LES MESURES DE GRAVITÉ

ET

LA GÉODÉSIE

Bulletin astronomique, t. 18, p. 5-39 (janvier 1901).

I. Tout le monde regarde les observations du pendule comme le complément nécessaire des mesures géodésiques; mais on ne s'est pas toujours rendu exactement compte des véritables relations qui relient ces deux séries de données obtenues par des moyens si différents.

Il y a une circonstance qui a probablement déjà été remarquée, mais sur laquelle on n'a peut-être pas suffisamment insisté : c'est que les observations du pendule ne viennent pas seulement nous fournir un complément aux mesures géodésiques, mais elles pourraient les remplacer complètement si elles pouvaient être assez multipliées et si elles étaient suffisamment exactes. De même, d'ailleurs, les mesures géodésiques, si elles étaient parfaites, pourraient dispenser des observations pendulaires.

Bien entendu, je ne veux pas dire qu'il faut renoncer aux mesures géodésiques. Les deux méthodes d'observation ne sont ni l'une ni l'autre assez précises pour qu'il ne soit pas nécessaire de les contrôler l'une par l'autre.

Mais, pour que ce contrôle soit possible, il faut justement se rendre bien compte de la nature de leur dépendance mutuelle. C'est là le but du présent travail.

Je me suis donc proposé de donner une formule propre à déduire la forme du géoïde des seules observations pendulaires, et en particulier la déformation *locale* du géoïde provenant d'une perturbation *locale* de la gravité. Cette formule est celle que je donne plus loin [§ IV, form. (1)].

Une remarque avant d'aller plus loin : dans un article récemment publié dans la *Revue générale des Sciences*, M. Brillouin a exposé quelques idées originales.

Il a fait remarquer que la définition habituelle du géoïde comporte une ambiguïté. On dit d'ordinaire que c'est la prolongation idéale de la surface des mers au-dessous du sol des continents. Mais qu'entend-on par là ?

Est-ce la surface qu'un nivellement opéré sous terre dans des galeries de mines montrerait être partout de niveau avec les océans ? C'est là une première définition, et j'appellerai G_1 le géoïde ainsi défini.

Mais est-ce bien là le véritable prolongement de la surface des mers ? Il est permis d'en douter. Dans tous les cas où la forme de la planète est susceptible d'une définition géométrique et où la densité est supposée donnée par une formule analytique, il est aisé de constater que la surface des mers et celle du géoïde G_1 sont définies par des équations dont les premiers membres sont des fonctions analytiques *entièrement différentes*.

Faisons, par exemple, une hypothèse aussi simple que possible. Le noyau solide de la planète a la forme d'un ellipsoïde et sa densité est constante. Il n'y a pas de rotation. Le noyau est partiellement recouvert par une masse liquide, qui joue le rôle de nos mers, mais *dont la densité est négligeable*.

Il est aisé alors de définir le géoïde G_1 qui prolonge la surface de cette mer sous la partie du noyau solide qui n'est pas recouverte ; on constate alors que la surface G_1 est un ellipsoïde, tandis que la surface de la mer est une surface transcendante.

J'appellerai donc G_2 le géoïde qui est la continuation *analytique* de la surface des mers au-dessous des continents.

Pour nous rendre compte de la différence entre les deux géoïdes nous allons prendre un exemple simple, auquel d'ailleurs tous les autres cas peuvent *pratiquement* se ramener.

Imaginons que, dans une région déterminée, la surface de la Terre s'élève au-dessus du géoïde, que dans cette région cette surface se réduise à une portion de sphère, dont le rayon sera R et dont le centre ne coïncidera pas en général avec celui de la Terre ; et enfin qu'entre cette surface sphérique et le géoïde la densité soit constante et égale à ρ.

Soit W le potentiel total; il se composera du potentiel U dû à la force centrifuge et du potentiel V dû à l'attraction. Ce dernier pourra lui-même être décomposé en deux parties : 1° le potentiel V_1 dû à une sphère attirante S homogène de densité ρ, de centre C et de rayon R; 2° le potentiel V_2 dû aux masses attirantes supplémentaires, c'est-à-dire à la partie de la planète qui est extérieure à la sphère S et de masses réparties à l'intérieur de cette sphère et dont la densité ρ' sera égale à la densité réelle de la Terre au même point diminuée de la constance ρ; on peut d'ailleurs concevoir qu'en certains points ρ' soit négatif.

On aura alors

$$W = U + V_1 + V_2.$$

Dans la région envisagée, entre la surface sphérique qui est celle de la Terre et celle du géoïde, la densité de la Terre est supposée égale à ρ; par conséquent, ρ' est nul; il n'y a donc dans cette région aucune des masses supplémentaires qui engendrent V_2.

Donc V_2 est dans toute cette région une fonction *analytique* et peut toujours être représentée analytiquement par la même formule.

De même U est fonction analytique dans tout l'espace.

Venons à V_1; soit r la distance du point (x, y, z) à C; on aura

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{M}{r} && (\text{pour } r > R) \\ V_1 &= \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3} && (\text{pour } r < R) \end{aligned}\right\} \quad M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3.$$

Si donc j'appelle V'_1 la continuation analytique pour $r < R$ de la valeur de V_1 pour $r > R$, on aura

$$V_1 - V'_1 = \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3} - \frac{M}{r}.$$

Si j'appelle de même W' la continuation analytique à l'intérieur de la surface sphérique de la valeur de W à l'extérieur de cette surface, nous aurons

$$W - W' = \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3} - \frac{M}{r}.$$

Soit maintenant $r = R - \varepsilon$; cette différence ε, qui sera très petite, représentera à peu de chose près l'altitude de la surface de la Terre au-dessus du géoïde. Or on trouve, en négligeant ε^3,

$$W' - W = +\frac{3M\varepsilon^2}{2R^3}.$$

Soit maintenant δ la différence de niveau entre le géoïde G_1 dont l'équation est $W = \text{const.}$, et le géoïde G_2 dont l'équation est $W' = \text{const.}$ Nous pourrons écrire

$$W' - W = -g\delta,$$

d'où

$$\delta = -\frac{3M\varepsilon^2}{2gR^3} = -\frac{4\pi}{3}\frac{3}{2}\frac{\rho\varepsilon^2}{g}.$$

Or on a sensiblement

$$g = \frac{4}{3}\pi\Delta R_0,$$

Δ étant la densité moyenne de la Terre et R_0 son rayon; il vient donc

$$\delta = -\frac{3}{2}\frac{\rho}{\Delta}\frac{\varepsilon^2}{R_0}.$$

Ainsi la distance des deux géoïdes est proportionnelle au carré de l'altitude; elle est d'un peu moins de $0^m,12$ pour une altitude de 1^{km} et d'un peu moins de 2^m pour une altitude de 4^{km}.

L'influence sur la gravité est plus grande.

On a, en effet, sensiblement,

$$g = -\frac{dW}{dr};$$

et si j'appelle g' la continuation analytique, à l'intérieur de la sphère, de la valeur de g à l'extérieur de cette sphère on aura

$$g' = -\frac{dW'}{dr},$$

d'où

$$g' - g = -\frac{d(W' - W)}{dr} = \frac{d(W' - W)}{d\varepsilon} = +4\pi\rho\varepsilon = 3g\frac{\rho}{\Delta}\frac{\varepsilon}{R_0}.$$

L'altération de la gravité est proportionnelle à la première puissance de la gravité.

Rappelons qu'on a proposé, pour réduire le pendule au niveau de la mer, deux corrections :

1° La correction

$$+2g\frac{\varepsilon}{R_0}.$$

Je l'appellerai *correction de Faye*, bien qu'elle soit connue depuis fort longtemps, parce que M. Faye a le premier proposé de ne pas faire d'autre correction.

2° La correction

$$-\frac{3}{2}g\frac{\rho}{\Delta}\frac{\varepsilon}{R_0}$$

qui est connue sous le nom de *correction de Bouguer* et qui est destinée à tenir compte des masses continentales.

Nous devons donc envisager :

1° La valeur de la gravité, affectée de la correction de Faye seule, c'est ce que serait la pesanteur à la surface du géoïde, si les masses continentales étaient *condensées* sur cette surface, ou plutôt, pour plus de précision, dans une couche infiniment mince située au-dessous de cette surface. Ce n'est pas autre chose que ce que nous avons appelé g'.

2° La valeur de la gravité, affectée des corrections de Faye et de Bouguer, c'est ce que serait la pesanteur à la surface du géoïde, les masses continentales étant rasées ; c'est ce que j'appellerai g''.

3° La valeur qu'aurait la gravité à la surface du géoïde, si les masses continentales subsistaient telles qu'elles sont. C'est ce que j'ai appelé g.

Dans le premier cas, les masses continentales sont au-dessous du géoïde, elles attirent de haut en bas; dans le second, elles sont supprimées, elles n'attirent pas du tout; dans le troisième, elles sont au-dessus du géoïde, elles attirent de bas en haut. On aura donc

$$g''=\frac{g+g'}{2}.$$

On s'explique ainsi pourquoi la différence $g'-g$ est le double de la correction de Bouguer.

M. Brillouin adopte le géoïde G_2, ou plutôt, afin d'enlever à la définition ce qu'elle a d'un peu abstrait, il rapporte tout à une surface de référence G'_2 qui n'est plus la surface des mers, mais une surface de niveau extérieure à toutes les masses attirantes.

Outre les géoïdes G_1 et G_2, il conviendrait de considérer le géoïde de M. Helmert, dont la définition est plus compliquée.

Le choix de M. Brillouin me paraît tout à fait judicieux; je remarquerai toutefois que, dans ce qui va suivre, je n'aurai pas à me préoccuper de la différence des deux géoïdes, puisque je négligerai ε^2. J'aurai, au contraire, à tenir compte de la différence entre les deux valeurs de g qui contient ε à la première puissance, et nous verrons plus loin que c'est la valeur g' (c'est-à-dire la valeur affectée de la correction de Faye seule) qui intervient dans la détermination de la forme du géoïde.

Quand je parle de la détermination de la forme du géoïde, je ne me préoccupe pas seulement de rechercher la meilleure valeur de l'aplatissement. Cette considération passerait plutôt au second plan et il s'agit avant tout de rechercher de combien le géoïde s'écarte de la forme ellipsoïdale.

L'incertitude sur l'aplatissement doit en effet être aujourd'hui regardée comme du même ordre de grandeur que les coefficients des termes non ellipsoïdaux.

II. Une des difficultés que nous rencontrerons est la suivante : si nous voulons développer le potentiel en une série de fonctions sphériques, le développement ne sera valable qu'à l'extérieur d'une sphère, extérieure elle-même à toutes les masses attirantes. Il en résulte qu'il n'est pas valable sur la surface même du volume attirant, si l'on excepte celui des points de cette surface qui est le plus éloigné du centre de la sphère.

On peut se débarrasser de cette difficulté grâce à l'artifice de la condensation imaginé par M. Helmert, ou grâce à des artifices analogues. Imaginons d'abord que l'on décrive une sphère complètement intérieure au volume attirant, mais qui s'écartera très peu de la surface de ce volume, puisque cette surface est sensiblement sphérique; la distance de cette surface à la sphère est de l'ordre de l'aplatissement. Nous prendrons pour unité le rayon de cette sphère. Supposons ensuite que les masses attirantes extérieures à cette sphère soient *condensées* sur la surface de cette sphère, c'est-à-dire transportées sur la surface de la sphère au point le plus voisin de la position qu'elles occupent réellement.

La masse totale ainsi condensée est de l'ordre de l'aplatissement; la distance de la position réelle de chaque masse partielle à la position fictive qui lui est attribuée par suite de la condensation est aussi de l'ordre de l'aplatissement. On conclut aisément de là que l'erreur ainsi commise *sur le potentiel* V est de l'ordre du carré de l'aplatissement. Nous pouvons donc la négliger.

Mais il faut nous rendre compte de l'erreur commise sur g, ou plutôt, ce qui revient au même, comme on le verra plus loin, de l'erreur commise sur $\frac{dV}{dr}$.

Soit donc v le potentiel dû aux masses attirantes extérieures à la sphère.

Soient M' une des masses attirantes, M le point attiré, O le centre de la sphère, r' la distance OM', r la distance OM, ψ l'angle M'OM, ρ la distance MM', de telle sorte que

$$\rho^2 = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\psi;$$

il viendra

$$v = \int \frac{\delta r'^2 \sin\psi \, d\psi \, d\theta \, dr'}{\rho},$$

où δ désigne la densité de la matière attirante et θ l'angle du plan MOM' avec un plan fixe passant par OM.

Nous pourrons poser

$$\cos\psi = 1 - \frac{h^2}{2}, \qquad r = 1 + \varepsilon z, \qquad r' = 1 + \varepsilon z',$$

ε étant une constante de l'ordre de l'aplatissement, de telle sorte que z et z' sont finis.

Nous aurons $\sin\psi \, d\psi = h \, dh$, et d'ailleurs, si je pose

$$k = r'^2 \int_0^{2\pi} \delta \, d\theta,$$

k sera une fonction de r' et de ψ, dont je ne veux retenir qu'une chose, c'est qu'elle est finie. Notre équation devient ainsi

$$v = \varepsilon \int \frac{kh \, dh \, dz'}{\rho},$$

d'où (1)

$$\frac{dv}{dr} = \varepsilon \int \frac{kh \, dh (r - r'\cos\psi) \, dz'}{\rho^3}.$$

On a d'ailleurs,

$$r - r'\cos\psi = \varepsilon z - \varepsilon z' + \frac{h^2}{2} + \frac{\varepsilon h^2 z'}{2},$$

$$\rho^2 = \varepsilon^2 (z - z')^2 + h^2 (1 + \varepsilon z)(1 + \varepsilon z').$$

Nous poserons ensuite $h = \varepsilon\xi$, et nous remarquerons qu'on doit alors faire varier ξ depuis zéro jusqu'à $\frac{2}{\varepsilon}$ qui est une très grande quantité. Nous trouverons ainsi

$$r - r'\cos\psi = \varepsilon(z - z') + (1 + \varepsilon z')\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2},$$

$$\rho^2 = \varepsilon^2 [(z - z')^2 + \xi^2] + \varepsilon^3 \xi^2 (z + z' + \varepsilon z z').$$

---

(1) L'expression qui figure au deuxième membre de l'équation est en réalité la valeur de $-\frac{dv}{dr}$. Il suffit, pour rectifier le calcul qui suit, d'y substituer partout $-\frac{dv}{dr}$ à $\frac{dv}{dr}$.

Nous poserons

$$\frac{\xi^2}{2}(1+\varepsilon z') = \lambda,$$

$$(z-z')^2 + r^2\xi^2 = R_0^2, \qquad \mu = \xi^2(z'-z)r,$$

d'où $\rho^2 = \varepsilon^2 R_0^2 + \varepsilon^3\mu$,

$$\frac{dv}{dr} = \varepsilon \int \frac{k\xi\, d\xi\, dz'(z-z'+\varepsilon\lambda)}{(R_0^2+\varepsilon\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit alors

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma\beta_n x^n \qquad (\beta_0 = 1),$$

nous aurons

$$\frac{dv}{dr} = \int k\,G\,d\xi\, dz';$$

$$G = +\Sigma\beta_n\varepsilon^{n+1}(z-z')\mu^n\xi R_0^{-3-2n} + \Sigma\beta_n\varepsilon^{n+2}\lambda\xi\mu^n R_0^{-3-2n}.$$

Nous aurons à examiner les différents termes de l'intégrale $\frac{dv}{dr}$ qui répondent aux différents termes de G. Remarquons d'abord que tous ces termes restent finis pour $\xi = 0$, $z = z'$. En effet, si ξ et $z - z'$ sont des infiniment petits du premier ordre, λ sera du second ordre, μ du troisième ordre, R_0 du premier ordre. Le terme général de la première partie de G (je veux dire celui qui figure sous le premier signe Σ) sera d'ordre $n-1$; le terme général de la deuxième partie de G sera d'ordre n. Tous seront donc au moins d'ordre -1, et les intégrales correspondantes qui sont des intégrales doubles resteront finies.

Voyons maintenant comment toutes nos intégrales se comporteront pour ξ très grand. Si ξ est regardé comme un infiniment grand du premier ordre, λ est du second ordre, μ du second ordre, R_0 du premier ordre. Le terme général de la première partie de G est de l'ordre -2; l'intégrale reste donc finie et, comme elle contient en facteur ε^{n+1}, elle est de l'ordre de ε^{n+1}.

Le terme général de la second partie de G est de l'ordre 0, l'intégrale est donc très grande, de l'ordre de ξ, ou plutôt de l'ordre des $\varepsilon^{n+2}\xi$.

Comme la limite supérieure de ξ est $\frac{2}{\varepsilon}$, l'intégrale sera finalement de l'ordre de ε^{n+1}. Si nous négligeons donc le carré de ε, nous pouvons réduire G au premier terme de chaque partie et écrire

$$G = \varepsilon(z-z')\xi R_0^{-3} + \varepsilon^2\frac{\xi^3 r'}{2}R_0^{-3}.$$

Le second terme lui-même peut considérablement se simplifier; en effet, les seules parties sensibles de l'intégrale sont celles qui correspondent aux grandes valeurs de ξ; nous pouvons donc prendre

$$R_0 = r\xi.$$

La différence

$$\varepsilon^2 \frac{\xi^3 r'}{2} [R_0^{-3} - (r\xi)^{-3}]$$

est d'ordre — 2 pour ξ très grand, de sorte que l'intégrale correspondante reste finie pour $\xi = \infty$; elle est donc de l'ordre ε^2, c'est-à-dire négligeable.

Nous pouvons donc écrire, en négligeant ε^2,

$$(1) \qquad \frac{dv}{dr} = \varepsilon \int \frac{\delta r'^2 \xi (z - z') \, d\theta \, dz' \, d\xi}{R_0^3} + \varepsilon \int \frac{\delta r'^3}{2 r^3} \, d\theta \, dz' \, dh.$$

Le premier terme représente l'attraction des masses les plus voisines : c'est la correction topographique ordinaire. Quant au second terme, il peut se simplifier encore. On peut, en effet, remarquer que $\frac{r'}{r}$ est sensiblement égal à 1, et il reste alors

$$\varepsilon \int \delta \, d\theta \, dz' \, dh,$$

expression qui : 1° est indépendante de r et 2° reste la même avant et après la condensation.

Quelle est donc l'influence de la condensation sur g ? Cette influence ne s'exerce que sur le premier terme de $\frac{dv}{dr}$. Il faut, non pas faire la correction topographique à la façon ordinaire, c'est-à-dire supprimer les masses les plus voisines ou bien encore supprimer le premier terme du second membre de (1), mais condenser ces masses sur la sphère de rayon 1, c'est-à-dire remplacer ce premier terme par ce qu'il devient après la condensation, soit par

$$(2) \qquad \varepsilon \int \frac{\delta r'^2 \xi z \, d\theta \, dz' \, d\xi}{(z^2 + r^2 \xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

[Remarquons en passant que, dans le premier terme du second membre (1) comme dans l'expression (2), nous pourrions au numérateur remplacer le facteur r'^2 par 1, l'erreur commise serait de l'ordre de ε^2.]

Ce n'est pas autre chose que la correction de M. Helmert.

Mais on peut employer également l'artifice de M. Brillouin. Si l'on n'a pas recours à la condensation, les développements en fonctions sphériques seront encore valables, mais seulement à l'extérieur de la sphère S_1 de rayon $1 + \varepsilon\zeta$, qui enveloppe toutes les masses attirantes. Le géoïde qui nous servira de surface de référence sera alors choisi de façon à envelopper cette sphère. Quant à g, nous lui attribuerons sa valeur véritable pour les points extérieurs à la sphère; cette valeur $\left(\text{ou plutôt celle de } \frac{dW}{dr} \text{ qui en diffère de quantités de l'ordre de } \varepsilon^2\right)$ sera dans cette région développable en séries de fonctions sphériques. Nous ferons au contraire subir une correction aux valeurs observées à l'intérieur de la sphère. La valeur corrigée sera, par définition, la valeur de g au point de la sphère S_1 le plus voisin du point d'observation, cette valeur étant affectée de la correction de Faye (sans celle de Bouguer) pour tenir compte de la différence d'altitude.

Soient V_0 le potentiel dû à l'attraction des masses intérieures à la sphère de rayon 1, U le potentiel dû à la force centrifuge, la valeur de g sera (en négligeant ε^2)

$$g = -\frac{dV_0}{dr} - \frac{dU}{dr} - \frac{dv}{dr}.$$

Nous désignerons par $P(z)$ et Q les deux termes du second membre de (1); par $P_0(z)$ l'expression (2). On a donc

$$g = -\frac{dV_0}{dr} - \frac{dU}{dr} - P(z) - Q. \tag{3}$$

La valeur corrigée de M. Helmert est

$$-\frac{dV_0}{dr} - \frac{dU}{dr} - P_0(z) - Q.$$

Voyons ce qu'est la correcton de M. Brillouin. Soient M le point d'observation, M_1 le point de la sphère S_1 le plus rapproché de M.

D'un autre côté, si M est la masse totale de la Terre, on aura

$$-\frac{dV_0}{dr} = \frac{M}{r^2} + T,$$

T étant de l'ordre de ε. L'équation (3) devient alors

$$g = \frac{M}{r^2} + T - \frac{dU}{dr} - P(z) - Q, \tag{3 bis}$$

ou, en faisant $r = 1 + \varepsilon z$ et négligeant ε^2,

$$g = M - 2M\varepsilon z + T - \frac{dU}{dz} - P(z) - Q. \tag{3 ter}$$

Les équations (3) et (3 *bis*) nous donnent la valeur observées de g au point M.

Pour en déduire la valeur de g au point M_1, il suffit d'y faire $z=\zeta$; $P(z)$ se change ainsi en $P(\zeta)$. Les trois termes $\frac{dU}{dr}$, Q et T ne subissent que des changements insensibles, de l'ordre de ε^2.

Quant à $\frac{M}{r^2}$, il passe de la valeur $\frac{M}{(1+\varepsilon z)^2}$ à la valeur $\frac{M}{(1+\varepsilon\zeta)^2}$ ou en négligeant ε^2, de la valeur $M - 2M\varepsilon z$ à la valeur $M - 2M\varepsilon\zeta$. Nous trouvons ainsi

$$g = M - 2M\varepsilon\zeta + T - \frac{dU}{dz} - P(\zeta) - Q. \tag{4}$$

Pour passer de cette valeur vraie au point M_1 à la valeur corrigée au point M, il faut, d'après la convention que nous venons de faire, lui faire subir la correction de Faye qui est

$$2M\varepsilon(\zeta - z).$$

On trouve ainsi

$$g = M - 2M\varepsilon z + T - \frac{dU}{dr} - P(\zeta) - Q.$$

En comparant cette équation à (3 *ter*), on voit que la correction de M. Brillouin est $P(z) - P(\zeta)$, tandis que celle de M. Helmert était $P(z) - P_0(z)$.

Les deux corrections conduiraient d'ailleurs à une analyse toute semblable et à des résultats qui ne différeraient que de quantités de l'ordre de ε^2.

Dans ce qui va suivre, afin d'éviter la difficulté signalée, j'adopterai l'hypothèse de la condensation. Les valeurs de g, dont il sera question dans la suite, seront donc toujours les valeurs observées, *affectées de la correction de M. Helmert*.

On peut trouver cependant que l'approximation adoptée, qui est celle du carré de l'aplatissement, n'est pas toujours suffisante. Pour la pousser plus loin, on peut développer, non plus en séries de fonctions sphériques, mais en séries de fonctions de Lamé. L'approximation est alors le carré des différences d'altitude et non plus le carré de l'aplatissement. C'est ce que j'ai fait dans le dernier paragraphe de ce travail.

Il convient alors de faire la condensation non plus sur une sphère, mais sur un ellipsoïde, homofocal à ceux qui engendrent les fonctions de Lamé. On prendra cet ellipsoïde très peu différent d'un géoïde.

L'analyse précédente s'appliquerait sans changement à ce nouveau cas, et le résultat ne serait pas sensiblement modifié.

Nous pouvons donc, à condition de faire la correction de M. Helmert, employer sans crainte, soit les développements en fonctions sphériques, soit les développements en fonctions de Lamé.

III. Nous disposons de trois séries d'observations :

1° Les mesures de pendule, qui nous font connaître la valeur de g aux différents points de la surface terrestre;

2° Les opérations de nivellement, qui nous font connaître l'altitude du point d'observation, ou plus exactement la valeur du potentiel W en ce point.

Je dis qu'il y a équivalence entre ces deux énoncés. Soit, en effet, dh la différence d'altitude de deux points voisins, mesurée directement par le nivellement; soit g l'intensité moyenne de la pesanteur entre ces deux points, le travail $d\mathrm{W}$ de la pesanteur quand on passera d'un point à l'autre sera

$$d\mathrm{W} = -g\,dh.$$

3° Les observations géodésiques, qui nous font connaître la forme du géoïde, c'est-à-dire la distance d'un point de la surface du géoïde, c'est-à-dire de la surface

$$\mathrm{W} = \text{const.} \tag{1}$$

au centre de la Terre.

Je désignerai cette distance par $\mathrm{R}+\zeta$, rapportant ainsi le géoïde à une sphère de référence de rayon R; de sorte que ζ sera la distance du géoïde à cette sphère, comptée sur le rayon vecteur. Nous nous arrangerons toujours pour que cette sphère de référence soit tout entière extérieure à la planète, de telle façon que ζ soit négatif.

Je désignerai par W_0 la constante du second membre de l'équation (1).

Ce que je veux remarquer, c'est que ces trois séries d'observations ne sont pas indépendantes et même que si les observations de deux des séries étaient complètes et parfaites, elles nous dispenseraient de la troisième.

Je négligerai d'abord le carré de l'aplatissement; dans ces conditions, notre proposition et les conséquences que j'en veux tirer sont aisées à établir.

Désignons par

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

les coordonnées d'un point quelconque; par V le potentiel dû à l'attraction seule; par $\mathrm{U} = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ le potentiel dû à la force centrifuge; par $\mathrm{W} = \mathrm{V}+\mathrm{U}$ le potentiel total. Grâce à la condensation, le développement de V sera de la forme

$$\mathrm{V} = \Sigma a_n r^{-(n+1)} \mathrm{X}_n,$$

X_n étant une fonction sphérique d'ordre n de θ et de φ et a_n un coefficient. Un seul des coefficients a_n est fini, c'est a_0, qui est tel que $a_0 X_0$ représente la masse M de la Terre; un autre est de l'ordre de l'aplatissement, tous les autres sont encore beaucoup plus petits.

Nous aurons d'autre part,

$$U = U_0 + U_2,$$

où

$$U_0 = \frac{\omega^2}{3}(x^2 + y^2 + z^2), \qquad U_2 = \frac{\omega^2}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

D'autre part, je développerai de la même manière ζ, qui est fonction de θ et de φ, et j'écrirai

$$\zeta = \Sigma b_n X_n,$$

les b_n étant des coefficients dont deux seulement sont de l'ordre de l'aplatissement et les autres beaucoup plus petits.

Soit maintenant $r = R + \eta$ le rayon vecteur d'un point de la surface terrestre; nous aurons encore

$$\eta = \Sigma c_n X_n,$$

les c_n étant encore des coefficients de l'ordre de l'aplatissement ou d'ordre plus petit.

Quant à g, c'est une force dont les trois composantes sont

$$\frac{dW}{dx}, \quad \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dW}{dz}.$$

La composante dirigée suivant le rayon vecteur est $\frac{dW}{dr}$; soit T la composante perpendiculaire à ce rayon, on aura

$$g = \sqrt{\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 + T^2},$$

T est de l'ordre de l'aplatissement, on peut donc écrire, en négligeant le carré de l'aplatissement,

$$g = -\frac{dW}{dr} = -\frac{dV}{dr} - \frac{dU}{dr}.$$

Or

$$\frac{dV}{dr} = -\Sigma(n+1)\, a_n r^{-(n+2)} X_n,$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{2\omega^2 r}{3} + \frac{\omega^2}{3}\,\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r}.$$

Dans les termes du développement de V, je mets en évidence, en le faisant sortir du signe Σ, le premier terme qui est le seul qui soit fini et qui peut s'écrire

$$a_0 r^{-1} X_0 = \frac{M}{r}.$$

Il vient ainsi

$$g = \frac{M}{(R+\eta)^2} - \frac{2\omega^2}{3}(R+\eta) - \frac{\omega^2}{3}\frac{(x^2+y^2-2z^2)}{r^2}(R+\eta) + \Sigma(n+1)\,a_n X_n (R+\eta)^{-(n+2)}.$$

Comme η, ω^2 et les a_n sont au plus de l'ordre de l'aplatissement, nous pouvons écrire, en négligeant le carré de l'aplatissement,

$$(2)\qquad g = \frac{M}{R^2}\left(1 - \frac{2\eta}{R}\right) - \frac{2\omega^2 R}{3} - \frac{\omega^2 R}{3}\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2} + \Sigma(n-1)\,a_n X_n R^{-(n+2)}.$$

Développons g en série harmonique, il vient

$$g = \Sigma g_n X_n.$$

En remplaçant η dans l'équation (2) par son développement et identifiant les deux développements, il vient

$$(3)\qquad g_n = -\frac{2C_n M}{R^3} + (n+1)\,a_n R^{-(n+2)}.$$

Il y a exception pour deux coefficients : g_0 (coefficient de $X_0 = 1$) et celui que j'appellerai g_2, c'est-à-dire le coefficient de [1]

$$X_2 = \frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}.$$

---

[1] Les notations employées pourraient engendrer quelque confusion. Il y a, en effet, $2n+1$ fonctions sphériques d'ordre n et par conséquent $2n+1$ coefficients g_n.

Il y a, en particulier, cinq coefficients g_2. Celui que je désigne spécialement par g_2 (de même que ceux que j'ai désignés ou que je désignerai par a_2, b_2, c_2, g'_2, ...) est celui de

$$\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}.$$

Les quatre autres pourront être désignés par

$$g_2^{(1)},\quad g_2^{(2)},\quad g_2^{(3)},\quad g_2^{(4)}$$

et les coefficients correspondants par

$$a_2^{(k)},\quad b_2^{(k)},\quad c_2^{(k)},\quad g_2'^{(k)},\quad \ldots).$$

On remarquera alors que les formules (3 *ter*), (5 *ter*), (8 *ter*), etc., s'appliquent à g_2 seulement, tandis que les coefficients $g_2^{(k)}$ satisfont aux formules (3), (5), (8) où l'on doit faire, bien entendu, $n = 2$.

On a, en effet,

$$g_0 = \frac{M}{R^2}\left(1 - \frac{2C_0}{R}\right) - \frac{2\omega^2 R}{3}, \tag{3 bis}$$

$$g_2 = -\frac{2C_2 M}{R^3} - \frac{\omega^2 R}{3} + 3a_2 R^{-4}. \tag{3 ter}$$

D'autre part, pour $r = R + \zeta$, W doit se réduire à W_0; on a donc

$$W_0 = \frac{M}{R+\zeta} + \frac{\omega^2}{3}(R+\zeta)^2 + \frac{\omega^2}{6}X_2(R+\zeta)^2 + \Sigma a_n X_n (R+\zeta)^{-(n+1)},$$

ou en négligeant le carré de l'aplatissement

$$W_0 = \frac{M}{R}\left(1 - \frac{\zeta}{R}\right) + \frac{\omega^2 R^2}{3} + \frac{\omega^2 X_2 R^2}{6} + \Sigma a_n X_n R^{-(n+1)}. \tag{4}$$

Dans cette équation, on remplacerait ζ par son développement et l'on trouverait ensuite en identifiant les deux développements

$$\frac{M}{R^2} b_n = a_n R^{-(n+1)}. \tag{5}$$

Il y a exception pour b_0 et b_2, qui sont donnés par

$$W_0 - \frac{M}{R} + \frac{M}{R^2} b_0 = + \frac{\omega^2 R^2}{3}, \tag{5 bis}$$

$$\frac{M}{R^2} b_2 = + \frac{\omega^2 R^2}{6} + a_2 R^{-3}. \tag{5 ter}$$

Venons aux nivellements et reprenons la formule

$$dW = -g\, dh.$$

Cette formule nous apprend que dW étant une différentielle exacte, il n'en est pas généralement de même de dh, de sorte que les polygones de nivellement ne se ferment pas exactement, à moins qu'on n'y fasse une correction appropriée. On sait que les expériences ont montré jusqu'ici que cette correction est à peu près de l'ordre des erreurs d'observation, de sorte qu'on n'a pas avantage à la faire.

Pour le moment, je me bornerai à remarquer que dh contient des facteurs de l'ordre de l'aplatissement et que g est égal à $\frac{M}{R^2}$, à des quantités près du même ordre; on aura donc, en négligeant le carré de cet aplatissement,

$$dW = -\frac{M}{R^2} dh,$$

d'où

$$W - W_0 = -\frac{Mh}{R^2},$$

en appelant h l'altitude au-dessus du géoïde.

En un point de la surface dont l'altitude est h, on aura donc

$$W = W_0 - \frac{Mh}{R^2},$$

d'où l'équation

$$W_0 - \frac{Mh}{R^2} = \frac{M}{R}\left(1 - \frac{\eta}{R}\right) + \frac{\omega^2 R^2}{3} + \frac{\omega^2 X_2 R^2}{6} + \Sigma a_n X_n R^{-(n+1)} \tag{6}$$

dont le second membre diffère de celui de (4) par la substitution de ζ à η.

En retranchant (6) de (4) et divisant par $\frac{M}{R^2}$, il vient

$$h = \eta - \zeta. \tag{7}$$

Pour démontrer cette formule (7), au carré de l'aplatissement près, il suffirait d'ailleurs de considérations géométriques très simples.

Les opérations de nivellement nous donnent h ; c'est-à-dire les coefficients

$$c_n - b_n = c_n - \frac{a_n}{M} R^{-(n-1)}.$$

Les opérations géodésiques nous donnent les coefficients b_n et par conséquent a_n.

Les mesures de pendule donnent g, c'est-à-dire les coefficients

$$-\frac{2c_n M}{R^3} + (n+1) a_n R^{-(n+2)}.$$

On voit que deux quelconques des trois séries donnent tout ce que donne la troisième. C'est ce que nous avions annoncé.

Voyons ce que cela signifie. On fait ordinairement subir aux observations du pendule deux corrections pour tenir compte de l'altitude. La première correction (que j'appellerai *correction de Faye*) provient de l'augmentation de la distance au centre de la Terre. Elle est égale à $\frac{2hM}{R^3}$.

La seconde correction, dite *correction de Bouguer*, est destinée à tenir compte de l'attraction des masses placées entre le point d'observation et le niveau de la mer.

Soit g' la valeur de la pesanteur affectée de la correction de Faye, non affectée de celle de Bouguer; on a

$$g' = g + \frac{2hM}{R^3}$$

et si l'on pose

$$g' = \Sigma g'_n X_n,$$

il vient

$$(8) \qquad g'_n = -\frac{2b_n M}{R^3} + (n+1)\, a_n R^{-(n+2)} = (n-1)\, a_n R^{-(n+2)}.$$

Pour g'_0 et g'_2, cette équation doit être remplacée par

$$(8\ bis) \qquad g'_0 = \frac{M}{R^2}\left(1 - \frac{2b_0}{R}\right) - \frac{2\omega^2 R}{3} = +\frac{2W_0}{R} - \frac{M}{R^2} - \frac{4\omega^2 R}{3},$$

$$(8\ ter) \qquad g'_2 = -\frac{2b_2 M}{R^3} - \frac{\omega^2 R}{3} + 3a_2 R^{-4} = a_2 R^{-4} - \frac{2\omega^2 R}{3}.$$

Nous nous servirons de ces formules pour montrer comment on peut calculer le relèvement du géoïde, ζ, en fonction de g' (intensité corrigée de la pesanteur).

Soit ρ la densité d'une couche attirante quelconque répandue sur une sphère de rayon R; le potentiel dû à cette couche sera à la surface de la sphère

$$V = \Sigma \alpha_n X_n R^{-(n+1)}$$

et les valeurs de l'attraction, à l'intérieur ou à l'extérieur, seront

$$\Sigma(n+1)\alpha_n X_n R^{-(n+2)}, \quad -\Sigma n\alpha_n X_n R^{-(n+2)},$$

dont la différence

$$\Sigma(2n+1)\alpha_n X_n R^{-(n+2)} = 4\pi\rho.$$

Or

$$\sum \frac{g'_n R X_n}{n-1} = V - \frac{M}{R} - \frac{2\omega^2 R^2 X_2}{3},$$

le développement dans le premier membre commençant par les termes où $n = 2$; car on peut supposer que l'origine a été choisie de telle façon que $a_1 = b_1 = g'_1 = 0$. Nous poserons

$$N = \frac{M}{R} - \frac{2\omega^2 R^2 X_2}{3}$$

et nous écrirons

$$V - N = \sum \frac{2g'_n R X_n}{[(2n+1) - 3]} = \sum \frac{2g'_n R X_n}{2n+1}$$
$$+ 3\sum \frac{2g'_n R X_n}{(2n+1)^2} + 3^2 \sum \frac{2g'_n R X_n}{(2n+1)^3} + \ldots.$$

Soit alors P_0 le potentiel d'une couche répandue sur la sphère et ayant pour densité $g' - g'_0$; soient P_1 le potentiel d'une couche de densité P_0, P_2 celui d'une couche de densité P_1, etc.

Soit, à la surface de la sphère,

$$P_k = \Sigma \beta_n^k X_n,$$

il viendra

$$\frac{(2n+1)\beta_n^k}{R} = 4\pi\beta_n^{k-1}$$

et

$$\frac{(2n+1)\beta_n^0}{R} = 4\pi g'_n.$$

d'où

$$\sum \frac{g'_n R X_n}{2n+1} = \frac{P_0}{4\pi},$$

$$\sum \frac{g'_n R X_n}{(2n+1)^2} = \frac{P_1}{(4\pi)^2 R},$$

$$\sum \frac{g'_n R X_n}{(2n+1)^3} = \frac{P_2}{(4\pi)^3 R^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où

$$V - N = \frac{2R}{3}\left[P_0\left(\frac{3}{4\pi R}\right) + P_1\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^2 + P_2\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^3 + \dots\right]. \tag{9}$$

Cette formule nous permet de déduire des mesures de pendule la valeur de V et, par conséquent, le relèvement du géoïde.

En général, la série (9) converge avec la même rapidité qu'une progression géométrique dont la raison serait $\frac{3}{5}$. La convergence serait donc assez lente, mais on peut l'augmenter en calculant à part les premières harmoniques. Soit, en effet,

$$g' = g'_0 + \sum_{n=2}^{n=p} g'_n X_n + g''.$$

Soient ensuite P''_0 le potentiel dû à une couche de densité g'', P''_1 celui qui est dû à une couche de densité P''_0, etc.; il viendra

$$V - N = \sum_{n=2}^{n=p} \frac{g'_n R X_n}{n-1} + S,$$

où

$$S = \frac{2R}{3}\left[P''_0\left(\frac{3}{4\pi R}\right) + P''_1\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^2 + P''_2\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^3 + \dots\right].$$

La série S converge alors comme une progression dont la raison serait $\frac{3}{2p+3}$.

L'emploi de la série (9) sera surtout avantageux quand on voudra évaluer l'influence d'une perturbation locale de la gravité.

Supposons en effet que, dans une région R_0 assez limitée, la gravité subisse des variations considérables et irrégulières; nous pourrons alors poser

$$g' - g'_0 = g'' + g''',$$

où g'' sera une fonction dont les variations seront petites et lentes dans la région R_0, tandis que la fonction g''' sera nulle ou très petite en dehors de R_0, et prendra au contraire des valeurs considérables et à variations irrégulières dans la région R_0. D'ailleurs, g''' doit être choisi de telle façon que son développement harmonique commence par des fonctions sphériques du second ordre.

Nous représenterons par P''_k et P'''_k des potentiels qui seront formés avec g'' et g''', comme les P_k l'étaient avec $g' - g'_0$, et nous poserons

$$V'' = \frac{2R}{3}\left[P''_0\left(\frac{3}{4\pi R}\right) + P''_1\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^2 + \ldots\right]$$

et

$$V''' = \frac{2R}{3}\left[P'''_0\left(\frac{3}{4\pi R}\right) + P'''_1\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^2 + \ldots\right], \tag{9 bis}$$

d'où

$$V'' + V''' = V - N.$$

Alors V'' représentera ce que serait $V - N$ si la perturbation locale de la gravité n'existait pas, tandis que V''' représentera l'influence de cette perturbation locale.

Voyons quel est le relèvement de géoïde dû à cette perturbation locale.

On a sur la sphère de référence de rayon R

$$W = W_0 - \frac{dW}{dr}\zeta + \frac{1}{2}\frac{d^2W}{dr^2}\zeta^2 + \ldots.$$

Avec le degré d'approximation adopté, nous pouvons négliger les termes en ζ^2, ζ^3, ..., et remplacer $\frac{dW}{dr}$ par g'_0; nous aurons donc

$$W = W_0 + g'_0\zeta.$$

D'autre part,

$$W = V + U = + V'' + V''' + U + N,$$

d'où

$$g'_0\zeta = - W_0 + V'' + U + V''' + N.$$

Nous pouvons alors séparer la partie du relèvement du géoïde qui est indépendante de la perturbation locale, et celle qui est due à l'influence de cette perturbation en posant

$$\zeta = \zeta'' + \zeta''',$$
$$g'_0 \zeta'' = -W_0 + V'' + U + N,$$
$$g'_0 \zeta''' = V'''.$$

Alors

$$\zeta''' = \frac{2R}{3g'_0}\left[P''_0\left(\frac{3}{4\pi R}\right) + P''_1\left(\frac{3}{4\pi R}\right)^2 + \ldots\right]$$

représente la partie du relèvement du géoïde qui est due à l'influence de la perturbation locale.

La série (9 *bis*) converge en général avec une assez grande rapidité; mais nous remplacerons au paragraphe suivant cette série par une intégrale définie dont la discussion est plus facile.

Je voudrais seulement faire deux remarques :

1° Les coefficients g'_1 (qui sont au nombre de trois puisqu'il y a trois fonctions sphériques du premier ordre) doivent être nuls. C'est là une condition à laquelle les observations du pendule doivent satisfaire;

2° M. Faye a remarqué que, si l'on fait subir aux observations du pendule la correction de Faye, en s'abstenant de faire la correction de Bouguer, ces observations se réduisent sensiblement à la valeur théorique. Cette proposition n'est, bien entendu, que grossièrement approchée. Voyons néanmoins quelle conséquence on pourrait en tirer au sujet de la forme du géoïde, si elle était rigoureusement exacte.

La valeur théorique, c'est celle qui résulte de la formule de Clairaut, supposant la Terre formée de couches concentriques en équilibre.

Comme le relèvement du géoïde ζ ne dépend que de la valeur de g', si g' a la même valeur que dans l'hypothèse de Clairaut, ce géoïde aura aussi la même forme que dans cette hypothèse, c'est-à-dire que ce sera rigoureusement un ellipsoïde de révolution.

Je le répète, cette conséquence n'est que grossièrement approchée, si la proposition d'où on l'a déduite n'est elle-même que grossièrement approchée.

IV. Pour aller plus loin, nous allons chercher à donner à la formule (9) une autre forme.

Nous prendrons R pour unité de longueur, afin de simplifier les calculs algébriques, quitte à rétablir à la fin l'homogénéité.

Nous avons alors, pour $r = \mathrm{R}$,

$$\mathrm{V} - \mathrm{N} = \Sigma a_n \mathrm{X}_n = \sum \frac{g'_n \mathrm{X}_n}{n-1},$$

$$g' - g'_0 = \Sigma g'_n \mathrm{X}_n; \qquad \mathrm{P}_0 = 4\pi \sum \frac{g'_n \mathrm{X}_n}{2n+1}.$$

Tous ces développements commencent par des termes du second ordre ($n=2$).

Remarquons maintenant que l'on a

$$\frac{1}{n-1} = \frac{2}{2n+1} + \frac{3}{(2n+1)(n-1)}.$$

Soit alors

$$\Phi(r) = \sum \frac{g'_n r^n \mathrm{X}_n}{n-1},$$

$$\Theta(r) = \sum \frac{g'_n r^n \mathrm{X}_n}{2n+1},$$

$$f(r) = \sum \frac{g'_n r^n \mathrm{X}_n}{(2n+1)(n-1)},$$

de sorte que

$$\Phi(1) = \mathrm{V} - \mathrm{N}, \qquad \mathrm{P}_0 = 4\pi\Theta(1);$$

on aura

$$\Phi(r) = 2\Theta(r) + 3f(r).$$

Or $4\pi\,\Theta(r)$ n'est autre chose que le potentiel d'une couche sphérique ayant pour densité $g' - g'_0$, par rapport à un point intérieur à la sphère dont les coordonnées seront

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

Nous aurons donc

$$4\pi\,\Theta(r) = \int \frac{\mathrm{D}'\,d\omega'}{\rho},$$

où l'intégration est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la sphère, où D' désigne la valeur de la fonction $g' - g'_0$ au centre de gravité de l'élément $d\omega'$, et où ρ désigne la distance de cet élément au point attiré x, y, z.

Soit ψ l'angle sous lequel cette distance est vue de l'origine; on aura

$$\rho = \sqrt{1 - 2r\cos\psi + r^2}.$$

Remarquons maintenant que, le développement harmonique de $g' - g'_0$

commençant par des fonctions sphériques du second ordre, on a, quel que soit le point x, y, z,

$$\int D' d\omega' = \int D' \cos\psi \, d\omega' = 0,$$

Nous pouvons donc écrire

$$4\pi\,\Theta(r) = \int D' F(r, \psi)\, d\omega',$$

avec

$$F(r, \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\psi + r^2}} - 1 - r\cos\psi.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\frac{d}{dr}\frac{f(r)}{r} = \frac{\Theta(r)}{r^2}; \qquad f(r) = r\int_0^r \frac{\Theta(r)\,dr}{r^2},$$

d'où

$$4\pi f(r) = r\iint \frac{D' F(r, \psi)}{r^2}\, d\omega'\, dr,$$

l'intégration devant s'étendre d'une part à tous les éléments $d\omega'$ de la sphère, d'autre part à toutes les valeurs de r depuis 0 jusqu'à r.

Je puis donc écire

$$4\pi f(r) = r\int D' H(r, \psi)\, d\omega',$$

avec

$$H(r, \psi) = \int_0^r \frac{F(r, \psi)}{r^2}\, dr.$$

Nous devons donc calculer l'intégrale $H(r, \psi)$. Pour cela nous poserons

$$r = \frac{2(t + \cos\psi)}{1 - t^2}, \qquad \rho = \frac{1 + 2t\cos\psi + t^2}{1 - t^2},$$

d'où

$$\frac{dr}{\rho} = \frac{2\,dt}{1 - t^2}$$

et

$$F(r, \psi)\frac{dr}{r^2 dt} = \frac{1 - t^2}{2(t + \cos\psi)^2} - \frac{1 + 2t\cos\psi + t^2}{2(t + \cos\psi)^2} - \frac{\cos\psi(1 + 2t\cos\psi + t^2)}{(1 - t^2)(t + \cos\psi)}$$

ou, en décomposant en éléments simples,

$$F(r, \psi)\frac{dr}{r^2 dt} = -1 + \frac{\cos\psi}{t - 1} + \frac{\cos\psi}{t + 1}.$$

L'intégrale indéfinie est donc

$$-t + \cos\psi \log(1 - t^2).$$

Pour avoir $H(1, \psi)$, il faut intégrer depuis $r = 0$, c'est-à-dire $t = -\cos\psi$, ce qui donne

$$\cos\psi(1 + 2\log\sin\psi)$$

jusqu'à $r = 1$; d'où

$$\rho = 2\sin\frac{\psi}{2}, \qquad t = 2\sin\frac{\psi}{2} - 1, \qquad 1 - t^2 = 4\sin\frac{\psi}{2}\left(1 - \sin\frac{\psi}{2}\right),$$

ce qui donne

$$1 - 2\sin\frac{\psi}{2} + \cos\psi\log\left(4\sin\frac{\psi}{2} - 4\sin^2\frac{\psi}{2}\right),$$

d'où

$$H(1, \psi) = 2\sin^2\frac{\psi}{2} - 2\sin\frac{\psi}{2} + \cos\psi\log\frac{\sin\frac{\psi}{2}\left(1 - \sin\frac{\psi}{2}\right)}{\sin^2\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}},$$

ou enfin

$$H(1, \psi) = 2\sin^2\frac{\psi}{2} - 2\sin\frac{\psi}{2} - \cos\psi\log\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right).$$

Si nous remarquons que, pour $r = 1$, on a $\rho = 2\sin\frac{\psi}{2}$, cela peut s'écrire

$$H(1, \psi) = \frac{\rho^2}{2} - \rho - \left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right)\log\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\rho^2}{4}\right).$$

On a ainsi

$$V - N = \Phi(1) = 2\Theta(1) + 3f(1).$$

Or

$$\Theta(1) = \frac{P_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{D'\,d\omega'}{\rho} = \frac{1}{4\pi}\int D'F(1, \psi)\,d\omega',$$

$$f(1) = \frac{1}{4\pi}\int D'H(1, \psi)\,d\omega',$$

d'où

$$V - N = \frac{1}{4\pi}\int D'\,d\omega'[2F(1, \psi) + 3H(1, \psi)].$$

Or

$$F(1, \psi) = \frac{1}{2\sin\frac{\psi}{2}} - 2\cos^2\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\rho} - 2 + \frac{\rho^2}{2}.$$

Si donc nous posons

$$G(\rho) = 2F(1, \psi) + 3H(1, \psi),$$

il vient

$$G(\rho) = \frac{2}{\rho} - 4 - 3\rho + \frac{5\rho^2}{2} - 3\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right)\log\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\rho^2}{4}\right)$$

et nous pouvons écrire finalement

$$V - N = \frac{1}{4\pi}\int D'G(\rho)\,d\omega',$$

ou, en rétablissant l'homogénéité,

$$(1) \qquad V - N = \frac{1}{4\pi R}\int D'G\left(\frac{\rho}{R}\right)d\omega'.$$

En d'autres termes, la partie complémentaire du potentiel d'où dépend le relèvement du géoïde nous sera donnée par le potentiel d'une couche attirante dont la densité est $g' - g'_0$; la loi d'attraction en fonction de la distance ρ étant représentée par la fonction

$$\frac{1}{4\pi R}G\left(\frac{\rho}{R}\right).$$

Nous avons obtenu les formules précédentes en supposant que D' est la valeur de $g' - g'_0$ sur l'élément $d\omega'$. Il en résultait que le développement de D' commençait par des fonctions sphériques du second ordre.

Qu'arriverait-il si, dans l'intégrale

$$\int D'G(\rho)\,d\omega',$$

on remplaçait D' par une fonction dont le développement contiendrait des fonctions sphériques d'ordre 0 ou 1?

Soient D'_0 et D'_1 deux fonctions analogues à D', mais se réduisant, la première à une fonction sphérique d'ordre 0, c'est-à-dire à une constante, la seconde à une fonction sphérique d'ordre 1, c'est-à-dire à une fonction linéaire des coordonnées rectangulaires de l'élément $d\omega'$.

Je dis que

$$\int D'_0\,G\,d\omega' = \int D'_1\,G\,d\omega' = 0.$$

En effet, le développement de

$$F(r, \psi) = \Sigma r^n Y_n,$$

où Y_n représente une fonction sphérique d'ordre n dépendant de ψ, commence par des termes du second ordre ($n = 2$). Il en est de même du développement de

$$rH(r, \psi) = \sum \frac{r^n}{n-1} Y_n.$$

Il vient ensuite

$$G(\rho) = 2F(1, \psi) + 3H(1, \psi) = \sum \frac{2n+1}{n-1} Y_n.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\int D'_0 Y_n d\omega' = \int D'_1 Y_n d\omega' = 0 \qquad (n \geqq 2).$$

Or cela est évident, si D'_0 et D'_1 sont des fonctions d'ordre 0 et 1 et Y_n une fonction sphérique d'ordre supérieur.

Supposons maintenant que l'on étudie l'effet d'une perturbation locale de la gravité limitée à une région R_0. Nous poserons comme au paragraphe précédent

$$g' - g'_0 = g'' + g''',$$

de telle façon que g'' varie régulièrement et lentement dans la région R_0 et que g''' ne prenne de valeurs sensibles qu'à l'intérieur de cette région. Seulement, comme nous ne serons plus forcés de supposer que le développement de g''' commence par des fonctions sphériques du second ordre, nous pourrons admettre que, en dehors de la région R_0, g''' est non seulement très petit, mais nul.

Soient D'_2 et D'_3 les valeurs de g'' et de g''' au centre de gravité de l'élément $d\omega'$; nous poserons :

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} V'' = \dfrac{1}{4\pi R} \displaystyle\int D'_2 G\left(\frac{\rho}{R}\right) d\omega', \\ V''' = \dfrac{1}{4\pi R} \displaystyle\int D'_3 G\left(\frac{\rho}{R}\right) d\omega', \end{cases}$$

d'où

$$V - N = V'' + V'''.$$

La formule (1 *bis*) est l'équivalent de la formule (9 *bis*) du paragraphe précédent.

Nous aurons de même

$$(1\ ter) \qquad \begin{cases} g'_0 \zeta'' = \dfrac{1}{4\pi R} \displaystyle\int D'_2 G\left(\frac{\rho}{R}\right) d\omega' + \frac{M}{R} - W_0 + U, \\ g'_0 \zeta''' = \dfrac{1}{4\pi R} \displaystyle\int D'_3 G\left(\frac{\rho}{R}\right) d\omega', \end{cases}$$

où ζ'' représente ce que serait le relèvement du géoïde sans la perturbation locale, et ζ''' le surcroît de relèvement dû à la perturbation.

C'est la formule (1 *ter*) qu'il convient d'étudier de plus près.

Supposons que la région R_0 soit contenue dans un petit cercle de rayon λ.

L'intégrale du second membre de (1 *ter*) représentera le potentiel d'une couche attirante répandue sur la région R_0 et agissant suivant la loi $G\left(\frac{\rho}{R}\right)$. Mais, en général, l'attraction de cette couche ne sera sensible que dans le voisinage de la région R_0 et principalement dans cette région elle-même. Nous n'avons donc à nous préocuper que des valeurs très petites de ρ; mais si ρ est très petit, le terme prépondérant est le terme en $\frac{1}{\rho}$, qui est très grand, tandis que le terme en $\log\rho$, quoique très grand, est beaucoup plus petit que le premier et tandis que les autres termes sont finis.

Précisons davantage. Soit K la plus grande valeur de g''' et distinguons les trois parties de V''' qui sont dues respectivement :

1° Au terme en $\frac{1}{\rho}$;

2° Au terme en $\log\rho$;

3° Aux autres termes de $G\left(\frac{\rho}{R}\right)$.

Ces trois parties seront respectivement du même ordre de grandeur que

$$\frac{K\lambda}{R},\quad \frac{K\lambda^2}{R^2}\log\frac{\lambda}{R},\quad \frac{K\lambda^2}{R^2}.$$

Comme le rayon λ du cercle qui enveloppe la région R_0 a été supposé très petit, les deux dernières parties seront, en général, tout à fait négligeables, de sorte que l'on aura simplement

$$g'_0\zeta''' = \int \frac{D'_3\,d\omega'}{2\pi\rho}$$

ou, en reprenant les notations du paragraphe précédent,

$$g'_0\zeta''' = \frac{P''_0}{2\pi},$$

c'est-à-dire que la série (9 *bis*) du paragraphe précédent pourra être réduite à son premier terme.

Remarquons que la formule (1 *ter*), étant homogène, peut être employée avec n'importe quelles unités. En effet, D'_3 et g'_0 représentant des quantités de même nature, $\frac{D'_3}{g'_0}$ est un nombre abstrait; il en est de même de G, de sorte que l'intégrale

$$\int \frac{D'_3}{g'_0} G\left(\frac{\rho}{R}\right) d\omega'$$

est le carré d'une longueur et que

$$\zeta''' = \frac{1}{4\pi R}\int \frac{D'_3}{g'_0} G\left(\frac{\rho}{R}\right) d\omega'$$

est une longueur.

V. Cherchons maintenant à faire le calcul en négligeant non plus le carré de l'aplatissement, mais le carré du relèvement du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde, qui est une quantité beaucoup plus petite.

Nous n'aurons pour cela qu'à faire jouer aux fonctions de Lamé le rôle des fonctions sphériques.

Nous adopterons un ellipsoïde de référence qui jouera le rôle de notre sphère de référence de rayon R; et nous nous servirons de cet ellipsoïde pour définir, à la manière ordinaire, un système de coordonnées elliptiques ρ, μ, ν. (Si l'ellipsoïde est de révolution, l'une des variables ν devient illusoire, il convient de la remplacer par la longitude géographique.) On sait que l'on considère un système de fonctions de Lamé que j'appellerai

$$R_i, \quad S_i, \quad M_i, \quad N_i.$$

R_i et S_i sont fonctions de ρ, M_i de μ, N_i de ν. R_i est un polynome en ρ et $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ (si l'on désigne par a, b, c les trois axes de l'ellipsoïde); M_i est formé avec μ et N_i avec ν comme R_i avec ρ.

On sait également que, quand l'ellipsoïde est de révolution, N_i n'est autre chose que le cosinus ou le sinus d'un multiple de la longitude géographique.

Enfin, toute fonction qui satisfait à l'équation de Laplace à l'extérieur de l'ellipsoïde peut se développer en série procédant suivant les produits $S_i M_i N_i$. De même toute fonction qui satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur de l'ellipsoïde peut se développer en série procédant suivant les produits R_i, M_i, N_i.

Je supposerai que l'ellipsoïde de référence a pour équation $\rho = 0$. Je désignerai par R_i^0 et S_i^0 les valeurs de R_i et S_i pour $\rho = 0$; par R'_i et S'_i les dérivées de R_i et S_i par rapport à ρ; par R'^0_i et S'^0_i les valeurs de R'_i et S'_i pour $\rho = 0$.

Je distinguerai :

1° La fonction d'ordre 0 que je désignerai par l'indice 0, R_0, ..., elle se réduit à une constante;

2° Les trois fonctions d'ordre 1 que je désignerai par les indices 1, 2, 3;

3° Celles des cinq fonctions du second ordre qui sont des polynomes en ρ;

elles sont au nombre de deux, et je les désignerai par R_4 et R_5. On a alors à l'extérieur de la planète

$$V = \Sigma a_i S_i M_i N_i.$$

A la surface de l'ellipsoïde de référence on aura

$$U = \Sigma \lambda_i M_i N_i R_i^0.$$

Tous les coefficients λ_i sont nuls, à l'exception de λ_0, λ_4, λ_5 ; ce dernier coefficient est nul lui-même si l'ellipsoïde est de révolution.

Je désignerai par ζ le relèvement du géoïde et par η celui de la surface terrestre au-dessus de l'ellipsoïde de référence, et nous aurons

$$\zeta = \Sigma b_i M_i N_i \qquad \eta = \Sigma c_i M_i N_i.$$

Nous aurons encore (en négligeant le carré de ζ)

$$W = V + U, \qquad g = -\frac{dW}{dn} = -\frac{dV}{dn} - \frac{dU}{dn},$$

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dn} = \frac{d\rho}{dn}\Sigma a_i S'_i M_i N_i,$$

en désignant par $\frac{d}{dn}$ les dérivées estimées suivant la normale.

Quelle sera la valeur de U en dehors de l'ellipsoïde de référence? Nous savons que U est proportionnel à $x^2 + y^2$; nous pourrons donc écrire

$$U = \Sigma \lambda_i M_i N_i R_i + kP,$$

où

$$P = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

s'annule sur l'ellipsoïde de référence et où k est un coefficient constant convenablement choisi.

Examinons d'abord un cas simple, celui où la surface du géoïde se confond avec la surface terrestre et avec l'ellipsoïde de référence ($\eta = \zeta = 0$). Je désignerai par W_0, V_0, g_0 les valeurs de W, V et g qui correspondent à ce cas simple.

Nous aurons, sur l'ellipsoïde de référence,

$$V_0 + U = C.$$

C étant une constante ; d'où

$$\lambda_i R_i^0 + a_i S_i^0 = 0 \qquad (\text{sauf pour } i = 0),$$

ce qui montre que tous les a_i sont nuls, sauf a_0, a_4 et a_5.

Nous désignerons par W_{00}, g_{00}, V_{00} les valeurs de W_0, g_0, V_0 pour $\rho = 0$, de sorte que $W_{00} = C$.

Venons maintenant au cas général.

Nous pouvons avoir avantage à introduire une notation nouvelle en posant

$$\zeta' = \frac{d\rho}{dn}\zeta, \qquad \eta' = \frac{d\rho}{dn}\eta,$$

de telle façon que ζ', par exemple, représente l'accroissement de ρ quand on s'élève verticalement depuis la surface de l'ellipsoïde jusqu'à celle du géoïde.

Nous pouvons poser ai-je dit,

$$g = -\frac{dW}{d\rho}\frac{d\rho}{dn}.$$

En effet, on a

$$g = \sqrt{N^2 + T^2},$$

N étant la composante de la gravité normale aux ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde de référence et T la composante tangentielle.

Cette dernière étant de l'ordre de ζ, on peut prendre

$$g = N = -\frac{dW}{d\rho}\frac{d\rho}{dn}$$

en négligeant ζ^2.

Nous venons de définir V_0, W_0 et g_0; nous poserons, dans le cas général,

$$V = V_0 + \delta V, \qquad g = g_0 + \delta g,$$

d'où

$$W = V + U = W_0 + \delta V.$$

On voit que δV et δg sont de l'ordre de ζ.

En un point de la surface terrestre, on a (en négligeant ζ^2),

$$W_0 = W_{00} + \frac{dW_0}{d\rho}\eta' = C + \frac{dW_0}{d\rho}\eta',$$

$$\frac{dW_0}{d\rho} = -\frac{dn}{d\rho}g_{00} + \frac{d^2W_0}{d\rho^2}\eta',$$

et en un point du géoïde

$$W_0 = C + \frac{dW_0}{d\rho}\zeta',$$

$$\frac{dW_0}{d\rho} = -\frac{dn}{d\rho}g_{00} + \frac{d^2W_0}{d\rho^2}\zeta'.$$

On aura donc, en un point de la surface terrestre,

$$W = C + \frac{dW_0}{d\rho}\eta' + \delta V = C - \frac{dn}{d\rho}g_{00}\eta' + \delta V,$$

$$g = g_{00} - \frac{d\rho}{dn}\frac{d^2W_0}{d\rho^2}\eta' + \delta g$$

et en un point du géoïde

$$W = C - \frac{dn}{d\rho} g_{00} \zeta' + \delta V,$$

$$g = g_{00} - \frac{d\rho}{dn} \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} \zeta' + \delta g.$$

Bien entendu, on pourra, avec l'approximation adoptée, réduire δV et δg à leurs valeurs au point correspondant de l'ellipsoïde.

Comme à la surface de l'ellipsoïde W doit se réduire à la constante C, on aura

$$\frac{dn}{d\rho} g_{00} \zeta' = \delta V$$

ou

$$g_{00} \zeta = \delta V.$$

Supposons maintenant que l'on fasse subir à g la correction de Faye. Nous aurons encore

$$h = \eta - \zeta$$

et la correction de Faye sera ici

$$\left(\frac{d\rho}{dn}\right)^2 \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} h = \frac{d\rho}{dn} \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} (\eta' - \zeta').$$

Après la correction, g devient

$$g' = g_{00} - \frac{d\rho}{dn} \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} \zeta' + \delta g.$$

Remarquons maintenant que

$$\delta g = -\frac{d\rho}{dn} \frac{d\,\delta V}{d\rho},$$

de sorte que nous arrivons finalement à l'équation suivante :

$$g' - g_{00} = -\left(\frac{d\rho}{dn}\right)^2 \frac{1}{g_{00}} \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} \delta V - \frac{d\rho}{dn} \frac{d\,\delta V}{d\rho}. \tag{1}$$

Telle est l'équation d'où il faut tirer δV.

Voyons en passant ce que devient cette équation dans le cas simple traité aux paragraphes précédents, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde de référence se réduit à une sphère.

C'est alors le rayon vecteur r qui joue le rôle de ρ; on a

$$W_0 = \frac{M}{r}, \qquad g_0 = \frac{M}{r^2}, \qquad \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} = \frac{2M}{r^3}; \qquad \frac{d\rho}{dn} = 1.$$

Nous supposerons $R = 1$ et l'on aura alors à la surface de la sphère de référence

$$W_{00} = M, \qquad g_{00} = M; \qquad \frac{d^2 W_0}{d\rho^2} = 2M.$$

L'équation (1) devient

$$g' - g_{00} = -2\delta V - \frac{d\,\delta V}{dr}.$$

Si

$$\delta V = \Sigma\, a_n r^{-(n+1)} X_n,$$

on a pour $r = 1$

$$\frac{d\,\delta V}{dr} = -\Sigma(n+1)a_n X_n.$$

L'équation (1) devient alors

$$g' = g_{00} = \Sigma(n-1)a_n X_n.$$

On retrouve donc bien les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

Revenons à l'équation (1) et voyons quel parti on peut en tirer.

Envisageons le coefficient

$$\frac{d\rho}{dn}\,\frac{1}{g_{00}}\,\frac{d^2 W_0}{d\rho^2};$$

il se réduit à une constante aux quantités près de l'ordre de l'aplatissement; je l'égalerai donc à $C + \alpha F$, C étant une constante, F une fonction de μ et de ν et α un coefficient de l'ordre de l'aplatissement. Notre équation devient ainsi

$$g' - g_{00} = -\frac{d\rho}{dn}(C + \alpha F)\,\delta V - \frac{d\rho}{dn}\,\frac{d\,\delta V}{d\rho}.$$

Pour déterminer δV, et par conséquent ζ' et ζ, je me propose de développer δV suivant les puissances de α, sous la forme

$$\delta V = v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \ldots.$$

Nous aurons alors la série d'équations

$$(2a) \qquad g' - g_{00} = -\frac{d\rho}{dn}\left(C v_0 + \frac{dv_0}{d\rho}\right),$$

$$(2b) \qquad \frac{d\rho}{dn} F v_0 = -\frac{d\rho}{dn}\left(C v_1 + \frac{dv_1}{d\rho}\right),$$

$$(2c) \qquad \frac{d\rho}{dn} F v_1 = -\frac{d\rho}{dn}\left(C v_2 + \frac{dv_2}{d\rho}\right),$$

....

Alors les v_k peuvent se développer de la façon suivante, à l'extérieur de l'ellipsoïde de référence :

$$v_k = \Sigma \alpha_{i,k} S_i M_i N_i.$$

Alors pour intégrer $(2a)$ nous développerons $g' - g_{00}$ sous la forme suivante :

$$g' - g_{00} = \frac{d\rho}{dn} \Sigma g'_i M_i N_i,$$

développement qui est toujours possible d'après un théorème bien connu, et l'équation $(2a)$ nous donnera

$$g'_i = - a_{i0}(CS_i^0 + S_i'^{\,0}),$$

ce qui détermine les coefficients a_{i_0} et, par conséquent, v_0.

Quand v_0 est connu, on connaît le premier membre de $(2b)$; on développera ce premier membre de la même façon que le premier membre de $(2a)$ et l'on se servira de $(2b)$ pour déterminer v_1 comme on s'est servi de $(2a)$ pour déterminer v_0; et ainsi de suite.

Cela suffit pour montrer comment on doit corriger les résultats des paragraphes précédents afin de tenir compte des puissances supérieures de l'aplatissement. Cela montre en même temps que le plus important de ces résultats subsiste; je veux dire que la connaissance de la gravité en tous les lieux du globe suffit pour déterminer la forme du géoïde.