NOTE

SUR LA STABILITÉ DE L'ANNEAU DE SATURNE

Bulletin astronomique, t. 2, p. 507-508 (novembre 1885).

Laplace a démontré que l'anneau de Saturne ne pouvait être stable qu'à la condition d'être subdivisé en plusieurs anneaux concentriques animés de vitesses de rotation différentes; de sorte que, si l'observation ne nous avait pas permis de constater directement cette subdivision, la théorie de la pesanteur aurait pu suffire pour la faire prévoir. Depuis, M. Tisserand [1] a, par une analyse approfondie, confirmé le résultat de Laplace; il a reconnu qu'un anneau unique ne pourrait subsister que si la densité de l'anneau était notablement supérieure à celle de la planète, et il a calculé la largeur maxima de chaque anneau élémentaire en fonction de sa densité et de son rayon moyen.

On voit ainsi que chaque anneau élémentaire doit être d'autant moins large que sa densité est plus faible. Mais on peut aller plus loin encore dans cette voie : je vais montrer que, si la densité devient inférieure à une certaine limite, tout anneau fluide est instable, quelle que soit d'ailleurs sa largeur. Sous l'influence de la moindre perturbation, l'anneau ne se décomposerait plus alors en plusieurs anneaux concentriques, mais il se résoudrait en un grand nombre de petits satellites.

Dans ma Note sur l'équilibre d'une masse fluide amimée d'un mouvement de rotation (*Bull. astron.*, t. 2, p. 109), j'ai montré qu'une pareille masse ne peut être en équilibre stable que si la vitesse de rotation ω est plus petite

(1) *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. 1.

que $\sqrt{2\pi\rho f}$, ρ étant la densité moyenne de cette masse et f l'attraction de deux unités de masse à l'unité de distance.

Si l'anneau était fluide et tournait d'une seule pièce, on devrait donc avoir

$$\omega^2 < 2\pi\rho f.$$

D'autre part, on a pour la vitesse de rotation

$$\omega^2 r = \frac{fM}{r^2},$$

r étant le rayon de l'anneau élémentaire considéré et M la masse de Saturne.

Si nous appelons r' le rayon de la planète et ρ' sa densité, il viendra

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho' r'^3.$$

On déduit de là

$$2\pi\rho r^3 > \frac{4}{3}\pi\rho' r'^3$$

ou

$$\frac{\rho}{\rho'} > \frac{2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3.$$

De l'anneau intérieur à l'anneau extérieur, le rapport $\frac{r}{r'}$ varie à peu près entre les limites 1,5 et 2,2 : le second membre varie donc entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{16}$.

Si donc les anneaux étaient fluides et tournaient d'une seule pièce, la densité de l'anneau intérieur devrait être au moins égale au cinquième et celle de l'anneau extérieur au seizième de celle de la planète.

On verra peut-être là une raison de ne plus considérer les anneaux comme formés d'une multitude de satellites extêmement petits; Maxwell estimait en effet qu'un anneau fluide ne pourrait être stable que si sa densité était *au plus* égale au $\frac{1}{300}$ de celle de Saturne.