SUR

# LE DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ

DE LA

# FONCTION PERTURBATRICE

*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 126, p. 370-373 (31 janvier 1898).

On peut développer la fonction perturbatrice, soit suivant les cosinus des multiples des anomalies moyennes, soit suivant ceux des anomalies excentriques. On obtient ainsi des développements de la forme suivante :

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \mathrm{A}_{mm'}\, e^{i(ml+m'l')} = \sum \mathrm{B}_{mm'}\, e^{i(mu+m'u')}.$$

Dans cette formule $\Delta$ représente la distance des deux planètes, $l$ et $l'$ les anomalies moyennes, $u$ et $u'$ les anomalies excentriques.

Posons

$$e^{iu} = x, \qquad e^{iu'} = y.$$

On sait que les coefficients A peuvent être représentés par une intégrale double de la forme

$$-4\pi^2 \mathrm{A}_{mm'} = \iint \frac{\mathrm{Q}\, e^{\Omega}\, dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{\mathrm{F}}},$$

prise le long des deux circonférences

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1.$$

Q et F sont des polynomes en $x$, $y$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$,

$$\Omega = \frac{m \sin\varphi}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{m' \sin\varphi'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

en désignant par $\sin\varphi$ et $\sin\varphi'$ les deux excentricités.

Les coefficients B peuvent être représentés par une intégrale double de même forme, avec cette différence que Q se réduit à une constante et $\Omega$ à zéro, de sorte que l'exponentielle $e^{\Omega}$ disparaît.

On peut se proposer de calculer la valeur approchée des coefficients A et B pour de grandes valeurs de $m$ et de $m'$. Soit, par exemple,

$$m = an + b, \qquad m' = cn + d,$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ sont des entiers finis et donnés une fois pour toutes et où $n$ est un entier très grand qu'on fera croître indéfiniment. On sait que le calcul approché des coefficients se ramène à l'étude des points singuliers d'une certaine fonction analytique que je vais mettre sous la forme que lui a donnée M. Féraud :

$$\Phi(z) = \sum \mathrm{A}_{mm'} z^n,$$

où $n$ varie de o à $+\infty$.

Cette fonction est égale à l'intégrale double

$$\Phi(z) = \iint \frac{\mathrm{Q} e^{\Omega_1}\, dx\, dy}{\left(1 - \frac{z e^{\Omega_0}}{x^a y^c}\right) x^b y^d \sqrt{\mathrm{F}}};$$

$\Omega_1$ et $\Omega_0$ sont des polynomes de même forme que $\Omega$, mais où les entiers $m$ et $m'$ sont remplacés par $a$ et $c$ pour $\Omega_0$, par $b$ et $d$ pour $\Omega_1$.

On peut former une fonction $\Phi(z)$ analogue relative aux coefficients B et au développement suivant les anomalies excentriques ; on trouve encore une intégrale de même forme, mais où Q doit être remplacé par une constante ; $\Omega_0$ et $\Omega_1$ par zéro, de sorte que les exponentielles disparaissent.

L'étude analytique de cette fonction $\Phi(z)$ peut, en conséquence, présenter un certain intérêt; voici les résultats auxquels je suis parvenu :

Supposons d'abord les excentricités nulles ; ou bien encore supposons qu'il s'agisse du développement suivant les anomalies excentriques. Dans ces deux cas l'intégrale qui représente $\Phi(z)$ ne contient pas d'exponentielle.

On trouve alors que $\Phi(z)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à second membre

$$\Delta\Phi(z) = \mathrm{P}.$$

Les coefficients du premier membre et le second membre P sont des polynomes entiers en $z$.

Dans le cas général, où les exponentielles ne disparaissent pas, la fonction $\Phi(z)$ satisfait encore à une équation de même forme, mais les coefficients du premier membre et P ne sont plus des polynomes entiers en $z$; ce sont des fonctions uniformes, mais transcendantes de $z$, n'ayant pour points singuliers que

$$z = 0, \qquad z = \infty.$$

Revenons au cas où les excentricités sont nulles, ou bien à celui du développement suivant les anomalies excentriques, c'est-à-dire au cas où les exponentielles disparaissent; supposons les entiers $a$ et $c$ premiers entre eux et soient $\alpha$ et $\gamma$ deux entiers tels que

$$\alpha c - a\gamma = 1.$$

Posons

$$z = \frac{1}{t}, \qquad x^a y^c = \xi^{-1}, \qquad x^\alpha y^\gamma = \eta^{-1};$$

l'expression de $\Phi(z)$ deviendra

$$\Phi = \iint \frac{\mathrm{Q}_1\, d\xi\, d\eta}{(\xi - t)\sqrt{\mathrm{F}_1}}.$$

L'intégrale doit être prise le long des deux circonférences

$$|\xi| = 1, \qquad |\eta| = 1,$$

et il s'agit d'étudier le développement de $\Phi$ suivant les puissances négatives de $t$.

Les lettres $\mathrm{Q}_1$ et $\mathrm{F}_1$ désignent deux polynomes entiers en $\xi$ et $\eta$. L'équation

$$\mathrm{F}_1(\xi, \eta) = 0,$$

considérée comme équation en $\eta$, admettra un certain nombre de racines

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_m.$$

Ces racines se répartiront en deux catégories : la première catégorie comprendra celles qui, quand on fait varier $\xi$ d'une manière continue, de façon que la valeur finale de $\xi$ ait pour module 1, ont leur valeur finale de module plus petit que 1.

Les points singuliers seront les valeurs de $\xi$ pour lesquelles l'équation $F_1 = 0$ a deux racines égales.

Le point singulier est admissible si son module est plus petit que 1 et si les deux racines de l'équation $F_1 = 0$ qui deviennent égales appartiennent à deux catégories différentes.

Soit $a$ celui des points singuliers admissibles dont le module est le plus grand.

Alors, le développement de $\Phi$ suivant les puissances négatives de $t$ sera convergent à l'extérieur d'une circonférence de rayon $|a|$. En d'autres termes, la valeur approchée de $A_{mm'}$ sera du même ordre de grandeur que $a^n$.

La discussion se trouve ainsi simplifiée.

Des procédés analogues sont applicables au cas général où les exponentielles ne disparaissent pas.