# SULLE ALGEBRE LEGATE
# AI GRUPPI DI ORDINE FINITO (*)

Un'algebra $A$ di ordine $n$ si dice *legata* a un gruppo $G$ dello stesso ordine, se è possibile trovare in $A$ $n$ elementi indipendenti i quali, rispetto all'operazione di prodotto in $A$, costituiscano un gruppo oloedricamente isomorfo a $G$.

In base ad un classico teorema di esistenza si ha subito che:

*Dati comunque un gruppo d'ordine finito $G$ ed un corpo numerico $\Gamma$, esistono in $\Gamma$ algebre legate a $G$, tutte codeste algebre risultando equivalenti fra di loro* (1);

ed è noto che:

*Se $A$ è un'algebra in $\Gamma$ legata al gruppo $G$ di ordine $n$, perchè $A$ risulti semi-semplice occorre e basta che in $\Gamma$ non sia $n = 0$* (2).

Di tale teorema vogliamo indicare qui una dimostrazione estremamente semplice che, per quanto ci consta, non è stata ancora rilevata.

1. Indichiamo con

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

(*) *Rend. Reale Accad. dei Lincei* (6) 25 (1937), pp. 683-685.

(1) Veggasi per quanto qui è detto il mio trattato *Corpi numerici e algebre.* (Messina, Principato, 1921), p. 437 e sgg. Ivi il teorema cui è dedicata questa Nota veniva dedotto applicando un classico criterio del FROBENIUS e quindi solo per quei corpi cui quel criterio è applicabile. Nè del resto a quel tempo il teorema era noto nella forma attuale.

(2) Cfr. B. L. VAN DER WAERDEN: *a) Moderne Algebra* (Berlin, Springer, 1931), Zweiter Teil, p. 193 e p. 196; *b) Gruppen von linearen Transformationen* (Berlin, Springer, 1935), p. 54.

Naturalmente, occorre appena avvertirlo, in $\Gamma$ è $n = 0$, se il sottocorpo fondamentale di $\Gamma$ è finito e contiene $p$ elementi, con $p$ (primo) divisore di $n$: o, come anche si dice, se $\Gamma$ è di caratteristica $p > 0$, con $p$ divisore di $n$.

www.rcin.org.pl

una base di $A$ i cui elementi costituiscano, rispetto all'operazione di prodotto in $A$, un gruppo $\overline{G}$ oloedricamente isomorfo a $G$ e supponiamo, come è lecito, che $u_1$ sia l'elemento identico di $\overline{G}$, cioè il modulo di $A$.

Allora è noto, e si vede subito del resto, che se

$$x = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n$$

è un qualsiasi elemento di $A$ le tracce, sinistra e destra, di $x$ in $A$ sono date da $n \xi_1$ (3).

Infatti la traccia, ad esempio, sinistra, di $x$ in $A$ è la somma dei coefficienti di $u_1, \ldots, u_n$, rispettivamente, nelle espressioni di $xu_1, \ldots, xu_n$ come combinazioni lineari delle $u_i$.

Ora, poichè fra i prodotti

$$u_1 u_i, \ldots, u_n u_i$$

l'unico che eguagli $u_i$ è $u_1 u_i$, il coefficiente di $u_i$ nell'espressione di $x u_i$ come combinazione lineare delle $u$ è $\xi_1$, dunque la traccia richiesta di $x$ è, come volevasi, $n\xi_1$.

2. Ciò posto, dimostriamo in primo luogo che la condizione espressa dal teorema più sopra enunciato è necessaria.

E infatti si consideri in $A$ l'elemento

$$v = u_1 + \ldots + u_n.$$

Per l'ipotesi i prodotti

$$u_i u_1, \ldots u_i u_n,$$

al pari dei prodotti

$$u_1 u_i, \ldots, u_n u_i,$$

a meno, eventualmente, dell'ordine, coincidono con

$$u_1, \ldots, u_n,$$

dunque è

$$vu_i = u_i v = v,$$

(3) Cfr. G. Scorza, loc. già cit., p. 438.

www.rcin.org.pl

indi

$$v^2 = v \sum_i^{1,.,n} u_i = nv$$

e

$$v A = (v),$$

$(v)$ indicando l'insieme dei multipli scalari di $v$.

Ma allora, se in $\Gamma$ è $n = 0$, riesce

$$v^2 = 0 \quad \text{e} \quad (v A)^2 = (v)^2 = 0$$

con $v \neq 0$, ossia $v$ è per $A$ un elemento eccezionale; dunque se in $\Gamma$ è $n = 0$ l'algebra $A$, come volevasi, non è certo semi-semplice.

3. Per compiere la dimostrazione del teorema supponiamo che in $\Gamma$ sia $n \neq 0$ e sia

$$a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

un qualsiasi elemento non nullo di $A$.

Detto

$$x = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n$$

l'elemento corrente di $A$ è

$$ax = \sum_{i,j}^{1\ldots n} \alpha_i \xi_j u_i u_j .$$

Disponiamo, com'è lecito, delle denominazioni delle $u$, così che gli elementi bilaterali di $\overline{G}$ siano

$$u_1, \ldots, u_t,$$

e le coppie di elementi inversi (supposto $t < n$) siano

$$u_{t+1}, u_{t+2} \quad ; \quad u_{t+3}, u_{t+4}; \ldots ; u_{n-1}, u_n ;$$

allora nell'espressione di $ax$, come combinazione lineare delle $u$, il coefficiente di $u_1$ sarà

$$\sigma = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_t \xi_t + \alpha_{t+1} \xi_{t+2} + \alpha_{t+2} \xi_{t+1} + \ldots + \alpha_{n-1} \xi_n + \alpha_n \xi_{n-1},$$

www.rcin.org.pl

e la traccia, sinistra e destra, di $ax$ sarà

$$n\,\sigma.$$

Segue subito allora che, nell'ipotesi ora fatta su $\Gamma$, $a$ è necessariamente non eccezionale.

Ed invero, se così non fosse, $a\,x$ dovrebbe risultare pseudonullo per ogni $x$ di $A$; ma la traccia di un elemento pseudonullo è necessariamente eguale a zero, dunque, essendo in $\Gamma$ $n \neq 0$, se $a$ fosse eccezionale dovrebbe riuscire $\sigma = 0$ per *ogni* sistema di valori delle $\xi$ nel corpo $\Gamma$. Ma ciò è assurdo una volta che è $a \neq 0$, indi le $\alpha_i$ non tutte nulle, per conseguenza il teorema è pienamente dimostrato.

www.rcin.org.pl