DÉVELOPPEMENT

DE LA

FONCTION PERTURBATRICE

Bulletin astronomique, t. 15, p. 449-464 (décembre 1898).

1. Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice sont eux-mêmes des fonctions des éléments et peuvent être développés, par exemple, suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. On peut se proposer de rechercher quelles sont les conditions de convergences de ces développements.

Nous désignerons par Δ la distance des deux planètes, par u et u' les deux anomalies excentriques, par l et l' les deux anomalies moyennes, et nous étudierons le développement de $\frac{1}{\Delta}$, c'est-à-dire de la partie principale de la fonction perturbatrice; nous distinguerons le développement suivant les anomalies moyennes et le développement suivant les anomalies excentriques.

Soient

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma A_{m,m'} E^{\sqrt{-1}(ml+m'l')}$$

le premier de ces développements et

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma B_{m,m'} E^{\sqrt{-1}(mu+m'u')}$$

le second. Je représente par E la base des logarithmes népériens.

Les coefficients $A_{m,m'}$, de même que les coefficients $B_{m,m'}$ peuvent s'exprimer par des intégrales définies.

Posons

$$x = E^{\sqrt{-1}\,u}, \qquad y = E^{\sqrt{-1}\,u'}.$$

Alors $\Delta^2 x^2 y^2$ sera un polynome du sixième degré en x et y.

Soient e et e' les deux excentricités et posons

$$\Omega = \frac{me}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{m'e'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$V = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Nous aurons alors

$$(1) \qquad 4\pi^2 B_{m,m'} = \iint \frac{dx\,dy}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta},$$

$$(2) \qquad 4\pi^2 A_{m,m'} = \iint \frac{dx\,dy\,V E^{\Omega}}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta},$$

les intégrales étant prises le long des deux circonférences

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1.$$

Considérons ces intégrales définies comme des fonctions des excentricités et des inclinaisons; ces fonctions seront évidemment développables suivant les puissances de ces variables pourvu qu'elles soient assez petites.

Pour trouver les limites de convergence de ces développements, j'appliquerai la méthode de Cauchy et chercherai quels sont les points singuliers de ces intégrales définies, considérées comme fonctions des excentricités et des inclinaisons.

2. Nous sommes donc ainsi amenés à expliquer comment on trouve les points singuliers des fonctions représentées par des intégrales définies et d'abord par des intégrales définies simples.

Soit

$$\int F(x, z)\,dx,$$

une intégrale définie prise par rapport à x le long d'un certain contour : cette intégrale sera alors fonction du paramètre z.

Pour que, pour cette fonction, une valeur de z soit critique, il faut d'abord que l'un des points singuliers de $F(x, z)$, considérée comme fonction de x, se trouve sur le coutour d'intégration.

Mais comme on peut déformer ce contour d'une manière continue, on peut le faire fuir devant le point singulier, et l'on n'est arrêté que quand ce contour se trouve pris entre deux points singuliers et ne peut plus fuir.

On obtiendra donc toutes les valeurs critiques de z, en exprimant que deux des points singuliers de F, considérée comme fonction de x, se confondent. Mais toutes les valeurs critiques ainsi trouvées ne conviennent pas; il faut, en effet, que les deux points singuliers qui se confondent ainsi soient, avant de s'être confondus de part et d'autre du contour; c'est seulement à cette condition que le contour pris entre deux feux, ne peut plus fuir.

Soit donc

$$\varphi(x, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction $F(x, z)$ présente une singularité, et supposons qu'elle se décompose en un certain nombre d'équations indépendantes, trois par exemple :

$$\varphi_1(x, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, z) = 0.$$

On obtiendra les valeurs critiques de z de l'une des deux manières suivantes :

1° En annulant deux des trois fonctions φ_1, φ_2, φ_3, et en écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \varphi_2(x, z) = 0;$$

en éliminant x et résolvant par rapport à z, on aura une valeur critique de z;

2° En annulant l'une de ces trois fonctions et sa dérivée et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

On aura encore une valeur critique de z en éliminant x et résolvant par rapport à z.

3. Considérons maintenant une intégrale double

$$\iint F(x, y, z)\, dx\, dy,$$

envisagée comme fonction du paramètre z et étendue à un champ quelconque.

Le cas particulier le plus simple est celui où l'on doit intégrer par rapport à x, le long d'un contour fixe indépendant de y, et par rapport à y, le long d'un contour fixe indépendant de x. C'est précisément ce cas particulier simple que l'on rencontre en ce qui concerne les intégrales (1) et (2).

Si l'on ne donne à x et à y que des valeurs réelles, de telle façon que le champ d'intégration se réduise à une aire plane ordinaire, ce cas particulier simple correspond au cas où cette aire est un rectangle.

Le cas général peut d'ailleurs toujours être ramené à ce cas particulier simple. Pour nous en rendre compte, supposons d'abord qu'on ne donne à x et y que des valeurs réelles et que le champ d'intégration soit une aire plane. Cette aire plane pourra toujours être décomposée en une infinité d'aires rectangulaires, les une finies, les autres de dimensions indéfiniment décroissantes. Pour que l'intégrale totale présente une singularité, il faut et il suffit que l'une des intégrales étendues aux aires rectangulaires partielles ait une singularité. Il suffit donc de considérer les aires rectangulaires.

Le même raisonnement, que je ne développe d'ailleurs pas entièrement, serait applicable quand on donnerait aux variables des valeurs imaginaires, si l'on observe d'autre part que l'on peut toujours déformer le champ d'intégration d'une manière continue.

On ne restreint donc pas d'une façon essentielle la généralité en se supposant placé dans ce cas particulier simple; peu nous importe d'ailleurs au point de vue qui nous occupe, puisque avec les intégrales (1) et (2) nous nous trouvons d'emblée dans ce cas simple.

Soient donc C_x et C_y les deux contours fixes d'intégration par rapport à x et à y. Soit

$$\theta(y, z) = \int F(x, y, z)\, dx,$$

l'intégrale étant prise le long de C_x.

Notre intégrale double sera alors

$$\eta(z) = \int \theta(y, z)\, dy,$$

l'intégrale étant prise le long de C_y.

Nous n'avons plus qu'à appliquer les principes du numéro précédent aux deux intégrales simples

$$\int F\, dx, \quad \int \theta\, dy.$$

Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction F a une singularité.

Décomposons cette équation en équations irréductibles

$$(3)\qquad \varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, y, z) = 0.$$

On obtiendra les singularités de la fonction $\theta(y, z)$:

1° En annulant deux des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

2° En annulant une des trois fonctions et sa dérivée et écrivant

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

Ces singularités peuvent ne pas toutes convenir, car il peut arriver que les deux points singuliers, qui se confondent, soient d'un même côté du contour d'intégration.

Pour avoir les singularités de $\eta(z)$, considérons maintenant celles de $\theta(y, z)$, qui nous seront données par des systèmes d'équations de l'une des deux formes

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$
$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0,$$

et cherchons les conditions pour que deux de ces singularités se confondent.

Si nous considérons z comme un paramètre, x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, les équations (3) représentent un certain nombre de courbes planes.

Les singularités de θ données par un système d'équations de la forme

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

correspondront aux points d'intersection de ces courbes; celles qui seront données par un système de la forme

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

correspondront aux points de contact d'une de ces courbes avec une tangente parallèle à l'axe des y.

Pour que deux de ces singularités se confondent, il faut :

1° Ou bien que trois des fonctions φ s'annulent à la fois.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0;$$

2° Ou bien que l'on ait à la fois

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \qquad \varphi_2 = 0;$$

mais comme la condition ne doit pas dépendre du choix des coordonnées, et qu'en particulier elle doit subsister quand on permute x et y, on devra avoir aussi

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0,$$

ce qui veut dire que l'une des courbes (3) aura un point double;

3° Ou bien que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre ;

4° Ou enfin que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre. Mais cela entraîne :

$$\text{ou bien} \quad \frac{d\varphi_1}{dy} = 0, \qquad \text{ou bien} \quad \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0;$$

mais, comme la condition ne doit pas changer quand on permute x et y, on devra avoir dans tous les cas

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0.$$

En résumé, les valeurs critiques de z sont :

1° Celles pour lesquelles trois des courbes (3) se coupent en un même point;

2° Celles pour lesquelles deux de ces courbes sont tangentes;

3° Celles pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Seulement toutes ces valeurs peuvent ne pas convenir, car les deux singularités qui se confondent peuvent être situées d'un même côté du contour d'intégration.

4. Appliquons ces principes aux intégrales (1) et (2). La fonction sous le signe $\int$ sera holomorphe tant par rapport à x et y que par rapport aux excentricités e et e' et à $\sin\frac{J}{2}$, J étant l'inclinaison.

Il y aura exception seulement :

1° Si $e=1$ ou $e'=1$ (condition où x et y n'interviennent pas et sur laquelle nous reviendrons);

2° Si x ou y est nul ou infini;

3° Si Δ s'annule, c'est-à-dire si

$$F=\Delta x^2 y^2,$$

qui est un polynome entier du sixième ordre en x, y, est égal à zéro.

Cela est vrai quels que soient les entiers m et m'; cela est vrai d'ailleurs aussi bien de l'intégrale (2) que de l'intégrale (1), car V et E^{Ω} ne cessent d'être holomorphes que si x ou y est nul ou infini.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3), c'est-à-dire celles dont les équations expriment que la fonction sous le signe $\int$ cesse d'être holomorphe, se réduisent donc, en ce qui concerne les intégrales (1) et (2), aux quatre droites

$$(4) \qquad x=0, \qquad y=0, \qquad x=\infty, \qquad y=\infty$$

et à la courbe du sixième degré

$$(4\,bis) \qquad F=0.$$

Cette dernière, dans le cas où l'inclinaison est nulle, se décompose en deux courbes du troisième degré

$$(4\,ter) \qquad F_1=0, \qquad F_2=0.$$

Pour trouver les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons, nous devons donc chercher celles pour lesquelles trois de ces courbes (4) ou (4 *bis*) se coupent, ou pour lesquelles deux de ces courbes se touchent, ou pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Mais, comme ces courbes sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2), les valeurs pour lesquelles une de ces trois circonstances se présentera, seront également les mêmes pour les intégrales (1) et (2).

Ainsi les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons sont les mêmes pour les deux intégrales (1) et (2).

Mais une question pourrait encore se poser; nous avons vu que toutes les valeurs critiques ne conviennent pas. Ne pourrait-il se faire qu'une de ces valeurs convînt à (1) sans convenir à (2) ou inversement.

La réponse doit être négative. Comment se fait-il, en effet, que certaines valeurs critiques conviennent et que d'autres ne conviennent pas? Pour nous en rendre compte, faisons varier d'une manière continue l'un de nos paramètres, par exemple l'excentricité e, et, en même temps, déformons d'une manière continue les contours d'intégration. Nous devons diriger cette déformation de telle sorte qu'aucune des valeurs singulières définies par les équations (4) et (4 *bis*) ne se trouve dans le champ d'intégration. Si, e variant d'une manière continue depuis zéro jusqu'à e_0, on peut s'arranger de façon que cette condition ne cesse jamais d'être remplie, c'est que e_0 n'est pas une véritable valeur critique; e_0 ne convient pas; si, au contraire, il est impossible de s'arranger pour que la condition soit remplie (parce que, comme je l'expliquais plus haut, le contour d'intégration se trouve pris entre deux points singuliers), c'est que e_0 est une véritable valeur critique; e_0 convient.

Faisons donc varier e de zéro à e_0 et, en même temps, déformons nos contours d'intégration en partant des contours initiaux

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1$$

qui sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2); si e_0 ne convient pas à l'intégrale (1), c'est que nous pouvons déformer nos contours de telle façon qu'à aucun moment une des valeurs singulières satisfaisant aux équations (4) et (4 *bis*) ne se trouve dans le champ d'intégration. Mais si cette condition ne cesse jamais d'être remplie en ce qui concerne l'intégrale (1), elle ne cessera jamais non plus de l'être en ce qui concerne l'intégrale (2), puisque les équations (4) et (4 *bis*) qui définissent les valeurs singulières sont les mêmes pour (1) et pour (2). Donc e_0 ne conviendra pas non plus à l'intégrale (2).

C. Q. F. D.

Voici donc un premier résultat.

Les coefficients $B_{m,m'}$ *du développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies excentriques, ainsi que les coefficients* $A_{m,m'}$ *du développement suivant les anomalies moyennes sont eux-mêmes développables suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons.*

Les limites de convergence de ces nouveaux développements sont les mêmes pour les coefficients $B_{mm'}$ et pour les coefficients $A_{mm'}$; elles sont les mêmes pour tous ces coefficients quels que soient les entiers m et m'.

5. Considérons le cas particulier où les excentricités sont nulles

$$e = e' = 0.$$

On a alors

$$\Omega = 0, \qquad V = 1$$

et, par conséquent,

$$A_{m,m'} = B_{m,m'}.$$

On a alors

$$\Delta^2 = \cos^2\frac{J}{2}\left[a^2 + a'^2 - aa'\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right] + \sin^2\frac{J}{2}\left[a^2 + a'^2 - aa'\left(xy + \frac{1}{xy}\right)\right].$$

Si nous posons

$$X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \qquad Y = xy + \frac{1}{xy};$$

on en tirera

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - aa' X \cos^2\frac{J}{2} - aa' Y \sin^2\frac{J}{2}.$$

On trouvera toutes les singularités en écrivant que la courbe $\Delta^2 = 0$ a un point double; or, comme Δ^2 est fonction linéaire de X et de Y, cette courbe ne peut avoir de point double que si les équations

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = Z, \qquad xy + \frac{1}{xy} = Y,$$

où X et Y sont regardés comme les données, $\frac{x}{y}$ et xy comme les inconnues, ont l'une et l'autre une racine double, d'où

$$X = \pm 2, \qquad Y = \pm 2.$$

Voici donc la condition pour que la courbe $\Delta^2 = 0$ ait un point double

$$a^2 + a'^2 \pm 2\, aa' \cos^2\frac{J}{2} \pm 2\, aa' \sin^2\frac{J}{2} = 0. \tag{5}$$

Il n'y a pas lieu de chercher ce que donneraient les autres conditions, à savoir que trois des courbes (3) passent par un même point ou que deux de ces courbes se touchent. Ici, où les courbes (3) sont les quatre droites (4) et la courbe $\Delta^2 = 0$, aucune de ces circonstances ne se présentera.

Il reste donc à étudier la condition (5).

Posons $\nu = \sin^2\frac{J}{2}$ et proposons-nous de développer suivant les puissances croissantes de ν. La condition (5) devient

$$a^2 + a'^2 + 2\,aa'[\pm(1-\nu) \pm \nu] = 0,$$

ce qui peut s'écrire de l'une des deux manières suivantes :

$$(5\,bis) \qquad (a' \pm a)^2 = 0; \qquad a^2 + a'^2 \pm 2\,aa'(1-2\nu) = 0.$$

Dans la première de ces relations ν n'entre pas; la seconde donne

$$\pm\nu = \frac{(a' \pm a)^2}{4\,aa'}.$$

Le rayon de convergence sera donc la plus petite des deux valeurs

$$\left|\frac{(a' \pm a)^2}{4\,aa'}\right|,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(a'-a)^2}{4\,aa'}.$$

Ainsi la condition de convergence du développement sera

$$\sin^2\frac{J}{2} < \frac{(a'-a)^2}{4\,aa'}.$$

La discussion des équations (5 *bis*) montrerait de même que les coefficients $A_{m,m'}$ sont développables suivant les puissances de a, pourvu que

$$a < a'.$$

Mais on peut encore envisager un autre mode de développement.

Posons

$$\mu = \cos^2\frac{J}{2},$$

on aura

$$\mu + \nu = 1,$$

Mais nous pourrons écrire

$$4\pi^2 A_{m,m'} = \iint \frac{dx\,dy}{x^{m+1}y^{m'+1}\sqrt{(a^2+a'^2) - \mu aa'\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) - \nu aa'\left(xy+\frac{1}{xy}\right)}}.$$

La quantité sous le radical se réduit évidemment à Δ^2 quand on fait $\mu = \cos^2\frac{J}{2}$, $\nu = \sin^2\frac{J}{2}$. Mais nous pouvons regarder $A_{m,m'}$ comme fonction de μ

et de ν considérées comme des variables indépendantes, et développer cette fonction suivant les puissance croissantes de μ et de ν.

La relation (5), qui définit les limites de convergence, s'écrit alors

$$a^2 + a'^2 \pm 2aa'\mu \pm 2aa'\nu = 0$$

ou

$$\pm\mu \pm \nu = \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

La condition de convergence du développement est donc

$$|\mu| + |\nu| < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Cette condition est toujours remplie, car on a

$$|\mu| = \mu; \qquad |\nu| = \nu;$$

$$|\mu| + |\nu| = 1 < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Nos coefficients sont donc toujours développables suivant les puissances de $\cos^2 \frac{J}{2}$ *et* $\sin^2 \frac{J}{2}$.

6. Considérons maintenant le cas particulier où l'inclinaison est nulle et développons suivant les puissances des excentricités e et e'.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3) sont les courbes (4) et (4 *ter*), à savoir

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x = \infty, \qquad y = \infty, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0.$$

1° Cherchons d'abord la condition pour que $F_1 = 0$ ait un point double. Pour nous en rendre compte, cherchons la signification de ces équations. Soient C l'orbite de la première planète, C′ celle de la seconde; d'après notre hypothèse ces deux coniques sont dans un même plan. A chaque valeur de x correspond un point M de la conique C et à chaque valeur de y un point M′ de la conique C′.

L'équation $F = 0$ exprime alors que la distance MM′ est nulle, ce qui peut ne pas vouloir dire que les deux points M et M′ coïncident puisque ces deux points peuvent être imaginaires.

L'équation $F_1 = 0$ exprime que le coefficient angulaire de la droite MM′ est égal à $\sqrt{-1}$ et l'équation $F_2 = 0$ exprime que ce coefficient est égal à $-\sqrt{-1}$.

Les équations $x = 0$, $x = \infty$ expriment que le point M est à l'infini sur l'une des deux branches infinies de la conique C; les équations $y = 0$, $y = \infty$ expriment que le point M′ est à l'infini sur la conique C′.

Pour que la courbe $F_1 = 0$ ait un point double, il faut et il suffit que la droite MM′ soit tangente à la fois aux deux coniques C et C′. Les deux coniques C et C′ ont un foyer commun, le Soleil. La droite MM′, qui est une tangente isotrope à C, doit passer par un des foyers de C, et pour la même raison elle doit passer par un des foyers de C′. Soient alors S le foyer commun de C et C′, F le second foyer de C, F′ celui de C′.

Pour que les deux coniques admettent une tangente isotrope commune (en dehors de celle qui passe par S qui existe toujours et qui ne saurait convenir), il faut donc que la droite MM′ passe par F et F′; c'est-à-dire que la droite FF′ ait pour coefficient angulaire $\sqrt{-1}$. Cette condition s'exprime analytiquement comme il suit :

$$ae\,E^{-i\varpi} = a'e'\,E^{-i\varpi'}.$$

Je représente par ϖ et ϖ' les longitudes des périhélies.

C'est, là, la condition pour que $F_1 = 0$ ait un point double (en dehors de celui qui, correspondant à la tangente isotrope passant par S, existe toujours et ne saurait convenir).

2° De même, la condition pour que $F_2 = 0$ ait un point double s'écrit

$$ae\,E^{i\varpi} = a'e'\,E^{i\varpi'}.$$

3° Pour que les deux courbes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ soient tangentes, il faut que les deux coniques C et C′ se touchent; car les points d'intersection à distance finie des deux courbes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ correspondent aux quatre points d'intersection des deux coniques.

Il faut donc que la distance des deux foyers F et F′ soit égale à la somme ou à la différence des grands axes; ce qui s'écrit

$$(ae\,E^{i\varpi} - a'e'\,E^{i\varpi'})(ae\,E^{-i\varpi} - a'e'\,E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2.$$

4° Il faut voir ensuite si l'un des points d'intersection des courbes (4 *ter*) ne peut pas se confondre avec l'un des points d'intersection de l'une de ces courbes avec l'une des droites (4) ou de deux de ces droites entre elles.

Ces deux catégories de points correspondent respectivement : aux quatre intersections de C et de C′ (M et M′ confondus) et aux cas où les deux points M et M′ sont à l'infini sur les deux coniques C et C′.

La condition est donc que l'une des quatre intersections de C et de C' s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire qu'une asymptote de C soit parallèle à une asymptote de C'.

Cela s'écrit d'une des quatre manières

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, E^{2i\varpi} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}\, E^{2i\varpi'},$$

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}\, E^{2i\varpi} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}\, E^{2i\varpi'},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, E^{-2i\varpi} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}\, E^{-2i\varpi'},$$

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}\, E^{-2i\varpi} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}\, E^{-2i\varpi'},$$

en posant

$$e = \sin\varphi, \qquad e' = \sin\varphi'.$$

Je puis écrire aussi

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}}\, E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}}\, E^{2i\varpi'},$$

en prenant dans chaque fraction le signe inférieur dans les deux termes ou le signe supérieur dans les deux termes.

7. Voici donc quelles sont les équations qui définissent les valeurs critiques,

$$(7) \qquad ae\, E^{-i\varpi} = a'e'\, E^{-i\varpi'},$$

$$(8) \qquad ae\, E^{i\varpi} = a'e'\, E^{i\varpi'},$$

$$(9) \qquad (ae\, E^{i\varpi} - a'e'\, E^{i\varpi'})(ae\, E^{-i\varpi} - a'e'\, E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2,$$

$$(10) \qquad \frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}}\, E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}}\, E^{2i\varpi},$$

auxquelles il convient d'adjoindre

$$(11) \qquad e = 1, \qquad e' = 1.$$

Mais nous avons vu que toutes les valeurs ainsi trouvées peuvent ne pas convenir et il est même aisé de voir qu'elles ne peuvent pas toutes convenir.

En effet, envisageons l'équation (7); elle est satisfaite pour $e = e' = 0$. Si donc les valeurs critiques définies par cette équation convenaient, notre fonction présenterait des singularités pour des valeurs très petites de e et e'. Nos coefficients ne seraient pas développables suivant les puissances de e et de e', *même pour des valeurs très petites de ces quantités*. Nous savons qu'il n'en est pas ainsi. Donc les valeurs définies par l'équation (7) ne sauraient convenir.

Le même raisonnement s'applique aux équations (8) et (10). Il importe de remarquer que l'équation (10), malgré la présence des doubles signes, ne représente qu'une seule équation analytique irréductible qui prendrait sa forme algébrique si l'on chassait les radicaux. Cette équation irréductible est satisfaite pour $e = e' = 0$.

Restent les équations (9) et (11). Pour trouver la limite de convergence définie par l'équation (9), remarquons que a, a', ϖ et ϖ' sont des données de la question et sont réelles, mais que e et e' qui sont nos variables indépendantes pourront prendre des valeurs imaginaires.

Donnons à e une série de valeurs de module constant $|e|$, mais d'argument variable; faisons de même pour e'. Le maximum du module du premier membre de (9) est

$$a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')|;$$

la condition de convergence est donc

$$a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')| < (a' - a)^2.$$

Nous sommes ainsi conduits à supposer que les seules conditions de convergence de notre développement sont

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{c} |e| < 1, \qquad |e'| < 1, \\ a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')| < (a' - a)^2. \end{array} \right.$$

Je ne voudrais pas entrer dans trop de détails; je ne puis cependant me contenter d'un aperçu : il faut donc que j'explique en quelques mots comment on peut donner à la démonstration toute sa rigueur.

Considérons le domaine D défini par les inégalités (12). Il ne contient pas de valeurs singulières satisfaisant aux équations (9) et (11). Mais il en contient qui satisfont aux équations (7), (8), (10). Si l'une de ces valeurs convenait, il en serait de même de toutes celles qui satisferaient à la même équation et qu'on pourrait rencontrer en faisant varier e et e' d'une manière continue et sans cesser de satisfaire à cette équation. Cela serait vrai au moins en ce qui concerne la détermination de la fonction que l'on atteindrait par cette variation continue.

Or on verrait qu'on peut atteindre, par une variation continue, une quelconque des valeurs singulières qui satisfont aux équations (7), (8), (10) et aux inégalités (12) en partant de la valeur $e = 0$, $e' = 0$ et sans cesser de satisfaire à ces équations et sans sortir du domaine D. La valeur singulière $e = 0$, $e' = 0$ ne convenant pas, aucune de ces valeurs ne convient.

Les conditions (12) *sont donc les seules conditions de convergence.*

La troisième condition (12) sera satisfaite quels que soient ϖ et ϖ', si l'on a

$$|ae| + |a'e'| < a' - a,$$

c'est-à-dire si la distance périhélie de l'une des planètes est plus grande que la distance aphélie de l'autre.