SUR

LA THÉORIE DE LA PRÉCESSION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 132, p. 50-55 (14 janvier 1901).

Stockwell a cherché à déterminer les variations séculaires de l'équateur terrestre qui sont la conséquence des variations séculaires de l'écliptique.

Mais, récemment, M. Backlund (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, mai 1900) a repris ces calculs par la méthode de Gyldén et est arrivé à des résultats entièrement différents. C'est ainsi que le coefficient d'une de ces inégalités serait, d'après Stockwell, 20438″ et d'après notre éminent correspondant 5681″.

Le principe de la méthode employée par M. Backlund consiste à ne pas supprimer tout de suite dans ses équations les termes à courte période qui produisent la nutation; dans les équations qu'on obtient après quelques transformations figurent certains coefficients périodiques qui dépendent de ces termes; et pour l'intégration, au lieu de supprimer purement et simplement ces coefficients périodiques comme on le fait d'ordinaire, M. Backlund en conserve la partie constante, qu'il appelle ν_0^2 et μ_0^2.

Pour apprécier la légitimité de cette analyse, il suffira d'étudier l'équation simple

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = a\sin(nt + v) + b\sin pt, \tag{1}$$

considérée par M. Backlund (p. 397). Nous supposerons que a et n sont très petits, mais que b et p soient beaucoup plus petits et cela de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit notablement plus grand que $\frac{a}{n^2}$, et que p^2 soit du même ordre de grandeur que $\frac{a^2}{n^2}$.

Le premier terme du second membre de (1) est alors un terme à courte période et le second un terme séculaire. Les équations de la précession peuvent être ramenées à cette forme, avec cette différence qu'il y a un grand nombre de termes à courte période et un grand nombre de termes séculaires.

Soit alors

$$\frac{d^2 v_0}{dt^2} = a \sin(nt + v_0), \tag{1 bis}$$

une équation analogue à (1), mais où l'on a fait $b = 0$, et posons

$$v = v_0 + \varepsilon.$$

Nous aurons alors en négligeant ε^2

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon \cos(nt + v_0) + b \sin pt. \tag{2}$$

Si l'on appliquait la méthode de Stockwell, on négligerait le premier terme et l'on trouverait

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = b \sin pt, \qquad \varepsilon = -\frac{b}{p^2} \sin pt.$$

M. Backlund trouve d'abord en première approximation

$$v_0 = -\frac{a}{n^2} \sin nt,$$

d'où

$$\cos(nt + v_0) = \cos nt + \frac{a}{n^2} \sin^2 nt.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \varepsilon \left(a \cos nt + \frac{a^2}{n^2} \sin^2 nt \right) + b \sin pt,$$

ou, en conservant la valeur moyenne du coefficient de ε,

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \frac{a^2}{2n^2} \varepsilon + b \sin pt,$$

d'où

$$\varepsilon = -\frac{b \sin pt}{\frac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

Telles sont les deux analyses entre lesquelles il s'agit de décider; la chose est d'autant plus facile que les équations (1 *bis*) et (2) peuvent s'intégrer rigoureusement.

Posons, en effet,

$$nt + \nu_0 = 2W,$$

l'équation (1 *bis*) devient

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = a \sin W \cos W,$$

d'où

$$\frac{dW}{dt} = i\sqrt{p(u) - e_1}, \qquad \sin W = \frac{i}{\sqrt{a}}\sqrt{p(u) - e_2}, \qquad \cos W = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{p(u) - e_2},$$

$$e_2 - e_3 = a, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$\cos(nt + \nu_0) = \frac{1}{a}[2p(u) + e_1],$$

où $p(u)$ est la fonction doublement périodique de Weierstrass et où u est égal à t plus une constante imaginaire.

L'équation (2), qui peut alors s'écrire

$$\text{(2 bis)} \qquad \frac{d^2 \varepsilon}{du^2} = \varepsilon[2p(u) + e_1] + b \sin pt,$$

a ses coefficients périodiques.

Nous sommes ainsi amenés à envisager des équations linéaires à second membre de la forme

$$\text{(3)} \qquad \varepsilon'' - \varphi\varepsilon = X,$$

où φ est périodique en t (et où je désigne les dérivées par des lettres accentuées). D'après un théorème bien connu, l'équation sans second membre

$$\varepsilon'' - \varphi\varepsilon = 0$$

admettra deux intégrales de la forme suivante :

$$\varepsilon_1 = e^{\alpha t}\psi_1, \qquad \varepsilon_2 = e^{-\alpha t}\psi_2,$$

ψ_1 et ψ_2 étant périodiques. Je puis toujours supposer que l'on a

$$\text{(4)} \qquad \varepsilon'_1 \varepsilon_2 - \varepsilon'_2 \varepsilon_1 = 1,$$

et l'on trouve alors, pour l'intégrale de l'équation (3),

$$\text{(5)} \qquad \varepsilon = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2,$$

avec

$$\beta_1 = \int X \varepsilon_2 \, dt, \qquad \beta_2 = -\int X \varepsilon_1 \, dt.$$

Nous pouvons d'ailleurs traiter séparément chacun des termes de X; prenons alors

$$X = e^{ipt}.$$

Soit (en supposant que l'unité de temps ait été choisie de telle façon que la période de la fonction φ soit égale à 2π)

$$\psi_1 = \Sigma a_k e^{ikt}, \qquad \psi_2 = \Sigma c_k e^{ikt}.$$

Dans les intégrales β_1 et β_2, les seuls termes sensibles sont ceux qui contiendront un petit diviseur (en considérant p et α comme très petits). Ces termes sont

$$\beta_1 = \frac{c_0 e^{(-\alpha+ip)t}}{-\alpha+ip}, \qquad \beta_2 = \frac{a_0 e^{(\alpha+ip)t}}{\alpha+ip}.$$

Si l'on ne conserve dans β_1 et β_2 que ces termes à petit diviseur, le terme en e^{ipt} dans ε sera, d'après la formule (5),

$$\frac{-2a_0c_0\alpha e^{ipt}}{\alpha^2+p^2}.$$

Dans le cas où la fonction φ est petite (ce qui arrive ici, puisque le facteur a est petit), les termes a_0 et c_0 sont notablement plus importants que les autres termes de ψ_1 et ψ_2; de tous les termes de ε, le plus important est le terme en e^{ipt} que je viens d'écrire; enfin, à cause de la relation (4), on a sensiblement

$$2a_0c_0\alpha = 1,$$

de sorte qu'il reste sensiblement

(6) $$\varepsilon = \frac{-e^{ipt}}{\alpha^2+p^2}.$$

Dans le cas où α s'annule, il y a une dégénérescence et l'intégrale générale de l'équation sans second membre serait de la forme

$$\varepsilon = \gamma_1\psi_1 + \gamma_2(t\psi_1 + \zeta),$$

ζ étant périodique comme ψ_1, tandis que les γ sont les constantes d'intégration. Mais à la limite, la formule (6) subsiste.

Comparons maintenant cette formule (6) avec celles de Stockwell et de Backlund. Nous voyons que, pour obtenir celle de Stockwell, il faut faire $\alpha = 0$, et pour obtenir celle de Backlund,

$$\alpha = \frac{a}{n\sqrt{2}}.$$

Or, quelle est la véritable valeur de α ? On le voit tout de suite : l'équation (2 *bis*), quand on y supprime le second membre, admet pour intégrale

$$\varepsilon_1 = \sqrt{p(u) - e_1},$$

qui est une fonction périodique. Donc α est nul; donc c'est Stockwell qui a raison.

Il faut attribuer aux inégalités en question les coefficients de Stockwell, dont quelques-uns sont quatre fois plus forts que ceux de Backlund.

La critique qui précède ne saurait, en aucune façon, s'adresser à notre savant correspondant, puisqu'il n'a fait qu'appliquer une méthode classique que tout le monde croyait correcte.

Mais c'est là une raison de plus pour que j'aie cru devoir mettre en évidence le vice fondamental de la méthode de Gyldén, dont on pourrait être tenté de faire d'autres applications.

Il est singulier que Gyldén soit tombé dans cette erreur, puisqu'il avait lui-même intégré les équations (1 *bis*) et (2).