SUR LES PLANÈTES DU TYPE D'HÉCUBE

Bulletin astronomique, t. 19, p. 289-310 (août 1902).

M. Simonin a, il y a quelques années, soutenu une thèse remarquable sur le mouvement de la planète Hécube; plus récemment, il est revenu sur cette même question et le *Bulletin* vient de publier un article de lui sur ce sujet. Ayant pris cette année pour sujet de mon Cours la théorie des petites planètes, j'ai eu l'occasion de résumer nos connaissances sur les orbites planétaires du type d'Hécube et des autres types caractéristiques. J'ai donc mis les résultats de M. Simonin sous une forme nouvelle qu'il ne sera peut-être pas inutile de faire connaître ici.

Je prends le plan de l'orbite de Jupiter pour plan des xy.

Je choisirai les unités de telle façon que la longitude moyenne de Jupiter soit égale à t; et j'appellerai R une fonction égale à la masse du Soleil divisée par la distance du Soleil à Hécube plus la masse de Jupiter divisée par la distance de Jupiter à Hécube, moins le demi-carré de la vitesse d'Hécube.

Je désigne par L la racine carrée du grand axe de l'orbite d'Hécube, et je pose

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad \Theta = G\cos i,$$

e et i étant l'excentricité et l'inclinaison de cette orbite.

Je désigne par l, g et θ l'anomalie moyenne, la distance du périhélie au nœud et la longitude du nœud. Dans ces conditions, les équations sont canoniques et s'écrivent

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dR}{dl}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{dR}{dg}, & \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{dR}{d\theta}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{dR}{dL}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dR}{dG}, & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{dR}{d\Theta}. \end{aligned} \right.$$

La fonction R dépend des six variables, L, G, Θ, l, g, θ et de t. Ces équations prennent une autre forme si l'on pose

$$F = R + \Theta$$

et si l'on prend pour variable $\theta - t$ au lieu de θ, elles deviennent alors

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dF}{dl}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{dF}{dg}, & \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{dF}{d(\theta - t)}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{dF}{dL}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dF}{dG}, & \frac{d(\theta - t)}{dt} &= -\frac{dF}{d\Theta}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces conditions, F est regardé comme fonction des six variables L, G, Θ, l, g, $\theta - t$, et de t. Mais nous devons observer que si l'excentricité de Jupiter était nulle, F ne dépendrait plus de t, mais seulement des six premières variables.

Nous allons maintenant changer de variables. Supposons que le rapport des moyens mouvements soit très voisin de $\frac{n+1}{n}$, n étant un entier qui pour Hécube sera égal à 1. Nous poserons

$$\lambda = l + g + \theta - t, \qquad s = -nl - (n+1)g - (n+1)(\theta - t),$$
$$\tau = -nl - ng - (n+1)(\theta - t),$$
$$U = L + nS + nT, \qquad S = L - G, \qquad T = G - \Theta.$$

On constate aisément que l'on a identiquement

$$Ll + Gg + \Theta(\theta - t) = U\lambda + Ss + T\tau$$

et, par conséquent,

$$L\,dl + G\,dg + \Theta\,d(\theta - t) = U\,d\lambda + S\,ds + T\,d\tau,$$

ce qui prouve qu'avec les nouvelles variables les équations resteront canoniques et s'écriront

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{dF}{d\lambda}, & \frac{dS}{dt} &= \frac{dF}{ds}, & \frac{dT}{dt} &= \frac{dF}{d\tau}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{dF}{dU}, & \frac{ds}{dt} &= -\frac{dF}{dS}, & \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{dF}{dT}. \end{aligned}\right.$$

Voyons quelle est la signification de ces nouvelles variables. D'abord λ représente la différence des longitudes moyennes. D'autre part,

$$\frac{ds}{dt} = -n\frac{dl}{dt} - (n+1)\left(\frac{dg}{dt} + \frac{d\theta}{dt} - 1\right), \qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{dg}{dt}.$$

Comme $\frac{dg}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ sont très petits et $\frac{dl}{dt}$ très voisin de $\frac{n+1}{n}$, on voit que $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\tau}{dt}$ sont très petits.

S est de l'ordre du carré de l'excentricité et T de l'ordre du carré de l'inclinaison.

Comme S et T sont petits, U différera peu de la racine carrée du grand axe.

Je désignerai par l' et ϖ' l'exentricité et le périhélie de Jupiter, et je poserai

$$v = n\lambda - t + \varpi'.$$

Comme $\frac{d\varpi'}{dt}$ est nul, ou du moins très petit, on aura

$$\frac{dv}{dt} = n\frac{d\lambda}{dt} - 1 = n\frac{dl}{dt} - n - 1,$$

ce qui montre que $\frac{dv}{dt}$ est aussi très petit.

Posons maintenant

$$x = \sqrt{2S}\cos s, \qquad y = \sqrt{2S}\sin s; \qquad \xi = \sqrt{2T}\cos\tau, \qquad \eta = \sqrt{2T}\sin\tau.$$

Comme

$$x\,dy - S\,ds, \qquad \xi\,d\eta - T\,d\tau$$

sont des différentielles exactes, les équations resteront canoniques et s'écriront

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{dF}{d\lambda}, & \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dF}{dy}, & \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{dF}{d\eta}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{dF}{dU}, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{dF}{dx}, & \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{dF}{d\xi}. \end{cases}$$

Forme de la fonction perturbatrice.

La fonction F est, comme on sait, développable suivant les puissances de $e\cos l$, $e\sin l$, $i\cos(l+g)$, $i\sin(l+g)$, $e'\cos(t-\varpi')$, $e'\sin(t-\varpi')$ et suivant les cosinus et les sinus des multiples de la différence des longitudes moyennes λ, les coefficients du développement dépendant encore des grands axes, c'est-à-dire de L. Mais on voit aisément que $e\cos l = e\cos[s + (n+1)\lambda]$, $e\sin l$, $i\cos(l+g) = i\cos[\tau + (n+1)\lambda]$, $i\sin(l+g)$ sont développables suivant les puissances de x, y, ξ, η et les cosinus et sinus des multiples de λ; que d'autre part,

$$e'\cos(t-\varpi') = (e'\cos v)\cos n\lambda + (e'\sin v)\sin n\lambda,$$
$$e'\sin(t-\varpi') = (e'\cos v)\sin n\lambda - (e'\sin v)\cos n\lambda.$$

On conclura que F est développable suivant les puissances de x, y, ξ, η, $e'\cos v$, $e'\sin v$ et suivant les cosinus et les sinus des multiples de λ. Les coefficients du développement dépendent encore de $L = U - nS - nT$; ces fonctions de L peuvent être développées par la formule de Taylor suivant les puissances croissantes de $n(S+T)$; c'est-à-dire de

$$\frac{n}{2}(x^2+y^2+\xi^2+\eta^2);$$

de sorte que finalement F procédera suivant les puissances de $x, y, \xi, \eta, e'\cos v$, $e'\sin v$, $\cos p\lambda$, $\sin p\lambda$, les coefficients du développement ne dépendant plus que de U.

J'observe maintenant que, par raison de symétrie, F ne doit pas changer :

1° Quand on change ξ et η en $-\xi$ et $-\eta$;

2° Quand on change y, η et v en $-y$, $-\eta$ et $-v$.

Cela montre qu'un grand nombre de termes ne doivent pas figurer dans le développement.

Voyons maintenant quels sont, parmi ces termes, ceux qui sont à courte période. Ce sont les termes qui contiennent λ en dehors des combinaisons s, τ ou v. Car nous avons vu que $\frac{ds}{dt}, \frac{d\tau}{dt}, \frac{dv}{dt}$, sont très petits, tandis que $\frac{d\lambda}{dt}$ est fini.

Si, conformément à l'esprit de la méthode de Delaunay, nous supprimons ces termes à courte période, nous pourrons dire que F est développable suivant les puissances de x, y, ξ, η, $e'\cos v$, $e'\sin v$, les coefficients dépendant seulement de U.

Si nous négligeons, comme M. Simonin, les termes qui contiennent en facteur : e^3, i^4, i^2e, e^2e', e'^2, et si nous supprimons les termes qui doivent être nuls en vertu de la symétrie, nous trouverons :

$$\begin{aligned}(5)\qquad F = A &+ Bx + Cx^2 + Dy^2 + E\xi^2 + H\eta^2 \\ &+ Ke'\cos v + Lxe'\cos v + Mye'\sin v.\end{aligned}$$

A, B, C, D, E, H, K, L, M sont des fonctions de U.

Je remarque d'abord que F dépend encore de λ *indirectement*. Car F est supposé exprimé en fonction de $U, \lambda, x, y, \xi, \eta$ et de t; ici F dépend de U, x, y, ξ, η et $v = n\lambda - t + \varpi'$. C'est par l'intermédiaire de v qu'il dépend encore de λ et de t.

Si l'on suppose que l'on néglige la masse de Jupiter, on aura simplement

$$F = \frac{1}{2L^2} + \theta = \frac{1}{2(U-nS-nT)^2} + U - (n+1)(S+T)$$

ou, en négligeant les carrés de S et de T,

$$F = \frac{1}{2U^2} + U + \left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right)(S + T)$$
$$= \frac{1}{2U^2} + U + \left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right)\frac{x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2}{2};$$

de sorte que si l'on pose

$$A = A_0 + mA_1 \qquad B = B_0 + mB_1, \qquad \ldots,$$

m étant la masse de Jupiter et $A_0, A_1, \ldots$ étant des fonctions de U indépendantes de cette masse, on aura

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A_0 = \frac{1}{2U^2} + U, & C_0 = D_0 = E_0 = H_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right), \\ & B_0 = K_0 = L_0 = M_0 = 0. \end{array} \right.$$

Méthode de Delaunay.

Comme première approximation, nous allons supposer

$$e' = \xi = \eta = 0.$$

Dans ces conditions, F ne dépend plus que de x, de y, et de U. On peut alors pousser l'intégration jusqu'au bout par la méthode de Delaunay. Nous n'avons d'ailleurs aucune raison de négliger les termes de degré supérieur en x et en y.

On trouve immédiatement deux intégrales

$$U = \text{const.}, \qquad F = \text{const.},$$

car F ne dépend ni de λ, ni de t.

Considérons donc x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, U comme une constante donnée et construisons les courbes $F = C$, en faisant varier la constante C.

Si l'on supposait $m = 0$, il viendrait

$$F = \frac{1}{2\left[U - \frac{n}{2}(x^2 + y^2)\right]^2} + U - \frac{n+1}{2}(x^2 + y^2)$$

et nos courbes se réduiraient à des cercles concentriques ayant pour centre l'origine.

On doit faire une attention toute spéciale aux points pour lesquels on a

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0,$$

et, par conséquent,

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

Ces points correspondent aux solutions périodiques.

Dans le cas de $m = 0$, ces points sont les suivants : l'origine $x = y = 0$ qui correspond à une orbite circulaire, et tous les points du cercle

$$\frac{dF}{dS} = \frac{n}{(U - nS)^3} - n - 1$$

qui correspondent au cas où le rapport des moyens mouvements est rigoureusement égal à $\frac{n+1}{n}$.

L'équation $\frac{dF}{dS} = 0$ peut, suivant la valeur de U, ne pas avoir de racine positive, ou en avoir une; nous nous supposerons placés dans ce dernier cas.

Nous remarquerons alors trois points, à savoir l'origine O et les deux points d'intersection A et B de l'axe des x avec le cercle

$$\frac{dF}{dS} = 0.$$

Passons au cas où m n'est pas nul, mais très petit. Les deux équations

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0$$

peuvent être remplacées par les suivantes :

$$y = 0, \qquad \frac{dF}{dx} = 0,$$

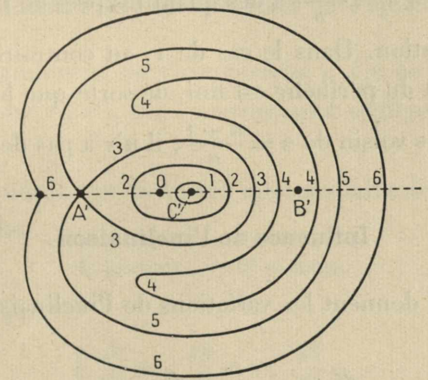
auxquelles correspondront divers points sur l'axe des x. Comme m est très petit, ces points seront très voisins des positions O, A, B qu'ils occupaient pour $m = 0$.

Nous aurons donc trois points, C voisin de O, A′ voisin de A, B′ voisin de B, qui correspondront à trois solutions périodiques, la première de la première sorte, les deux autres de la seconde sorte.

Les courbes F = C présenteront alors la forme représentée sur la figure. Les courbes sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. On remarquera que 1 et 2 sont des courbes fermées entourant le point C; que 3 et 5 forment par leur réunion une sorte de limaçon de Pascal ayant le point A′ pour point double; que 4 est une courbe fermée entourant le point B′; enfin que 6 est une courbe fermée entourant les trois points A′, B′, C.

Le point représentatif x, y décrit une de ces courbes et sa vitesse a pour composantes $\frac{dF}{dy}$, $-\frac{dF}{dx}$; elle est donc proportionnelle à la distance normale de deux courbes infiniment voisines. Le sens de cette vitesse dépend du sens de la normale suivant lequel les F vont en croissant.

Les courbes 1, 2, et 3 seront donc décrites dans le sens des aiguilles d'une montre, par exemple; les courbes 4, 5 et 6 dans le sens inverse. D'ailleurs, tandis que le point x, y fera une infinité de fois le tour des courbes 1, 2, 4 et 6, il ne parcourra qu'une seule fois les courbes 3 et 5 en allant du point A′ au



point A′ dont il sera infiniment voisin tant pour $t = -\infty$ que pour $t = +\infty$. La courbe 4 correspond au cas de la *libration*.

Nos courbes fermées différeront peu de circonférences.

Rappelons que les coordonnées polaires du point x, y sont $\sqrt{2S}$ et s. Or on voit aisément que, quand on parcourt une de nos courbes, S atteint son maximum et son minimum sur l'axe des x et que la différence entre ce maximum et ce minimum est en général de l'ordre de m, sauf pour les courbes 3, 4, 5 ou pour les courbes peu différentes de 3 ou de 5, pour lesquelles cette différence est de l'ordre de $\sqrt{m}$.

Parlons maintenant des variations de l'angle polaire s. Nous voyons qu'en général, quand le point x, y décrit une de nos courbes, s varie de 0 à 2π ou de 2π à 0. Il y a exception pour la courbe 1 et pour la courbe 4 qui laissent l'origine O en dehors.

Pour ces courbes, l'angle s oscille autour de zéro.

Mais les deux cas sont bien différents; dans les deux cas, on a *rigoureusement* la relation suivante : le moyen mouvement d'Hécube est égal à deux fois le moyen mouvement de Jupiter moins deux fois le moyen mouvement du périhélie d'Hécube (je suppose que $n = 1$, comme cela a lieu dans le cas d'Hécube). Cette relation signifie en effet que la valeur moyenne de $\frac{ds}{dt}$ est nulle.

Mais on sait que le mouvement du périhélie est de l'ordre des masses, à moins que l'excentricité ne soit elle-même de l'ordre des masses; car si l'excentricité est très petite, il suffit d'une très faible perturbation pour déplacer beaucoup le périhélie. Or, dans le cas de ♃, l'excentricité est finie, le mouvement du périhélie est de l'ordre des masses, de sorte que le rapport des moyens mouvements est égal à $2 = \frac{n+1}{n}$ à des quantités près de l'ordre des masses. On a une véritable libration. Dans le cas de 1, au contraire, l'excentricité étant petite, le mouvement du périhélie est fini, de sorte que le rapport des moyens mouvements n'est pas voisin de $2 = \frac{n+1}{n}$; il n'y a pas de libration.

Influence de l'inclinaison.

Les équations qui donnent les variations de l'inclinaison prennent la forme très simple

$$\frac{d\xi}{dt} = +H\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -E\xi; \tag{7}$$

E et H doivent être regardés comme des constantes, puisque $U = \text{const.}$ L'intégration est donc immédiate.

J'ai dit que l'on avait $U = \text{const.}$; et, en effet, si je tiens compte de l'inclinaison, mais que je continue à négliger l'excentricité de Jupiter et les termes à courte période, F dépend seulenent de U, x, y, ξ, η, mais ne dépend ni de λ, ni de t; on a donc

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0, \qquad U = \text{const.}, \qquad F = \text{const.}$$

Calcul de λ.

La différence des longitudes moyennes de λ se calculera par une simple quadrature.

On trouve en effet

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dF}{dU} = -A' - B'x - C'x^2 + D'y^2 - E'\xi^2 - H'\eta^2, \tag{8}$$

A', B', ... désignant les dérivées de A, B, ... par rapport à U. Comme U est une constante, les coefficients A', B', ... sont aussi des constantes; quant à x, y, ξ, η, ce sont des fonctions connues et périodiques du temps. Cela résulte, pour x et y, de ce fait que les courbes $F = C$ sont fermées, et pour ξ et η de la forme des équations (7).

Le dernier membre de (8) est donc une série trigonométrique dont la quadrature est immédiate. Le terme tout connu de cette série représentera alors le moyen mouvement de λ.

Influence de l'excentricité de Jupiter.

Tenons compte maintenant de l'excentricité e' (je ne veux parler que des termes de premier ordre en e'), mais continuons à négliger les termes à courte période.

Maintenant F dépend de t et de λ par l'intermédiaire de v, de sorte qu'on n'a plus les deux intégrales

$$U = \text{const.}, \qquad F = \text{const.}$$

Mais on trouve encore

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial t} = - \dfrac{\partial F}{\partial v}, \\[2mm] \dfrac{dU}{dt} = + \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = + n \dfrac{\partial F}{\partial v}. \end{cases}$$

Dans ces équations (9), les premiers membres $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dU}{dt}$ représentent les dérivées *totales* prises par rapport au temps; les seconds membres $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ représentent les dérivées *partielles* de F considérée comme fonction de $U, x, y, \xi, \eta, \lambda, t$; enfin, dans les troisièmes membres $\frac{\partial F}{\partial v}$ est la dérivée partielle de F considérée comme fonction de U, x, y, ξ, η, v. Ces équations (9) mettent en évidence l'existence de l'intégrale

$$(10) \qquad U + nF = \text{const.}$$

Pour aller plus loin, j'adopterai la notation suivante : je continuerai à désigner par U, x, y, λ les valeurs de ces inconnues que nous avons obtenues dans l'hypothèse $e' = 0$; ce sera l'ensemble des termes indépendants de e' dans le développement de ces inconnues; je désignerai par δU, δx, δy, $\delta\lambda$ l'ensemble des termes du premier degré en e', de sorte que l'expression complète, en négligeant e'^2, serait $U + \delta U, x + \delta x, y + \delta y, \lambda + \delta\lambda$. *On voit par là que* U *est une constante, mais que* δU *n'est pas une constante.*

Si nous nous arrêtons aux termes du second degré en x et y, nos équations prendront la forme suivante : Posons

$$F = \Phi + e'\psi;$$
$$\Phi = A + Bx + Cx^2 + Dy^2 + E\xi^2 + H\eta^2;$$
$$\psi = K\cos v + Lx\cos v + My\sin v;$$

nous avons d'abord

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{d\Phi}{d\lambda} = 0; \qquad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\Phi}{dy} = 2Dy; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{d\Phi}{dx} = -B - 2Cx, \end{cases}$$

et ensuite

$$\frac{d\delta U}{dt} = e'\frac{d\psi}{d\lambda} = ne'\frac{d\psi}{dv} = -ne'(K\sin v + Lx\sin v - My\cos v),$$
$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta\frac{d\Phi}{dy} + e'\frac{d\psi}{dy} = 2D\delta y + 2y\delta D + Me'\sin v,$$
$$\frac{d\delta y}{dt} = -\delta\frac{d\Phi}{dx} - e'\frac{d\psi}{dx} = -\delta B - 2C\delta x - 2x\delta C - Le'\cos v.$$

Il va sans dire que l'on a

$$\delta B = B'\delta U, \quad \dots.$$

Nos équations peuvent s'écrire

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\delta U}{dt} = -ne'(K\sin v + Lx\sin v - My\cos v), \\ \dfrac{d\delta x}{dt} - 2D\delta y = 2y\delta D + Me'\sin v, \\ \dfrac{d\delta y}{dt} + 2C\delta x = -\delta B - 2x\delta C - Le'\cos v. \end{cases}$$

Le second membre de la première équation (12) est une fonction connue du temps, de sorte que δU s'obtient par une simple quadrature. Une fois δU déterminé, δB, δC, δD sont connus et les seconds membres des deux dernières équations (12) seront des fonctions connues du temps. D'autre part, D et C sont des constantes, de sorte que les deux dernières équations (12) sont des équations linéaires à second membre et à coefficients constants.

Le second membre pouvant d'ailleurs se mettre sous la forme de séries trigonométriques, l'intégration est immédiate.

Nous avons trouvé plus haut la valeur de λ et nous pouvons l'écrire

$$\lambda = \lambda_0 t + h + \lambda_1,$$

λ_0 et h étant des constantes et λ_1 une série de cosinus et de sinus. Dans les seconds membres des équations (12), il est clair que nous pouvons négliger λ_1 et faire

$$v = n(\lambda_0 t + h) - t + \varpi',$$

mais si nous voulions tenir compte de λ_1, il n'y aurait aucune difficulté.

Il vient enfin

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\lambda}{dt} = &-\delta U(A'' + B''x + C''x^2 + D''y^2 + E''\xi^2 + H''\eta^2)\\ &- e'(K'\cos v + L'x\sin v + M'y\sin v)\\ &- [B'\delta x + C'\delta(x^2) + D'\delta(y^2) + E'\delta(z^2) + H'\delta(\eta^2)].\end{aligned}$$

Le second membre est connu; A″, B″, ... sont les dérivées secondes de A, ..., par rapport à U; on pourra d'ailleurs remplacer v par

$$n(\lambda_0 t + h) - t + \varpi'.$$

On aura donc $\delta\lambda$ par quadrature.

Nouvelles approximations.

On peut se proposer de pousser l'approximation plus loin, soit en tenant compte des termes à courte période où λ figure explicitement, soit en tenant compte des puissances supérieures de x, y, ξ, η, ou e'. Ces approximations nouvelles se poursuivent d'après les mêmes principes.

Supposons qu'on ait trouvé des valeurs approchées des inconnues; soient U, x, y, ξ, η, λ ces valeurs approchées. Nous aurons

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\Phi}{d\lambda}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi}{dy}, \qquad \ldots,$$

Φ étant l'ensemble des termes de F dont nous avons tenu compte et différant par conséquent très peu de F. Supposons maintenant qu'on veuille tenir compte de nouveaux termes de F et soit ψ l'ensemble de ces nouveaux termes; nous ferons donc

$$F = \Phi + \psi.$$

Nous voulons, en tenant compte de ces nouveaux termes, obtenir de nouvelles valeurs plus approchées $U + \delta U$, $x + \delta x$, ..., de nos inconnues.

Nous trouvons alors

$$(13) \qquad \frac{d\delta U}{dt} = \delta\frac{d\Phi}{d\lambda} + \frac{d\psi}{d\lambda}, \qquad \frac{d\delta x}{dt} = \delta\frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\psi}{dy}, \qquad \ldots,$$

avec

$$\delta\frac{d\Phi}{d\lambda}=\frac{d^2\Phi}{d\lambda^2}\delta\lambda+\frac{d^2\Phi}{d\lambda\,dx}\delta x+\ldots,$$

....

Dans les dérivées de ψ et dans les dérivées secondes de Φ on peut d'ailleurs remplacer les inconues par leurs valeurs approchées, U. x, ...

Nous poserons

$$\Phi_1=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}y^2+\mathrm{E}\xi^2+\mathrm{H}\eta^2,$$

et nous décomposerons la fonction Φ en deux parties en écrivant $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$; on aura par exemple

$$\delta\frac{d\Phi}{d\lambda}=\delta\left(\frac{d\Phi_1}{d\lambda}+\frac{d\Phi_2}{d\lambda}\right)=\left(\frac{d^2\Phi_1}{d\lambda^2}\delta\lambda+\frac{d^2\Phi_1}{d\lambda\,dx}\delta x+\ldots\right)$$
$$+\left(\frac{d^2\Phi_2}{d\lambda^2}\delta\lambda+\frac{d^2\Phi_2}{d\lambda\,dx}\delta x+\ldots\right).$$

Les dérivées secondes de Φ_2 seront alors très petites; soit parce que tous leurs termes contiennent en facteurs des puissances supérieures des excentricités ou des inclinaisons, ou la masse multipliée par un terme à courte période. de façon que la petitesse de la masse ne puisse être compensée par l'introduction de petits diviseurs.

Alors les termes

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\lambda^2}\delta\lambda,\quad \frac{d^2\Phi_2}{d\lambda\,dx}\delta x,\quad \ldots$$

seront très petits par rapport à $\delta\lambda$, δx, ..., c'est-à-dire par rapport aux corrections qu'il s'agit de calculer; ils pourront être négligés, ce qui revient à dire que dans les équations (13) on peut remplacer Φ par Φ_1. Ces équations deviennent alors

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\delta\mathrm{U}}{dt}=\frac{d\psi}{d\lambda},\qquad \frac{d\delta x}{dt}-2\mathrm{D}\,\delta y=2y\,\delta\mathrm{D}+\frac{d\psi}{dy},\\
&\frac{d\delta y}{dt}+2\,\mathrm{C}\,\delta x=-\,\delta\mathrm{B}-2x\,\delta\mathrm{C}-\frac{d\psi}{dx},\\
&\frac{d\delta\xi}{dt}-2\mathrm{H}\,\delta\eta=2\eta\,\delta\mathrm{H}+\frac{d\psi}{d\eta},\qquad \frac{d\delta\eta}{dt}+2\mathrm{E}\,\delta\xi=-\,2\xi\,\delta\mathrm{E}-\frac{d\psi}{d\xi},\\
&\frac{d\delta\lambda}{dt}=-\,\delta\mathrm{U}(\mathrm{A}''+\mathrm{B}''x+\mathrm{C}''x^2+\mathrm{D}''y^2+\mathrm{E}''\xi^2+\mathrm{H}''\eta^2)-\frac{d\psi}{d\mathrm{U}}.
\end{aligned}\right.$$

Comme $\frac{d\psi}{d\lambda}$ est connu, la première équation (14) nous donne $\delta\mathrm{U}$ par quadrature; comme $\delta\mathrm{B}$, $\delta\mathrm{C}$, $\delta\mathrm{D}$ sont désormais connus, les seconds membres des autres équations (14) sont connus; les quatre suivantes deviennent des équations linéaires à seconds membres et à coefficients constants qui donnent facilement δx, δy, $\delta\xi$, $\delta\eta$ et la dernière donne $\delta\lambda$ par quadrature.

Mais il importe d'étudier de plus près la forme des solutions ainsi obtenues. Dans les premières approximations, les variables U, x, y, ξ, η, $\cos\lambda$, $\sin\lambda$ se présentaient sous la forme de séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cousins des multiples de quatre arguments proportionnels au temps et que nous pourrons appeler

$$\sigma, \qquad \varepsilon, \qquad \mu = \lambda_0 t + h, \qquad \nu = n(\lambda_0 t + h) - t + \varpi'.$$

Voici comment s'introduisaient ces quatre arguments; d'abord pour σ, nous avions les deux équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 2\mathrm{D}y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{dx} = -\mathrm{B} - 2\mathrm{C}x.$$

Ces équations, qui sont linéaires et à coeficients constants, s'intègrent immédiatement et nous trouvons

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{C}} + x_0 \cos\sigma, \qquad y = y_0 \sin\sigma,$$

x_0 et y_0 étant des constantes et σ une fonction linéaire du temps telle que

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\sqrt{\mathrm{CD}}. \tag{15}$$

De même pour ε, nous avons les deux équations

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\mathrm{H}\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -2\mathrm{E}\xi,$$

d'où

$$\xi = \xi_0 \cos\varepsilon, \qquad \eta = \eta_0 \sin\varepsilon;$$

ξ_0 et η_0 étant des constantes et ε une fonction linéaire du temps telle que

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 2\sqrt{\mathrm{HE}}. \tag{15 bis}$$

Dans l'expression de $\frac{d\lambda}{dt}$, nous aurons ensuite un terme constant λ_0 qui introduira par quadrature l'argument

$$\mu = \lambda_0 t + h.$$

Enfin, quand on substituera à λ sa valeur dans $\nu = n\lambda - t + \varpi'$, on introduira le quatrième argument

$$\nu = n\mu - t + \varpi'.$$

La même forme trigonométrique se retrouvera-t-elle aux approximations suivantes?

D'abord la première équation (14) ne soulèvera pas de difficulté. Si le second membre de cette équation contenait un terme constant, il en résulterait dans δU un terme séculaire; mais cela n'arrivera pas parce que, par raison de symétrie, ce second membre ne peut contenir que des sinus.

Passons à la deuxième et à la troisième équation (14). Il est clair que ces équations donneront, pour δx et δy, des termes séculaires si nous avons dans les seconds membres des termes en $\sin\sigma$, $\cos\sigma$. A cause de la relation (15), les équations

$$\frac{d\delta x}{dt} - 2D\,\delta y = P\sin\sigma,$$

$$\frac{d\delta y}{dt} + 2C\,\delta x = Q\cos\sigma$$

donneront en effet des termes séculaires, à moins que l'on ait

$$Q\sqrt{D} + P\sqrt{C} = 0.$$

Les autres équations (14) donneraient lieu à des observations analogues. Ainsi s'introduiraient des termes séculaires que nous pouvons et que nous devons éviter.

Pour éviter ces termes, cherchons à représenter nos inconnues par des séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de quatre arguments σ, ε, μ, ν, en supposant toujours que ces quatre arguments sont des fonctions linéaires du temps, mais sans supposer que les coefficients du temps dans ces quatre fonctions linéaires aient rigoureusement les valeurs trouvées en première approximation, c'est-à-dire les valeurs (15), (15 *bis*), λ_0, $n\lambda_0 - 1$.

On a alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dx}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{dx}{d\mu}\frac{d\mu}{dt} + \frac{dx}{d\nu}\frac{d\nu}{dt}$$

et, par conséquent,

$$(16)\qquad \delta\frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dx}{d\sigma}\delta\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dx}{d\varepsilon}\delta\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{dx}{d\mu}\delta\frac{d\mu}{dt} + \frac{dx}{d\nu}\delta\frac{d\nu}{dt}.$$

Nous voulons, à l'aide des équations (14), déterminer non seulement nos inconnues δx, δy, δU, $\delta\lambda$, mais les constantes $\delta\frac{d\sigma}{dt}$, $\delta\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\delta\frac{d\mu}{dt}$, $\delta\frac{d\nu}{dt}$.

Je remarque d'abord que dans le second membre de (16) figurent les dérivées de x. Nous pouvons, dans ces dérivées, remplacer x par sa valeur approchée

$$-\frac{B}{2C}+x_0\cos\sigma.$$

Car si nous commettons une petite erreur sur x, l'erreur commise sur $\frac{dx}{d\sigma}\delta\frac{d\sigma}{dt}$ sera très petite, non seulement d'une manière absolue, mais par rapport à $\delta\frac{d\sigma}{dt}$, c'est-à-dire par rapport aux quantités à calculer.

Or si nous remplaçons x par sa valeur approchée, il vient

$$\frac{dx}{d\sigma}=-x_0\sin\sigma,\qquad \frac{dx}{d\varepsilon}=\frac{dx}{d\mu}=\frac{dx}{d\nu}=0,\qquad \delta\frac{dx}{dt}=\frac{d\delta x}{dt}-x_0\sin\sigma.\delta\frac{d\sigma}{dt}.$$

La seconde équation (14), qui devrait s'écrire

$$\delta\frac{dx}{dt}-2D\delta y=2y\delta D+\frac{d\psi}{dy},$$

devient ainsi

$$\frac{d\delta x}{dt}-x_0\sin\sigma.\delta\frac{d\sigma}{dt}-2D\delta y=2y\delta D+\frac{d\psi}{dy}=P\sin\sigma+R. \tag{17}$$

La seconde équation (14) donne de même

$$\frac{d\delta y}{dt}+y_0\cos\sigma.\delta\frac{d\sigma}{dt}+2C\delta x=-2x\delta C-\delta B-\frac{d\psi}{dx}=Q\cos\sigma+R'. \tag{17 bis}$$

P et Q sont des constantes, R et R' des ensembles de termes trigonométriques dont aucun n'a pour argument σ.

Or les équations (17) et (17 *bis*) n'introduiront pas de termes séculaires, pourvu que $\delta\frac{d\sigma}{dt}$ soit déterminé de telle façon que

$$(Q\sqrt{D}+P\sqrt{C})=\delta\frac{d\sigma}{dt}(y_0\sqrt{D}-x_0\sqrt{C}).$$

Il est utile de remarquer que l'on a

$$y_0\sqrt{D}+x_0\sqrt{C}=0,$$

de sorte que le coefficient de $\delta\frac{d\sigma}{dt}$ ne s'annule pas.

Les quatrième et cinquième équations (14) se traiteront de la même manière et détermineront $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\frac{d\varepsilon}{dt}$. La sixième équation (14) donnera $\delta\lambda$ par quadrature, et il est clair que $\delta\frac{d\mu}{dt}$ ne sera autre chose que le terme constant du second membre de cette équation. On aura enfin

$$\delta\frac{d\nu}{dt}=n\frac{d\mu}{dt}.$$

On peut donc éviter les termes séculaires, et la difficulté peut toujours être surmontée. Elle ne se rencontrerait d'ailleurs que dans le calcul des termes du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

M. Simonin n'a pas poussé l'approximation aussi loin; on voit, il est vrai, dans ses formules figurer des termes séculaires, mais l'origine en est différente. Les moyens mouvements

$$\frac{d\sigma}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{d\mu}{dt}, \quad \frac{d\nu}{dt}$$

dépendent des constantes d'intégration et en particulier de U. M. Simonin a voulu donner à la constante U un petit accroissement δU; il en résulterait pour x, par exemple, un petit accroissement

$$\frac{dx}{dU}\delta U = -\frac{d}{dU}\left(\frac{B}{2C}\right)\delta U - x_0 t \sin\sigma \frac{d}{dU}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\delta U$$

qui contient un terme séculaire $t\sin\sigma$.

C'est cette *différentiation* pour ainsi dire qui est l'origine des termes séculaires rencontrés par M. Simonin.

Nouvel examen des termes en e'.

Reprenons les équations (12), et cherchons quels sont les termes les plus importants. Dans les seconds membres, nous ne pourrons conserver que les termes qui contiennent en facteur e' seulement, en rejetant ceux qui contiennent $e'x$ ou $e'y$; nous trouverons ainsi

$$\frac{d\delta U}{dt} = -ne'K\sin v,$$

d'où

$$\delta U = K_1 e' \cos v,$$

K_1 étant une constante contenant comme K la masse en facteur. Alors

$$\delta B = B'\delta U, \qquad \delta C = C'\delta U, \qquad \delta D = D'\delta U$$

contiendront e' en facteur et, négligeant toujours $e'x$, $e'y$, nous pourrons écrire

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\delta x}{dt} - 2D\delta y = Me'\sin v, \\ \dfrac{d\delta y}{dt} + 2C\delta x = -(K_1 B' + L)e'\cos v, \end{cases}$$

Le terme $K_1 B'$ peut être négligé parce que K_1 et B' sont l'un et l'autre de l'ordre des masses.

Dans les seconds membres, nous ferons

$$v = n(\lambda_0 t + h) - t + \varpi' = n\mu - t + \varpi'$$

et l'intégration sera immédiate.

Si nous négligeons d'abord les perturbations de Saturne et des autres grosses planètes sur Jupiter, nous pouvons regarder e' et ϖ' comme des constantes. Alors δx se réduit à un terme en $\cos v$, et δy à un terme en $\sin v$. Ces termes seront grands parce que le moyen mouvement de v diffère très peu de celui de σ; la différence est de l'ordre des masses. Mais, si l'on veut tenir compte des perturbations séculaires subies par Jupiter, on devra écrire

$$e' \cos \varpi' = \Sigma \varkappa \cos(\alpha t + \beta),$$
$$e' \sin \varpi' = \Sigma \varkappa \sin(\alpha t + \beta),$$

où chacun des seconds membres sera la somme d'un certain nombre de termes périodiques à très longue période; les $\varkappa$, les α et les β sont des constantes.

Les équations (18) deviendront alors

$$\frac{d\delta x}{dt} - 2 D \delta y = \quad M \Sigma \varkappa \sin(n\mu - t + \alpha t + \beta),$$
$$\frac{d\delta y}{dt} + 2 C \delta x = - L \Sigma \varkappa \cos(n\mu - t + \alpha t + \beta).$$

L'intégration est encore immédiate et nous fait connaître les variations séculaires de l'excentricité.

Termes élémentaires de la longitude.

Il existe dans l'expression de $\delta\lambda$ des termes élémentaires à très longue période et dont il est nécessaire de faire une étude approfondie. Nous supposerons

$$\xi = \eta = T = 0,$$

c'est-à-dire que nous négligerons l'inclinaison.

Nous avons

$$(19) \qquad \frac{d\delta\lambda}{dt} = -\delta \frac{d\Phi_0}{dU} - m\delta \frac{d\Phi_1}{dU} - e' \frac{d\psi}{dU},$$

en posant

$$\Phi = \Phi_0 + m\Phi_1,$$

Φ_0 désignant l'ensemble des termes indépendants de la masse de Jupiter et $m\Phi_1$ l'ensemble des termes qui contiennent cette masse en facteur.

Or on a

$$\Phi_0 = \frac{1}{2(U - nS)^2} + U - (n+1)S,$$

d'où

$$-\delta\frac{d\Phi_0}{dU} = \delta\left[\frac{1}{(U-nS)^3} - 1\right] = -\frac{3}{(U-nS)^4}(\delta U - n\delta S)$$

ou en négligeant S

$$-\delta\frac{d\Phi_0}{dU} = \frac{3}{U^4}(\delta U - n\delta S).$$

Nous sommes ainsi conduits à calculer $\delta U - n\delta S$; et pour cela nous avons les équations (3)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dF}{d\lambda}, \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{dF}{ds}, \qquad \frac{ds}{dt} = -\frac{dF}{dS}$$

qui nous donnent

$$\frac{d\delta U}{dt} = \delta\frac{d\Phi}{d\lambda} + e'\frac{d\psi}{d\lambda} = ne'\frac{d\psi}{dv}$$

(puisque Φ ne dépend pas de λ et que ψ n'en dépend que par l'intermédiaire de v) et

$$\frac{d\delta S}{dt} = \delta\frac{d\Phi}{ds} + e'\frac{d\psi}{ds},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(\delta U - n\delta S) = -n\delta\frac{d\Phi}{ds} + ne'\left(\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\psi}{ds}\right).$$

Nous ne voulons conserver dans le second membre que les termes séculaires. Or, nous avons

$$\begin{aligned} v &= \quad n\lambda - t + \varpi', \\ s &= -n\lambda + t - g - \theta; \end{aligned}$$

ce qui montre que le moyen mouvement de $v + s$ est très petit. Les termes séculaires sont donc les termes en $v + s$; si nous les conservons seuls, ψ deviendra une fonction de $v + s$ et l'on aura

$$\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\psi}{ds} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\delta U - n\delta S) = -n\delta\frac{d\Phi}{ds} = -nm\delta\frac{d\Phi_1}{ds}.$$

J'écris $m\frac{d\Phi_1}{ds}$ à la place de $\frac{d\Phi}{ds}$, parce que je sais que $\frac{d\Phi_0}{ds}$ est nul, Φ_0 dépendant seulement de U et de S.

Comme tous les termes de $\delta\frac{d\Phi_1}{ds}$ contiennent en facteur δx, δy ou δU, et par conséquent m, je vois que la dérivée de $\delta U - n\delta S$ (réduite aux termes à très longue période) est divisible par le carré de la masse.

Ce résultat n'est autre chose que le théorème de Lagrange sur l'invariabilité des grands axes; car $U - nS$ est une fonction du grand axe.

Nous trouverons ensuite

$$\Phi = A + B\sqrt{2S}\cos s + 2S(C\cos^2 s + D\sin^2 s),$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = -B\sqrt{2S}\sin s + 4S(D - C)\cos s \sin s = -By + (D - C)xy;$$

d'où enfin

$$-n\delta\frac{d\Phi}{ds} = n\delta(By) + n\delta[(C - D)xy]. \tag{20}$$

Seulement, ainsi que nous l'avons fait observer (et en vertu du théorème de Lagrange), le second membre de (20) contient en facteur le carré de la masse perturbatrice. En première approximation, il devrait être regardé comme nul. Si l'on veut pousser plus loin l'approximation et tenir compte de m^2, nous n'avons plus le droit de négliger les termes en $\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\psi}{ds}$. En effet, si nous avons admis que les seuls termes séculaires étaient les termes en $v + s$, c'est parce que nous avions remplacé x et y par leurs valeurs approchées

$$\sqrt{2S_0}\cos\sigma, \quad \sqrt{2S_0}\sin\sigma$$

(et que nous avons dans v remplacé λ par μ en supprimant la partie périodique de λ).

Nous trouvons alors

$$\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\psi}{ds} = -K\sin v + (L + M)(y\cos v - x\sin v).$$

Il vient donc

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta U - n\delta S) = n\delta(By) + n\delta[(C - D)xy]\\ + ne'[-K\sin v + (L + M)(y\cos v - x\sin v)].\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Mais, à côté du théorème de Lagrange sur l'invariabilité des grands axes, nous avons celui de Poisson, d'après lequel les termes séculaires des grands axes qui contiennent m^2 en facteur doivent également disparaître. Ainsi, dans le second membre de (21), les termes à longue période de l'ordre de m^2 devront se détruire.

Ce résultat doit être rapproché de ceux qu'ont obtenus, par la méthode de Gyldén, M. Ludendorf pour la planète Hécube, M. Brendel pour la planète Hestia. Ces deux savants ont cherché à former les termes à longue période qui pourraient exister dans le développement de la quantité qu'ils appellent S et en se bornant aux termes du second degré par rapport aux excentricités. Ils ont reconnu que les plus importants de ces termes se détruisent.

Ce résultat, qui a coûté aux deux auteurs d'assez longs calculs, n'est donc autre chose que la traduction dans le langage de Gyldén du célèbre théorème de Poisson.

Quoi qu'il en soit, il faudrait en revenir à l'équation (19) et rechercher quels sont les termes du second membre qui peuvent avoir une valeur sensible. Cette étude présenterait un grand intérêt, car elle permettrait de contrôler les résultats obtenus par M. Harzer, au sujet de termes à longue période dont les coefficients seraient extrêmement élevés et dont l'existence a été contestée par M. Bäcklund (*voir Bull. astron.*, t. 14, p. 321). Bien que l'analyse de M. Bäcklund soit sujette à une sérieuse objection, un contrôle direct pourrait être fort utile.