rigidité gyrostatique a son plein effet, et l'amplitude des diverses nutations est très sensiblement la même que pour un solide invariable.

Passons à la deuxième hypothèse. Il s'agit d'étudier les oscillations propres du système. La croûte solide va obéir aux lois de l'élasticité. Soient x, y, z les coordonnées d'un point; $x+u$, $y+v$, $z+w$ ce que deviennent, par suite de la déformation, les coordonnées de la molécule dont les coordonnées initiales étaient x, y, z; soit

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy},$$

soient μ et ν deux coefficients, on aura

$$(\nu + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u = \frac{d^2 u}{dt^2}\cdot$$

Nous avons, en outre, les conditions aux limites; soient P_{xx}, P_{xy}, ... les diverses composantes de la pression, de telle sorte que

$$P_{xx} = \nu\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \qquad P_{xy} = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right), \qquad \cdots.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface libre, et soit

$$X = \alpha P_{xx} + \beta P_{xy} + \gamma P_{xz}, \qquad Y = \alpha P_{xy} + \beta P_{yy} + \gamma P_{yz},$$
$$Z = \alpha P_{xz} + \beta P_{yz} + \gamma P_{zz};$$

le vecteur X, Y, Z représentera la pression qui s'exerce sur un élément de la surface libre. Sur la surface libre extérieure, ce vecteur devra être nul; sur la surface libre intérieure, il doit être normal à la surface et égal à la pression hydrostatique du liquide.

Supposons que les surfaces libres externe et interne soient des sphères (ou des figures très peu différentes) et que la pression p soit égale à un polynome sphérique P du second ordre par exemple; nous pourrons alors satisfaire aux équations en prenant

$$u = xPR + S\frac{dP}{dx}, \qquad v = yPR + S\frac{dP}{dy}, \qquad w = zPR + S\frac{dP}{dz},$$

R et S étant deux fonctions de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; on voit que R et S satisfont à deux équations différentielles du deuxième ordre, et les quatre constantes d'intégration peuvent être déterminées par les conditions aux limites. Les fonctions inconnues R et S sont donc entièrement définies et elles restent les mêmes quel que soit le polynome sphérique P, pourvu qu'il soit toujours de même ordre.

Nous ne possédons pas ainsi la solution générale du problème; voici comment on pourrait l'obtenir : soient

$$u = u_1, \qquad v = v_1, \qquad w = w_1$$

la solution particulière que nous venons de trouver; la solution générale sera

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2, \qquad w = w_1 + w_2,$$

u_2, v_2, w_2 représentant un déplacement d'ailleurs arbitraire où le corps considéré se comporterait comme un solide invariable; ce déplacement est donc une simple rotation; nous la supposerons autour d'un axe situé dans le plan des xy, de sorte qu'elle dépendra de deux constantes arbitraires.

Il faut d'abord calculer p; nous allons appliquer les résultats du paragraphe II. Nous pourrons, en effet, admettre que le mouvement du liquide reste *simple*; il suffit pour cela, d'après ce que nous avons vu, que la surface extérieure reste ellipsoïdale, c'est-à-dire que la surface interne de la croûte solide, primitivement sphérique, devient un ellipsoïde par la déformation. Or il est aisé de voir que cette hypothèse est d'accord avec celle que nous avons faite que $p = \mathrm{P}$ est un polynome sphérique d'ordre 2.

Nous retrouverons donc les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma x'' \, dx &= dp - d\mathrm{V}, \\ \mathrm{V} &= k' \Sigma x_0^2 + (1 - k') \Sigma x^2. \end{aligned} \right.$$

Les termes de p qui nous intéressent sont les termes

$$h x_0 z_0 + h_1 y_0 z_0$$

dont nous nous proposons de calculer les coefficients. Les équations (1) nous donneront alors, par le procédé employé au paragraphe II

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha'' \gamma &= \Sigma \alpha \gamma'' = k \Sigma \alpha \gamma + h, \\ \Sigma \beta'' \gamma &= \Sigma \beta \gamma'' = k \Sigma \beta \gamma + h_1. \end{aligned}$$

Si nous posons $h + ih_1 = \varpi$ et que nous nous rappelions la signification de ξ et de η, ces équations nous donneront

$$(2) \qquad -\omega^2 \rho \, e^{i\omega t} \xi + c \eta'' = \rho \, e^{i\omega t} \xi'' = k(\rho \, e^{i\omega t} \xi + c \eta) + \varpi.$$

Nous aurons donc pour les termes qui nous intéressent

$$p = \mathcal{R} \varpi z_0 (x_0 - i y_0),$$

la notation $\mathcal{R}$ signifiant *partie réelle*.

Nous pouvons, en négligeant le carré de ξ, η, ϖ, écrire

$$p = \mathrm{P} = \mathcal{R}\frac{\omega}{c\rho}z(x-iy)e^{-i\omega t} = \mathcal{R}\varpi z_0(x_0-iy_0).$$

Dans ces conditions, la solution dépend de quatre constantes arbitraires qui sont les parties réelle et imaginaire de ϖ et les deux constantes qui définissent la rotation u_2, v_2, w_2.

Je voudrais maintenant former des équations analogues aux équations (13) et (14) du paragraphe III, en cherchant à définir les quantités qui joueront le rôle de ξ_1 et de η_1. La première équation sera celle des aires; la seconde devra être remplacée par celle de l'équilibre élastique; celle-ci nous apprend qu'on a

$$\Sigma xu = (r^2\mathrm{R} + 2\mathrm{S})\mathrm{P}.$$

car il est aisé de vérifier que telle est l'expression Σxu_1, et que $\Sigma xu_2 = 0$. Elle nous donne donc, en nous reportant à l'équation (2), une relation entre Σxu et les parties réelles et imaginaires de ξ et de η. Nous pouvons mettre cette équation sous une forme analogue à celle des équations (13) du paragraphe III de la façon suivante : revenons au cas d'un liquide et reprenons les équations (1) du paragraphe II; soient x, y, z les valeurs des coordonnées qui correspondent à la solution (10) de ces équations; $x+u$, $y+v$, $z+w$ celles qui correspondent à la solution très voisine envisagée au n° 16 de ce paragraphe. Il viendra

$$x+iy = \rho(x_0+iy_0)e^{-i\omega t}, \qquad z = cz_0, \qquad u+iv = \xi z_0,$$
$$w = \mathcal{R}\eta(x_0-iy_0).$$

On en déduit

$$\Sigma xu = \mathcal{R}(\rho\xi e^{i\omega t} + c\eta)(x_0-iy_0)z_0.$$

Par analogie, nous poserons ici encore

$$\Sigma xu = \mathcal{R}(\rho\xi_1 e^{i\omega t} + c\eta_1)(x_0-iy_0)z_0. \tag{3}$$

Remarquons que cette équation représente en réalité deux relations entre les parties réelles et imaginaires de ξ_1 et η_1; car les coefficients de x_0z_0 et y_0z_0 doivent être identiques dans les deux membres, et notre équation deviendra

$$\mathcal{R}(\rho\xi_1 e^{i\omega t} + c\eta_1)(x_0-iy_0)z_0 = (r^2\mathrm{R}+2\mathrm{S})\mathcal{R}\varpi z_0(x_0-iy_0),$$

d'où

$$\rho\xi_1 e^{i\omega t} + c\eta_1 = \lambda\varpi, \tag{4}$$

où

$$\lambda = r^2\mathrm{R} + 2\mathrm{S}$$

doit être regardée comme une constante donnée. En effet, les équations de l'élasticité nous ont permis de déterminer les fonctions R et S, et nous devons dans ces fonctions donner à r la valeur qui correspond à la surface libre interne très peu différente d'une sphère.

Passons à la troisième équation (13) du paragraphe III; elle exprime que la surface libre interne de la croûte coïncide avec la surface libre externe du noyau liquide. La même condition nous donnerait ici

$$\Sigma xu = \mathcal{R}(c\, e^{i\omega t}\xi + \rho\eta)(x_0 - iy_0)z_0.$$

où, puisque nous négligeons l'aplatissement et que, par conséquent, nous pouvons prendre $\rho = c$,

$$\mathcal{R}(e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1) = \mathcal{R}(\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta). \tag{5}$$

Nous achèverons de définir ξ_1 et η_1 en écrivant que, pour $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 1$, on a

$$u + iv = \xi_1 z_0.$$

Il n'y a rien à changer à la quatrième qui est l'équation de Helmholtz. Ainsi que nous l'avons vu les déformations de la croûte solide dépendent uniquement de quatre arbitraires. On peut prendre pour ces quatre arbitraires les parties réelles et imaginaires de ξ_1 et de η_1.

Nous aurions pu rapporter le système à des axes différents, en conservant l'axe des z, et de telle façon que le nouvel axe des x fasse avec l'ancien un angle φ. Cela serait revenu à changer $x_0 - iy_0$ en $(x_0 - iy_0)e^{-i\varphi}$, $u + iv$ en $(u + iv)e^{i\varphi}$ et, par conséquent, ξ, η, ξ_1, η_1 en $\xi e^{i\varphi}$, $\eta e^{i\varphi}$, $\xi_1 e^{i\varphi}$, $\eta_1 e^{i\varphi}$.

Les équations des aires sont des relations linéaires entre ξ, η, ξ_1, η_1, leurs imaginaires conjuguées ξ^0, η^0, ξ_1^0, η_1^0 et leurs dérivées. Mais ces équations doivent subsister avec le nouveau système d'axes et, par conséquent, quand on change ξ, η, ξ_1, η_1, ξ^0, η^0, ξ_1^0, η_1^0, en $\xi e^{i\varphi}$, $\eta e^{i\varphi}$, $\xi_1 e^{i\varphi}$, $\eta_1 e^{i\varphi}$, $\xi^0 e^{-i\varphi}$, $\eta^0 e^{-i\varphi}$, $\xi_1^0 e^{-i\varphi}$, $\eta_1^0 e^{-i\varphi}$. Le premier membre se divise ainsi en deux parties, l'une qui est multipliée par $e^{i\varphi}$, l'autre qui est multipliée par $e^{-i\varphi}$ et, comme la relation doit avoir lieu quel que soit φ, chacune de ces deux parties devra être nulle séparément. Nous égalerons donc à zéro la première, qui ne dépendra que de ξ, η, ξ_1, η_1 et nous aurons l'équation des aires

$$F(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = 0,$$

dont le premier membre est linéaire par rapport à ξ, η, ξ_1, η_1 et leurs dérivées; puis l'équation d'élasticité déduite de (2) et (4)

$$\rho\, e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1 + \lambda k(\rho\, e^{i\omega t}\xi + c\eta) + \lambda\rho\, e^{i\omega t}\xi'' = 0,$$

puis la dernière équation (13) du paragraphe III qui subsiste sans changement

$$\omega^2\rho\, e^{i\omega t}\xi - c\eta'' + \rho\, e^{i\omega t}\xi'' = 0,$$

et l'équation

$$\rho\, e^{i\omega t}(\xi - \xi_1) + c(\eta - \eta_1) = 0$$

déduite de l'équation (5).

Si nous posons, comme au paragraphe III,

$$(6) \qquad \rho\xi = a\, e^{i\varepsilon t}, \qquad c\eta = b\, e^{i(\omega+\varepsilon)t}, \qquad \rho\xi_1 = a_1\, e^{i\varepsilon t}, \qquad c\eta_1 = b_1\, e^{i(\omega+\varepsilon)t},$$

il vient

$$(14\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} A a + A_1 a_1 + B b + B_1 b_1 &= 0, \\ \lambda(k + \varepsilon^2) a + a_1 + \lambda k b + b_1 &= 0, \\ a - a_1 + b - b_1 &= 0, \\ a(\omega^2 - \varepsilon^2) + b(\omega + \varepsilon)^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

A, A_1, B, B_1 sont des fonctions de ε. Pour étudier ces fonctions, remarquons que $F(\xi. \eta, \xi_1, \eta_1)$ ne représente pas la constante des aires, mais la dérivée de cette constante; si $\Phi(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)$ représente cette constante elle-même, en y substituant aux ξ et η leurs valeurs (1) il viendra

$$\Phi(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = (A'a + A'_1 a_1 + B'b + B'_1 b_1)\, e^{i\varepsilon t},$$

A', ... étant des polynomes entiers en ε. En différentiant il vient alors

$$F(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = i\varepsilon(A'a + A'_1 a_1 + B'b + B'_1 b_1)\, e^{i\varepsilon t},$$

on a donc

$$A = i\varepsilon A', \qquad A_1 = i\varepsilon A'_1, \qquad B = i\varepsilon B', \qquad B_1 = i\varepsilon B'_1,$$

ce qui montre que A, A_1, B, B_1 sont divisibles par ε. Le déterminant des équations (14 *bis*) s'annule donc pour $\varepsilon = 0$; il y a donc résonance. C'est ce que nous savions déjà, mais il reste à savoir si cette résonance est simple ou double. Pour cela, je divise la première ligne du déterminant par $i\varepsilon$ et je fais $\varepsilon = 0$, ce déterminant devient

$$\begin{vmatrix} A' & A'_1 & B' & B'_1 \\ \lambda k & 1 & \lambda k & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Je dis que ce déterminant s'annule pour $\rho^2 = c^2$, il est par conséquent très petit pour ρ^2 voisin de c^2. En effet, considérons le tableau formé des trois dernières lignes du déterminant. Si l'on fait $c^2 = \rho^2$, les colonnes 1 et 3 de ce tableau sont identiques, de même que les colonnes 2 et 4. Donc le déterminant est nul. C. Q. F. D.

Il y a donc double résonance; donc l'amplitude des nutations différera notablement de ce qu'elle serait pour un corps solide.