SUR

LA FIGURE DE LA TERRE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 107, p. 67-71 (9 juillet 1888).

Est-il possible de trouver une loi de la variation de la densité à l'intérieur de la Terre qui satisfasse à la fois :

1° A l'équation de Clairaut;

2° A la valeur observée $\frac{1}{293}$ de l'aplatissement;

3° A la valeur observée 305,6 de la constante de la précession ?

Depuis quelque temps déjà, les géomètres considèrent comme vraisemblable que cela est impossible; si, en effet, on admet que la compressibilité diminue rapidement quand la pression augmente, M. Callandreau a montré que l'on a

$$\frac{d^2\rho}{da^2} < 0, \qquad \frac{d\eta}{da} > 0,$$

et, si η est croissant, M. Radau a démontré qu'il doit y avoir entre l'aplatissement et la constante de la précession une relation à laquelle les valeurs observées ne satisfont pas.

Quelques doutes pouvaient subsister cependant; pour établir cette relation, M. Radau est obligé de supposer que la quantité qu'il a appelée η est comprise entre 0 et 0,54. Son résultat subsiste-t-il encore quand on s'affranchit de cette hypothèse ?

Cette Note a pour but de montrer que le théorème de M. Radau est encore vrai, sans qu'on ait à faire aucune hypothèse.

Rappelons d'abord les notations habituellement employées.

Nous appelons ε l'ellipticité d'une couche sphéroïdale quelconque; a le rayon de cette couche, celui du globe entier étant pris pour unité; ρ la densité de cette couche; D la densité moyenne du sphéroïde limité extérieurement par cette couche;

$$\eta = \frac{a}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{da}, \qquad \zeta = a\frac{d\eta}{da};$$

D_1, ε_1 et η_1 les valeurs de D, ε et η à la surface.

L'équation de Clairaut s'écrit

$$\left(\frac{1}{6}a^2\varepsilon'' - \varepsilon\right)D + (a\varepsilon' + \varepsilon)\rho = 0,$$

ou bien encore

$$(1) \qquad (\zeta + \eta^2 - \eta - 6)\left(\frac{D}{\rho} - 1\right) + (\zeta + \eta^2 + 5\eta) = 0.$$

De plus, on doit avoir à la surface

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{293}, \qquad \eta_1 = 0,543.$$

Enfin, les observations de la précession nous donnent

$$\frac{2}{5}\int\frac{D}{D_1}da^5 = 1 - \frac{1}{I}, \qquad I = 1,955.$$

Si la densité est constamment décroissante, on a

$$\frac{d\rho}{da} < 0, \qquad \rho < D, \qquad \frac{D}{\rho} - 1 > 0,$$

et l'équation (1) donne alors

$$(\zeta + \eta^2 - \eta - 6)(\zeta + \eta^2 + 5\eta) < 0.$$

Comme l'aplatissement va constamment en croissant, on a

$$\eta > 0,$$

de sorte que l'inégalité précédente se décompose en deux :

$$(2) \qquad \zeta + \eta^2 + 5\eta > 0, \qquad \zeta + \eta^2 - \eta - 6 < 0.$$

Je vais me proposer maintenant de démontrer qu'on a *constamment*

$$\eta < 3.$$

En différentiant l'équation (1), on trouve

$$\frac{d\zeta + (2\eta - 1)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 - \eta - 6} - \frac{d\zeta + (2\eta + 5)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 + 5\eta} - \frac{3\,d\eta}{\zeta} = \frac{D\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1 - \frac{D}{\rho}}.$$

Lorsque a est croissant, $\frac{1}{\rho}$ est aussi croissant, ce qui entraîne l'inégalité

$$(3)\qquad \frac{d\zeta + (2\eta - 1)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 - \eta - 6} - \frac{d\zeta + (2\eta + 5)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 + 5\eta} - \frac{3\,d\eta}{\zeta} < 0.$$

Posons

$$F = \left(\frac{\zeta + \eta^2 - \eta - 6}{\zeta + \eta^2 + 5\eta}\right)^5 \left(\frac{\zeta - \eta^2 + 3\eta}{\zeta - \eta^2 - 7\eta - 10}\right)^3.$$

Le premier membre de l'inégalité (3) pourra s'écrire

$$-\frac{1}{20}\,\frac{dF(\zeta - \eta^2 + 3\eta)(\zeta - \eta^2 - 7\eta - 10)}{F\zeta(\eta + 1)^2}.$$

Les inégalités (2) entraînent la suivante :

$$\zeta - \eta^2 - 7\eta - 10 < 0,$$

de sorte que l'inégalité (3) peut s'écrire

$$(4)\qquad \frac{dF}{F}\,\frac{\zeta - \eta^2 + 3\eta}{\zeta} < 0.$$

Pour les valeurs très petites de a, ζ et η sont très petits et tous deux positifs; par conséquent, F est positif. Je dis que, quand on fera croître a, F restera toujours positif.

En effet, en vertu des inégalités (2), F est de même signe que $\zeta - \eta^2 + 3\eta$. Donc, pour les petites valeurs de a, F et $\zeta - \eta^2 + 3\eta$ sont tous deux positifs. Pour que ces deux fonctions pussent devenir toutes deux négatives, il faudrait d'abord qu'elles fussent toutes deux positives, décroissantes et très voisines de zéro.

Mais, si l'on suppose

$$F > 0, \qquad \zeta - \eta^2 + 3\eta > 0, \qquad dF < 0,$$

l'inégalité (4) nous donne

$$\zeta > 0,$$

ce qui est incompatible avec les inégalités (2) et la supposition que $\zeta - \eta^2 + 3\eta$ est très voisin de zéro.

Nous avons donc toujours

$$\zeta - \eta^2 + 3\eta > 0.$$

En résumé, les deux quantités η et ζ doivent satisfaire aux inégalités suivantes :

$$\eta > 0, \quad \zeta + \eta^2 - \eta - 6 < 0, \quad \zeta - \eta^2 + 3\eta > 0,$$

et ces inégalités sont les seules auxquelles elles doivent satisfaire.

Il est aisé d'en déduire

$$\eta < 3.$$

On sait que Clairaut avait déjà démontré, *mais seulement pour la valeur de η à la surface*, l'inégalité

$$\eta_1 < 3.$$

Cela posé, reprenons le raisonnement de M. Radau. Ce savant établit, par un calcul ingénieux, l'identité suivante :

$$\sqrt{1+\eta_1} = \int \frac{D}{D_1} da^5 \frac{1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}};$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{1+\eta_1} = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{1,955}\right)\left(\frac{1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}}\right),$$

ξ étant une des valeurs que peut prendre η, quand a varie de 0 à 1.

L'observation donne

$$\sqrt{1+\eta_1} = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{1,987}\right),$$

d'où l'on déduirait

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}} = \frac{1 - \frac{1}{1,987}}{1 - \frac{1}{1,955}} = 1,018. \tag{5}$$

Or, quand a varie de 0 à 1, η reste compris entre 0 et 3; il en est donc de même de ξ, ce qui entraîne l'inégalité

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}} < \frac{1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{90}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} < 1,0008.$$

L'équation (5) est donc impossible.

En résumé, *aucune hypothèse sur la loi des densités ne peut satisfaire aux observations*.

Je m'abstiens de toute tentative d'interprétation de ce résultat et je ne recherche pas si l'on doit, pour expliquer cette anomalie, reprendre la discussion des observations, ou supposer, avec quelques géologues, un mouvement relatif du noyau fluide interne par rapport à l'écorce solide; ou, enfin, si la petite différence, entre l'aplatissement observé et l'aplatissement calculé, est due simplement aux irrégularités de la surface et à celles qui, selon les idées de M. Faye, existeraient dans la distribution des matières solides et liquides à l'intérieur du globe.

Dans les hypothèses envisagées par M. Radau, et où

$$0 < \eta < \eta_1,$$

la valeur de I reste sensiblement constante et égale à 1,987. Dans le cas plus général où je me suis placé, I peut prendre d'autres valeurs, mais il reste toujours plus grand que 1,987; j'ajoute qu'il est toujours plus petit que 2,04. On voit que les limites entre lesquelles peut varier I sont encore très rapprochées.