TROISIÈME PARTIE. — THÉORIE DES MARÉES.

# SUR L'ÉQUILIBRE DES MERS

*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 118, p. 948-952 (30 avril 1894).

La théorie des marées n'est pas encore faite ; la précision avec laquelle on les prédit ne doit pas faire illusion, car les procédés employés sont semi-empiriques.

Laplace n'a pu arriver à intégrer ses équations qu'en supposant qu'il n'y a pas de continents, et que la profondeur de la mer ne dépend que de la latitude. Cette hypothèse est beaucoup trop éloignée de la réalité pour qu'on puisse rien conclure du résultat qu'il a obtenu.

L'étude des oscillations à longue période et en particulier de la marée bimensuelle est relativement facile ; on peut y négliger, en effet, l'inertie du liquide et la force de Coriolis, ce qui réduit la question à un simple problème de Statique. L'importance de ce problème a été mise en évidence dans le Traité de Philosophie naturelle de Thomson et Tait. Ces deux illustres savants, aidés par M. G. Darwin, ont cherché, en effet, en comparant la théorie avec les observations, à reconnaître quelle déformation élastique subissait la masse solide du globe sous l'influence de l'attraction lunaire.

Leur conclusion est que le globe terrestre présente une rigidité égale à celle de l'acier, sinon une rigidité plus grande encore ; toutefois les résultats sont trop discordants pour que cette conclusion soit absolument certaine.

Ces discordances sont dues, sans doute, pour la plus grande part, à l'incertitude des observations ; mais l'imperfection de la théorie y est peut-être aussi pour quelque chose.

Dans les paragraphes 806 à 810 de l'Ouvrage que je viens de citer, on cherche à tenir compte de la présence des continents, mais en négligeant l'attraction mutuelle des eaux soulevées; dans le paragraphe 815, on tient compte de cette attraction, mais en supposant qu'il n'y a pas de continent; il arrive alors que l'amplitude de la marée est, par l'effet de cette attraction, multipliée par un coefficient dont l'expression est très simple; mais la valeur de ce coefficient pourrait être considérablement modifiée par la présence des continents. Il y aurait donc lieu de poussser plus loin l'approximation; on rendrait ainsi plus facile et plus sûre la discussion nouvelle des observations, qui pourrait être entreprise dès que celles-ci seront plus nombreuses et plus exactes.

Voici comment le problème se pose analytiquement :

Soient

$1$, le rayon du globe supposé sphérique;

$h$, la surélévation des mers;

$\sigma$, la densité du globe terrestre;

$1$, celle des mers.

Soit $V$ le potentiel dû à l'attraction de l'eau soulevée, de telle sorte que, si $d\omega$ est un élément de la surface de la sphère terrestre et $\rho$ la distance de cet élément au point $(x, y, z)$, on ait

$$V = \int \frac{h\,d\omega}{\rho}.$$

Si alors je désigne par $r$ la distance du point $(x, y, z)$ au centre de la Terre et si j'envisage en particulier la valeur de $V$ pour $r = 1$, on aura

$$2\frac{dV}{dr} + V = 4\pi h.$$

Je désigne par $\varphi$ la fonction perturbatrice (qui, d'après l'approximation généralement admise, est à la surface de la sphère une fonction sphérique du second ordre) et par $C$ une constante que je me réserve de déterminer plus tard.

On aura alors à la surface des continents

$$h = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 2\frac{dV}{dr} + V = 0,$$

et à la surface des mers

$$V - \frac{4\pi\sigma}{3} h = \varphi + C,$$

d'où

$$2\frac{dV}{dr} + V = \xi(V - \varphi - C) = \xi V + \psi$$

en posant

$$\xi = \frac{3}{\sigma}, \qquad \psi = -\xi(\varphi + C).$$

Ces conditions, jointes à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et à la condition de la constance du volume total des eaux, déterminent V et $h$.

Cherchons alors à développer V et $h$ suivant les puissances croissantes de $\xi$ en posant

$$(1) \qquad V = V_0 + V_1\xi + V_2\xi^2 + \ldots, \qquad h = h_0 + h_1\xi + h_2\xi^2 + \ldots.$$

Toutes les quantités $h_i$ doivent s'annuler à la surface des continents et l'on aura, d'autre part, à la surface des mers,

$$2\frac{dV_0}{dr} + V_0 = \psi, \qquad 2\frac{dV_1}{dr} + V_1 = V_0, \qquad 2\frac{dV_2}{dr} + V_2 = V_1 \qquad \ldots.$$

On en déduit

$$V_0 = \int\frac{\psi\,d\omega}{4\pi\rho}, \qquad V_1 = \int\frac{V_0\,d\omega}{4\pi\rho}, \qquad \ldots,$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface des mers seulement, ainsi que toutes celles que nous aurons à considérer dans la suite.

On peut se demander si les séries ainsi obtenues convergent. La réponse doit être affirmative, comme le prouve la méthode de Schwarz convenablement modifiée.

Si nous posons, en effet,

$$\int V_n V_m d\omega = W_{m.n},$$

nous voyons aisément que l'on a

$$W_{m.n} = W_{m+n.0} = W_{m+n}; \qquad W_n > 0; \qquad \frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots.$$

De plus $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ est toujours plus petit que 1, et si $\psi$ est égal à la somme de $(p+1)^2$ fonctions données multipliées chacune par un coefficient arbitraire, on peut disposer de ces coeficients arbitraires de telle sorte que

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} < 2p + 1.$$

Si alors $\mu$ est la limite de $\frac{W_n}{W_{n+1}}$ pour $n$ infini, on pourra trouver des nombres $k$ et $g$ tels que

$$V_n < \mu^n(kn + g),$$

ce qui prouve que les séries (1) convergent uniformément, pourvu que $\xi < \mu$.

La fonction V est une fonction méromorphe de $\xi$; soit $k_i$ l'un des pôles; le résidu correspondant sera un coefficient constant $A_i$, multiplié par une fonction $u_i$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\Delta u_i = 0 \quad \text{(à l'intérieur du globe)}; \qquad \int u_i^2 d\omega = 1;$$

$$2\frac{du_i}{dr} + u_i = 0 \quad \text{(à la surface des continents)};$$

$$2\frac{du_i}{dr} + u_i = k_i u_i \quad \text{(à la surface des mers)}.$$

Les fonctions $u_i$ jouent, par rapport à un globe dont la surface est formée de continents et de mers, le même rôle que les fonctions sphériques par rapport à un globe entièrement recouvert par les eaux. Une fonction quelconque peut, à la surface des mers, être développée en série procédant suivant les fonctions $u_i$, soit

$$\psi = \Sigma A_i u_i, \qquad A_i = \int \psi u_i d\omega,$$

d'où

$$V = \sum \frac{A_i u_i}{k_i - \xi}. \tag{2}$$

Il reste à déterminer la constante arbitraire C, qui entre implicitement dans $\psi$; on le fera en écrivant que le volume des mers demeure invariable.

S'il n'y avait pas de continents, les fonctions $u_i$ se réduiraient aux fonctions sphériques; on aurait

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = k_3 = k_4 = 3, \qquad k_5 = 5;$$

$$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \qquad u_2 = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \qquad u_3 = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \qquad u_4 = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}};$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0; \qquad \psi = A_5 u_5$$

et

$$V = \frac{A_5 u_5}{5 - \xi}.$$

Pour passer du résultat où $\xi$ est négligé au résultat exact, il suffit alors de le multiplier par le facteur

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{5}}; \tag{3}$$

si maintenant on tient compte des continents, les nombres $k_i$ augmentent et le facteur précédent devient

$$\frac{1}{1-\frac{\xi}{k_5}} < \frac{1}{1-\frac{\xi}{5}}.$$

Mais, et c'est là que je voulais en venir, les coefficients $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ne sont plus nuls et la formule (2) contient des termes où entrent les facteurs

$$\frac{1}{1-\frac{\xi}{k_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

lesquels sont notablement plus grands que le facteur (3).

Il est très probable que, avec la distribution réelle des continents, les coefficients $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, sans être nuls, sont négligeables. MM. Thomson et Tait auraient alors eu raison de dire au paragraphe 816 que l'attraction mutuelle des eaux n'altère pas sensiblement les résultats. Mais la vérification reste à faire; dans l'état actuel de la théorie, elle entraînerait sans doute des calculs fort pénibles et hors de proportion avec le but à atteindre. Peut-être cependant les considérations qui précèdent aideront-elles d'autres chercheurs à trouver une méthode assez rapide pour qu'on puisse calculer une limite supérieure de $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$.