SUR

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

ET

LE DÉVELOPPEMENT

DE LA

FONCTION PERTURBATRICE

Journal de Mathématiques, 5e série, t. 3, p. 203-276 (1897).

Introduction.

Soient u et u' les anomalies excentriques de deux astres et D leur distance. Le carré D^2 est un polynome entier par rapport aux lignes trigonométriques de u et de u'.

La partie principale de la fonction perturbatrice est précisément $\frac{1}{D}$. Elle peut se développer soit suivant les cosinus et sinus des anomalies moyennes, soit suivant ceux des anomalies excentriques.

Le premier développement est le plus employé et le plus utile; néanmoins il peut y avoir quelque intérêt à étudier les propriétés du second pour plusieurs raisons :

1° Quand les deux excentricités sont nulles, les deux développements se confondent, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison;

2° Hansen s'est servi de développements procédant suivant l'anomalie moyenne d'une des planètes et l'anomalie excentrique de l'autre;

3° Enfin la connaissance des propriétés du second développement, qui sont plus simples, peut nous guider dans l'étude du premier développement.

Quoi qu'il en soit, le carré D^2 est un polynome du second degré par rapport à $\cos u$, $\sin u$, $\cos u'$, $\sin u'$.

Si nous posons

$$e^{iu} = x, \qquad e^{iu'} = y.$$

D^2 sera un polynome du deuxième degré èn x, $\frac{1}{x}$, y, $\frac{1}{y}$ et $x^2y^2D^2$ sera un polynome entier en x, y, soit

$$x^2y^2D^2 = F(x, y), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{D} = \frac{xy}{\sqrt{F}}.$$

Nous sommes donc conduits à développer $\frac{1}{\sqrt{F}}$ suivant les puissances positives et négatives de x et de y.

Je traiterai la question pour un polynome F quelconque. Pour que le développement soit possible et valable pour

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1,$$

il faut d'abord que F ne s'annule pour aucun des systèmes de valeurs de x et de y dont le module est égal à 1.

Sans cela, l'expression $\frac{1}{\sqrt{F}}$ devenant infini ne pourrait plus être développée par la formule de Fourier.

Il faut ensuite que le radical $\sqrt{F}$ revienne à sa valeur primitive quand l'argument de x augmente de 2π, de telle façon que la variable x décrive la circonférence tout entière du cercle $|x| = 1$.

Regardons y comme une constante; le polynome F, considéré alors comme fonction de x seulement, a un certain nombre de zéros. Il faut que le nombre de ces zéros, qui sont à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, soit pair. Cela doit avoir lieu pour toutes les valeurs de y dont le module est égal à 1.

Mais il suffit que cela ait lieu pour $y = 1$; en effet, faisons décrire au point y le cercle $|y| = 1$ tout entier; le nombre des racines de l'équation $F = 0$, qui sont à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, demeurera constant. En effet, il ne pourrait changer que si une des racines venait sur la circonférence $|x| = 1$. Or, cela n'est pas possible, car nous avons supposé plus haut que F ne pouvait s'annuler pour $|x| = 1$, $|y| = 1$.

Nous supposerons donc que, pour $y = 1$, l'équation $F = 0$ a un nombre pair de racines à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Il faut enfin que le radical $\sqrt{F}$ revienne à sa valeur primitive quand l'argument de y augmente de 2π.

Nous supposerons donc encore que, pour $x = 1$, l'équation $F = 0$ (où y est regardée comme l'inconnue) a un nombre pair de racines à l'intérieur du cercle $|y| = 1$.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Relations de récurrence entre les coefficients.

Nous aurons donc le développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{F}} = \sum A_{ab} x^a y^b,$$

et le coefficient A_{ab} sera donné par la formule

$$A_{ab} = \frac{-1}{4\pi^2} \iint \frac{dx\, dy\, x^{-a-1} y^{-b-1}}{\sqrt{F(x, y)}}.$$

L'intégrale double doit être prise le long des deux cercles

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1.$$

Les coefficients A_{ab} sont en général des fonctions transcendantes des coefficients de F, mais nous allons voir qu'il y a entre les A_{ab} des relations de récurrence de telle façon qu'il ne reste qu'un nombre fini de transcendantes distinctes.

Pour simplifier, je me bornerai d'abord au cas où $a + 1$ et $b + 1$ sont négatifs, de telle façon que le numérateur de la quantité sous le signe $\iint$, $x^{-a-1} y^{-b-1}$ soit un polynome entier. Nous verrons plus loin que les autres cas se ramènent aisément à celui-là. S'il y a entre les A_{ab} $(a + 1 < 0,\ b + 1 < 0)$ une relation linéaire, cette relation s'écrira

$$(1) \qquad \iint \frac{H\, dx\, dy}{\sqrt{F}} = 0,$$

H étant un polynome entier. Nous avons donc à rechercher quelles sont les relations de la forme (1).

On peut en trouver de la manière suivante : soit P un polynome quelconque; on aura évidemment

$$\iint \frac{d}{dx}(\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{F}})\,dx\,dy = 0, \tag{2}$$

car, en intégrant d'abord par rapport à x, on trouve zéro, puisqe $\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{F}}$ reprend la même valeur quand, x ayant décrit toute la circonférence $|x| = 1$, son argument augmente de 2π.

D'ailleurs toutes les périodes de l'intégrale double (2) seront nulles.

Or

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{F}}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}}}\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\mathrm{F} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{P}\right).$$

La relation (1) sera donc satisfaite quand on aura

$$\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{P}}{dx}\mathrm{F} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{P}.$$

De même, si Q est un polynome quelconque, on aura

$$\iint \frac{d}{dy}(\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}})\,dx\,dy,$$

de sorte que la relation (1) sera encore satisfaite quand on aura

$$\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\mathrm{F} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dy}\mathrm{Q}.$$

Si P et Q sont deux polynomes quelconques, on aura encore

$$\iint \left[\frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d}{dy}(\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}}) - \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{d}{dx}(\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}})\right] dx\,dy = 0;$$

mais ce cas se ramène au précédent, car on a évidemment

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d}{dy}(\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}}) - \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{d}{dx}(\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}}) = \frac{d}{dy}\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx}\sqrt{\mathrm{F}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dy}\sqrt{\mathrm{F}}\right).$$

Premier cas.

Le polynome F est homogène et de degré m en x et en y; l'équation $\mathrm{F} = 0$ n'a pas de racine double.

Nous supposerons également que le polynome H est homogène et de degré q.

Je dis alors que si le degré q est suffisamment élevé, on pourra trouver deux polynomes P et Q tels que

$$H = \frac{dP}{dx} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx} P + \frac{dQ}{dy} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dy} Q \tag{3}$$

et, par conséquent, que l'on aura toujours

$$\iint \frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}} = 0.$$

Il est clair que, si les polynomes P et Q sont homogènes de degré p, on aura

$$q = m + p - 1,$$

ce qui exige déjà

$$q \geqq m - 1.$$

Maintenant, pour déterminer les polynomes P et Q, je vais opérer de la façon suivante : Je déterminerai d'abord deux polynomes A et B, homogènes et de degré p, par la relation

$$H = A \frac{dF}{dx} + B \frac{dF}{dy}. \tag{4}$$

Le polynome H contient $q + 1$ coefficients; en identifiant les deux membres de l'équation (4), nous trouverons donc $q + 1$ équations linéaires auxquelles les coefficients de A et de B devront satisfaire.

Le polynome A contient $p + 1$ coefficients, de même que B; nous avons donc $2p + 2$ inconnues.

Si donc

$$q < 2p + 1, \qquad \text{d'où} \qquad q > 2m - 3,$$

nous aurons plus d'inconnues que d'équations.

Si

$$q = 2p + 1, \qquad \text{d'où} \qquad q = 2m - 3,$$

nous aurons autant d'équations que d'inconnues.

Si enfin

$$q > 2p + 1, \qquad \text{d'où} \qquad q < 2m - 3,$$

nous aurons plus d'équations que d'inconnues.

Je dis que si $q \geqq 2m - 3$, on pourra satisfaire à la relation (4). En effet, nous avons supposé que l'équation $F = 0$ n'avait pas de racine double; il en résulte que $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ ne peuvent s'annuler à la fois (sauf bien entendu pour $x = y = 0$).

Supposons d'abord

$$q = 2m - 3, \qquad \text{d'où} \qquad q = 2p + 1, \qquad p = m - 2.$$

Nous avons alors autant d'équations que d'inconnues; nous pourrons donc y satisfaire, pourvu que le déterminant de ces équations linéaires ne soit pas nul.

Mais si ce déterminant était nul, on pourrait trouver deux polynomes C et D, homogènes de degré p, tels que

$$C\frac{dF}{dx} + D\frac{dF}{dy} = 0.$$

$\frac{dF}{dx}$, divisant le produit $D\frac{dF}{dy}$ et étant premier avec $\frac{dF}{dy}$, divisera D.

Mais cela est absurde, puisque D est de degré $p = m - 2$ et $\frac{dF}{dx}$ de degré $m - 1$.

Donc le déterminant n'est pas nul.

Donc on pourra satisfaire à nos équations et, par conséquent, à la relation (4).

Soit maintenant $q > 2m - 3$; alors H pourra se mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$H = C_1 H_1 + C_2 H_2,$$

H_1 et H_2 étant deux polynomes homogènes de degré $2m - 3$, C_1 et C_2 deux polynomes homogènes de degré $q - 2m + 3$.

Alors H_1 et H_2 pourront se mettre sous la forme (4), de sorte que

$$H_1 = A_1\frac{dF}{dx} + B_1\frac{dF}{dy},$$

$$H_2 = A_2\frac{dF}{dx} + B_2\frac{dF}{dy}.$$

Il vient alors

$$H = (C_1 A_1 + C_2 A_2)\frac{dF}{dx} + (C_1 B_1 + C_2 B_2)\frac{dF}{dy},$$

de sorte que H est mis aussi sous la forme (4).

Si enfin $q < 2m - 3$, tous les polynomes H ne peuvent pas être mis sous la forme (4), puisque le nombre des équations est plus grand que celui des inconnues.

Il y a $q + 1$ polynomes H de degré q linéairement indépendants. Sur ces $q + 1$ polynomes, il y en aura au plus $2p + 2 = 2q - 2m + 4$ que l'on pourra mettre sous la forme (4).

Je dis qu'il y en aura précisément $2p+2$; le contraire ne pourrait arriver en effet que si un de ces polynomes pouvait être mis sous la forme (4) de deux manières différentes. Cela entraînerait une égalité de la forme

$$C\frac{dF}{dx}+D\frac{dF}{dy}=0.$$

Or, nous avons vu qu'une pareille égalité est impossible, si le degré p de C et de D est inférieur à $m-1$.

Donc, si $q<2m-3$, il y aura $2q-2m+4$ polynomes H de degré q, linéairement indépendants, que l'on pourra mettre sous la forme (4).

Combien y a-t-il alors, parmi les polynomes de tous les degrés, de polynomes H non susceptibles d'être mis sous la forme (4), linéairement indépendants entre eux et indépendants également de ceux qui sont susceptibles d'être mis sous la forme (4)?

D'abord tous les polynomes de degré $2m-3$ ou de degré supérieur pouvant se mettre sous la forme (4), il nous reste $(2m-3)(m-1)$ polynomes de degré inférieur à $2m-3$.

Parmi ceux-là, il y en a $2\Sigma(p+1)$ qui peuvent être mis sous la forme (4). Sous le signe Σ le nombre p varie de 0 à $m-3$.

Donc

$$2\Sigma(p+1)=(m-2)(m-1).$$

Il reste donc $(m-1)^2$ polynomes qui ne peuvent pas être mis sous la forme (4).

Passage de la forme (4) à la forme (3).

Supposons donc que H ait été mis sous la forme (4), il s'agit de le mettre sous la forme (3).

Pour cela, remarquons que l'on a

$$mF=x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}.$$

L'équation (3) devient donc

$$H=\frac{dF}{dx}\left[\frac{1}{2}P+\frac{x}{m}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\right)\right]+\frac{dF}{dy}\left[\frac{1}{2}Q+\frac{y}{m}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\right)\right].$$

Si donc nous posons

$$Z=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}.$$

on devra avoir

$$(5)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{P}{2} + \dfrac{xZ}{m}, \\ B = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{yZ}{m}. \end{cases}$$

A et B sont connus, il faut déterminer Z, P et Q.

Différentions la première des équations (5) par rapport à x, la seconde par rapport à y et ajoutons, il viendra

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} = \frac{Z}{2} + \frac{2Z}{m} + \frac{1}{m}\left(x\frac{dZ}{dx} + y\frac{dZ}{dy}\right).$$

Mais, en vertu du théorème des fonctions homogènes, on a

$$x\frac{dZ}{dx} + y\frac{dZ}{dy} = (p-1)Z.$$

On a donc

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} = Z\left(\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m}\right),$$

ce qui donne Z; Z étant connu, les équations (5) donneront immédiatement P et Q.

Si donc un polynome H peut être mis sous la forme (4), il peut également être mis sous la forme (3), de sorte que l'on a

$$\iint \frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}} = 0.$$

Une question subsidiaire se pose : un polynome homogène H peut-il être mis de plusieurs manières sous la forme (3)? En d'autres termes, peut-on trouver deux polynomes homogènes P et Q, tels que

$$(6)\qquad \frac{d}{dx}(P\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(Q\sqrt{F}) = 0.$$

L'équation (6) admet une solution évidente. Soit S un polynome homogène de degré

$$p+1-m = q+2-2m.$$

Il est clair que l'équation (6) sera satisfaite si l'on fait

$$P\sqrt{F} = \frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right), \qquad Q\sqrt{F} = -\frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right),$$

c'est-à-dire

$$P = \quad F\frac{dS}{dy} + \frac{3}{2}S\frac{dF}{dy},$$
$$Q = -F\frac{dS}{dx} + \frac{3}{2}S\frac{dF}{dx}.$$

Cette solution n'existe que si

$$p \geqq m - 1, \qquad \text{d'où} \qquad q \geqq 2m - 2.$$

Je dis qu'il n'y en a pas d'autre.

Si, en effet, P et Q satisfont à l'équation (6), c'est que

$$Q\sqrt{F}\,dx - P\sqrt{F}\,dy = dT$$

est une différentielle exacte.

Posons donc

$$Q\sqrt{F} = \frac{dT}{dx}, \qquad P\sqrt{F} = -\frac{dT}{dy};$$

T ayant pour dérivées des fonctions homogènes, devra être elle-même une fonction homogène (à une constante près, que je puis supposer nulle).

La fonction homogène T sera d'ailleurs de degré $p + \frac{m}{2} + 1$; d'où

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)T = x\frac{dT}{dx} + y\frac{dT}{dy} = \sqrt{F}(Qx - Py).$$

Ainsi T est égal à $\sqrt{F}$ multiplié par un polynome entier $Qx - Py$. Pour montrer que

$$T = SF^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad Qx - Py = SF,$$

il suffit de faire voir que $Qx - Py$ est divisible par F. En effet on a

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)\frac{dT}{dx} = \frac{d\sqrt{F}}{dx}(Qx - Py) + \sqrt{F}\frac{d}{dx}(Qx - Py),$$

ou

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)Q\sqrt{F} = \frac{1}{2\sqrt{F}}\frac{dF}{dx}(Qx - Py) + \sqrt{F}\frac{d}{dx}(Qx - Py),$$

ou

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)QF = \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}(Qx - Py) + F\frac{d}{dx}(Qx - Py),$$

ce qui montre que F divise le produit $\frac{dF}{dx}(Qx - Py)$. Comme l'équation $F = 0$ n'a pas de racine double, F est premier avec $\frac{dF}{dx}\cdot$ Donc F divise $Qx - Py$.

C. Q. F. D.

Exposants négatifs.

Nous avons vu que le coefficient de $x^a y^b$ était donné par l'intégrale double

$$\frac{-1}{4\pi^2}\iint \frac{dx\,dy\,x^{-a-1}y^{-b-1}}{\sqrt{F(x,y)}}.$$

Jusqu'ici nous avons supposé que $a+1$ et $b+1$ étaient négatifs, de telle façon qu'au numérateur de la fonction sous le signe $\iint$, les exposants de x et de y soient positifs.

Ne nous imposons plus cette restriction.

Il est clair d'abord que le cas où un de ces exposants est négatif, et celui où ils le sont tous les deux, se ramène aisément à celui où ils sont tous deux positifs. Supposons, par exemple, que

$$a+1>0, \qquad b+1<0;$$

nous poserons

$$x=\frac{1}{x'}, \qquad \text{d'où} \qquad F(x,y)=\frac{F_1(x',y)}{x'^m},$$

$F_1(x',y)$ étant un polynome entier en x' et y; l'intégrale devient alors

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint \frac{dx'\,dy}{\sqrt{F_1}}\,x'^{\frac{m}{2}+a-1}\,y^{-b-1},$$

et l'on voit que les exposants de x' et de y sont positifs, au moins si $m \geqq 4$.

On doit donc s'attendre à retrouver une théorie analogue à celle qui précède.

Mais il vaut mieux la refaire directement.

Il s'agit de trouver les relations de la forme

$$\iint \frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}}=0, \tag{1 bis}$$

où H n'est plus un polynome entier en x et y, mais un polynome entier en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ou, si l'on préfère, un polynome entier en x et y, divisé par une puissance de x et par une puissance de y. Nous aurons encore

$$\iint \frac{dP\sqrt{F}}{dx}\,dx\,dy=\iint \frac{dQ\sqrt{F}}{dy}\,dx\,dy=0, \tag{2 bis}$$

si P et Q sont des polynomes entiers en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Il s'agit donc de voir si l'on peut mettre H sous la forme

$$(3\ bis)\qquad H = \frac{dP}{dx}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P + \frac{dQ}{dy}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q,$$

ou encore sous la forme

$$(4\ bis)\qquad H = A\frac{dF}{dx} + B\frac{dF}{dy},$$

A et B étant, comme H, P et Q des polynomes entiers en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Nous continuerons à supposer que F, H, P, Q, A, B sont homogènes en x et y et que l'équation $F = 0$ n'a pas de racine double.

Nous pourrons alors écrire

$$H = H_1 x^\alpha y^\beta,$$

α et β étant des entiers positifs ou négatifs et H_1 un polynome entier en x et y.

Si alors on peut mettre H_1 sous la forme (4)

$$H_1 = A_1\frac{dF}{dx} + B_1\frac{dF}{dy}$$

(ce qui arrivera toujours si le degré de H_1 n'est pas plus petit que $2m - 3$), on pourra mettre H sous la forme (4 *bis*)

$$H = A_1 x^\alpha y^\beta \frac{dF}{dx} + B_1 x^\alpha y^\beta \frac{dF}{dy}.$$

Mais il est aisé de comprendre qu'un polynome H *quelconque* peut toujours se mettre sous la forme

$$H_1 x^\alpha y^\beta,$$

le degré de H_1 *étant au moins égal à* $2m - 3$. Car on peut, sans changer H, multiplier H_1 par x^μ (μ étant arbitraire), à condition de changer α en $\alpha - \mu$.

D'où cette conséquence :

Un polynome H *quelconque peut toujours se mettre sous la forme* (4 *bis*).

Comment maintenant passer de la forme (4 *bis*) à la forme (3 *bis*); un calcul tout à fait analogue à celui qui précède montrerait que A, B, P et Q sont liés par les équations

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} Z = \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dQ}{dy}, \\ A = \dfrac{P}{2} + \dfrac{xZ}{m}, \\ B = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{yZ}{m}. \end{cases}$$

On en déduirait

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}=Z\left(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{m}\right).$$

De cette équation, on tirera Z et, par conséquent, P et Q, à moins que

$$\frac{1}{2}+\frac{p+1}{m}=0. \tag{7}$$

Cela montre que, si l'égalité (7) n'a pas lieu, le polynome H peut se mettre sous la forme (3 *bis*) et, par conséquent, que la relation (1 *bis*) a lieu.

D'où cette conséquence : le coefficient de $x^a y^b$ dans le développement est nul, à moins que l'on ait

$$\frac{1}{2}+\frac{p+1}{m}=0.$$

Mais

$$q=m+p-1=-a-b-2.$$

La relation (7) peut donc s'écrire

$$a+b=-\frac{m}{2}.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ ne contiendra donc que des termes tels que la somme $a+b$ soit égale à $-\frac{m}{2}$.

Ce résultat était évident d'avance; c'est une conséquence immédiate de l'homogénéité de la fonction $\frac{1}{\sqrt{F}}$.

Mais nous n'avons pas à regretter de l'avoir retrouvé par une voie détournée; car les équations intermédiaires que nous avons obtenues chemin faisant nous seront nécessaires dans la suite.

Mais poursuivons et supposons que la relation (7) ait lieu.

Alors les équations (5 *bis*) entraîneront

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}=0. \tag{8}$$

Ainsi, pour que H puisse se mettre sous la forme (3 *bis*), il ne suffit plus qu'il puisse se mettre sous la forme (4 *bis*), il faut encore que la relation (8) ait lieu.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Car alors, en faisant

$$P=2A,\quad Q=2B,\quad \text{d'où}\quad Z=0,$$

on satisfait aux équations (5 *bis*). J'ajoute même qu'on peut satisfaire à ces équations (5 *bis*) d'une infinité de manières, car la fonction Z peut être choisie arbitrairement.

Nous sommes donc amenés à nous poser la question suivante :

Peut-on mettre H sous la forme (4 *bis*) et cela de telle façon que la relation (8) ait lieu?

La relation (8) montre que

$$B\,dx - A\,dy = dU$$

est une différentielle exacte; on aura donc

$$B = \frac{dU}{dx}, \qquad A = -\frac{dU}{dy},$$

et, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$(p+1)\,U = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} = Bx - Ay.$$

U est donc un polynome en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$; il est homogène et de degré $p+1$ en x et y.

L'équation (4 *bis*) devient alors

$$\text{(9)} \qquad H = \frac{dF}{dx}\frac{dU}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{dU}{dx},$$

et nous avons à rechercher si l'on peut mettre H sous la forme (9).

Soit

$$U = Vx^{-\alpha}y^{-\beta},$$

V étant un polynome entier et homogène d'ordre h en x et en y, α et β étant deux entiers positifs; on devra donc avoir

$$h - \alpha - \beta = p + 1 = -\frac{m}{2}.$$

Quant à H, il sera de la forme

$$\text{(10)} \qquad H = Rx^{-\alpha-1}y^{-\beta-1},$$

R étant un polynome entier en x et y, homogène de degré $h+m$.

Le polynome R comprend $h+m+1$ coefficients et le polynome U n'en contient que $h+1$.

Quand nous voudrons mettre H sous la forme (9), nous n'aurons donc que $h+1$ inconnues pour satisfaire à $h+m+1$ équations linéaires.

Des $h+m+1$ polynomes H de la forme (10) qui sont linéairement indépendants, il y en aura au plus $h+1$ que l'on pourra mettre sous la forme (9).

Je dis qu'il y en aura précisément $h+1$; le contraire ne pourrait arriver en effet que si l'un de ces polynomes pouvait se mettre de deux manières différentes sous la forme (9) :

$$H = \frac{dF}{dx}\frac{dU}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{dU}{dx} = \frac{dF}{dx}\frac{dU'}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{dU'}{dx},$$

d'où

$$\frac{dF}{dy}\frac{d(U-U')}{dx} - \frac{dF}{dx}\frac{d(U-U')}{dy} = 0.$$

Cette équation exprime que $U - U'$ est fonction de F. Mais F est homogène de degré m et $U - U'$ homogène de degré

$$p+1 = -\frac{m}{2}.$$

On devrait donc avoir

$$U - U' = \frac{1}{\sqrt{F}}.$$

Cela est impossible, puisque $U - U'$ doit être rationnel.

Donc cette circonstance ne pourra se présenter.

Donc il y aura précisément $h+1$ polynomes indépendants qu'on pourra mettre sous la forme (9).

Il y en aura m qui ne pourront se mettre sous cette forme et qui seront linéairement indépendants entre eux et avec ceux qui peuvent se mettre sous la forme (9).

Mais le nombre h peut être pris aussi grand que l'on veut. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Parmi tous les polynomes H, en nombre infini, il n'y en a que m qui ne peuvent se mettre sous la forme (9) et qui soient linéairement indépendants entre eux et avec ceux qui peuvent se mettre sous la forme (9).

Ou bien encore :

Les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ sont des fonctions transcendantes des coefficients de F. Mais toutes ces transcendantes ne sont pas distinctes entre elles. Il y a en tout seulement m transcendantes distinctes.

Deuxième cas ; cas général.

Supposons que F soit un polynome entier de degré m, *non homogène* en x et en y.

Nous écrirons

$$F = F_m + F_{m-1} + \ldots + F_0,$$

en désignant par F_k l'ensemble des termes homogènes et d'ordre k en x et en y.

Nous supposerons que l'équation $F_m = 0$ n'a pas de racine multiple. Nous ne supposerons plus, sauf avis contraire, que les polynomes H, P, Q, ... sont homogènes.

Il s'agit de déterminer les relations de la forme (1) ou (1 *bis*); je vais commencer par étudier exclusivement les relations de la forme (1). Je supposerai donc que H, P et Q sont des polynomes entiers (homogènes ou non) en x et y; je me propose de chercher quels sont les polynomes H qui peuvent se mettre sous la forme (3).

Soit q le degré de H; écrivons

$$H = H_q + H_{q-1} + \ldots + H_0,$$

H_k représentant l'ensemble des termes homogènes et d'ordre k.

Comme H_q et F_m sont homogènes, comme $F_m = 0$ n'a pas de racine multiple, nous pourrons toujours trouver deux polynomes P_p et Q_p homogènes d'ordre $p = q - m + 1$ et tels que

$$H_q = \frac{dP_p}{dx} F_m + \frac{1}{2} \frac{dF_m}{dx} P_p + \frac{dQ_p}{dy} F_m + \frac{1}{2} \frac{dF_m}{dy} Q_p.$$

Cela sera toujours possible, comme nous l'avons vu, *à la condition* que

$$q \geqq 2m - 3.$$

Soit maintenant

$$H' = \frac{dP_p}{dx} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx} P_p + \frac{dQ_p}{dy} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dy} Q_p.$$

Le polynome H′, qui peut se mettre sous la forme (3), ne sera plus homogène, mais il sera de degré q et l'ensemble des termes de degré q sera précisément H_q, de sorte que le polynome $H - H'$ sera de degré $q - 1$.

Ainsi, si $q \geqq 2m - 3$, on pourra regarder H comme la somme de deux polynomes, l'un susceptible d'être mis sous la forme (3) et l'autre de degré moindre.

Le degré peut être ainsi abaissé jusqu'à $2m-4$. Mais il n'y a que $(2m-3)(m-1)$ polynomes linéairement indépendants d'ordre $2m-4$.

Il y aura donc *au plus* $(2m-3)(m-1)$ polynomes non susceptibles d'être mis sous la forme (3), linéairement indépendants entre eux et de ceux qu'on peut mettre sous la forme (3).

Mais ce nombre peut encore être abaissé.

Soient P'' et Q'' deux polynomes quelconques d'ordre $m-3$ au plus, et soit

$$H''=\frac{dP''}{dx}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P''+\frac{dQ''}{dy}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q''.$$

Il est clair que H'' sera d'ordre $2m-4$ au plus.

Or il y a $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ polynomes d'ordre $m-3$; donc nous pourrons trouver $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ polynomes P et autant de polynomes Q.

Nous pourrons donc former $(m-2)(m-1)$ polynomes H''; je dis qu'ils seront linéairement indépendants.

S'ils ne l'étaient pas, en effet, c'est qu'on pourrait trouver deux polynomes P'' et Q'', d'ordre $m-3$ au plus et tels que

$$\frac{dP''}{dx}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P''+\frac{dQ''}{dy}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q''=0.$$

Soit p le degré de celui de ces deux polynomes dont le degré est le plus élevé; nous aurons

$$p \leqq m-3.$$

Soient P''_p, Q''_p l'ensemble des termes de degré p de P'' et de Q''. P''_p et Q''_p ne pourront être identiquement nuls tous les deux.

On devrait avoir

$$\frac{dP''_p}{dx}F_m+\frac{1}{2}\frac{dF_m}{dx}P''_p+\frac{dQ''_p}{dy}F_m+\frac{1}{2}\frac{dF_m}{dy}Q''_p=0, \tag{12}$$

ou bien

$$\frac{dF_m}{dx}\left[\frac{P''_p}{2}+\frac{x}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right)\right]+\frac{dF_m}{dy}\left[\frac{Q''_p}{2}+\frac{y}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right)\right]=0. \tag{12 bis}$$

Comme $\frac{dF_m}{dx}$ et $\frac{dF_m}{dy}$ sont premiers entre eux, cela ne pourrait avoir lieu que si

$$\frac{P''_p}{2}+\frac{x}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right) \quad \text{était divisible par} \quad \frac{dF_m}{dy}$$

et

$$\frac{Q''_p}{2}+\frac{y}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right) \quad \text{divisible par} \quad \frac{dF_m}{dx}.$$

Mais $\frac{dF_m}{dx}$ et $\frac{dF_m}{dy}$ étant d'ordre $m-1$ ne peuvent diviser deux polynomes d'ordre plus petit. Donc la relation (12 *bis*) ne pourrait avoir lieu que si l'on avait

$$\frac{P''_p}{2}+\frac{x}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right)=0,$$
$$\frac{Q''_p}{2}+\frac{y}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right)=0.$$

En différentiant la première équation par rapport à x, la seconde par rapport à y, et ajoutant, en tenant compte du théorème des fonctions homogènes on trouve

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{m}\right)\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right)=0,$$

d'où

$$P''_p=Q''_p=0,$$

ce qui est impossible, puisque P''_p et Q''_p ne peuvent s'annuler à la fois.

Les relations (11) et (12) sont donc impossibles.

Les $(m-2)(m-1)$ polynomes H″ sont distincts.

Il y a donc au plus

$$(2m-3)(m-1)-(m-2)(m-1)=(m-1)^2$$

polynomes H qui ne peuvent être mis sous la forme (3) et qui sont indépendants entre eux et de ceux qui sont de la forme (3).

Ce nombre peut-il être réduit davantage ?

En d'autres termes, existe-t-il des polynomes d'ordre $2m-4$, autres que les polynomes H″, et susceptibles d'être mis sous la forme (3) ?

Soit H un de ces polynomes et soit

$$\text{(13)} \qquad H=\frac{dP}{dx}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P+\frac{dQ}{dy}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q.$$

Soit p le degré de P et de Q; on devra avoir $p>m-3$, sans quoi H serait un des polynomes H″.

Comme H est supposé de degré $2m-4$, les termes de degré $> 2m-4$ devront disparaître dans le second membre, en particulier les termes de degré $p+m-1$.

On aura donc

$$\frac{dP_p}{dx}F_m+\frac{1}{2}\frac{dF_m}{dx}P_p+\frac{dQ_p}{dy}F_m+\frac{1}{2}\frac{dF_m}{dy}Q_p=0,$$

ou bien

$$\frac{d}{dx}(P_p\sqrt{F_m})+\frac{d}{dy}(Q_p\sqrt{F_m})=0,$$

ou bien

$$Q_p\sqrt{F_m}=\frac{dT}{dx},\qquad P_p\sqrt{F_m}=-\frac{dT}{dy},$$

T étant une fonction de x et y homogène de degré $p+\frac{m}{2}+1$.

Le théorème des fonctions homogènes donnera

$$\left(p+\frac{m}{2}+1\right)T=\sqrt{F_m}(Q_p x-P_p y).$$

On verrait, comme plus haut dans l'étude de l'équation (6), que $Q_p x-P_p y$ est divisible par F_m.

On aura donc

$$Q_p x-P_p y=SF_m,$$

S étant un polynome homogène de degré $p+1-m$.

On aura alors

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right]+\frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right]=0,$$

d'où

$$\frac{H}{\sqrt{F}}=\frac{d}{dx}\left[P\sqrt{F}+\frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right]+\frac{d}{dy}\left[Q\sqrt{F}-\frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

Or on a

$$-\frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)=P'\sqrt{F},\qquad \frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)=Q'\sqrt{F},$$

P' et Q' étant des polynomes de degré p dont les termes d'ordre p sont précisément P_p et Q_p.

Il vient

$$\frac{H}{\sqrt{F}}=\frac{d}{dx}(P-P')\sqrt{F}+\frac{d}{dy}(Q-Q')\sqrt{F},$$

ce qui montre que les polynomes P et Q peuvent être remplacés par les polynomes $P - P'$ et $Q - Q'$, qui sont de degré moindre.

Donc le degré des polynomes P et Q peut toujours être abaissé et cela jusqu'à $m - 3$, de telle façon que H n'est autre chose qu'un polynome H''.

Il y a donc précisément $(m-1)^2$ polynomes *distincts* non susceptibles d'être ramenés à la forme (3).

Les coefficients du développement où les exposants $-a-1$ et $-b-1$ sont positifs dépendent donc au plus de $(m-1)^2$ transcendantes.

Exposants négatifs.

Il est facile d'étendre ces résultats à l'étude des relations de la forme (1 *bis*).

Supposons donc que H, P et Q soient des polynomes entiers, non plus en x et y, mais en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Nous poserons alors

$$H = \frac{H'}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}, \qquad P = \frac{P'}{x^{\alpha}y^{\beta+1}}, \qquad Q = \frac{Q'}{x^{\alpha+1}y^{\beta}},$$

où α et β sont des entiers positifs et H', P', Q' des polynomes entiers en x et y.

Les valeurs des entiers positifs α et β seront regardées comme fixes, mais pourront d'ailleurs être prises aussi grandes qu'on voudra. Je désignerai toujours par q le degré de H, c'est-à-dire le degré des termes de H dont le degré d'homogénéité en x et en y sera le plus élevé.

Je désignerai de même par p le degré de P et de Q.

Je représenterai par H_q l'ensemble des termes de degré q de H, par P_p et Q_p l'ensemble des termes de degré p de P et de Q.

Je désignerai par q' le degré de H', par p' celui de P' et de Q', de sorte qu'on aura

$$q' = q + \alpha + \beta + 2, \qquad p' = p + \alpha + \beta + 1,$$

d'où

$$q' = p' + m.$$

Les termes du degré le plus élevé de H', P' et Q' seront alors

$$x^{\alpha+1}y^{\beta+1}H_q, \quad x^{\alpha}y^{\beta+1}P_p, \quad x^{\alpha+1}y^{\beta}Q_p.$$

On tire de là

$$(14) \qquad H' = \frac{P'}{2}x\frac{dF}{dx} + \frac{Q'}{2}y\frac{dF}{dy} + F\left(x\frac{dP'}{dx} + y\frac{dQ'}{dy} - \alpha P' - \beta Q'\right).$$

Posons-nous maintenant le problème suivant :

Existe-t-il deux polynomes P'' et Q'' entiers et homogènes en x et y et tels que l'on ait

$$\frac{H_q}{\sqrt{F_m}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha}y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha+1}y^{\beta}}\right). \tag{15}$$

La relation (15) peut s'écrire

$$H_q x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = \frac{P''}{2}x\frac{dF_m}{dx} + \frac{Q''}{2}y\frac{dF_m}{dy} + F_m Z,$$

en posant, pour abréger,

$$Z = x\frac{dP''}{dx} + y\frac{dQ''}{dy} - \alpha P'' - \beta Q''.$$

Nous devons d'abord nous demander si l'on peut mettre H_q sous la forme

$$H_q x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = Ax\frac{dF_m}{dx} + By\frac{dF_m}{dy}, \tag{16}$$

analogue à la forme (4). Dans cette équation, A et B sont des polynomes entiers et homogènes en x et y dont le degré est évidemment p'.

Nous supposerons, pour éviter toute difficulté, non seulement que l'équation $F_m = 0$ n'a pas de racine multiple, mais que $\frac{dF_m}{dy}$ n'est pas divisible par x, ni $\frac{dF_m}{dx}$ par y. Dans ces conditions, $x\frac{dF_m}{dx}$ et $y\frac{dF_m}{dy}$ sont premiers entre eux.

En raisonnant alors comme sur l'équation (4), on verrait que l'on peut toujours mettre H_q sous la forme (16), pourvu que

$$q' \geqq 2m - 1.$$

Une fois H_q mis sous la forme (16), nous déterminerons P'' et Q'' à l'aide des équations

$$A = \frac{P''}{2} + \frac{Z}{m}, \qquad B = \frac{Q''}{2} + \frac{Z}{m};$$

d'où l'on déduit

$$x\frac{dA}{dx} + y\frac{dB}{dy} - \alpha A - \beta B = Z\left(\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m}\right).$$

On tirera de là Z et, par conséquent, P'' et Q'', à moins que l'on ait

$$\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m} = 0. \tag{17}$$

Donc, H_q pourra toujours se mettre sous la forme (15), pourvu que

$$q' \geqq 2m - 1, \qquad \frac{1}{2} + \frac{p+1}{m} \gtrless 0.$$

Si la relation (17) était satisfaite, on verrait, comme à propos de la discussion de l'équation (8), que, parmi les polynomes $H_q x^{\alpha+1} y^{\beta+1}$ de degré

$$q' = q + \alpha + \beta + 2 = \alpha + \beta + \frac{m}{2},$$

il n'y en a que m qui soient distincts et non susceptibles d'être mis sous la forme (15).

Posons maintenant

$$\frac{H''}{\sqrt{F} x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^\alpha y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F}}{x^{\alpha+1} y^\beta}\right).$$

Le polynome H'' ainsi défini est de la forme (14); ses termes du degré le plus élevé sont $H_q x^{\alpha+1} y^{\beta+1}$, puisque P'' et Q'' sont définis par la relation (15).

Donc $H' - H''$ est de degré $q' - 1$; donc H' est la somme de deux polynomes, l'un H'' de la forme (14), l'autre $H' - H''$ de degré moindre. Le degré de H' peut donc être réduit, à moins qu'il ne soit plus petit que $2m - 1$, ou égal à $\alpha + \beta + \frac{m}{2}$.

De plus, parmi les polynomes de degré $\alpha + \beta + \frac{m}{2}$, il n'y en aura que m réellement distincts et dont le degré ne pourra être réduit (la réduction, une fois l'étape $\alpha + \beta + \frac{m}{2}$ franchie, pourra être poussée sans obstacle jusqu'à $2m - 2$).

Il n'y a donc que m polynomes réellement distincts, de degré plus grand que $2m - 2$ et non susceptibles d'être mis sous la forme (14).

Comme le nombre des polynomes de degré $2m - 2$ est égal à $m(2m - 1)$, nous pouvons conclure qu'il y a au plus $2m^2$ polynomes distincts qui ne peuvent se mettre sous la forme (14). Mais ce nombre peut encore être réduit; et, en effet, il y a des polynomes de degré $2m - 2$ qui peuvent se mettre sous la forme (14); on les obtient en prenant pour P' et Q' des polynomes quelconques de degré $m - 2$. Or il y a $\frac{m}{2}(m - 1)$ polynomes P' et autant de polynomes de degré $m - 2$. Cela fera donc $m^2 - m$ polynomes de degré $m - 2$ et de la forme (14).

Je dis qu'ils sont tous linéairement indépendants.

Si, en effet, ils ne l'étaient pas, on pourrait trouver deux polynomes d'ordre $m - 2$, tels que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P'\sqrt{F}}{x^\alpha y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q'\sqrt{F}}{x^{\alpha+1} y^\beta}\right) = 0,$$

ou en appelant P'' et Q'' les termes d'ordre le plus élevé de P' et de Q'

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F_m}}{x^\alpha y^{\beta+1}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha+1}y^\beta}\right)=0.$$

Cette équation est de même forme que (15) (sauf que H_q est nul); elle entraînerait donc

$$Ax\frac{dF}{dx}+By\frac{dF}{dx}=0,$$

ou $\Big($puisque A et B sont d'ordre inférieur à m étant du même ordre que P'' ou Q'' et que, d'autre part, $x\frac{dF}{dx}$ et $y\frac{dF}{dy}$ sont premiers entre eux$\Big)$

$$A=0, \qquad B=0,$$

ce qui entraîne

$$P''=Q''=0$$

$\Big[$à moins que la relation (17) n'ait lieu; or nous pouvons toujours supposer le contraire, puisqu'elle entraînerait

$$p'=\alpha+\beta-\frac{m}{2}+1;$$

que l'on a, d'ailleurs,

$$p'\leqq m-2$$

et que l'on peut supposer α et β aussi grands que l'on veut$\Big]$. Il faudrait donc que P'' et Q'' fussent nuls; et, comme ce sont les termes du degré le plus élevé de P' et de Q', il faudrait que P' et Q' fussent nuls.

Nos m^2-m polynomes sont donc linéairement indépendants. Il reste donc

$$2m^2-(m^2-m)=m^2+m$$

polynomes réellement distincts et non susceptibles de se mettre sous la forme (14).

Comme cela a lieu, quelque grands que soient α et β, nous conclurons que nos coefficients dépendent au plus de m^2+m transcendantes distinctes.

Ce nombre peut-il encore être réduit?

Voici comment la question se pose : Nous avons trouvé qu'un certain nombre de polynomes en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ de la forme

$$H=\frac{H'}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}, \tag{18}$$

où H' est un polynome d'ordre q' en x et y, pourraient être mis sous la forme (3 *bis*), et cela de telle façon que

$$(19) \qquad P = \frac{P'}{x^\alpha y^{\beta+1}}, \qquad Q = \frac{Q'}{x^{\alpha+1} y^\beta},$$

P' et Q' étant des polynomes d'ordre $p' = q' - m$ en x et en y.

Quand un polynome H pourra se mettre sous la forme (3 *bis*), et cela de telle façon que P et Q soient de la forme (19), je dirai, pour abréger, que H peut se mettre sous la forme (3 *ter*).

L'analyse qui précède montre que certains polynomes de la forme (18) peuvent se mettre sous la forme (3 *ter*); elle montre en même temps qu'il n'y en a pas d'autres.

Ce qu'il nous reste à voir, c'est si certains polynomes ne pourraient être mis sous la forme (3 *bis*) sans pouvoir être mis sous la forme (3 *ter*).

On aurait donc

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(P\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(Q\sqrt{F}),$$

et l'on pourrait écrire

$$P = \frac{P'}{x^a y^{b+1}}, \qquad Q = \frac{Q'}{x^{a+1} y^b}.$$

Le polynome H pourrait ainsi se mettre sous la forme (3 *bis*); mais, pour que cette forme ne se confonde pas avec la forme (3 *ter*), il faut :

1° Ou bien que a soit plus grand que α;

2° Ou bien que b soit plus grand que β;

3° Ou bien enfin que le degré p' des polynomes P' et Q' soit plus grand que $q' - m$.

Nous pourrons, d'ailleurs, toujours supposer $a \geqq \alpha$, $b \geqq \beta$.

Je dis d'abord que, si $a > \alpha$, a peut être diminué d'une unité. On a en effet

$$(14\ bis) \quad H' x^{a-\alpha} y^{b-\beta} = \frac{P'}{2} x \frac{dF}{dx} + \frac{Q'}{2} y \frac{dF}{dy} + F\left(x\frac{dP'}{dx} + y\frac{dQ'}{dy} - aP' - bQ'\right).$$

Le premier membre étant divisible par x, il doit en être de même du second. Donc on aura pour $x = 0$

$$(20) \qquad \frac{Q'}{2} y \frac{dF}{dy} + F\left(y\frac{dQ'}{dy} - aP' - bQ'\right) = 0.$$

Nous supposerons que, pour $x=0$, le polynome F est premier avec le polynome $y\frac{dF}{dy}$. Cette équation nous montre alors que, pour $x=0$, Q' est divisible par F; soit donc

$$Q' = -aUF.$$

Cette égalité ayant lieu seulement pour $x=0$, U sera un polynome entier en y.

Posons maintenant

$$\frac{P''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{UF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}\right), \qquad \frac{Q''\sqrt{F}}{x^{a+1}y^b} = \frac{d}{dx}\left(\frac{UF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}\right),$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F}}{x^{a+1}y^b}\right) = 0 \tag{21}$$

et

$$Q'' = x\left(\frac{dU}{dx}F + \frac{3}{2}U\frac{dF}{dx}\right) - aUF,$$

$$P'' = -y\left(\frac{dU}{dy}F + \frac{3}{2}U\frac{dF}{dy}\right) + bUF,$$

ce qui montre que pour $x=0$, on a $Q''=Q'$, et par conséquent, à cause de (20), $P''=P'$. Donc les deux polynomes $P'-P''$, $Q'-Q''$ sont divisibles par x.

Mais à cause de (21) on aura

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}\,\frac{(P'-P'')\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy}\,\frac{(Q'-Q'')\sqrt{F}}{x^{a+1}y^b}.$$

Comme $P'-P''$ et $Q'-Q''$ sont divisibles par x, on voit que la valeur de a se trouve abaissée d'une unité. C. Q. F. D.

On démontrerait de même que b peut être abaissé d'une unité s'il est plus grand que β.

Je dis maintenant que p' peut être abaissé d'une unité s'il est plus grand que $q'-m$.

Je n'ai presque rien à changer à la démonstration analogue de la fin du paragraphe précédent.

Soient P'' et Q'' les termes du degré le plus élevé de P' et de Q', on devrait avoir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F_m}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{a+1}y^b}\right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{Q'' \sqrt{F_m}}{x^{a+1} y^b} = \frac{dT}{dx}, \qquad \frac{P'' \sqrt{F_m}}{x^a y^{b+1}} = -\frac{dT}{dy},$$

ou

$$kT = \frac{\sqrt{F_m}}{x^a y^b}(Q'' - P''),$$

k étant le degré d'homogénéité de T; d'où

$$\sqrt{F_m}\, k \frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Q'' - P''}{x^a y^b} \frac{dF_m}{dx} + \frac{F_m}{x^a y^b} \frac{d}{dx}(Q'' - P'') - \frac{aF_m(Q'' - P'')}{x^{a+1} y^b} = \frac{kQ'' F_m}{x^{a+1} y^b}.$$

Cette équation, que l'on peut multiplier par $x^{a+1} y^b$, montre que

$$(Q'' - P'')\, x \frac{dF_m}{dx}$$

est divisible par F_m; et, comme $x \frac{dF_m}{dx}$ est premier avec F_m, que $Q'' - P''$, es divisible par F_m.

Soit

$$Q'' - P'' = SF_m.$$

Nous poserons

$$\frac{Q''' \sqrt{F}}{x^{a+1} y^b} = \frac{d}{dx} \frac{SF^{\frac{3}{2}}}{kx^a y^b}, \qquad \frac{P''' \sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} = -\frac{d}{dy} \frac{SF^{\frac{3}{2}}}{kx^a y^b}.$$

On en conclut :

1° Que Q''' et P''' ont mêmes termes de degré le plus élevé que Q'' et P'' de façon que les polynomes $P'' - P'''$, $Q'' - Q'''$ sont de degré moindre;

2° que

$$\frac{d}{dx} \frac{P''' \sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy} \frac{Q''' \sqrt{F}}{x^{a+1} y^b} = 0,$$

d'où enfin

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx} \frac{(P'' - P''') \sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy} \frac{(Q'' - Q''') \sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}.$$

On voit que le degré des polynomes a été abaissé. C. Q. F. D.

La démonstration se trouverait en défaut si l'on avait

$$k = 0,$$

ou

$$p' + \frac{m}{2} = a + b,$$

ou

$$p + 1 + \frac{m}{2} = 0.$$

Dans ce cas on trouve simplement

$$Q'' = P''.$$

Nous ne pouvons donc plus affirmer que T soit de la forme

$$T = \frac{SF_m^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b},$$

où S est un polynome; ni même que T ne soit pas transcendant. La discussion faite plus haut à propos du cas où F était supposé homogène nous a même montré que parmi les intégrales de la forme

$$T = \int \frac{P'' \sqrt{F_m}}{x^a y^b} \left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} \right),$$

où P″ est un polynome homogène d'ordre $a + b - \frac{m}{2}$; que parmi ces intégrales, dis-je, il y en a qui sont transcendantes et qui sont des combinaisons linéaires de m transcendantes distinctes.

Parmi les polynomes P″ il y en a donc m, distincts entre eux, et qui peuvent ainsi donner naissance à des transcendantes. Supposons cependant que l'intégrale T ne soit pas transcendante. Je dis qu'elle sera de la forme $\frac{SF_m^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}$. Pour nous en rendre compte, regardons un instant y comme une constante et développons suivant les puissances de $x - x_0$, x_0 étant une valeur quelconque de x.

Si x_0 n'est pas nul et si $(x - x_0)$ n'annule par F_m, la quantité sous le signe $\int$ ne contiendra que des puissances entières et positives de $x - x_0$; il en sera donc de même de T; si x_0 n'est pas nul, $\frac{dT}{dx}$ ne contiendra que des puissances positives entières et impaires de $\sqrt{x - x_0}$. Cela montre que T est égal à une fonction T_0 de y, plus une fonction de x et de y, changeant de signe avec $\sqrt{x - x_0}$ et divisible par $(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$. Comme $\frac{dT}{dy}$ doit changer de signe avec $\sqrt{x - x_0}$, nous voyons que la fonction T_0 de y doit se réduire à une constante que nous pouvons laisser de côté; de sorte que finalement cette fonction ne contient $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$ qu'à des puissances impaires et au moins égales à 3.

La conclusion, c'est que T est divisible par $F_m^{\frac{3}{2}}$, puisque $\dfrac{T}{F_m^{\frac{3}{2}}}$ ne devient pas infini pour $x = x_0$; on a donc

$$T = \frac{SF^{\frac{3}{2}}}{x^\mu y^\nu}$$

et il nous reste à montrer que μ et ν sont précisément égaux à a et b. Pour cela développons suivant les puissances croissantes de x; le développement de $\dfrac{dT}{dx}$ commençant par un terme en x^{-a-1} et celui de $\dfrac{dT}{dy}$ par un terme en x^{-a}; celui de T devra commencer par un terme en x^{-a}; d'où $a = \mu$. C. Q. F. D.

Comme T est de la forme $\dfrac{SF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}$, le reste du raisonnement se poursuivrait comme plus haut et le degré des polynomes ne peut être abaissé.

Nous n'avons donc à nous occuper que des m transcendantes T et des m polynomes P'' correspondant.

Soit $P'' = Q''$ l'un de ces polynomes; écrivons

$$H = \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}\right).$$

Nous aurons formé un polynome H qui peut se mettre sous la forme (3 *bis*); je dis qu'il ne peut se mettre sous la forme (3 *ter*). Si, en effet, il pouvait se mettre sous la forme (3 *ter*), on pourrait trouver deux polynomes P' et Q' dont les termes de degré le plus élevé sont P'' et $Q'' = P''$ et qui seraient tels que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P'\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q'\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}\right) = 0.$$

Cela voudrait dire qu'il existerait une intégrale de différentielle totale

$$T = \int \frac{\sqrt{F}}{x^a y^b}\left(\frac{Q'\,dx}{x} - \frac{P'\,dy}{y}\right).$$

Cette intégrale devrait être transcendante et admettre des périodes cycliques, puisque, pour x et y très grands, elle se réduirait sensiblement à

$$\int \frac{\sqrt{F_m}}{x^a y^b}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)$$

qui est, par hypothèse, l'une de nos m transcendantes et qui admet des périodes cycliques.

Mais il est absurde de supposer que l'intégrale T admette des périodes cycliques. Elle ne pourrait en avoir, en effet, que si la surface

$$z^2 = \mathrm{F}$$

admettait des *cycles linéaires*. Nous verrons plus loin qu'elle n'en admet pas, si le polynome F est indécomposable, ce qui est le cas général.

Donc l'hypothèse faite au début était absurde et nos polynomes ne peuvent se mettre sous la forme (3 *ter*).

Il y a donc m polynomes qui peuvent se mettre sous la forme (3 *bis*), sans pouvoir se mettre sous la forme (3 *ter*) et il n'y en a que m.

Il nous restait $m^2 + m$ polynomes distincts ne pouvant se mettre sous la forme (3 *ter*); il restera donc m^2 polynomes distincts ne pouvant se mettre sous la forme (3 *bis*). Ce nombre ne peut plus être réduit, au moins dans le cas général.

Donc les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}}}$ dépendent au plus de m^2 transcendantes distinctes.

Autre démonstration.

On pourrait encore raisonner comme il suit :

Donnons-nous la valeur de q' et choisissons-là de façon que la relation (17) n'ait pas lieu. Alors nous pourrons affirmer que tout polynome qui peut se mettre sous la forme (3 *bis*) peut aussi se mettre sous la forme (3 *ter*).

Il y a $\frac{(q'+1)(q'+2)}{2}$ polynomes de degré q'. Les polynomes P′ et Q′ sont de degré

$$p' = q' - m.$$

Il y aura donc $\frac{(p'+1)(p'+2)}{2}$ polynomes P′ et autant de polynomes Q′. Nous pourrons donc former $(p'+1)(p'+2)$ combinaisons de la forme (3 *ter*).

Mais nous devons observer que toutes ces combinaisons ne sont pas distinctes; combien y aura-t-il de relations entre elles? Pour former toutes ces relations, nous n'avons qu'à rechercher toutes les identités de la forme

$$\frac{d}{dx}\frac{\mathrm{P}'\sqrt{\mathrm{F}}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy}\frac{\mathrm{Q}'\sqrt{\mathrm{F}}}{x^{a+1} y^b} = 0; \tag{22}$$

cette identité montre que

$$T = \int \frac{\sqrt{F}}{x^a y^b}\left(\frac{Q'\,dx}{x} - \frac{P'\,dy}{y}\right)$$

est une intégrale de différentielle totale.

Je dis que cette intégrale ne peut être transcendante. En effet, si elle était transcendante, il faudrait qu'elle eût, soit des périodes cycliques, soit des périodes polaires.

J'appelle *période cyclique* celle que l'on obtient quand le point x, y décrit un contour fermé (cycle linéaire) (ce contour fermé ne pouvant, par déformation continue, être ramené à un contour infiniment petit sans passer par un point singulier).

J'appelle *période polaire* celle que l'on obtient quand le point x, y décrit un contour fermé infiniment petit autour d'un point pour lequel la fonction sous le signe $\int$ devient infinie.

Il n'y a pas de période cyclique.

Et, en effet, un cycle linéaire, s'il existait, pourrait toujours être décomposé en cycles élémentaires formés chacun d'un double lacet entourant deux points de la courbe $F(x, y) = 0$; tel est le double lacet qui, enveloppant les deux points ± 1, définit l'une des périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Mais si la courbe $F'(x, y) = 0$ est indécomposable, ce que nous supposerons, les deux points de cette courbe enveloppés par le double lacet peuvent s'échanger et se confondre, de sorte que le lacet devient infiniment petit.

Il n'y a donc pas de cycle linéaire.

Il n'y a pas non plus de période polaire.

En effet, la fonction sous le signe $\int$ ne devient infinie que pour $x = 0$ et pour $y = 0$.

Développons suivant les puissances de x; le développement de $\frac{dT}{dx}$ se présentera sous la forme $\sum \frac{A_\mu}{x_\mu}$, où A_μ est une fonction de y; considérons en particulier le terme $\frac{A_1}{x}$; c'est celui-là qui, par intégration, pourrait introduire la transcendante $A_1 Lx$.

Mais alors il y aurait dans $\frac{dT}{dy}$ le terme $Lx \frac{dA_1}{dy}$, et comme ce terme n'existe pas, c'est que $\frac{dA_1}{dy} = 0$, c'est-à-dire que A_1 est une constante.

Mais, d'autre part, A_1 doit changer de signe avec $\sqrt{F}$. Donc, A_1 est nul.

Nous n'aurons donc ni la transcendante Lx, ni pour la même raison la transcendante Ly.

Donc l'intégrale T est algébrique.

Considérons maintenant y comme une constante et soit x_0 une valeur quelconque de x. Si cette valeur n'annule pas F, nous verrons, comme plus haut, que T est développable suivant les puissances de $x - x_0$; si cette valeur annule F, nous verrons comme plus haut que T est divisible par $(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$.

Nous conclurons de tout cela que T est divisible par $F^{\frac{3}{2}}$, et nous écrirons

$$T = \frac{SF^{\frac{3}{2}}}{x^\mu y^\nu},$$

S étant un polynome. On verrait, comme plus haut, que

$$\mu = a, \qquad \nu = b,$$

ce qui donne

$$T = \frac{SF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}.$$

On voit que S est un polynome de degré $p' - m$.

Il y aura autant de relations (22) que de polynomes S; c'est-à-dire

$$\frac{(p' - m + 1)(p' - m + 2)}{2}.$$

Il y a donc

$$(p' + 1)(p' + 2) - \frac{(p' - m + 1)(p' - m + 2)}{2}$$

combinaisons distinctes de la forme (3 *ter*), et

$$\frac{(q' + 1)(q' + 2)}{2} - (p' + 1)(p' + 2) + \frac{(p' - m + 1)(p' - m + 2)}{2} = m^2$$

polynomes distincts non susceptibles d'être mis sous la forme (3 *bis*).

C. Q. F. D.

Cas des racines multiples.

Dans l'exposé qui précède, nous avons fait diverses hypothèses; nous avons supposé entre autres choses que l'équation $F_m = 0$ n'avait pas de racines multiples.

Mais toutes ces hypothèses n'avaient pas pour effet de restreindre la généralité. C'est ainsi que le cas où l'équation a des racines multiples est un cas particulier de celui où elle n'en a pas.

Mais, dans le cas général, il y a entre les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ un certain nombre de relations linéaires.

Le passage à la limite suffirait pour montrer qu'il y en a au moins autant dans un cas particulier quelconque.

Les coefficients dépendent, dans le cas général, d'un certain nombre de transcendantes distinctes; dans les différents cas particuliers, ce nombre peut diminuer, mais il ne peut jamais augmenter.

Nous avons vu qu'il y a m^2 polynomes distincts non susceptibles de se mettre sous la forme (3 *bis*); il y en aura *au plus* m^2 dans les cas particuliers.

La discussion de chaque cas particulier serait sans doute intéressante, mais je me bornerai aux cas qui se présentent en Astronomie.

Application à la fonction perturbatrice.

Nous avons posé dans l'introduction

$$e^{iu} = x, \qquad e^{iu'} = y,$$

u et u' étant les deux anomalies excentriques.

Alors les coordonnées de la première planète sont de la forme

$$\frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x,$$

tandis que celles de la seconde sont de la forme

$$\frac{c_1}{y} + c_2 + c_3 y.$$

Le carré de la distance des deux planètes D^2 sera donc un polynome du deuxième degré en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. C'est ce polynome que j'appellerai désormais $F(x, y)$; il contiendra des termes en

$$x^2,\ y^2,\ xy,\ x,\ y,\ 1,\ x^{-2},\ y^{-2},\ x^{-1}y^{-1},\ x^{-1},\ y^{-1},\ xy^{-1},\ x^{-1}y.$$

Je poserai aussi quelquefois

$$x^2 y^2 F(x, y) = F'(x, y),$$

et $F'(x, y)$ sera un polynome entier en x et y.

Pour avoir le coefficient de x^2, il suffit de donner à u une valeur dont la partie imaginaire est négative et très grande, u' conservant une valeur finie. Alors la distance D est sensiblement égale à la distance de la première planète à l'origine, c'est-à-dire à

$$a(1 - e\cos u) = a\left(1 - \frac{ex}{2} - \frac{e}{2x}\right)$$

ou sensiblement $-\dfrac{aex}{2}\cdot$

Le coefficient de x^2 est donc $\dfrac{a^2e^2}{4}$, a étant le grand axe et e l'excentricité. La même analyse montre que le coefficient de x^{-2} est le même.

De même les coefficients de y^2 et y^{-2} sont tous deux égaux à $\dfrac{a'^2e'^2}{4}$, a' et e' étant le grand axe et l'excentricité de la seconde planète.

Pour trouver le coefficient de xy observons que, si les parties imaginaires de u et de u' sont toutes deux négatives et très grandes, chacune des planètes se trouvera sur l'ellipse qu'elle décrit en un point très éloigné de l'origine. Si donc nous appelons λ l'angle de l'asymptote (imaginaire) à l'une de ces ellipses avec l'asymptote de l'autre ellipse, le coefficient de $2xy$ sera

$$\frac{aea'e'}{4}\cos\lambda.$$

L'angle λ est toujours imaginaire et $\cos\lambda$ plus grand que 1 s'il est réel.

Comme chaque ellipse a deux asymptotes, nous avons quatre angles λ qui correspondent aux coefficients de

$$2xy,\quad 2xy^{-1},\quad 2x^{-1}y,\quad 2x^{-1}y^{-1}.$$

L'angle λ ne peut être égal ni à 0, ni à π, puisque les asymptotes sont imaginaires et situées dans deux plans réels différents. Les termes du second degré de $F(x, y)$ ne peuvent donc se réduire à un carré parfait.

Si l'une des excentricités est nulle, e par exemple, les termes en x^2 et x^{-2} disparaissent; mais le terme en xy ne disparaît pas, bien que son coefficient

$$\frac{aea'e'}{4}\cos\lambda$$

contienne e en facteur, parce que $\cos\lambda$ devient infini.

Quant à $F'(x, y) = x^2y^2F(x, y)$, c'est un polynome du sixième degré, généralement indécomposable.

La courbe

$$F'(x, y) = 0$$

est une courbe du sixième degré, avec un point double à l'origine et deux points doubles à l'infini.

Cette courbe se décompose dans deux cas :

1° Si l'inclinaison est nulle, elle se décompose alors en deux courbes du troisième degré;

2° Si les deux excentricités sont nulles, elle a alors pour composantes les deux axes de coordonnées et une courbe du quatrième degré avec deux points doubles à l'infini.

Alors $F(x, y)$ admet des termes en

$$xy, \quad x, \quad y, \quad 1, \quad x^{-1}, \quad y^{-1}, \quad x^{-1}y^{-1}, \quad x^{-1}y, \quad xy^{-1}.$$

Mais, de plus, le polynome présente une symétrie particulière.

Il ne change pas quand on permute x et y, ni quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$.

Je n'examinerai dans la suite que le cas général et celui où les deux excentricités sont nulles.

Bien d'autres cas particuliers mériteraient quelque attention : celui où l'inclinaison est nulle, celui où les deux grands axes coïncident entre eux et avec l'intersection des plans des orbites, celui où ces deux plans se coupent à angle droit et où leur intersection coïncide avec le grand axe de l'une des deux orbites, etc.

Intégrales de différentielles totales.

Il paraît nécessaire de revenir sur la démonstration que j'ai donnée de ce fait que les intégrales de différentielles totales dépendant de $\sqrt{F}$ ne peuvent être transcendantes, afin de voir si elle s'applique aux cas particuliers que je veux maintenant étudier en détail.

Quand M. Picard a annoncé, pour la première fois, que la surface la plus générale de son degré ne possède pas de cycle linéaire, ce fait a causé un grand étonnement. On sera moins étonné maintenant que la surface

$$z^2 = F$$

n'en possède pas non plus quand le polynome F est indécomposable.

Revenons sur la démonstration. Soit A un point singulier quelconque, c'est-à-dire un ensemble de valeurs complexes de x et de y qui annule $F(x, y)$. J'appellerai *lacet* un chemin d'intégration composé comme il suit. On prendra pour point de départ un point quelconque O non singulier, choisi comme origine de tous les lacets. On ira de O à un point A' infiniment voisin de A en suivant un chemin quelconque; on décrira un contour infiniment petit enveloppant le point A, de façon à revenir au point A', et l'on reviendra de A' en O par le même chemin.

Le lacet sera dit *rectiligne* si le chemin OA' est rectiligne.

Je représenterai par (A) l'intégrale prise le long de ce lacet en partant du point O en attribuant au radical un signe convenu une fois pour toutes. Je la représenterai par [A] si le lacet est rectiligne. Je remarque deux choses :

1° Une période quelconque de l'intégrale sera une combinaison linéaire à coefficients entiers de périodes de la forme

$$[A]-[B],$$

A et B étant deux points singuliers quelconques;

2° Soient deux lacets, l'un rectiligne, l'autre non rectiligne, enveloppant un même point singulier A. Soient [A] et (A) les deux intégrales correspondantes; la différence

$$(A)-[A]$$

sera égale au double d'une période.

Cela posé, supposons d'abord le polynome F indécomposable, et supposons que nous ayons $n+1$ points singuliers qui peuvent être distincts

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Nous pourrons alors avoir n périodes distinctes

$$[A_0]-[A_1], \quad [A_1]-[A_2], \quad \ldots, \quad [A_{n-1}]-[A_n].$$

Je dis qu'elles sont toutes nulles.

En effet, le polynome F étant indécomposable, les points A_0 et A_1 peuvent s'échanger. Je puis faire varier d'une manière continue A_0 de façon qu'il vienne en A_1. Le lacet rectiligne entourant A_0 se changera en un lacet, généralement non rectiligne, entourant A_1, de sorte qu'on aura

$$[A_0]=(A_1).$$

Mais $(A_1)-[A_1]$ est le double d'une période. Nous avons donc entre nos n périodes une équation linéaire à coefficients entiers. Le coefficient de $[A_0] - [A_1]$ est impair, celui des autres périodes est pair.

Nous trouverions de même $n-1$ autres équations linéaires. Le déterminant de ces équations ne saurait être nul. En effet, il est

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod 2.$$

Donc les n périodes sont nulles. C. Q. F. D.

Qu'arrive-t-il maintenant si le polynome F est décomposable? Si alors A_0 et A_1 appartiennent à deux facteurs différents de F, A_0 ne s'échange plus avec A_1. Mais voici comment on peut raisonner :

En faisant varier A_0 et A_1 d'une manière continue, je pourrai les amener en deux points B_0 et B_1 infiniment voisins l'un de l'autre et infiniment voisins de l'un des points d'intersection des deux courbes dans lesquelles se décompose la courbe $F = 0$.

Alors les lacets rectilignes $[A_0]$ et $[A_1]$ se changent dans les lacets non rectilignes (B_0) et (B_1), de sorte que

$$[A_0] - [B_0], \quad [A_1] - [B_1]$$

seront des doubles périodes.

Maintenant, en faisant varier d'une manière continue B_0 et B_1, je puis faire tourner B_0 autour de B_1; alors $[B_0]$ et $[B_1]$ se changent respectivement en

$$3[B_0] - 2[B_1], \quad 2[B_0] - [B_1],$$

d'où

$$[B_0] = 3[B_0] - 2[B_1]$$

ou

$$[B_0] = [B_1].$$

On en conclut que $[A_0] - [A_1]$ est encore une double période, et le reste de la démonstration se poursuit comme plus haut.

Cette démonstration suppose que B_0 peut tourner autour de B_1, sans qu'aucun autre point singulier soit très voisin de B_0 et de B_1. C'est ce qui arrivera si la courbe $F = 0$ se décompose en plusieurs courbes irréductibles, mais de telle sorte qu'aucun point d'intersection de deux de ces courbes composantes n'appartienne à plus de deux composantes et ne soit pas un point double pour l'une d'elles.

La démonstration s'applique donc, soit dans le cas général du problème du développement de la fonction perturbatrice, soit dans le cas particulier où les deux excentricités sont nulles.

Ainsi les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int (R\,dx + S\,dy),$$

où R et S sont rationnels en x, y et

$$z = \sqrt{F(x, y)}$$

ne peuvent avoir de périodes cycliques, mais seulement des périodes polaires.

Elles ne peuvent donc être transcendantes sans être logarithmiques. Elles seront donc de la forme suivante :

$$A_1 \log R_1 + A_2 \log R_2 + \ldots + A_p \log R_p + T,$$

où R_1, R_2, ..., R_p et T sont rationnels en x, y, z et où A_1, A_2, ..., A_p sont des constantes.

Mais il y a plus : si R (ainsi que S) est égal à z multiplié par une fonction rationnelle de x et de y, notre intégrale doit changer de signe quand on change z en $-z$, de telle sorte qu'elle devra être de la forme

$$A_1 \log \frac{P_1(x, y, z)}{P_1(x, y, -z)} + A_2 \log \frac{P_2(x, y, z)}{P_2(x, y, -z)} + \ldots + A_p \log \frac{P_p(x, y, z)}{P_p(x, y, -z)} + zU,$$

où U est rationnel en x et y, où les P sont des polynomes en x, y, z et les A des constantes.

Alors le dénominateur commun de R et S doit être de la forme

$$P_1(x, y, z) P_1(x, y, -z) P_2(x, y, z) P_2(x, y, -z) \ldots P_p(x, y, z) P_p(x, y, -z).$$

Nous sommes donc conduits à la règle suivante :

Soit

$$\int z \frac{B\,dx + C\,dy}{D}$$

une intégrale de différentielle totale, où B, C, D sont des polynomes entiers en x et y. Supposons cette intégrale logarithmique et soit D_1 l'un des facteurs de D.

La courbe gauche

$$D_1 = 0, \qquad F = z^2$$

doit se décomposer en deux autres.

Dans les intégrales que nous avons à envisager, le dénominateur est de la forme $x^\alpha y^\beta$, α et β étant des entiers; il n'y aurait donc aucune difficulté si les deux courbes gauches

$$x = 0, \qquad F' = z^2,$$
$$y = 0, \qquad F' = z^2$$

étaient indécomposables. Mais ce n'est pas ce qui arrive. Pour $x = 0$, F' se réduit à $a^2 y^2$, et pour $y = 0$, à $b^2 x^2$, a et b étant des coefficients constants.

La démonstration donnée plus haut dans un cas analogue n'est donc plus applicable et il faut en chercher une nouvelle.

S'il existait une intégrale logarithmique, elle serait de la forme

$$\int \frac{A\,dx + B\,dy}{x^\alpha y^\beta} \sqrt{F'},$$

A et B étant des polynomes en x et y.

Si nous faisons $x =$ const., elle deviendrait

$$\int C\,dy\,\sqrt{F'},$$

qui devrait admettre une période polaire quand on tournerait autour de $y = 0$, et ne devrait pas admettre de période cyclique.

C serait un polynome entier en y et $\frac{1}{y}$.

Comme F' est un polynome du quatrième degré en y, je poserai

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{F'}} = u,$$

et je désignerai par y_0, y_1, y_2, y_3 les quatre racines de l'équation

$$F' = 0.$$

Nous aurons alors

$$y = k \frac{\sigma(u - a)\,\sigma(u + a)}{\sigma(u - b)\,\sigma(u + b)},$$

où k, a et b sont des constantes.

Alors CF' qui est un polynome entier en y et $\frac{1}{y}$ sera une fonction doublement périodique de u, ne changeant pas quand on change u en $-u$. Elle admettra quatre pôles, à savoir $\pm a$ et $\pm b$.

Nous aurons

$$\int \mathrm{C}\, dy \sqrt{\mathrm{F}'} = \int \mathrm{CF}'\, du.$$

Décomposons CF′ en éléments simples, il viendra

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}' = {} & m\zeta(u-a) - m\zeta(u+a) + n\zeta(u-b) - n\zeta(u+b) + p \\ & + q[\zeta'(u-a) + \zeta'(u+a)] + r[\zeta'(u-b) + \zeta'(u+b)] + \mathrm{H},\end{aligned}$$

où m, n, p, q, r sont des coefficients constants et où H dépend des dérivées secondes des ζ ou des dérivées d'ordre plus élevé.

La partie transcendante de l'intégrale sera donc

$$\begin{aligned} & m \log \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+a)} + n \log \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+b)} + pu \\ & + q[\zeta(u-a) + \zeta(u+a)] + r[\zeta(u-b) + \zeta(u+b)].\end{aligned}$$

Notre intégrale ne doit pas admettre de période cyclique, cette partie transcendante ne doit donc pas changer quand u augmente de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$.

Si u augmente de 2ω, $\zeta(u)$ augmente de 2η et $\sigma(u)$ est multiplié par $-e^{2\eta(u+\omega)}$.

Donc notre transcendante augmente de

$$-4m\eta a - 4n\eta b + 2p\omega + 4(q+r)\eta.$$

Cette expression doit s'annuler quand on donne à ω, soit l'indice 1, soit l'indice 2, en donnant à η l'indice correspondant.

On aura donc

$$ma + nb = q + r, \qquad p = 0.$$

Faisons maintenant varier x d'une manière continue; a et b varieront d'une manière continue, m, n, q et r restent constants et p doit rester nul.

Il y a deux valeurs de x pour lesquelles une des racines de $\mathrm{F}' = 0$ (je puis toujours supposer que c'est celle que j'ai appelée y_0) devient nulle. Si x tourne autour d'une de ces deux valeurs, en décrivant un cercle très petit, y_0 tourne autour de zéro. Alors a se change en $-a$ et b ne change pas.

Comme notre relation doit toujours subsister, nous aurions

$$-ma + nb = q + r, \qquad \text{d'où} \qquad m = 0.$$

Nous trouverions de même

$$n = 0, \qquad \text{d'où} \qquad q + r = 0.$$

Cela montre que notre intégrale est algébrique. C. Q. F. D.

Cette démonstration s'applique au cas général; dans le cas particulier où les excentricités sont nulles, la démonstration est encore plus facile.

En effet, si l'intégrale est de la forme

$$\int \frac{A\,dx + B\,dy}{x^\alpha y^\beta} \sqrt{F'},$$

elle ne pourrait avoir de point singulier logarithmique que pour $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = \infty$, ou $y = \infty$.

Or F' est égal à xy, multiplié par un polynome du deuxième degré tant en x qu'en y.

Si donc on suppose x très petit et qu'on développe suivant les puissances de x, on n'aura que des puissances *impaires* de $\sqrt{x}$; on n'aura donc pas de terme en $\frac{dx}{x}$ qui introduirait un logarithme.

Donc $x = 0$ n'est pas un point singulier logarithmique et il en est de même de $y = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$. C. Q. F. D.

Cas général.

Nous avons vu que dans le cas général, c'est-à-dire si les excentricités ne sont pas nulles, ni les inclinaisons, F est un polynome du deuxième degré.

Désormais, sauf avis contraire, *j'entends par polynome de degré p, un polynome de degré p en x, y,* $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, de telle sorte que dans chacun de ses termes la somme des valeurs absolues des exposants de x et de y soit au plus égale à p.

Soit alors H un polynome de degré q. Il s'agit de savoir si l'on peut trouver deux polynomes P et Q de degré p et tels que

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(xP\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ\sqrt{F}),$$

d'où

$$H = F\left(x\frac{dP}{dx} + y\frac{dQ}{dy} + P + Q\right) + \frac{1}{2}\left(xP\frac{dF}{dx} + yQ\frac{dF}{dy}\right). \tag{23}$$

Nous généraliserons en supposant que F est un polynome de degré m.

Si l'on a

$$q = p + m,$$

nous dirons que le polynome H peut se mettre sous la forme (23 *bis*).

Si l'on a

$$q < p + m,$$

de telle façon que les termes de degré $p+m$ se détruisent dans le second membre de (23), nous dirons que H peut se mettre sous la forme (23 *ter*) et ce que nous avons d'abord à établir, c'est que si H peut se mettre sous la forme (23 *ter*), il peut se mettre sous la forme (23 *bis*).

Pour cela, j'adopterai la notation suivante. J'appellerai :

H_1 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en x et y;

H_2 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en x et $\frac{1}{y}$;

H_3 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en $\frac{1}{x}$ et y;

H_4 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Je définirai de même F_1, F_2, F_3, F_4, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Je remarque que H_1 et H_2 ont un terme commun, le terme en x^q; Je l'appellerai H_{12}; je définirai de même H_{13}, H_{24}, H_{34}, F_{12}, ... Cela posé, en prenant les termes du degré le plus élevé, en x et y, on aura, si $q = p + m$,

$$H_1 = F_1\left(x\frac{dP_1}{dx} + y\frac{dQ_1}{dy} + P_1 + Q_1\right) + \frac{1}{2}\left(xP_1\frac{dF_1}{dx} + yQ_1\frac{dF_1}{dy}\right).$$

Si, au contraire, H est de la forme (23 *ter*), les termes de degré $p+m$ doivent disparaître, et l'on aura

$$(24)\qquad 0 = F_1\left(x\frac{dP_1}{dx} + y\frac{dQ_1}{dy} + P_1 + Q_1\right) + \frac{1}{2}\left(xP_1\frac{dF_1}{dx} + yQ_1\frac{dF_1}{dy}\right)$$

ou

$$\frac{d}{dx}(xP_1\sqrt{F_1}) + \frac{d}{dy}(yQ_1\sqrt{F_1}) = 0.$$

Cela montre que

$$yQ_1\sqrt{F_1}\,dx - xP_1\sqrt{F_1}\,dy$$

est une différentielle exacte que j'appellerai

$$d(\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_1}).$$

C'est une fonction homogène de degré $p+2+\frac{m}{2}$ en x et y; on a donc

$$\left(p+2+\frac{m}{2}\right)\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_1} = xy\sqrt{\mathrm{F}_1}(\mathrm{Q}_1-\mathrm{P}_1).$$

Je poserai $\mathrm{Q}_1-\mathrm{P}_1=\mathrm{R}_1$, et je trouverai

$$\left(p+2+\frac{m}{2}\right)y\mathrm{Q}_1\sqrt{\mathrm{F}_1} = \frac{d}{dx}(xy\mathrm{R}_1\sqrt{\mathrm{F}_1})$$

ou

$$(25)\qquad \left(p+2+\frac{m}{2}\right)y\mathrm{Q}_1\mathrm{F}_1 = y\mathrm{R}_1\mathrm{F}_1 + xy\frac{d\mathrm{R}_1}{dx}\mathrm{F}_1 + \frac{1}{2}xy\mathrm{R}_1\frac{d\mathrm{F}_1}{dx}.$$

Cette équation montre que $x\frac{d\mathrm{F}_1}{dx}\mathrm{R}_1$ est divisible par F_1 $\left(\text{et comme } \mathrm{F}_1 \text{ est premier avec } x\frac{d\mathrm{F}_1}{dx}, \text{ dans le cas général}\right)$, que R_1 est divisible par F_1 (remarquons en passant que, d'après leur définition, F_1, P_1, Q_1, R_1 sont des polynomes entiers en x et y). Soit donc

$$\mathrm{R}_1 = \left(p+2+\frac{m}{2}\right)\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1.$$

On voit que S_1 sera un polynome entier homogène et d'ordre $p-m$ en x et y. On aura d'ailleurs

$$y\mathrm{Q}_1\sqrt{\mathrm{F}_1} = \frac{d}{dx}\left(xy\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x\mathrm{P}_1\sqrt{\mathrm{F}_1} = -\frac{d}{dy}\left(xy\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

Les termes du degré $p+m$ en x et $\frac{1}{y}$ doivent disparaître, ce qui donne

$$\frac{d}{dx}(x\mathrm{P}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}) + \frac{d}{dy}(y\mathrm{Q}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}) = 0,$$

ou bien

$$y\mathrm{Q}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}\,dx - x\mathrm{P}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}\,dy = d(\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_2}),$$

$\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_2}$ étant une fonction homogène de degré $p+\frac{m}{2}$ en x et $\frac{1}{y}$; on a donc, par le théorème des fonctions homogènes,

$$\left(p+\frac{m}{2}\right)\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_2} = xy\sqrt{\mathrm{F}_2}(\mathrm{Q}_2+\mathrm{P}_2).$$

Si je pose $\mathrm{Q}_2+\mathrm{P}_2=\mathrm{R}_2$, je retrouverai une équation analogue à (25), où le coefficient $p+2+\frac{m}{2}$ sera remplacé par $p+\frac{m}{2}$ et où l'indice 1 sera partout remplacé par l'indice 2. Cette équation montre que R_2 est divisible par F_2. Posons donc

$$R_2 = \left(p + \frac{m}{2}\right) S_2 F_2;$$

S_2 sera un polynome homogène de degré $p - m$ en x et $\frac{1}{y}$ et l'on aura

$$y Q_2 \sqrt{F_2} = \frac{d}{dx}\left(xy S_2 F_2^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x P_2 \sqrt{F_2} = -\frac{d}{dy}\left(xy S_2 F_2^{\frac{3}{2}}\right).$$

On démontrerait de même qu'on aura

$$y Q_3 \sqrt{F_3} = \frac{d}{dx}\left(xy S_3 F_3^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x P_3 \sqrt{F_3} = -\frac{d}{dy}\left(xy S_3 F_3^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$y Q_4 \sqrt{F_4} = \frac{d}{dx}\left(xy S_4 F_4^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x P_4 \sqrt{F_4} = -\frac{d}{dy}\left(xy S_4 F_4^{\frac{3}{2}}\right),$$

S_3 et S_4 étant des polynomes homogènes de degré $p - m$ en $\frac{1}{x}$ et y et en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

S_1 et S_2 contiennent un terme en x^{p-m}; soit S_{12} celui de S_1, S_{21} celui de S_2; je vais démontrer que $S_{12} = S_{21}$.

De

$$R_1 = \left(p + 2 + \frac{m}{2}\right) S_1 F_1, \qquad R_2 = \left(p + \frac{m}{2}\right) S_2 F_2,$$

on tire, en égalant les termes indépendants de y,

$$(Q_{12} - P_{12}) = \left(p + 2 + \frac{m}{2}\right) S_{12} F_{12},$$

$$(Q_{12} + P_{12}) = \left(p + \frac{m}{2}\right) S_{21} F_{12};$$

il faut donc démontrer que

$$\left(p + \frac{m}{2}\right)(Q_{12} - P_{12}) = \left(p + 2 + \frac{m}{2}\right)(Q_{12} + P_{12}),$$

ou

$$\left(p + 1 + \frac{m}{2}\right) P_{12} + Q_{12} = 0.$$

Égalons dans (24) les termes indépendants de y; ces termes, dans

$$P_1, \quad Q_1, \quad F_1, \quad x\frac{dF_1}{dx}, \quad x\frac{dP_1}{dx},$$

sont respectivement

$$P_{12}, \quad Q_{12}, \quad F_{12}, \quad mF_{12}, \quad pP_{12}.$$

Il vient donc

$$pP_{12} + P_{12} + Q_{12} + \frac{m}{2} P_{12} = 0,$$

ou

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right)P_{12}+Q_{12}=0.$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que

S_1 et S_3 ont même terme en y^{p-m},
S_2 et S_4 » y^{m-p},
S_3 et S_4 » x^{m-p}.

Il existe donc un polynome S de degré $p-m$, où

Les termes de degré $p-m$ en x et y sont S_1,
» x et $\frac{1}{y}$ » S_2,
» $\frac{1}{x}$ et y » S_3,
» $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ » S_4.

Posons alors

$$yQ''\sqrt{F}=\frac{d}{dx}\left(xy\,SF^{\frac{3}{2}}\right),\qquad xP''\sqrt{F}=-\frac{d}{dy}\left(xy\,SF^{\frac{3}{2}}\right).$$

On a donc

$$\frac{d}{dx}(xP''\sqrt{F})+\frac{d}{dy}(yQ''\sqrt{F})=0,$$

et par conséquent

$$\frac{H}{\sqrt{F}}=\frac{d}{dx}\left[x(P-P'')\sqrt{F}\right]+\frac{d}{dy}\left[y(Q-Q'')\sqrt{F}\right].$$

Les polynomes P et Q sont donc remplacés par $P-P''$ et $Q-Q''$ qui sont, comme nous allons le voir, de degré moindre. En effet, les termes de P'' et Q'', qui sont de degré $p-m$

en x et y sont P_1 et Q_1,
x et $\frac{1}{y}$ » P_2 et Q_2,
$\frac{1}{x}$ et y » P_3 et Q_3,
$\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ » P_4 et Q_4.

Le degré des polynomes P et Q peut donc toujours être abaissé si H est de la forme (23 *ter*), de sorte que H peut toujours être ramené à la forme (23 *bis*).

C. Q. F. D.

Il suffit donc de chercher si H peut se mettre sous la forme (23 *bis*).

Combien y a-t-il de polynomes H de degré $q = p + m$?

Il y en a

$$q^2 + (q+1)^2 = (p+m)^2 + (p+m+1)^2.$$

Combien y a-t-il de polynomes P de degré p?

Il y en a

$$p^2 + (p+1)^2,$$

et autant de polynomes Q, de sorte qu'il y a

$$2p^2 + 2(p+1)^2$$

expressions de la forme (23 *bis*). Mais toutes ces expressions ne sont pas distinctes, parce qu'il peut y avoir des polynomes P et Q, tels que

$$\frac{d}{dx}(xP\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ\sqrt{F}) = 0. \tag{26}$$

Cette équation exprime que

$$\int (yQ\sqrt{F}\,dx - xP\sqrt{F}\,dy)$$

est une intégrale de différentielle totale. Cette intégrale, d'après ce que nous avons vu, ne peut être transcendante; et, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on verrait qu'elle doit être de la forme $xySF^{\frac{3}{2}}$, S étant un polynome entier en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. On aura donc

$$(27)\qquad \begin{cases} Q = SF + x\dfrac{dS}{dx}F + \dfrac{3}{2}x\dfrac{dF}{dx}S, \\ P = -SF - y\dfrac{dS}{dy}F - \dfrac{3}{2}x\dfrac{dF}{dy}S. \end{cases}$$

Ces équations montrent que S doit être de degré $p - m$. Si, en effet, S était de degré

$$h > p - m,$$

il contiendrait un ensemble de termes homogènes de degré h en x et y que j'appellerais S_1 (et je définirais de même, comme plus haut, S_2, S_3, S_4). Les termes de degré $h + m$ devant disparaître dans le second membre de (27), on aurait

$$0 = S_1F_1 + x\frac{dS_1}{dx}F_1 + \frac{3}{2}x\frac{dF_1}{dx}S_1,$$

$$0 = -S_1F_1 - y\frac{dS_1}{dy}F_1 + \frac{3}{2}y\frac{dF_1}{dy}S_1,$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(xy\,\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dy}\left(xy\,\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0,$$

d'où $\mathrm{S}_1 = 0$.

On démontrerait de même que S_2, S_3 et S_4 sont nuls.

Donc S est de degré $p - m$, et il y a autant de relations (26) que de polynomes de degré $p - m$, c'est-à-dire

$$(p-m)^2 + (p-m+1)^2.$$

Combien y a-t-il alors de polynomes H distincts non susceptibles d'être mis sous la forme (23)? Il y en a

$$(p+m)^2 + (p+m+1)^2 - 2p^2 - 2(p+1)^2 + (p-m)^2 + (p-m+1)^2,$$

c'est-à-dire $4m^2$.

Dans le cas de la fonction perturbatrice, on a

$$m = 2, \qquad 4m^2 = 16.$$

Ainsi *les coefficients du développement de la fonction perturbatrice suivant les cosinus et sinus des multiples des anomalies excentriques sont des fonctions transcendantes des éléments. Mais ces fonctions transcendantes dépendent au plus de* 16 *transcendantes distinctes.*

Cas des excentricités nulles.

Alors, nous l'avons vu, le polynome F contient des termes en

$$xy, \quad x, \quad y, \quad 1, \quad x^{-1}, \quad y^{-1}, \quad x^{-1}y, \quad xy^{-1}, \quad x^{-1}y^{-1}.$$

J'entendrai désormais, sauf avis contraire, par polynome de degré p tout polynome où, dans chaque terme, l'exposant de x, non plus que celui de y, n'excède jamais p en valeur absolue.

En ce sens, F est un polynome de degré 1. Je généraliserai en supposant que F est un polynome de degré m.

Soit H un polynome de degré q; il s'agit de savoir s'il peut se mettre sous la forme (23). Je dirai encore que le polynome est de la forme (23 *bis*), si le degré p des polynomes P et Q (le mot *degré* est entendu au sens nouveau que je lui donne) est égal à $q - m$, et de la forme (23 *ter*) s'il est plus grand que $q - m$.

Je me propose encore d'établir que tout polynome de la forme (23 *ter*) est aussi de la forme (23 *bis*).

Adoptant des notations analogues à celles du paragraphe précédent, je désigne :

par P_1	l'ensemble des termes de	P	de degré	p	par rapport à	x,
P_2	»	P	»	p	»	y,
P_3	»	P	»	p	»	$\frac{1}{x}$,
P_4	»	P	»	p	»	$\frac{1}{y}$;
par Q_1	»	Q	»	p	»	x,
Q_2	»	Q	»	p	»	y,
Q_3	»	Q	»	p	»	$\frac{1}{x}$,
Q_4	»	Q	»	p	»	$\frac{1}{y}$;
par F_1	l'ensemble des termes de	F	de degré	m	par rapport à	x,
F_2	»	F	»	m	»	y,
F_3	»	F	»	m	»	$\frac{1}{x}$,
F_4	»	F	»	m	»	$\frac{1}{y}$.

Je désignerai toujours par P_{12} le terme commun à P_1 et à P_2, qui est alors un terme en $x^p y^p$, et je définirai de même $Q_{13}, \ldots, F_{12}, \ldots$.

Nous retrouverons alors l'équation (24), qui montre que

$$y Q_1 \sqrt{F_1}\, dx - x P_1 \sqrt{F_1}\, dy = dT_1$$

est une différentielle exacte. Si nous observons que par définition P_1, Q_1 et F_1 sont égaux à x^p ou à x^m multipliés par une fonction de y, nous voyons que T_1 doit être égal à $x^{p+1+\frac{m}{2}}$ multiplié par une fonction de y, c'est-à-dire que

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right) T_1 = x\frac{dT_1}{dx} = xy Q_1 \sqrt{F_1}.$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{dT_1}{dy}$, on trouve

$$-\left(p+1+\frac{m}{2}\right) P_1 F_1 = y\frac{dQ_1}{dy} F_1 + Q_1 F_1 + \frac{y}{2} Q_1 \frac{dF_1}{dy},$$

ce qui montre que Q_1 est divisible par F_1 $\left(\text{si, comme nous le supposons, } F_1 \text{ est premier avec } y\frac{dF_1}{dy}\right)$.

Nous pourrons alors poser

$$T_1 = xy S_1 F_1^{\frac{3}{2}},$$

S_1 étant égal à x^{p-m} multiplié par un polynome d'ordre $p-m$ en y et $\frac{1}{y}$.
Nous trouverons de même

$$y Q_2 \sqrt{F_2}\, dx - x P_2 \sqrt{F_2}\, dy = dT_2$$

et

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right) T_2 = -xy P_2 \sqrt{F_2};$$

on démontrerait de la même façon que

$$T_2 = xy S_2 F_2^{\frac{3}{2}},$$

S_2 étant égal à y^{p-m} multiplié par un polynome d'ordre $p-m$ en x et $\frac{1}{x}$.
Mais S_1 et S_2 ont tous deux un terme en $x^{p-m}y^{p-m}$; j'appelle S_{12} celui de S_1 et S_{21} celui de S_2. Je dis que $S_{12} = S_{21}$.

En effet, nous avons

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right) S_1 F_1 = Q_1, \qquad \left(p+1+\frac{m}{2}\right) S_2 F_2 = -P_2,$$

d'où

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right) S_{12} F_{12} = Q_{12}, \qquad \left(p+1+\frac{m}{2}\right) S_{21} F_{12} = -P_{12}.$$

Ce qu'il faut donc démontrer, c'est que

$$P_{12} + Q_{12} = 0.$$

Mais si dans l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(x P_1 \sqrt{F_1}\right) + \frac{d}{dy}\left(y Q_1 \sqrt{F_1}\right) = 0,$$

on conserve seulement les termes en $x^{p+m}y^{p+m}$, on trouve précisément

$$P_{12} + Q_{12} = 0.$$

On définirait de même S_3 et S_4, et l'on verrait comme plus haut que $S_{14} = S_{41}$, ...

Il existe donc un polynome S d'ordre $p-m$ dont les termes de degré $p-m$ en x, en y, en $\frac{1}{x}$, en $\frac{1}{y}$, sont respectivement S_1, S_2, S_3 et S_4, de telle façon que

$$y Q_1 \sqrt{F_1} = \frac{d}{dx}\left(xy S_1 F_1^{\frac{3}{2}}\right), \qquad \ldots.$$

Le reste du raisonnement se poursuivrait comme dans les paragraphes précédents et l'on verrait que tout polynome de la forme (23 *ter*) peut se ramener à la forme (23 *bis*).

Il suffit donc de rechercher si H peut être mis sous la forme (23 *bis*).

Or, combien y a-t-il de polynomes H de degré $q = p + m$? Il y en a

$$(2q+1)^2 = (2p+2m+1)^2.$$

Il y a $(2p+1)^2$ polynomes P de degré p et autant de polynomes Q et, par conséquent, $2(2p+1)^2$ expressions (23). Combien entre ces expressions y a-t-il d'équations (26)?

Si

$$\int (y\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}}\,dx - x\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{F}}\,dy)$$

est une intégrale de différentielle totale, cette intégrale ne peut être transcendante et doit être de la forme $xy\mathrm{S}\mathrm{F}^{\frac{3}{2}}$, S étant un polynome en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Les équations (27) qui sont encore valables montreraient que S est de degré $p - m$; car si S était de degré $h > p - m$, en écrivant que les termes en x^{h+m} disparaissent du second membre de (27), on trouverait

$$\frac{d}{dx}\left(xy\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dy}\left(xy\mathrm{S}_1\mathrm{F}_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0,$$

en appelant S_1 l'ensemble des termes de S en x^h. On aurait donc $\mathrm{S}_1 = 0$, et l'on verrait de même que les termes de S en y^h, en x^{-h} et en y^{-h} doivent disparaître.

Il y a donc autant de relations (26) que de polynomes de degré $p - m$, c'est-à-dire

$$(2p - 2m + 1)^2.$$

Combien alors de polynomes H non réductibles à la forme (23)? Il y en a

$$(2p+2m+1)^2 - 2(2p+1)^2 + (2p-2m+1)^2.$$

Cela fait $8m^2$.

Dans le cas de la fonction perturbatrice $m = 1$.

Il y a donc au plus huit transcendantes distinctes.

Influence de la symétrie.

Ce nombre peut encore être abaissé. Nous avons vu, en effet, que le polynome F ne change pas quand on change x en y, ni quand on change x et y en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. Nous ne nous servirons que de la première de ces deux symétries.

Ainsi F est un polynome symétrique en x et y.

Soit alors H un polynome symétrique en x et y.

Si nous avons

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(xP\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ\sqrt{F}),$$

je puis supposer que les polynomes P et Q se changent l'un dans l'autre quand on change x et y.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, en permutant x et y, on trouverait

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dy}[yP(y, x)\sqrt{F}] + \frac{d}{dx}[xQ(y, x)\sqrt{F}],$$

d'où

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}\left[x\sqrt{F}\,\frac{P(x, y) + Q(y, x)}{2}\right] + \frac{d}{dy}\left[y\sqrt{F}\,\frac{Q(x, y) + P(y, x)}{2}\right],$$

et il est clair que les deux polynomes

$$\frac{P(x, y) + Q(y, x)}{2}, \qquad \frac{Q(x, y) + P(y, x)}{2}$$

(qui remplacent P et Q) se permutent quand on change x et y.

Pour chercher combien il nous restera de transcendantes distinctes, il suffit de chercher combien il y a de polynomes H *symétriques* non susceptibles d'être mis sous la forme (23).

D'après ce qui précède, il suffit de chercher combien il y en a qui ne peuvent se mettre sous la forme (23 *bis*), les polynomes P et Q se permutant quand on change x en y. C'est ce que j'appellerai mettre H sous la forme (23 *quater*).

Il y a

$$(2q+1)(q+1) = (2p+2m+1)(p+m+1)$$

polynomes H symétriques de degré q.

Il y a $(2p+1)^2$ polynomes $P(x, y)$ de degré p. A chacun d'eux correspond le polynome

$$Q(x, y) = P(y, x).$$

Il y a donc $(2p+1)^2$ expressions (23 *quater*); mais toutes ne sont pas distinctes, car on peut avoir entre elles des relations de la forme

$$\frac{d}{dx}(x\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{F}})+\frac{d}{dy}(y\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}})=0, \tag{26 bis}$$

d'où

$$\sqrt{\mathrm{F}}(y\mathrm{Q}\,dx-x\mathrm{P}\,dy)=d\left(\mathrm{SF}^{\frac{3}{2}}\right).$$

Si l'on change x en y, le premier membre change de signe; donc $\mathrm{SF}^{\frac{3}{2}}$ change de signe, et comme F ne change pas, S change de signe.

Il y aura donc autant de relations (26 *bis*) que de polynomes S de degré $p-m$ qui changent de signe quand on change x en y, c'est-à-dire

$$(2p+2m+1)(p-m).$$

Le nombre des polynomes H symétriques non susceptibles d'être mis sous la forme (23) est donc

$$(2p+2m+1)(p+m+1)-(2p+1)^2+(2p-2m+1)(p-m),$$

c'est-à-dire

$$4m^2+2m.$$

Ici $m=1$; donc $4m^2+2m=6$.

Ainsi, *si les deux orbites sont circulaires* et les deux excentricités nulles et si l'on développe la fonction perturbatrice suivant les sinus et les cosinus des multiples des anomalies excentriques qui se confondent alors avec les anomalies moyennes, *les coefficients* sont des fonctions transcendantes des éléments; mais ils *dépendent au plus de six transcendantes distinctes*.

Tenons compte maintenant de la double symétrie du polynome F; il ne change pas, ni quand on permute x et y, ni quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$.

Pour que ces deux changements n'altèrent pas l'intégrable double

$$\iint\frac{\mathrm{H}\,dx\,dy}{\sqrt{\mathrm{F}}},$$

il faut et il suffit qu'ils n'altèrent pas non plus le polynome

$$\mathrm{H}'=xy\mathrm{H}.$$

Si H' est un polynome présentant cette double symétrie, et si H peut se mettre sous la forme (23), nous aurons

$$\text{(28)} \qquad H' = x\left(F\frac{dP'}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P'\right) + y\left(F\frac{dQ'}{dy} + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}Q'\right)$$

en posant

$$P' = xyP, \qquad Q' = xyQ.$$

Si H' a cette double symétrie, on pourra toujours supposer que P' se change en $-$P', et que Q' se change en $-$Q' quand x et y se changent en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, et, d'autre part, que P' se change en Q' et Q' en P', quand on permute x et y.

Cela se démontrerait comme plus haut.

Le polynome F est de degré m (je veux dire par là, comme plus haut, qu'il est de degré m par rapport à x et $\frac{1}{x}$, d'une part; par rapport à y et $\frac{1}{y}$, d'autre part).

Si P' et Q' sont d'ordre p, H' sera d'ordre $q = p + m$.

Il y a

$$(q+1)^2 = (p+m+1)^2$$

polynomes H' de degré q présentant cette symétrie.

Il y aura, d'autre part, $2p^2 + 2p$ polynomes P' de degré q se changeant en $-$P' quand x et y se changent en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. A chaque polynome P' correspondra un polynome

$$Q'(x, y) = P'(y, x).$$

Il y aura donc $2p^2 + 2p$ expressions (28). Il reste à savoir s'il n'y a pas entre elles des relations de la forme

$$\frac{d}{dx}\frac{P'\sqrt{F}}{y} + \frac{d}{dy}\frac{Q'\sqrt{F}}{x} = 0$$

ou

$$Q'\sqrt{F}\frac{dx}{x} - P'\sqrt{F}\frac{dy}{y} = d\left(S'F^{\frac{3}{2}}\right),$$

d'où

$$Q' = \quad x\left(F\frac{dS'}{dx} + \frac{3}{2}\frac{dF}{dx}S'\right),$$
$$P' = -y\left(F\frac{dS'}{dy} + \frac{3}{2}\frac{dF}{dy}S'\right).$$

On voit que S' sera un polynome d'ordre $p - m$; ce polynome change de signe quand on permute x et y; il ne change pas quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\left(\frac{1}{y}\right)$.

Il y aura donc autant de relations analogues aux relations (26) qu'il y aura de polynomes S' de degré $p - m$ présentant cette symétrie; c'est-à-dire

$$(p - m)^2.$$

Le nombre de nos transcendantes distinctes est alors, d'après un calcul que nous avons fait bien des fois,

$$(p + m + 1)^2 - 2p^2 - 2p + (p - m)^2,$$

c'est-à-dire

$$2m^2 + 2m + 1.$$

Si $m = 1$, on a

$$2m^2 + 2m + 1 = 5.$$

Donc *les coefficients du développement de la fonction perturbatrice dépendent au plus de cinq transcendantes distinctes, quand les deux excentricités sont nulles.*

Relation avec la théorie des périodes des intégrales doubles.

Il n'est peut-être pas inutile de dire comment j'ai été conduit à ces résultats. Les coefficients cherchés sont des périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{x^a y^b}{\sqrt{F}} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

Soit A_{ab} le coefficient en question; envisageons la fonction

$$\Phi(t, u) = \sum A_{ab} t^a u^b = \iint \frac{dx\,dy}{xy\sqrt{F}(1 - tx)(1 - uy)}$$

et étudions ses variations quand on fait varier t et u et, par conséquent, sa nature analytique.

Quand t décrira un contour fermé, les diverses périodes de l'intégrale double s'échangeront entre elles. Les nouvelles déterminations de $\Phi(t, u)$ seront donc des fonctions linéaires des anciennes. En d'autres termes, la fonction $\Phi(t, u)$ considérée comme fonction de t satisfera à une équation différentielle linéaire dont les coefficients seront des fonctions uniformes. L'ordre de cette équation sera au plus N, si N est le nombre des périodes de l'intégrale double.

De plus, la fonction sous le signe $\iint$ étant algébrique, tout point singulier de $\Phi(t, u)$ sera un simple point singulier algébrique ou logarithmique. Donc les coefficients de l'équation linéaire seront des fonctions rationnelles.

On arriverait au même résultat en considérant $\Phi(t, u)$ comme fonction de u; ou bien en supposant entre t et u une relation algébrique quelconque.

En résumé, la fonction $\Phi(t, u)$ et ses dérivées par rapport à t et à u satisfont à deux ou plusieurs équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles en t et en u.

On peut même, en chassant les dénominateurs, supposer que les coefficients des équations linéaires sont des polynomes entiers en t et en u.

Or, on sait que, si une fonction satisfait à une équation linéaire et si l'on connaît les premiers coefficients, tous les autres peuvent s'en déduire.

Nous devions donc prévoir que tous les coefficients dépendraient d'un nombre fini de transcendantes distinctes.

M. Féraud a présenté dernièrement à la Faculté des Sciences de Paris une Thèse où il se proposait d'étudier la valeur approchée des termes de degré élevé du développement en modifiant la méthode que j'ai exposée dans mon livre sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

Il a introduit une fonction qui présente de grandes analogies avec celle que je viens d'appeler $\Phi(t, u)$; il montra en même temps le lien qu'il y avait entre l'étude de cette fonction et celle des périodes des intégrales doubles.

Je fus ainsi conduit à penser à l'analogie étroite qu'il devait y avoir entre la théorie des périodes des intégrales doubles et celle des périodes des intégrales simples; je pensai en particulier au Mémoire de M. Fuchs, du tome 83 du *Journal de Crelle*, au sujet de l'équation linéaire à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale elliptique. Il est évident que l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1 - tx)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

doit satisfaire à une équation analogue et que l'étude de cette équation conduirait immédiatement aux relations de récurrence bien connues entre les coefficients b de Laplace.

Mais la théorie de ces coefficients de Laplace n'est pas autre chose que celle du développement de la fonction perturbatrice, quand les deux excentricités et l'inclinaison sont nulles.

On peut donc prévoir que le même procédé, appliqué aux intégrales doubles, donnera des relations de récurrence analogues entre les coefficients du développement quand l'inclinaison n'est pas nulle.

On remarquera également que la théorie qui remplit les pages précédentes est une généralisation toute naturelle de la réduction des intégrales hyperelliptiques, réduction qui aboutit, comme on sait, à la distinction des intégrales de première, deuxième et troisième espèce.

On peut donc entrevoir une relation entre le nombre des périodes et celui des intégrales de première et de deuxième espèce, ainsi que cela a lieu pour les intégrales hyperelliptiques et abéliennes.

Ce n'est pas tout; reprenons le coefficient du développement qui est représenté par l'intégrale

$$\iint \frac{x^a y^b}{\sqrt{F}} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

Cette intégrale peut être regardée comme une fonction des coefficients de F (et, par conséquent, des éléments du mouvement elliptique). Mais, quand ces coefficients varieront et, après avoir décrit des contours fermés, reviendront à leurs valeurs primitives, les périodes de l'intégrale double ne feront que s'échanger entre elles. C'est le même raisonnement que plus haut et le résultat est le même; notre intégrale, considérée comme fonction de l'un des éléments elliptiques, satisfera à une équation linéaire à coefficients rationnels.

Tout ce que nous venons de dire s'applique aux développements procédant suivant les anomalies excentriques. Passons au cas des développements procédant suivant les anomalies moyennes.

Un coefficient quelconque sera donné par l'intégrale

$$(1) \quad J = \iint \frac{x^a y^b}{\sqrt{F}} e^{\frac{a\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{b\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)} \left(\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2x^2}\right)\left(\frac{1}{y}-\frac{\varepsilon'}{2}-\frac{\varepsilon'}{2y^2}\right) dx\, dy;$$

e désigne la base des logarithmes népériens, ε et ε' les deux excentricités. C'est la présence du facteur transcendant

$$e^{\frac{a\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{b\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)},$$

qui empêche que les résultats précédents soient immédiatement applicables. C'est ce que j'appellerai le *facteur exponentiel*.

Nous voyons que les deux entiers a et b figurent, d'une part, dans le facteur $x^a y^b$ et, d'autre part, dans le facteur exponentiel; d'autre part, les deux excentricités ε et ε' figurent dans le facteur exponentiel et en dehors de ce facteur.

Si nous posons

$$\frac{a\varepsilon}{2} = \tau, \qquad \frac{b\varepsilon'}{2} = \tau',$$

le facteur exponentiel devient

$$e^{\tau x - \frac{\tau}{x} + \tau' y - \frac{\tau'}{y}},$$

et si nous considérons τ, τ', ε, ε', a, b comme des variables indépendantes, ce qui ne fait qu'étendre la généralité, τ et τ' n'entrent que dans le facteur exponentiel, et, au contraire, ε, ε', a et b ne figurent qu'en dehors de ce facteur.

Cette convention simplifiera l'énoncé des résultats.

On sait que si l'on pose

$$u = \int e^{zx} f(x)\, dx,$$

et si $f(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\sum A x^m \frac{d^k f}{dx^k} = 0,$$

la fonction u satisfait à l'équation conjuguée

$$\sum (-1)^m A \frac{d^m}{dz^m}(z^k u) = 0,$$

pourvu que le chemin d'intégration soit convenablement choisi, et en particulier si l'intégrale définie u est une période de l'intégrale indéfinie.

Soit de même V une période de l'intégrale double

$$V = \iint e^{zx+uy} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si la fonction $f(x, y)$ satisfait à une ou plusieurs équations linéaires de la forme

$$\sum A x^\alpha y^\beta \frac{d^{m+n} f}{dx^m\, dy^n} = 0, \tag{2}$$

la période V satisfera aux équations correspondantes

$$\sum A (-1)^{\alpha+\beta} \frac{d^{\alpha+\beta}(V z^m u^n)}{dz^\alpha\, du^\beta} = 0. \tag{3}$$

Or, si f est une fonction algébrique quelconque de x et de y, f satisfera à deux équations linéaires à coefficients rationnels en x et y. Donc V satisfera de même à deux équations linéaires à coefficients rationnels en z et u.

Cela peut d'abord s'appliquer à la recherche des relations de récurrence entre les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$, recherche qui nous a occupés dans les paragraphes précédents.

En effet, la fonction $\frac{1}{\sqrt{F}}$ étant algébrique, l'intégrale

$$V = \iint e^{zx+uy} \frac{dx\,dy}{\sqrt{F}}$$

satisfera à deux équations analogues à (3). De ces équations il est aisé de déduire des relations de récurrence entre les coefficients du développement de V suivant les puissances de $z^a u^b$. Or le coefficient de $\frac{z^a u^b}{a!\,b!}$ est précisément l'intégrale

$$\iint \frac{x^a y^b\,dx\,dy}{\sqrt{F}},$$

c'est-à-dire l'un des coefficients du développement cherché de $\frac{1}{\sqrt{F}}$.

D'autre part, posons

$$x - \frac{1}{x} = \xi, \qquad y - \frac{1}{y} = \eta;$$

l'intégrale (1) pourra s'écrire

$$J = \iint e^{\tau\xi + \tau'\eta} \Phi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

$\Phi(\xi, \eta)$ est une fonction algébrique de ξ et de η. Donc J, considéré comme fonction de τ et de τ', satisfait à deux équations de la forme (3).

Mais on peut encore mettre l'intégrale J sous une autre forme où le même résultat apparaîtra d'une façon non moins évidente. L'intégrale J peut être regardée comme un cas particulier de la suivante

$$\iint e^{\tau x - \frac{\tau_1}{x} + \tau' y - \frac{\tau'_1}{y}} \varphi(x, y) \frac{dx\,dy}{\sqrt{F}},$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et de y et où τ, τ_1, τ', τ'_1 sont regardées comme des variables indépendantes entre elles, et indépendantes également, d'après la convention faite plus haut, de ε et ε' qui continuent à figurer dans φ et dans F.

On retrouve l'intégrale J en faisant

$$\tau = \tau_1, \qquad \tau' = \tau'_1.$$

Nous voyons ensuite qu'à un facteur constant près cette intégrale est une période de l'intégrale quadruple

$$\int e^{\tau x + \tau_1 x_1 + \tau' y + \tau'_1 y_1} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1}{\sqrt{F}\left(x_1 + \frac{1}{x}\right)\left(y_1 + \frac{1}{y}\right)},$$

ou encore une période de l'intégrale quintuple

$$\int e^{\tau x + \tau_1 x_1 + \tau' y + \tau'_1 y_1} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1\, dz}{(z^2 F - 1)\left(x_1 + \frac{1}{x}\right)\left(y_1 + \frac{1}{y}\right)}.$$

Je regarderai cette intégrale comme un cas particulier de la suivante :

$$(4) \qquad \int e^{\tau x + \tau_1 x_1 + \tau' y + \tau'_1 y_1 + uz} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1\, dz}{(z^2 F - 1)\left(x_1 + \frac{1}{x}\right)\left(y_1 + \frac{1}{y}\right)}.$$

L'intégrale se trouve ainsi mise sous la forme convenable. Sous le signe $\int$ nous avons le produit d'un facteur exponentiel et d'une fonction algébrique (et même rationnelle) des cinq variables x, y, x_1, y_1, z.

Donc l'intégrale considérée comme fonction de τ, τ_1, τ', τ'_1 et u satisfera à cinq équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

Toutes les dérivées partielles des différents ordres de cette intégrale par rapport à τ, τ_1, τ', τ'_1 et u peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles; et cela par le moyen de ces cinq équations différentielles et de celles qu'on en déduit par différentiation (je reviendrai tout à l'heure sur ce point).

Donc, si nous considérons les intégrales

$$(5) \qquad \int e^{H} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1\, dz}{(z^2 F - 1)\left(x_1 + \frac{1}{x}\right)\left(y_1 + \frac{1}{y}\right)} x^a y^b x_1^{a_1} y_1^{b_1} z^c,$$

où $H = \tau x + \tau_1 x_1 + \tau' y + \tau'_1 y_1 + uz$ et où a, b, c, a_1, b_1 sont des entiers, toutes ces intégrales peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Reprenons maintenant l'intégrale (4). Nous venons de la considérer comme fonction des τ et de u; mais nous regarderons maintenant u et les τ comme des constantes et nous ferons varier les éléments elliptiques (et entre autres ε et ε') dont dépend la partie rationnelle de la fonction sous le signe $\int$.

La dérivée de J par rapport à l'un de ces éléments, ou une dérivée partielle d'ordre quelconque de J par rapport à ces divers éléments, sera de la forme

$$\iint e^{\mathrm{H}} \frac{dx\,dy}{(\sqrt{\mathrm{F}})^{\mathrm{K}}} \mathrm{P}, \tag{6}$$

où e^{H} représente le facteur exponentiel et où P est un polynome en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

De même que l'intégrale (1) a été ramenée à l'intégrale (4), de même cette intégrale (6) se ramènerait à une combinaison d'intégrales de la forme (5).

Donc les diverses dérivées partielles de J peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Un dernier point que j'avais réservé reste à examiner. Soit l'intégrale triple

$$\mathrm{J} = \iiint e^{tx+uy+vz} \mathrm{R}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{7}$$

où R est rationnel en x, y et z; je dis que les dérivées partielles de J par rapport à t, à u et à v peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

J'ai énoncé plus haut cette propriété, sans la démontrer, en ce qui concerne l'intégrale (4); établie pour l'intégrale triple (7), elle s'étendrait évidemment à l'intégrale quintuple (4). Soit

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},$$

P et Q étant des polynomes.

R satisfera aux équations différentielles

$$\mathrm{PQ}\frac{d\mathrm{R}}{dx} = \mathrm{R}\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right),$$

$$\mathrm{PQ}\frac{d\mathrm{R}}{dy} = \mathrm{R}\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dy} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\right),$$

$$\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dy} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\right)\frac{d\mathrm{R}}{dx} = \frac{d\mathrm{R}}{dy}\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{R}}{dx} & \frac{d\mathrm{R}}{dy} & \frac{d\mathrm{R}}{dz} \\ \frac{d\mathrm{P}}{dx} & \frac{d\mathrm{P}}{dy} & \frac{d\mathrm{P}}{dz} \\ \frac{d\mathrm{Q}}{dx} & \frac{d\mathrm{Q}}{dy} & \frac{d\mathrm{Q}}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons à former les équations correspondantes auxquelles satisfait J et qui se déduisent des premières comme l'équation (3) se déduit de l'équation (2).

A chaque polynome en x, y, z correspondra un opérateur.

Au polynome

$$\sum \mathrm{A}\, x^m y^n z^p$$

correspond l'opérateur

$$\sum \mathrm{A}\,(-1)^{m+n+p} \frac{d^{m+n+p}}{dt^m\, du^n\, dv^p}.$$

Soient

$$\Delta, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \mathrm{D}_1, \quad \mathrm{D}_2, \quad \mathrm{D}_3$$

les opérateurs qui correspondent aux polynomes

$$\mathrm{PQ}, \qquad \mathrm{S}_1 = \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}, \qquad \mathrm{S}_2 = \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dy} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dy},$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{d\mathrm{Q}}{dz} - \frac{d\mathrm{P}}{dz}\frac{d\mathrm{Q}}{dy}, \qquad \mathrm{T}_2 = \frac{d\mathrm{P}}{dz}\frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d\mathrm{Q}}{dz},$$

$$\mathrm{T}_3 = \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d\mathrm{Q}}{dy} - \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}.$$

Alors les équations auxquelles satisfait J s'écriront

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta(t\mathrm{J}) = \Delta_1 \mathrm{J}, \\ \Delta(u\mathrm{J}) = \Delta_2 \mathrm{J}, \\ \Delta_1(u\mathrm{J}) = \Delta_2(t\mathrm{J}), \\ \mathrm{D}_1(t\mathrm{J}) + \mathrm{D}_2(u\mathrm{J}) + \mathrm{D}_3(v\mathrm{J}) = 0. \end{cases}$$

Pour démontrer que toutes les dérivées de J d'ordre suffisamment élevé peuvent s'exprimer à l'aide des dérivées d'ordre moindre, il suffira de montrer qu'une combinaison linéaire quelconque des dérivées d'ordre M peut être regardée comme obtenue de la façon suivante :

Parmi les équations que l'on peut déduire des équations (8), par différentiation, distinguons celles qui sont d'ordre M.

Soient

$$\mathrm{H}_1 = 0, \qquad \mathrm{H}_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{H}_\mathrm{K} = 0$$

ces équations. Soient H'_1, H'_2, ..., H'_K les termes de H_1, H_2, ..., H_K qui contiennent des dérivées d'ordre M.

Je dis que toute combinaison linéaire des dérivées d'ordre M de la fonction J pourra se mettre sous la forme

$$\beta_1 \mathrm{H}'_1 + \beta_2 \mathrm{H}'_2 + \ldots + \beta_\mathrm{K} \mathrm{H}'_\mathrm{K},$$

les β étant des fonctions de t, u, v.

Les termes de l'ordre le plus élevé des équations (8) sont :

$$t\Delta' J, \quad u\Delta' J, \quad u\Delta'_1 J - t\Delta'_2 J,$$
$$tD'_1 J + uD'_2 J + vD'_3 J,$$

où Δ', Δ'_1, Δ'_2, D'_1, D'_2, D'_3 représentent les opérateurs obtenus en conservant les dérivées de l'ordre le plus élevé dans les opérateurs Δ, Δ_1, ...; ils correspondent respectivement aux polynomes P', Q', S'_1, S'_2, T'_1, T'_2, T'_3 obtenus en conservant dans les polynomes P, Q, S_1, S_2, T_1, T_2, T_3 les termes du degré le plus élevé.

Dans une équation d'ordre M obtenue en différentiant et combinant les équations (8), les termes d'ordre M seront de la forme

$$\beta_1 t\square_1 \Delta' J + \beta_2(u\square_2 \Delta'_1 J - t\square_2 \Delta'_2 J) + \beta_3(t\square_3 D'_1 J + u\square_3 D'_2 J + v\square_3 D'_3 J), \tag{9}$$

où β_1, β_2, β_3 sont des fonctions, $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$ des opérateurs quelconques.

Ce qu'il s'agit de démontrer, c'est que toute combinaison des dérivées d'ordre M peut se mettre sous la forme (9), ou, ce qui revient au même, que tout polynome homogène d'ordre M en x, y et z peut se mettre sous la forme

$$\beta_1 tP'Q'V_1 + \beta_2 V_2(uS'_2 - tS'_2) + \beta_3 V_3(tT'_1 + uT'_2 + vT'_3),$$

où V_1, V_2, V_3 sont des polynomes arbitraires correspondant aux opérateurs $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$.

Or, pour cela, il suffit que les trois polynomes

$$P'Q', \quad uS'_1 - tS'_2, \quad tT'_1 + uT'_2 + vT'_3$$

ne puissent s'annuler à la fois.

C'est justement ce qui a lieu quand on attribue des valeurs quelconques aux trois indéterminées t, u et v et quand les polynomes P et Q sont les plus généraux de leur degré.

Le théorème démontré quand les polynomes P et Q sont les plus généraux de leur degré sera vrai (et pourrait se démontrer par passage à la limite) pour des polynomes quelconques.