SUR

LA FIGURE DE LA TERRE

Bulletin astronomique, t. 6, p. 49-60 (février 1889).

4. Quand on parcourt la courbe C du point A au point B, a doit croître de o à 1 et, par conséquent, μ doit décroître; on doit donc avoir

$$\frac{d\zeta + (2\eta - 1)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 - \eta - 6} - \frac{d\zeta + (2\eta + 5)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 + 5\eta} - \frac{3\,d\eta}{\zeta} = \frac{d\mu}{\mu} < 0.$$

Si l'on fait, par exemple,

$$d\eta = 0, \qquad d\zeta > 0,$$

cette inégalité est satisfaite.

Il faut alors que la direction de la tangente à la courbe C, *en tenant compte du sens dans lequel cette courbe doit être parcourue*, soit du même côté de la tangente à la courbe de densité qu'une droite verticale parcourue *de bas en haut*.

Pour exprimer ce résultat d'une façon plus nette, faisons la convention suivante : Nous avons vu que la région comprise entre les deux paraboles P et P′ est partagée par la courbe OMQ en deux régions partielles et que chacune des courbes de densité est comprise tout entière dans l'une de ces régions partielles, dont elle ne peut sortir.

Celles de ces courbes de densité qui appartiennent à la région partielle OMQN coupent la droite OQ en un point et un seul.

Si une courbe de densité coupe la droite OQ en M′ et qu'une autre courbe coupe OQ en M″, convenons de dire que la première courbe est plus avancée que la seconde si M' est à droite de M''. De cette façon, une courbe de densité appartenant à la région ONQM sera d'autant plus avancée qu'elle s'éloignera davantage de la parabole P et se rapprochera davantage de la parabole P et de la courbe OMQ.

Cela posé, on voit que, si l'on parcourt la courbe C du point A au point B, cette courbe ira couper nécessairement des courbes de densité de plus en plus avancées si ζ est positif et, au contraire, des courbes de densité de moins en moins avancées si ζ est négatif.

Il résulte de là que la courbe C ira en s'éloignant de la courbe OMQ dès qu'elle sera au-dessous de la droite OQ; elle ne pourra donc franchir cette courbe OMQ, ni sortir de la région OMQN.

En particulier, η est toujours plus petit que 3.

5. Occupons-nous maintenant de la condition relative à la densité à la surface. On peut admettre qu'à la surface on a à peu près

$$\frac{\rho}{D} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\mu = 1, \qquad a = 1$$

et

$$2\zeta + 2\eta^2 + 4\eta - 6 = 0.$$

Si $\eta_1 = 0,543$, on trouve à peu près

$$\zeta = 1,7;$$

le point B devrait donc avoir pour coordonnées

$$\eta = 0,543, \qquad \zeta = 1,7.$$

Si nous considérons maintenant un point du sphéroïde terrestre très voisin de la surface, il pourra arriver, si la densité varie très rapidement dans le voisinage de la surface, que la densité de ce point ne soit pas égale à $\frac{D}{2}$; mais, comme la densité va toujours en croissant de la surface au centre, elle devra être toujours plus grande que $\frac{D}{2}$; on a ainsi

$$\frac{\rho}{D} > \frac{1}{2}, \qquad \mu > 1$$

et

$$2\zeta + 2\eta^2 + 4\eta - 6 < 0, \qquad \zeta < 1,7.$$

La courbe

$$2\zeta + 2\eta^2 + 4\eta - 6 = 0$$

est une parabole que j'appellerai la parabole P″, qui est comprise entre les deux paraboles P et P′ et qui va passer par le point N.

Comme nous connaissons la valeur de l'aplatissement à la surface, nous savons que

$$\eta_1 = 0,543,$$

et nous en concluons que le point B est à l'intersection de la parabole P″ et de la droite $\eta = 0,543$. Mais, si nous ne connaissions pas l'aplatissement, nous saurions seulement que le point B est sur la parabole P″ et sur l'arc EF de cette parabole compris entre le point E, intersection de P″ et de l'axe des ζ, et le point F, intersection de P″ et de la courbe de densité OMQ.

Nous saurions ainsi que η_1 est plus petit que η du point F, ce qui nous donnerait une limite de l'aplatissement. C'est là un résultat bien connu, dû à M. Tisserand.

6. Cherchons maintenant l'équation des courbes en termes finis.

Quand on suppose, comme au paragraphe 3,

$$D = \frac{\lambda}{a^3} + \lambda\mu$$

et que l'on fait $\mu = 1$, l'équation de Clairaut s'écrit

$$\left(\frac{1}{6}a^2\varepsilon'' - \varepsilon\right)\left(\frac{1}{a^3} + 1\right) + (a\varepsilon' + \varepsilon) = 0.$$

On trouve facilement une intégrale particulière de cette équation : c'est

$$\varepsilon = \frac{a^3}{1 + a^3};$$

d'où

$$\eta = 3 - \frac{3a^3}{1 + a^3}, \qquad \zeta = 9(\varepsilon^2 - \varepsilon)$$

ou

$$\zeta = \eta^2 - 3\eta.$$

C'est encore l'équation d'une parabole et cette parabole n'est autre chose que la courbe de densité OMQ; on vérifie aisément qu'elle passe par les points O et Q et que sa tangente au point Q a bien pour coefficient angulaire

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = 3.$$

Une autre intégrale particulière de l'équation de Clairaut est

$$\varepsilon = \frac{a^{-2}}{1 + a^3},$$

d'où, pour l'intégrale générale,

$$\varepsilon = \frac{a^3 + \lambda a^{-2}}{1 + a^3} \qquad (\lambda \text{ constante d'intégration})$$

et, pour l'équation générale des courbes de densité,

$$\left(\frac{\zeta + \eta^2 - \eta - 6}{\zeta + \eta^2 + 5\eta}\right)^5 = \text{const.} \left(\frac{\zeta - \eta^2 - 7\eta - 10}{\zeta - \eta^2 + 3\eta}\right)^3.$$

7. Jusqu'ici nous avons admis que le point A, extrémité de la courbe C, pouvait se trouver en un point quelconque du segment de droite OQ. Cela n'est pas possible, si l'on veut que la densité au centre de la Terre soit finie. Nous avons en effet

$$\log \frac{D\sqrt{1+\eta}}{D_1\sqrt{1+\eta_1}} = -\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{5\eta + \eta^2}{2(1+\eta)} \frac{d\eta}{\zeta} \quad \text{et} \quad \log a = \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\zeta}.$$

Au point A la première de ces intégrales doit être finie et la seconde infinie. Cela ne peut avoir lieu que si, en ce point, le rapport des quantités sous le signe $\int$ est nul, c'est-à-dire si

$$\frac{5\eta + \eta^2}{2(1+\eta)} = 0;$$

d'où

$$\eta = 0.$$

Ainsi, le point A se confond avec le point O et, si l'on supposait que ce point A fût tout autre point de la droite OQ, il faudrait admettre également que la densité au centre est infinie, ce qui ne peut pas être le cas de la nature.

Je dois maintenant expliquer pourquoi je n'ai pas cru devoir laisser complètement de côté les lois de densité, inadmissibles au point de vue physique, qui correspondent à des courbes C se terminant en un point de OQ différent du point O. C'est que, s'il est impossible que la densité suive exactement une de ces lois, elle peut du moins les suivre à très peu près, sauf dans le voisinage immédiat du centre de la Terre. C'est ainsi que G. Darwin a cru pouvoir examiner le cas où la densité est proportionnelle à une certaine puissance négative de a; il admettait évidemment que la densité, après avoir suivi cette loi jusqu'à une très faible distance du centre, suivait ensuite une loi toute différente jusqu'au centre; qu'il y avait ainsi au centre de la Terre une sorte de noyau où la densité variait suivant une loi inconnue, mais trop petit pour que la distribution de la matière à l'intérieur de ce noyau pût influer d'une façon sensible sur l'aplatissement ou sur la précession.

Dans notre mode de représentation, la loi de G. Darwin serait représentée par une courbe C réduite à un point unique, à savoir au point

$$\zeta = 0, \qquad \eta = 0{,}543.$$

Quand donc la courbe C aboutira à un point de OQ autre que O, il restera sous-entendu que cette courbe ne représente qu'approximativement la loi des densités, et que la courbe véritable, après avoir suivi la courbe C jusqu'à un point très voisin de A, s'en détache ensuite et va aboutir au point O, sans jamais s'éloigner sensiblement de la droite OQ.

Une dernière remarque au sujet du mode de représentation adopté.

Si la courbe C coupe la droite OQ en un autre point que le point A (l'intersection se faisant à angle droit comme nous l'avons vu), elle peut représenter une infinité de lois de densité différentes.

Imaginons, en effet, une courbe C partant du point A, confondu ou non avec O, coupant ensuite la droite OQ en un point D et aboutissant enfin au point B, et cherchons ensuite comment varie a quand on parcourt cette courbe. Au point A, a est nul; quand on parcourt l'arc AD, a va en croissant, et tend vers une certaine limite a_0 quand on se rapproche indéfiniment de D. Au point D, on a $\eta = \eta_0$, $\zeta = 0$; si l'on suppose que l'on stationne quelque temps en ce point, on aura pour l'accroissement de $\log a$, pendant la durée de ce stationnement,

$$\int \frac{d\eta}{\zeta}.$$

$d\eta$ est nul, parce que η ne varie pas pendant le stationnement; ζ est nul : donc l'intégrale est indéterminée, de sorte que, quand on quitte de nouveau le point D, la valeur de a peut ne plus être égale à a_0 et être devenue a_1. Quand ensuite on parcourra l'arc DB, on croîtra de a_1 à 1.

Le rapport de a_1 à a_0 est indéterminé.

Il est aisé de voir que, pour les valeurs de a comprises entre a_0 et a_1, la densité varie en raison inverse d'une certaine puissance de la distance.

Il peut arriver, en particulier, que le point A se confonde avec le point D : dans ce cas, a_0 est nul.

8. M. Radau a démontré l'identité suivante :

$$\sqrt{1+\eta_1} = \int_0^1 \frac{D}{D_1} da^5 \frac{1+\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}},$$

d'où il est permis de conclure, puisque $\frac{D}{D_1}$ est essentiellement positif,

$$\sqrt{1+\eta_1} = \frac{1+\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}} \int_0^1 \frac{D}{D_1} da^5,$$

ξ étant l'une des valeurs que peut prendre η quand a varie de 0 à 1. Comme η reste toujours compris entre 0 et 3, ainsi que nous l'avons vu plus haut, il y a lieu de chercher comment varie la fraction

$$\frac{1+\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}}$$

quand ξ varie de 0 à 3.

On trouve que la dérivée de cette expression ne s'annule que pour $\xi = 0$ et pour $\xi = \frac{1}{3}$.

Nous sommes donc conduits à substituer dans l'expression les valeurs

$$0, \quad \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 3,$$

ce qui nous donne

$$1, \quad 1,0008 \quad \text{et} \quad 0,8.$$

On voit de plus que l'expression devient égale à 1 pour

$$\xi = 5 - \sqrt{20} = 0,53.$$

Ainsi, ξ variant de 0 à $\frac{1}{3}$, l'expression croît de 1 à 1,0008; ξ variant de $\frac{1}{3}$ à 0,53, l'expression décroît de 1,0008 à 1; ξ variant de 0,53 à 3, elle décroît encore de 1 à 0,8.

On a donc

$$\sqrt{1+\eta_1} < 1,0008 \int_0^1 \frac{D}{D_1} da^5.$$

Les observations de la précession exigeraient

$$\sqrt{1+\eta_1} = 1,018 \int_0^1 \frac{D}{D_1} da^5.$$

Il est donc impossible d'y satisfaire.

9. Ayant ainsi reconnu l'impossibilité de satisfaire exactement aux observations, nous devons maintenant, par le calcul des variations, chercher quelle est la loi des densités qui y satisfait le mieux. Je dois ajouter toutefois que cela n'a guère qu'un intérêt de curiosité, car un grand nombre de lois très différentes y satisfont presque également bien, et celle qui y satisfait le mieux n'est pas pour cela sensiblement plus probable que les autres.

Il faut chercher la variation de l'intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{D}\, da^5.$$

A cet effet nous allons poser

$$\mathrm{D}\sqrt{1+\eta} = e^u,$$

d'où

$$u' + \frac{5\eta + \eta^2}{2a(1+\eta)} = 0 \tag{1}$$

et, d'autre part,

$$\delta\int_0^1 \mathrm{D}\, da^5 = \delta\int_0^1 \frac{e^u\, da^5}{\sqrt{1+\eta}} = \int_0^1 \left[\delta u \frac{e^u}{\sqrt{1+\eta}} - \frac{1}{2}\delta\eta \frac{e^u}{(1+\eta)^{\frac{3}{2}}}\right] da^5 = 0. \tag{2}$$

On trouve en outre, en différentiant l'équation (1),

$$2a\,\delta u' + \delta\eta \frac{\eta^2 + 2\eta + 5}{(1+\eta)^2} = 0,$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\, da^5\, \delta\eta (1+\eta)^{-\frac{3}{2}} = \int e^u a \frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta^2 + 2\eta + 2}\, \delta u'\, da^5. \tag{3}$$

L'intégration par parties montre ensuite que le second membre de l'égalité (3) se réduit à

$$\left(e^u a \frac{\sqrt{1+\eta}\,\delta u}{\eta^2 + 2\eta + 5}\right)_0^1$$
$$-\int_0^1 e^u \delta u\, da^5 \left[a u' \frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta^2 + 2\eta + 5} + 5\frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta^2 + 2\eta + 5} + a\eta' \frac{3\eta^2 + 6\eta - 1}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2 + 2\eta + 5)^2}\right].$$

Le terme tout connu s'annule aux deux limites; en effet, il contient a en facteur, il s'annule donc pour $a = 0$; de plus, pour $a = 1$, δu est nul; car la valeur de u pour $a = 1$, qui est $\log\left(\mathrm{D}_1\sqrt{1+\eta_1}\right)$, est une donnée de la question.

Si l'on observe ensuite que

$$a u' + 5 = \frac{10 + 5\eta - \eta^2}{2(1+\eta)}, \qquad a\eta' = \xi,$$

on verra que le second membre de (3) se réduit simplement à

$$-\int_0^1 e^u \delta u da^5 \left[\frac{10+5\eta-\eta^2}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)} + \zeta \frac{3\eta^2+6\eta-1}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)^2} \right],$$

de sorte que l'équation (2) se réduit à

$$\int_0^1 \frac{e^u \delta u da^5}{2\sqrt{1+\eta}} \left[2 - \frac{10+5\eta-\eta^2}{\eta^2+2\eta+5} - \zeta \frac{3\eta^2+6\eta-1}{(\eta^2+2\eta+5)^2} \right] = 0$$

ou

$$\int_0^1 \frac{e^u \delta u da^5}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)} \left(3\eta^2 - \eta - \zeta \frac{3\eta^2+6\eta-1}{\eta^2+2\eta+5} \right) = 0.$$

Si l'on veut que cette équation soit satisfaite quel que soit δu, il faut que l'on ait

$$\zeta = \frac{(3\eta^2-\eta)(\eta^2+2\eta-5)}{3\eta^2+6\eta-1}.$$

C'est là l'équation d'une certaine courbe que j'appellerai la courbe K.

Les valeurs remarquables de η entre $\eta = 0$ et $\eta = 3$ sont les suivantes :

$$\eta = \frac{1}{3}, \qquad \eta = \frac{\sqrt{12}-3}{3} = 0,155.$$

Pour $\eta = 0$, on a........................ $\zeta = 0$, $\dfrac{d\zeta}{d\eta} = 5$

Pour $0 < \eta < 0,155$, on a.................. $\zeta > 0$

Pour $\eta = 0,155$, on a...................... $\zeta = \infty$

Pour $0,155 < \eta < \frac{1}{3}$, on a................ $\zeta < 0$

Pour $\eta = \frac{1}{3}$, on a........................ $\zeta = 0$

Pour $\eta > \frac{1}{3}$, on a........................ $\zeta > 0$

Ainsi la courbe K, qui possède une asymptote verticale

$$\eta = 0,155,$$

coupe la droite OQ en deux points, à savoir au point o et au point $\eta = \frac{1}{3}$. Il est aisé de voir quelle est la portion de cette courbe qui convient à la question ; c'est l'arc compris entre le point A, qui a pour coordonnées

$$\eta = \frac{1}{3}, \qquad \zeta = 0,$$

et le point B, qui a pour coordonnées

$$\eta = 0,543, \qquad \zeta = 0,8.$$

Calculons ensuite D et ρ; on trouve

$$\log D\sqrt{1+\eta} = \text{const.} - \int \frac{(5\eta+\eta^2)(3\eta^2+6\eta-1)\,d\eta}{2(1+\eta)(3\eta^2-\eta)(\eta^2+2\eta+5)}.$$

Lorsqu'on parcourra la courbe K du point A au point B, la quantité sous le signe $\int$ restera essentiellement positive; donc $D\sqrt{1+\eta}$ ira en décroissant et, comme $\sqrt{1+\eta}$ est croissant, D sera décroissant.

L'équation de Clairaut nous donne ensuite

$$\frac{\rho}{D} = \frac{6+\eta-\eta^2-\zeta}{6(1+\eta)} = \frac{-6\eta^4-8\eta^3+12\eta^2+40\eta-6}{6(1+\eta)(3\eta^2+6\eta-1)}$$

ou

$$\frac{\rho}{D} = \frac{-2\eta^2+\frac{4}{3}\eta+\frac{2}{3}}{6(1+\eta)} + \frac{37\frac{1}{3}\eta-5\frac{1}{3}}{6(1+\eta)(3\eta^2+6\eta-1)}.$$

Dans la première fraction, le numérateur décroît et est positif, le dénominateur croît : donc la fraction décroît; il nous reste à examiner la seconde fraction. La dérivée logarithmique de cette seconde fraction s'écrit

$$\frac{37\frac{1}{3}}{37\frac{1}{3}\eta-5\frac{1}{3}} - \frac{6(\eta+1)}{3\eta^2+6\eta-1} - \frac{1}{1+\eta}$$

ou

$$\frac{-112\eta^2+32\eta-5\frac{1}{3}}{\left(37\frac{1}{3}\eta-5\frac{1}{3}\right)(3\eta^2+6\eta-1)} - \frac{1}{1+\eta}.$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que cette dérivée logarithmique est négative et, par conséquent, que $\frac{\rho}{D}$ décroît et que ρ *est décroissant*, ce qui est la condition pour qu'une loi des densités soit admissible.

La courbe K, *ou plutôt la portion de cette courbe comprise entre les points* A *et* B, *représente donc une loi des densités admissible, et cette loi est celle qui correspond au minimum de la quantité que l'on a coutume d'appeler* I *et qui est définie par l'égalité*

$$\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{D}{D_1}\,da^5 = 1 - \frac{1}{I}.$$

10. Il peut être intéressant de rechercher quelle est la loi qui répond au maximum de cette même quantité I; l'existence de ce maximum est certaine, puisque M. Tisserand a démontré (*Bull. astron.*, t. 1, p. 419) l'inégalité

$$1 < 2,0288.$$

Cependant, le calcul des variations ne nous donne aucun maximum; il n'y a qu'une loi des densités pour laquelle la variation δI est nulle, c'est celle qui correspond au minimum dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent.

Nous devons donc conclure que I n'aurait pas de maximum si la loi des densités était complètement arbitraire, et que si I est limité, c'est parce que la densité est assujettie à être décroissante.

Pour qu'il y ait maximum, il faut que, quelle que soit la variation $\delta\rho$ de la densité, la variation δI ne soit jamais positive. Or, si $\delta\rho$ était entièrement arbitraire, cela ne pourrait avoir lieu que si δI était toujours nulle, et nous venons de voir que cette hypothèse conduisait à une solution inadmissible.

S'il y a maximum, c'est donc que $\delta\rho$ n'est pas entièrement arbitraire; comment cela peut-il se faire ? Si ρ était constamment décroissant et qu'on donnât à $\delta\rho$ des valeurs suffisamment petites mais d'ailleurs arbitraires, $\rho + \delta\rho$ serait encore décroissant, de sorte que ces valeurs de $\delta\rho$ seraient admissibles. Ainsi $\delta\rho$ est arbitraire, à moins que ρ ne soit constant; si, au contraire, ρ est constant, $\delta\rho$ doit être décroissant et n'est plus arbitraire.

Le maximum de I correspond donc à une courbe de densité. Il ne reste plus qu'à comparer entre elles les différentes courbes de densité. Comme l'équation générale de ces courbes ne contient qu'un seul paramètre arbitraire, I n'est plus fonction que de ce paramètre. Alors I atteindra son maximum soit lorsque sa dérivée par rapport à ce paramètre s'annulera, soit quand la courbe de densité se réduira à une des courbes extrêmes qui correspondent aux cas de $\mu = 0$ ou $\mu = \infty$.

On vérifierait que la première doit être rejetée; parmi les trois courbes extrêmes ($\mu = 0$, $\mu = \infty$) qui sont les trois paraboles

$$\zeta = -\eta^2 - 5\eta, \qquad \zeta = -\eta^2 + \eta + 6, \qquad \zeta = \eta^2 - 3\eta,$$

la dernière est seule admissible.

Elle correspond au cas suivant :

La densité du globe est constante et égale à $\lambda\mu$; de plus, un point matériel de masse finie égale à $\frac{4}{3}\pi\lambda$ se trouve au centre de la Terre; on a alors

$$\rho = \lambda\mu, \qquad D = \lambda\left(\frac{1}{a^3} + \mu\right),$$

et l'on trouve

$$\eta = 3 - \frac{3a^3}{\frac{1}{\mu} + a^3};$$

on a à la surface

$$\eta_1 = \frac{3}{\mu + 1}, \qquad D_1 = \lambda(\mu + 1).$$

D'ailleurs, d'après la définition de I, il vient

$$I = \frac{\frac{1}{3}D_1}{\frac{1}{5}\rho} = \frac{5}{3}\,\frac{\mu + 1}{\mu} = \frac{5}{3 - \eta_1}.$$

Mais on sait que

$$\eta_1 = \frac{5\varphi}{2\varepsilon_1} - 2,$$

ce qui donne

$$I = \frac{1}{1 - \frac{\varphi}{2\varepsilon_1}} = 2,0288$$

Le maximum de I est donc précisément la limite supérieure trouvée par M. Tisserand. Cette limite peut être atteinte ou plutôt on peut en approcher autant que l'on veut.

11. L'analyse qui précède est celle par laquelle j'avais été conduit aux conclusions énoncées dans une Note récemment insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Depuis, M. Callandreau a montré (*Bull. astron.*, t. 5, p. 473) que le résultat le plus important, c'est-à-dire l'inégalité $\eta < 3$, peut être déduit presque immédiatement des équations de Clairaut. J'ai cru néanmoins devoir reproduire mon analyse primitive, parce qu'elle me conduit à d'autres inégalités importantes et qu'elle me fait connaître entre autres le système complet des inégalités auxquelles satisfont les quantités η et ζ. Les mêmes principes pourraient d'ailleurs, comme je me réserve de le faire voir plus tard, conduire au système complet des inégalités auxquelles satisfont les quantités η, ζ, ε, a, ρ et D.