LE ALGEBRE REGOLARI E LE VARIETÀ DI SEGRE CHE CON ESSE SI RICONNETTONO (*)

Oggetto di questa memoria è lo studio della rappresentazione geometrica di un'algebra regolare (reale o complessa) di ordine n^2 (1), che, ove si riguardi l'algebra come l'insieme delle matrici di ordine n, si ottiene facendo corrispondere a ciascuna matrice il punto di un S_{n^2} euclideo, di cui essa dà, con i suoi elementi, le coordinate; e i risultati principali, che qui si conseguono, sono: talune interessanti proprietà proiettive delle varietà rappresentanti le classi di automoduli (2) equivalenti (3), e la netta caratterizzazione del gruppo di affinità, in cui si riflette il gruppo automorfo (4) dell'algebra.

Come il lettore vedrà, tutto si concentra intorno alla varietà di SEGRE, W_1, con gli indici $(n-1, n-1)$ (5), rispondente alla classe degli automoduli primitivi: giacchè quelle che corrispondono alle altre classi di automoduli, secondo una nomenclatura quivi introdotta, non sono che luoghi di poli dell'iperpiano all'infinito rispetto alle varietà di SEGRE di 2ª specie, con indici eguali a 1, 2, ..., o

(*) *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, 1936, pp. 33-65.

(1) Per la definizione di algebra regolare veggasi G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 193.

(2) Loc. cit. in (1), pag. 189.

(3) Loc. cit. in (1), pag. 221.

(4) Loc. cit. in (1), pag. 193.

(5) C. SEGRE: *a) Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo V, 1891, pp. 192-204); *b) Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. IX, 2° sem. 1909, pp. 253-260); e G. SCORZA: *a) Sulle varietà di* SEGRE (Atti della R. Accad. delle scienze di Torino, vol. XLV, 1909, pp. 119-131); *b) Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* (Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL, serie 3ª, tomo XIX, pp. 139-183).

$n-2$, appartenenti a W_1; e il gruppo delle affinità in cui si riflette quello automorfo dell'algebra viene caratterizzato dal suo modo di comportarsi rispetto a W_1, all'origine e al fascio degli iperpiani paralleli a quello che contiene W_1.

In particolare ne vien fuori una proposizione per le varietà di SEGRE di 2ª specie con indici eguali, che è del tutto analoga al classico teorema di LIE sulla superficie di STEINER, riconosciuto valido dal BERZOLARI anche per la superficie di VERONESE e da me esteso recentemente a tutte le varietà di VERONESE [6].

Codesta proposizione e la maggior parte delle altre quivi conseguite sono state raggiunte come conseguenza di ragionamenti assai semplici, ispirati alla teoria generale delle algebre e raccolti nel secondo dei due capitoli in cui la memoria è divisa. La ricerca di geometria iperspaziale, che trovasi esposta nel primo capitolo e che avrei potuto presentare in forma più succinta, se, per comodità del lettore, non avessi voluto riprodurre con una certa ampiezza anche delle considerazioni che sarebbero state da riguardar come note, fu istituita per approfondire lo studio delle varietà rispondenti alle singole classi di automoduli, in ispecie, per cercar di risolvere il problema della determinazione dei loro ordini; e nella stesura definitiva della memoria è stata premessa alle considerazioni riflettenti le algebre regolari, perchè, se pure fosse stata presentata con tutta brevità, incastrata nell'esposizione di quest'ultime, avrebbe costituito per essa una digressione assai ingombrante.

Per altro, come il lettore vedrà, quel problema resta ancora in sospeso; esso prende posto fra le questioni di geometria numerativa, cui dà luogo il così detto problema della correlazione, ed è noto che per tali questioni mentre si ha il modo di trattare via via a fondo quelle numericamente date, grazie alle ricerche del GIAMBELLI pubblicate nelle *Memorie del R. Istituto Lombardo* (1903), non si hanno invece delle formule generali risolutive che per quei pochi casi, in cui si riesce a trar partito di un classico teorema dello SCHUBERT.

(6) Che il teorema di LIE valesse anche per la superficie di VERONESE fu comunicato dal BERZOLARI ad A. BRAMBILLA e da questi dimostrato nel 1898 (Rendiconto della R. Accad. di Scienze fis. e mat. di Napoli, 1898, pag. 300). Una nuova dimostrazione fu data dal ROSATI nella sua Nota: *Sulle superficie di* VERONESE *e di* STEINER (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXXV, 1899), utilizzando la rappresentazione della superficie di VERONESE sopra un piano mediante il sistema ∞^5 delle coniche. Con metodo perfettamente simile il teorema si può estendere ad ogni varietà di VERONESE: G. SCORZA, *Sulle varietà di* VERONESE (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, serie 6ª, vol. XXII, 2º semestre 1935, pp. 181-186).

Relativamente ad esso io mi limito quindi a far vedere come possa esser ricondotto entro la categoria di questioni in discorso e a confermare la sua risolubilità nei casi numericamente dati con lo sviluppo effettivo di un esempio.

Comunque quanto non è riuscito a me potrà esser fatto da chi abbia maggiore esperienza dei metodi numerativi; ed è sopratutto per tale considerazione che ho creduto opportuno mostrare a quale problema di geometria proiettiva iperspaziale si riconduce quello della determinazione degli ordini delle varietà rappresentanti, nel senso più sopra chiarito, le classi di automoduli equivalenti delle algebre regolari (reali o complesse).

Capitolo I.

LE VARIETÀ DI SEGRE DI 2ª SPECIE CON INDICI EGUALI.

§ 1. La nozione di coniugio per le reciprocità.

1. Siano σ e σ' due spazi proiettivi complessi ad r dimensioni ($r > 0$) e le coordinate correnti di punto e di iperpiano siano, in σ, le x_i e ξ_i, in σ', le x'_i e le ξ'_i ($i = 1, \dots, r+1$).

Una *reciprocità-luogo* R fra σ e σ' sarà un connesso bilineare di punti e quindi sarà rappresentata da un'equazione del tipo

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} a_{i,j}\, x_i\, x'_j = 0\,; \tag{1}$$

una *reciprocità-inviluppo* $\overline{R}$ fra σ e σ' sarà invece un connesso bilineare di iperpiani e quindi sarà rappresentata da un'equazione del tipo

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} \alpha_{i,j}\, \xi_i\, \xi'_j = 0. \tag{2}$$

Punti (iperpiani) *coniugati* in R (in $\overline{R}$) sono coppie di punti (iperpiani) che con le loro coordinate ne soddisfanno l'equazione.

2. Se nella (1) il determinante $|a_{i,j}|$ è diverso da zero, mediante R a ciascun punto di σ (di σ') viene a corrispondere un iperpiano di σ' (di σ), e cioè al punto (x_i) di σ l'iperpiano di σ' con le coordinate

$$\xi'_j = \sum_{i}^{1..r+1} a_{i,j}\, x_i\,, \tag{3}$$

e al punto (x'_j) di σ' l'iperpiano (ξ_i) di σ con

(4) $$\xi_i = \sum_j^{1..r+1} a_{i,j}\, x'_j\,;$$

ma se quel determinante è nullo e la caratteristica della matrice $\| a_{i,j} \|$ è $r+1-h$ $(h>0)$, i punti di σ pei quali riesce

$$\sum_i^{1..r+1} a_{i,1}\, x_i = 0, \quad , \dots , \quad \sum_i^{1..r+1} a_{i,r+1}\, x_i = 0,$$

e per ciascun dei quali è pertanto indeterminato l'iperpiano ad esso corrispondente mediante R, costituiscono un S_{h-1}, e parimenti costituiscono un S_{h-1} i punti di σ' per ognun dei quali è indeterminato l'iperpiano ad esso corrispondente mediante R.

Questi due S_{h-1} si diranno, ordinatamente, il *primo* e il *secondo asse* di R; i loro punti sono i *punti singolari* di R e si riconosce subito che mediante R ad ogni punto di σ (di σ') esterno al primo (al secondo) asse viene a corrispondere un iperpiano di σ' (di σ) passante per il secondo (il primo) asse.

Quando $| a_{ij} | \neq 0$, R si dice *non degenere*; in caso contrario si dice *degenere* e — ove occorra precisare — di *specie* h, se la caratteristica di $\| a_{i,j} \|$ è $r+1-h$ $(h>0)$.

In quest'ultimo caso, se si dicono τ e τ' il primo e il secondo asse di R, ai punti non singolari di un S_h di σ (di σ') passante per τ (per τ') viene a corrispondere mediante R un unico iperpiano di σ' (di σ) passante per τ' (per τ); sorge così fra le stelle di σ e σ' coi centri τ e τ', ove si concepiscano come spazi ad $r-h$ dimensioni i cui punti siano gli S_h per τ o τ', una *reciprocità-luogo* non degenere, che diremo il *nucleo* di R.

Avvertasi che, assegnata comunque una reciprocità-luogo non degenere fra una stella di σ e una stella di σ' costituite ciascuna dagli S_h uscenti da un S_{h-1} fisso, esiste una ed una sola reciprocità luogo fra σ e σ' di specie h avente per nucleo quella assegnata.

3. Per le reciprocità-inviluppo valgono naturalmente le considerazioni duali di quelle ora indicate per le reciprocità luogo.

Così, se nella (2) il determinante $| \alpha_{i,j} |$ è diverso da zero, la $\overline{R}$ a ciascun iperpiano di σ (di σ') coordina un punto di σ' (di σ) a norma delle formule

(5) $$x'_j = \sum_i^{1..r+1} \alpha_{i,j}\, \xi_i\,,$$

e

$$x_i = \sum_j^{1..r+1} \alpha_{i,j} \xi'_j . \tag{6}$$

Se invece quel determinante è nullo e la caratteristica di $\| \alpha_{i,j} \|$ è $r+1-h\,(h>0)$, si presentano in σ e σ' due stelle ∞^{h-1} di *iperpiani singolari*, per ognun dei quali è indeterminato il punto corrispondente in σ' o in σ. Allora $\overline{R}$ si dice *degenere* di *specie* h; i suoi due *assi*, *primo* e *secondo*, sono gli S_{r-h} centri delle stelle di iperpiani singolari situate in σ e σ', rispettivamente; ed a tutti gli iperpiani non singolari di σ (di σ') passanti per un S_{r-h-1} del primo (del secondo) asse vien coordinato mediante $\overline{R}$ un unico punto di σ' (di σ) situato sul secondo (sul primo) asse. Si perviene così ad una reciprocità-inviluppo non degenere fra i due S_{r-h} costituenti gli assi di $\overline{R}$, che si dirà il *nucleo* di $\overline{R}$; e sta ancora che, fissata comunque una reciprocità-inviluppo non degenere fra un S_{r-h} di σ e un S_{r-h} di σ', esiste, fra σ e σ', una ed una sola reciprocità-inviluppo di specie h che ha in essa il suo nucleo.

4. Quando nelle (4) e (3) il determinante δ delle $a_{i,j}$ è diverso da zero, le x' (le x) possono esser calcolate mediante le ξ (le ξ') e si ottiene, indicato con $A_{i,j}$ l'aggiunto di $a_{i,j}$,

$$\delta x'_j = \sum_i^{1..r+1} A_{i,j} \xi_i \tag{7}$$

e

$$\delta x_i = \sum_j^{1..r+1} A_{i,j} \xi'_j . \tag{8}$$

Le corrispondenze che così sorgono fra gli iperpiani di σ (di σ') e i punti di σ' (di σ) possono riguardarsi come fissate, nel modo dianzi chiarito, dalla reciprocità-inviluppo che è rappresentata dall'equazione

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} A_{i,j} \xi_i \xi'_j = 0. \tag{9}$$

e che si dirà *aderente* ad R.

In maniera simile si stabilisce la nozione di reciprocità-luogo *aderente* ad una reciprocità-inviluppo non degenere.

Quando $\delta \neq 0$, anche il determinante $| A_{i,j} |$ riesce non nullo; d'altronde, in tal caso, gli aggiunti della matrice $\| A_{i,j} \|$ sono notoriamente proporzionali alle $a_{i,j}$, dunque:

Se $\overline{R}'$ è la reciprocità-inviluppo aderente ad una reciprocità-luogo R non degenere, anche $\overline{R}'$ non è degenere ed R è la reciprocità ad essa aderente.

Ciò non sta più se $\delta = 0$; però, se $\delta = 0$ e la caratteristica della matrice $\| a_{i,j} \|$ è r, la (9) definisce ancora una reciprocità-inviluppo, la quale continuerà a dirsi *aderente* a quella definita dalla (1), sebbene dalla (9) non sia più deducibile allo stesso modo la (1). In tal caso le reciprocità definite dalle (1) e (9) riescono di specie 1 ed r, rispettivamente.

In maniera simile si definisce la reciprocità-luogo *aderente* ad una inviluppo di specie 1, la quale risulta di specie r.

Notisi che, se P e P' (π e π') sono i punti (gli iperpiani) singolari, o, ciò che è lo stesso, gli assi di una reciprocità-luogo (-inviluppo) di specie 1, essi sono anche gli assi di quella ad essa aderente di specie r.

5. Le reciprocità, luogo e inviluppo, definite dalle (1) e (2) si dicono *coniugate*, se per esse è

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} a_{i,j}\, \alpha_{i,j} = 0. \tag{10}$$

Avvertasi subito che:

Se di due reciprocità coniugate una è di specie r, i suoi due assi sono due elementi coniugati dell'altra.

Infatti si supponga, ad es., che la (2) sia di specie r e che i suoi assi siano i punti, con le equazioni in coordinate di iperpiani

$$\sum_{i}^{1..r+1} x_i\, \xi_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i}^{1..r+1} x'_i\, \xi'_i = 0.$$

Allora l'equazione (2) equivarrà all'altra

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} x_i x'_j\, \xi_i \xi'_j = 0,$$

ossia si potrà supporre

$$\alpha_{i,j} = x_i x'_j\,;$$

per conseguenza il sussistere della (10) si convertirà nel sussistere dell'eguaglianza

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} a_{i,j}\, x_i x'_j = 0,$$

la quale esprime precisamente che i punti di coordinate x_i e x'_j sono coniugati nella reciprocità (1).

Notisi inoltre che:

Se una reciprocità, luogo o inviluppo, è coniugata a più altre, inviluppo o luogo, è coniugata a tutte quelle del sistema lineare che esse determinano;

e che:

Le reciprocità coniugate a tutte quelle di un sistema lineare ∞^k $[0 \leq k \leq (r+1)^2 - 2]$ *costituiscono un sistema lineare* $\infty^{(r+1)^2-k-2}$.

Due sistemi sì fatti si dicono *associati.*

6. La reciprocità *indotta* fra due spazi (fra due stelle) della stessa dimensione di σ e σ' da una reciprocità-luogo (inviluppo) fra σ e σ' è quella nella quale due punti (due iperpiani) sono coniugati, se tali sono in quest'ultima.

Ciò posto, si vede subito che:

Una reciprocità-luogo R fra σ e σ' è coniugata ad una reciprocità-inviluppo $\overline{R}$ di specie h con gli assi $\overline{\tau}$ e $\overline{\tau}'$ se, e soltanto se, sono coniugate la reciprocità indotta da R fra $\overline{\tau}$ e $\overline{\tau}'$ e il nucleo di $\overline{R}$;

e, dualmente che:

Una reciprocità-inviluppo $\overline{R}$ fra σ e σ' è coniugata ad una reciprocità-luogo R di specie h con gli assi τ e τ' quando, e solo quando, sono coniugate la reciprocità indotta da $\overline{R}$ fra le stelle coi centri τ e τ' e il nucleo di R.

Infatti per dimostrare la prima proposizione basta osservare che, se $\overline{\tau}$ e $\overline{\tau}'$ sono gli S_{r-h} con le equazioni

$$x_{r-h+2} = \ldots = x_{r+1} = 0 \quad \text{e} \quad x'_{r-h+2} = \ldots = x'_{r+1} = 0,$$

l'equazione di $\overline{R}$, che allora è del tipo

$$\sum_{i,j}^{1..r-h+1} \alpha_{i,j}\, \xi_i\, \xi'_j = 0,$$

è nel tempo stesso l'equazione del nucleo di $\overline{R}$, e che, se l'equazione di R è

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} a_{i,j}\, x_i\, x'_j = 0,$$

R induce fra τ e τ' la reciprocità-luogo rappresentata da

$$\sum_{i,j}^{1..r-h+1} a_{i,j}\, x_i\, x'_j = 0.$$

§ 2. Le varietà di Segre che intervengono nello studio delle reciprocità.

7. Consideriamo la totalità delle reciprocità-inviluppo intercedenti fra σ e σ' e riferiamola omograficamente a quella dei punti di uno spazio Σ ad $(r+1)^2-1$ dimensioni, stabilendo in questo un sistema di coordinate proiettive omogenee e facendo, ad es., corrispondere alla reciprocità rappresentata dalla (2) il punto di Σ le cui coordinate sono

$$\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,r+1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,r+1}, \dots, \alpha_{r+1,1}, \dots, \alpha_{r+1,r+1}.$$

Sorgono allora in Σ r varietà

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(r)}$$

delle quali $F^{(i)}$ risponde all'insieme delle reciprocità-inviluppo fra σ e σ' di specie $\geq i$, e per $i>1$ è il luogo dei punti di $F^{(1)}$ aventi per essa molteplicità $\geq i$; $F^{(r)}$ è una varietà di Segre di 2ª specie con gli indici (r, r) che, rispondendo alle reciprocità-inviluppo di specie r, riesce riferita biunivocamente, senza eccezioni, alle coppie di punti estratte da σ e σ'; ed infine $F^{(i)}$ ha la dimensione

$$(r+1)^2-i^2-1 \tag{11}$$

e l'ordine [7]

$$\frac{\binom{2i}{i}\binom{2i+1}{i}\cdots\binom{r+i}{i}}{\binom{i}{i}\binom{i+1}{i}\cdots\binom{r}{i}}. \tag{12}$$

In particolare, $F^{(1)}$ è un'ipersuperficie dell'ordine $r+1$ rappresentata dall'equazione

$$f=|\alpha_{ij}|=0\,; \tag{13}$$

ed $F^{(r)}$ è una varietà della dimensione $2r$ e dell'ordine $\binom{2r}{r}$ rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$\alpha_{ij}=x_i x'_j \qquad (i,j=1,\dots,r+1), \tag{14}$$

[7] C. Segre loc. cit. in [5], *b*).

dove le x_i e le x'_j sono le coordinate dei punti di σ e σ' costituenti gli assi della reciprocità-inviluppo di specie r rispondente al punto $(\alpha_{i,j})$ di $F^{(r)}$. Inoltre $F^{(r-1)}, F^{(r-2)}, \dots, F^{(1)}$ sono, ordinatamente, le varietà riempite dalle corde, dai piani trisecanti, ..., dagli S_{r-1} r-secanti di $F^{(r)}$.

Notisi che se nelle (14) si fissano le x_i e si fanno variare le x'_j il punto $(\alpha_{i,j})$ di $F^{(r)}$ descrive un S_r corrispondente al punto (x_i) di σ. E giacchè lo stesso può dirsi, se si fissano le x'_j e si fanno variare le x_i, si ha, come del resto è ben noto, che:

La varietà $F^{(r)}$ contiene due schiere ∞^r di S_r.

8. Le reciprocità-inviluppo coniugate ad una data reciprocità luogo fra σ e σ' costituiscono un sistema lineare $\infty^{(r+1)^2-2}$; ad esse rispondono dunque i punti di un iperpiano di Σ.

Per tal modo le reciprocità-luogo fra σ e σ' restano riferite omograficamente agli iperpiani di Σ e:

A due reciprocità fra σ e σ', l'una inviluppo e l'altra luogo, corrispondono in Σ un punto e un iperpiano appartenentisi quando, e solo quando, esse sono coniugate.

Segue che:

A sistemi associati di reciprocità fra σ e σ' corrispondono in Σ i punti e gli iperpiani appartenenti ad un medesimo spazio lineare;

e che:

Nella rappresentazione più sopra accennata dei punti di $F^{(r)}$ sulle coppie di punti estratte da σ e σ', una sezione iperpiana di $F^{(r)}$ è rappresentata dalle coppie di punti coniugati di una reciprocità-luogo.

Aggiungasi che, grazie alla rappresentazione delle reciprocità luogo fra σ e σ' sugli iperpiani di Σ, vi sono da considerare in Σ r varietà di iperpiani

$$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(r)}$$

corrispondenti per dualità alle $F^{(i)}$; di guisa che $\Phi^{(i)}$, la quale rappresenta la totalità delle reciprocità-luogo fra σ e σ' di specie $\geq i$ e, per $i > 1$, l'insieme degli iperpiani $\Phi^{(1)}$ con molteplicità $\geq i$, ha la dimensione (11) e la classe (12), e $\Phi^{(r)}$ è una varietà di Segre di 2ª specie con gli indici (r, r) che, rappresentando le reciprocità luogo di specie r, trovasi per ciò stesso riferita biunivocamente senza eccezioni alle coppie di iperpiani estratte da σ e σ'.

Qui non intendiamo fermarci sulle relazioni reciproche delle varietà $F^{(i)}$ e $\Phi^{(i)}$; ne richiameremo via via quelle che ci occorrono [8].

[8] Per un'esposizione di esse più completa vedi G. Scorza, loc. cit. in [5] *b*).

Così, ad es., diremo fin d'ora che $\Phi^{(i)}$ è la totalità degli iperpiani tangenti ad $F^{(r-i+1)}$; cosicchè, in particolare, $\Phi^{(1)}$ e $\Phi^{(r)}$ sono le totalità degli iperpiani tangenti ad $F^{(r)}$ ed $F^{(1)}$.

Notisi, chè ci occorrerà più innanzi, che per quanto è stato detto in questo n^0 l' iperpiano di Σ rispondente alla reciprocità-luogo fra σ e σ' con l'equazione

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} a_{i,j}\, x_i x'_j = 0$$

è quello che, nelle coordinate $\alpha_{i,j}$ di Σ, ha per equazione

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} a_{i,j}\, \alpha_{i,j} = 0\,;$$

in particolare, dunque, l'iperpiano

$$\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{r+1,r+1} = 0$$

corrisponde alla reciprocità-luogo

$$\sum_{i}^{1..r+1} x_i x'_i = 0.$$

Segue che esso corrisponde ad una reciprocità non degenere, o, ciò che è lo stesso, *che* (non appartiene a $\Phi^{(1)}$, non tocca $F^{(r)}$, e) *non contiene nessuno degli S_r delle due schiere di $F^{(r)}$.*

9. La derivata rispetto ad $\alpha_{i,j}$ della funzione f definita dalla (13) è l'aggiunto di $\alpha_{i,j}$ nella matrice $\|\alpha_{i,j}\|$; dunque:

Rispetto ad $F^{(1)}$ un punto di Σ che non sia multiplo per essa, ha per iperpiano polare quello che corrisponde alla reciprocità-luogo aderente alla reciprocità-inviluppo rappresentata dal punto.

Occorre appena avvertire che il punto, di cui nel teorema ora enunciato, si suppone non multiplo per $F^{(1)}$, cioè esterno ad $F^{(2)}$ — indi corrispondente ad una reciprocità-inviluppo non degenere, o degenere ma di specie 1 —, da una parte, perchè il suo iperpiano polare non sia indeterminato, dall'altra, perchè si possa parlare di reciprocità aderente a quella da esso rappresentata.

Per la varietà $\Phi^{(1)}$ sussiste la proposizione duale di quella or ora stabilita; riunendole insieme si ha che:

Il punto e l'iperpiano di Σ, rispondenti a reciprocità fra σ e σ' non degeneri ognuna delle quali aderisca all'altra, sono polo e polare tanto rispetto ad $F^{(1)}$ quanto rispetto a $\Phi^{(1)}$.

In quanto segue, per comodità di discorso, diremo che un punto e un iperpiano sono *polo* e *polare rispetto ad* $F^{(r)}$ (a $\Phi^{(r)}$), se sono tali rispetto ad $F^{(1)}$ (a $\Phi^{(1)}$) (9).

10. Sulla $F^{(r)}$, varietà di SEGRE con gl'indici (r, r), essendo $r > 0$, esistono infinite varietà di SEGRE con gl'indici (k, k), se è $0 \leq k \leq r-1$.

Indichiamo come ad esse si pervenga quando si tragga partito della rappresentazione dei punti di Σ sulle reciprocità-inviluppo fra σ e σ'.

Se $L^{(k)}$ è il luogo dei punti di $F^{(r)}$ rappresentanti le reciprocità inviluppo di specie r fra σ e σ' aventi per assi le coppie di punti estratte da due S_k, λ e λ', situati l'uno in σ l'altro in σ', $L^{(k)}$ è una varietà di SEGRE *con gl'indici (k, k).*

Suppongasi, com'è lecito, che λ e λ' siano gli S_k di σ e σ' con le equazioni

$$x_{k+2} = \ldots = x_{r+1} = 0, \qquad x'_{k+2} = \ldots = x'_{r+1} = 0.$$

La reciprocità-inviluppo di specie r avente per assi i punti

$$P \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}, 0, \ldots, 0) \text{ e } P' \equiv (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k+1}, 0, \ldots, 0)$$

di λ e λ' ha per equazione

$$\sum_{i,j}^{1..k+1} \alpha_i \alpha'_j \xi_i \xi'_j = 0\,;$$

quindi il sistema lineare di dimensione minima, entro il quale essa varia al variare di P in λ e P' in λ', è quello determinato dalle reciprocità-inviluppo con le equazioni

$$\xi_i \xi'_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, k+1).$$

(9) La trasformazione cremoniana che si ottiene considerando come omologhi un punto e un iperpiano, che siano polo e polare rispetto ad $F^{(1)}$ o a $\Phi^{(1)}$ trovasi incidentalmente studiata nella mia Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di* RIEMANN *e ad alcune sue applicazioni* (Rend. del Circ. Matemat. di Palermo, t. XLI, 1916, n. 72 e seguenti).

Ciò significa intanto che lo spazio di appartenenza di $L^{(k)}$, che diremo $\sigma^{(k)}$, è della dimensione $(k+1)^2-1$.

La reciprocità-inviluppo, che corrisponde al punto corrente di $\sigma^{(k)}$, avendo un'equazione del tipo

$$\sum_{i,j}^{1..k+1} \alpha_{ij}\,\xi_i\,\xi'_j = 0, \tag{15}$$

è, fra σ e σ', una reciprocità degenere di specie $\geq r-k$, la quale ha per assi λ e λ', o due spazi in essi contenuti. Precisamente, essa riesce di specie $r-k$ o di specie maggiore, secondo che la reciprocità-inviluppo fra λ e λ' rappresentata dalla (15) è non degenere o degenere. In particolare la prima è di specie r, se la seconda è di specie k.

Segue che $\sigma^{(k)}$ ed $L^{(k)}$ si trovano con le reciprocità-inviluppo fra λ e λ' nelle stesse relazioni di Σ ed $F^{(r)}$ con quelle fra σ e σ'.

Con ciò il teorema è dimostrato e riesce inoltre evidente che alla corrispondenza omografica ora chiarita fra i punti di $\sigma^{(k)}$ e le reciprocità-inviluppo fra λ e λ' ne resta collegata un'altra fra gli iperpiani di $\sigma^{(k)}$ — o le sezioni che essi determinano su $L^{(k)}$ — e le reciprocità-luogo fra λ e λ', quando a ciascuno di quegli iperpiani si faccia corrispondere la reciprocità-luogo fra λ e λ' coniugata a tutte le reciprocità-inviluppo fra λ e λ' rispondenti ai suoi punti.

Poichè una reciprocità-luogo fra σ e σ' è coniugata ad una reciprocità-inviluppo con un'equazione del tipo (15) quando, e solo quando, sono coniugate la reciprocità che essa induce fra λ e λ' e quella fra questi spazi rappresentata anch'essa dalla (15), possiamo dire che:

La sezione di $\sigma^{(k)}$ con un iperpiano di Σ (che non lo contenga) risponde nel senso più sopra chiarito alla reciprocità-luogo indotta fra λ e λ' da quella fra σ e σ' che corrisponde al considerato iperpiano.

Avvertasi che in quanto è stato detto nel presente n^0 è implicita la proposizione ben nota:

Al variare di λ e λ' in σ e σ' lo spazio di appartenenza $\sigma^{(k)}$ di $L^{(k)}$ descrive la varietà $F^{(r-k)}$.

La schiera descritta da $L^{(k)}$ al variare di λ e λ' si indicherà con $[k]$; essa è evidentemente della dimensione $2(r-k)(k+1)$.

11. Abbiamo detto nel n^0 9 che cosa sia da intendere per polo di un iperpiano di Σ rispetto alla varietà di Segre $F^{(r)}$ e quindi è chiaro, mantenute le notazioni precedenti, che cosa debba inten-

dersi per polo di un iperpiano di $\sigma^{(k)}$ rispetto ad $L^{(k)}$, nell'ipotesi che sia $k > 0$.

Ebbene in analogia a casi consimili, rispetto ad $L^{(k)}$ noi diremo *polo di un iperpiano* di Σ il polo della sua intersezione con $\sigma^{(k)}$.

Dopo ciò basta tener presente quanto è detto nei n[i] 9 e 10 per riconoscere che:

L'iperpiano di Σ rappresentante una data reciprocità-luogo fra σ e σ' ha per polo rispetto alla $L^{(k)}$ rispondente agli S_k λ e λ' (*nell'ipotesi che codesto polo non sia indeterminato*) *il punto rappresentante la reciprocità-inviluppo che ha per nucleo quella aderente alla reciprocità indotta fra λ e λ' dalla data reciprocità fra σ e σ'.*

§ 3. Le varietà $G_\varrho^{(k)}$.

12. Consideriamo ora nello spazio Σ un iperpiano ϱ non appartenente a $\Phi^{(1)}$ e, indicato con $G_\varrho^{(k)}$ il luogo dei suoi poli rispetto alle singole varietà della schiera $[k]$ ($k \geq 1$), passiamo allo studio delle proprietà più notevoli di $G_\varrho^{(k)}$, le quali, interessanti per sè stesse, si tradurranno in altrettante proprietà della totalità degli automoduli di un'algebra regolare complessa aventi una data caratteristica.

Naturalmente la dimensione di $G_\varrho^{(k)}$ sarà quella di $[k]$, cioè $2(r-k)(k+1)$.

13. Siano λ e λ' due S_k situati l'uno in σ, l'altro in σ', e, detta R la reciprocità-luogo corrispondente all'iperpiano ϱ, indichiamo con λ_1' lo S_{r-k-1} di σ' centro della stella di iperpiani corrispondenti per R ai punti di λ, con λ_1 lo S_{r-k-1} di σ che trovasi in relazione simile con λ'.

Supponiamo che gli spazi λ e λ_1 siano indipendenti, dopo di che saranno tali anche λ' e λ_1', e immaginiamo di aver fissate le coordinate in σ e σ' per modo che gli spazi λ e λ_1 siano quelli con le equazioni

$$x_{k+2} = \dots = x_{r+1} = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = \dots = x_{k+1} = 0$$

e gli spazi λ' e λ_1' quelli con le equazioni

$$x'_{k+2} = \dots = x'_{r+1} = 0 \quad \text{e} \quad x'_1 = \dots = x'_{k+1} = 0.$$

L'equazione di R dovrà essere identicamente soddisfatta tanto per

$$x_{k+2} = \dots = x_{r+1} = 0 \quad \text{e} \quad x'_1 = \dots = x'_{k+1} = 0,$$

quanto per

$$x_1 = \ldots = x_{k+1} = 0 \quad \text{e} \quad x'_{k+2} = \ldots = x'_{r+1} = 0\,;$$

quindi dovrà essere del tipo

$$\sum_{i,j}^{1..k+1} a'_{i,j}\, x_i x'_j + \sum_{i,j}^{k+2..r+1} a''_{i,j}\, x_i x'_j = 0. \tag{16}$$

Se con R_λ ed R_{λ_1} indichiamo le reciprocità indotte da R fra gli spazi λ e λ' e gli spazi λ_1 e λ'_1, R_λ ed R_{λ_1}, che per le ipotesi risulteranno entrambe non degeneri, saranno rappresentate dalle equazioni

$$\sum_{i,j}^{1..k+1} a'_{i,j}\, x_i x'_j = 0 \tag{17}$$

e

$$\sum_{i,j}^{k+2..r+1} a''_{i,j}\, x_i x'_j = 0, \tag{18}$$

e le reciprocità-inviluppo $\overline{R}_\lambda$ ed $\overline{R}_{\lambda_1}$ aderenti ad R_λ ed R_{λ_1} avranno per equazioni

$$\sum_{i,j}^{1..k+1} A'_{i,j}\, \xi_i \xi'_j = 0 \tag{19}$$

e

$$\sum_{i,j}^{k+2..r+1} A''_{i,j}\, \xi_i \xi'_j = 0, \tag{20}$$

se $A'_{i,j}$ e $A''_{i,j}$ sono gli aggiunti di $a'_{i,j}$ e $a''_{i,j}$ nelle matrici rispettive

$$\| a'_{i,j} \| \quad (i, j = 1, \ldots, k+1) \quad \text{e} \quad \| a''_{i,j} \| \quad (i, j = k+2, \ldots, r+1). \tag{21}$$

Se nella matrice dei coefficienti della (16) si indica con $A_{i,j}$, per i e j variabili nella serie $1, \ldots, k+1$, l'aggiunto di $a'_{i,j}$ e, per i e j variabili nella serie $k+2, \ldots, r+1$, l'aggiunto di $a''_{i,j}$, detti δ' e δ'' i determinanti delle matrici (21), si ha

$$A_{i,j} = \begin{cases} \delta'' A'_{i,j}, & \text{per } i \text{ e } j \text{ non superiori a } k+1, \\ \delta' A''_{i,j}, & \text{per } i \text{ e } j \text{ maggiori di } k+1, \\ 0 & \text{per tutti gli altri valori di } i \text{ e } j\,; \end{cases}$$

quindi l'equazione della reciprocità-inviluppo $\overline{R}$ aderente ad R sarà

$$\delta'' \sum_{i,j}^{1..k+1} A'_{i,j}\, \xi_i \xi'_j + \delta' \sum_{i,j}^{k+2..r+1} A''_{i,j}\, \xi_i \xi'_j = 0. \tag{22}$$

Le (19) e (20), considerate come equazioni di reciprocità-inviluppo fra σ e σ', rappresentano le reciprocità $\bar{R}^*_\lambda$ ed $\bar{R}^*_{\lambda_1}$ aventi per nuclei $\bar{R}_\lambda$ ed $\bar{R}_{\lambda_1}$, quindi in virtù della (22) $\bar{R}$ appartiene al *fascio* individuato da $\bar{R}^*_\lambda$ ed $\bar{R}^*_{\lambda_1}$.

La reciprocità corrente di codesto fascio, indicati con μ' e μ'' due parametri, ha per equazione

$$\mu' \sum_{i,j}^{1..k+1} A'_{i,j}\, \xi_i \xi'_j + \mu'' \sum_{i,j}^{k+2..r+1} A''_{i,j}\, \xi_i \xi'_j = 0 \tag{23}$$

e per modulo

$$\delta'^k\, \delta''^{r-k-1}\, \mu'^{k+1}\, \mu''^{r-k};$$

quindi essa non è degenere che per $\mu' = 0$ o $\mu'' = 0$.

Ciò significa che di reciprocità degeneri il fascio in discorso non contiene che $\bar{R}^*_\lambda$ (da contare $r-k$ volte) ed $\bar{R}^*_{\lambda_1}$ (da contare $k+1$ volte).

Aggiungasi che la reciprocità con l'equazione (23) riesce coniugata ad R, se, e soltanto se, per μ' e μ'' si ha:

$$\mu' \sum_{i,j}^{1..k+1} a'_{i,j}\, A'_{i,j} + \mu'' \sum_{i,j}^{k+2..r+1} a''_{i,j}\, A''_{i,j} = 0$$

ossia

$$(k+1)\,\delta'\,\mu' + (r-k)\,\delta''\,\mu'' = 0,$$

quindi essa è univocamente determinata.

Se la indichiamo con $\bar{S}$, possiamo dire che le reciprocità $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{R}^*_{\lambda_1}$, $\bar{R}^*_\lambda$ appartengono ad un medesimo fascio e che il loro birapporto è dato da

$$\left(\frac{\delta'}{\delta''}, -\frac{(k+1)\,\delta'}{(r-k)\,\delta''}, \infty, 0\right) = \frac{k+1}{k-r}.$$

Ora si dicano P, Q, N ed M i punti di Σ rispondenti rispettivamente ad $\bar{R}, \bar{S}, \bar{R}^*_{\lambda_1}$ ed $\bar{R}^*_\lambda$.

Per quanto sappiamo, P è il polo di ϱ rispetto ad $F^{(r)}$; Q, corrispondendo ad una reciprocità-inviluppo coniugata ad R, è un punto dell'iperpiano ϱ; M è il polo di ϱ rispetto alla $L^{(k)}$ rispondente alla coppia di spazi λ, λ'; ed N, se $k < r-1$, è il polo di ϱ rispetto alla $L^{(r-k-1)}$ della schiera $[r-k-1]$ che proviene dalla coppia di spazi λ_1 e λ'_1, se $k = r-1$, cioè, se la (20) diventa fra σ e σ' l'equazione di una reciprocità-inviluppo di specie r, è un punto di $F^{(r)}$.

Se attribuiamo un significato al simbolo $G_\varrho^{(k)}$ anche per $k = 0$, convenendo che per $k = 0$ esso rappresenti $F^{(r)}$, possiamo enunciare il teorema:

La varietà $G_\varrho^{(k)}$ è la trasformata di $G_\varrho^{(r-k-1)}$ nell'omologia che ha per centro il polo di ϱ rispetto ad $F^{(r)}$, per asse ϱ e per costante
$$\frac{k+1}{k-r},$$
dove, ormai, k può assumere uno qualunque dei valori $0, 1, \dots, r-1$.

In particolare per $k = r - 1$ si ha l'elegante proposizione:

Il luogo dei poli di un iperpiano rispetto alle varietà della schiera $[r-1]$ di $F^{(r)}$, è, come $F^{(r)}$ una varietà di Segre *con gl'indici (r, r).*

14. La definizione della varietà $G_\varrho^{(k)}$, ove si guardi a ciò che è detto nel n^0 11, mostra subito, come è stato già preannunziato, che la ricerca dell'ordine di $G_\varrho^{(k)}$ è una delle questioni di geometria numerativa, cui dà luogo il così detto problema della correlazione.

E infatti, giacchè la dimensione di $G_\varrho^{(k)}$ è $h = 2(r-k)(k+1)$, trovarne l'ordine significherà trovare il numero dei punti comuni ad essa e ad h iperpiani di Σ; quindi, se, mantenuti per R, R_λ ed $\overline{R}_\lambda$ i significati precedenti, si suppone che gli h iperpiani di Σ rispondano ad h reciprocità-luogo fra σ e σ' di specie r con le coppie di assi (π_i, π'_i) $(i = 1, \dots, h)$, trovare l'ordine di $G_\varrho^{(h)}$ significherà trovare quante sono le coppie di S_k λ e λ', estratte da σ e σ', tali che per ciascuna di esse riescano coniugate in $\overline{R}_\lambda$ le coppie di S_{k-1} secondo cui λ e λ' sono tagliati dalle coppie di iperpiani (π_i, π'_i).

Al variare di λ e λ', $\overline{R}_\lambda$ descrive una totalità ∞^h di reciprocità, dunque il problema da risolvere può essere enunciato così:

Per ognuna delle ∞^h coppie di S_k che possono essere estratte da σ e σ' è assegnata una reciprocità che ha in essa i suoi due sostegni; nell'insieme ∞^h di reciprocità, che così si ottiene, si domanda quante sono quelle nelle quali riescono coniugate le intersezioni dei relativi sostegni con h coppie date di iperpiani (π_i, π'_i).

Posta così la questione, se ne riconosce chiaramente la natura e si vede che essa può esser risolta caso per caso mediante il così detto metodo delle degenerazioni della geometria numerativa.

15. A chiarimento di quanto ora è stato detto diamo qui un rapido cenno della via che conduce alla risoluzione del problema nell'ipotesi che sia $r = 3$, $k = 1$.

Allora σ e σ' saranno due S_3, fra di essi sarà data una reciprocità R e bisognerà considerare la totalità ∞^8 delle proiettività subordinate da R fra le coppie di rette r ed r' di σ e σ'; dove, in accordo con la nomenclatura stabilita, se r_1' ed r_1 sono gli assi dei fasci di piani di σ' e σ corrispondenti per R alle punteggiate r ed r', la proiettività subordinata da R fra r ed r' sarà quella che si ottiene facendo corrispondere a ciascun punto di r (di r') il punto in cui il piano corrispondente del fascio r_1' (del fascio r_1) taglia la retta r' (la retta r).

Notisi pertanto che codesta reciprocità sarà degenere, se r' si appoggia ad r_1' (indi r ad r_1), e sarà totalmente indeterminata, se r' coincide con r_1' (indi r con r_1).

Ciò posto, per la coppia di punteggiate proiettive r ed r' della nostra totalità ∞^8, adottando le notazioni dello SCHUBERT, indichiamo, successivamente, con

$$g, g_p, g_e, g_s \text{ o } G \tag{24}$$

la condizione perchè la retta r si appoggi a una retta data, appartenga ad un punto, ad un piano o ad un fascio dati o, infine, coincida con una retta data; con

$$h, h_p, h_e, h_s \text{ o } H \tag{25}$$

le condizioni analoghe per la retta r'; e, infine, con ζ la condizione che nella proiettività fra r ed r' siano omologhi i punti in cui esse sono tagliate da due piani dati π e π', con η la condizione che la detta proiettività risulti degenere.

Allora il numero da calcolare sarà quello delle coppie considerate di punteggiate proiettive che soddisfanno alla condizione ottupla ζ^8, numero, che secondo una ben nota convenzione dello SCHUBERT, si indica pur esso con ζ^8.

In virtù della relazione fondamentale, che lega le condizioni g, h, η, ζ,

$$\zeta = \frac{1}{2}(g + h + \eta),$$

il calcolo dei numeri del tipo $\theta\,\zeta^{\alpha+1}$, dove θ sta a rappresentare una qualsiasi condizione $(7 - \alpha)$-pla composta con le condizioni (24), (25) e η, è ricondotto al calcolo di quelli che della ζ contengono solo la potenza α^{ma}.

Ora con ragionamenti assai semplici si riconosce che è

$$GH = 1,\ \ GH^s\zeta = g_s H\zeta = 1,$$

$$Gh_p\,\zeta^2 = g_p\,H\zeta^2 = 1,\ Gh_e\,\zeta^2 = g_e\,H\zeta^2 = 1,\ g_s\,h_s\,\zeta^2 = 2,$$

$$\eta G\,h\zeta^2 = \eta g\,H\zeta^2 = 2,\ \eta g_s\,h_p\,\zeta^2 = \eta g_p\,h_s\,\zeta^2 = 3,\ \eta g_s h_e\,\zeta^2 = \eta g_e h_s\,\zeta^2 = 3,$$

$$\eta G\zeta^3 = \eta H\zeta^3 = 0,\ \eta g_s\,h\zeta^3 = \eta g h_s\,\zeta^3 = 6,\ \eta g_p\,h_p\,\zeta^3 = 6,\quad \eta g_e\,h_e\,\zeta^3 = 6,$$

$$\eta g_p\,h_e\,\zeta^3 = \eta g_e\,h_p\,\zeta^3 = 4,$$

$$\eta g_s\,\zeta^4 = \eta h_s\,\zeta^4 = 0,\ \eta g_p\,h\zeta^4 = \eta g h_p\,\zeta^4 = 10,\ \eta g_e\,h\zeta^4 = \eta g h_e\,\zeta^4 = 10\,;$$

e che sono nulli tutti i numeri contenenti a fattori η e ζ^5, ζ^6 o ζ^7; quindi risalendo si potranno calcolare tutti i numeri del tipo $\lambda\zeta^\beta$, dove λ sta a rappresentare qualsiasi condizione $(8-\beta)$-pla composta con le condizioni (24), (25) e ζ.

In particolare si trova così

$$\zeta^8 = 23\,;$$

e dunque:

Il luogo dei poli di un assegnato iperpiano dell'ambiente rispetto alle ∞^8 *quadriche ordinarie della* V_6^{20} *di* SEGRE *appartenente ad un* S_{15} *e rappresentante le coppie di punti di due* S_3 *è una* V_8^{23}.

16. Una rappresentazione analitica della varietà $G_\varrho^{(k)}$ mediante equazioni parametriche può essere ottenuta facilmente nel modo che segue.

Supponiamo che la reciprocità-luogo R rispondente all'iperpiano ϱ sia non degenere, di guisa che sarà lecito immaginare d'aver fissato le coordinate in σ e σ' sì che R sia rappresentata dall'equazione

$$\sum_i^{1..r+1} x_i x'_i = 0\,; \tag{26}$$

inoltre supponiamo che le equazioni di λ e λ' siano, rispettivamente,

$$\begin{cases} c_{1,1}\,x_1 + \dots + c_{1,r+1}\,x_{r+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{r-k,1}\,x_1 + \dots + c_{r-k,r+1}\,x_{r+1} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

e

$$\begin{cases} c'_{1,1}\,x'_1 + \dots + c'_{1,r+1}\,x'_{r+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c'_{r-k,1}\,x'_1 + \dots + c'_{r-k,r+1}\,x'_{r+1} = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Se (x'_i) è il punto di λ' coniugato a tutti i punti dello S_{k-1} secondo cui λ è tagliato dall'iperpiano

$$\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{r+1} x_{r+1} = 0, \tag{29}$$

bisogna, in primo luogo, che le x'_i soddisfacciano alle (28) e, in secondo luogo, che per esse la (26) riesca nelle x_i una conseguenza delle equazioni (29) e (27), cioè una loro combinazione lineare. Se i coefficienti di codesta combinazione si indicano con $\mu_1, \dots, \mu_{r-k+1}$, per le x'_i e le μ_j dovranno coesistere le (28) e le equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1 \xi_1 \quad + \mu_2 c_{1,1} \quad + \dots + \mu_{r-k+1} c_{r-k,1} \quad = x'_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_1 \xi_{r+1} + \mu_2 c_{1,r+1} + \dots + \mu_{r-k+1} c_{r-k,r+1} = x'_{r+1}. \end{array}\right. \tag{30}$$

Ora pongasi che l'iperpiano

$$\xi'_1 x'_1 + \dots + \xi'_{r+1} x'_{r+1} = 0 \tag{31}$$

sia coniugato all'iperpiano (28) nella reciprocità-inviluppo avente per nucleo quella che aderisce alla reciprocità indotta dalla (26) fra λ e λ'; bisognerà allora che anche la (31) coesista con le (30) e (29), cioè che sia

$$\left|\begin{array}{llllllll} \xi_1, & c_{1,1} & c_{2,1}, \dots, & c_{r-k,1} & -1, & 0, & \dots, 0 \\ \dots & & & & & & \\ \xi_{r+1}, & c_{1,r+1}, & c_{2,r+1}, \dots, & c_{r-k,r+1}, & 0, & 0, & \dots, -1 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, 0, & \xi'_1, & \xi'_2, & \dots, \xi'_{r+1} \\ 0, & 0, & 0, & \dots, 0, & c'_{1,1}, & c'_{1,2}, & \dots, c'_{1,r+1} \\ \dots & & & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \dots, 0, & c'_{r-k,1}, & c'_{r-k,2}, & \dots, c'_{r-k,r+1} \end{array}\right| = 0, \tag{32}$$

o in altri termini che sia nullo il prodotto per righe delle matrici

$$\left\|\begin{array}{l} \xi_1 \quad, \dots, \xi_{r+1} \\ c_{1,1} \quad, \dots, c_{1,r+1} \\ \dots\dots \\ c_{r-k,1}, \dots, c_{r-k,r+1} \end{array}\right\| \quad \text{e} \quad \left\|\begin{array}{l} \xi'_1 \quad, \dots, \xi'_{r+1} \\ c'_{1,1} \quad, \dots, c'_{1,r+1} \\ \dots\dots \\ c'_{r-k,1}, \dots, c'_{r-k,r+1} \end{array}\right\|.$$

Tenendo conto di quest'ultima osservazione si riconosce subito che nella (32), la quale è l'equazione della reciprocità-inviluppo corrispondente al polo di ϱ rispetto alla $L^{(k)}$ individuata da λ e λ', i coefficienti sono delle forme bilineari delle coordinate di λ e λ'; e dunque, se codeste coordinate si indicano con le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ e $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$ e la (32) si scrive nella forma

$$\sum_{i,j}^{1..r+1} f_{i,j}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots)\, \xi_i \xi'_j = 0,$$

le equazioni parametriche di $G_\varrho^{(k)}$, coi parametri γ e γ', indicate con le $X_{i,j}$ le coordinate correnti, saranno

$$X_{i,j} = f_{i,j}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots). \tag{33}$$

Nelle (33) i parametri $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, al pari degli altri $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$, non sono, com'è ben noto, indipendenti; ma avvertasi pure che la rappresentazione dei punti di $G_\varrho^{(k)}$ sulle coppie di S_k estratte da σ e σ' fornita dalle (33) è solo generalmente biunivoca.

E infatti, se la reciprocità indotta da R fra λ e λ' è degenere e di specie > 1 (per il che occorre e basta che λ' si appoggi secondo un S_l, con $l > 0$, allo S_{r-k-1} rispondente per R a λ), la reciprocità-inviluppo ad essa aderente è totalmente indeterminata; e allora la (32) per due tali spazi λ e λ' diviene identica e nelle (33) i secondi membri riescono tutti nulli.

17. Ad altre interessanti proprietà di $G_\varrho^{(k)}$ darà luogo il seguente teorema:

I poli dell'iperpiano ϱ rispetto alle $L^{(k)}$ rispondenti alle $\infty^{(r-k)(k+1)}$ coppie di S_k che si ottengono associando un S_k fisso, λ, di σ con un S_k, λ', variabile in σ' sono i punti di un $S_{(r-k)(k+1)}$.

Diciamo V la varietà riempita dai poli di ϱ rispetto alle $L^{(k)}$ di cui nell'enunciato: si tratta di far vedere che V è uno spazio lineare, ossia che V contiene per intero la retta congiungente due suoi punti.

Sia Λ' lo S_{r-k-1} di σ' corrispondente a λ nella reciprocità-luogo R rappresentata da ϱ e siano λ'_1 e λ'_2 due posizioni di λ' ognuna delle quali sia sghemba con Λ'.

I poli di ϱ, rispetto alle $L^{(k)}$ relative alle coppie (λ, λ'_1) e (λ, λ'_2), sono i punti P_1 e P_2 rappresentanti le reciprocità-inviluppo fra σ e σ' di specie $r-k$, $\overline{R}_1$ ed $\overline{R}_2$, che hanno come nuclei quelle aderenti alle reciprocità indotte da R fra λ e λ'_1, λ e λ'_2.

Naturalmente codeste reciprocità indotte fanno corrispondere agli S_{k-1} di λ i punti di λ_1' e λ_2' in modo che i due punti di λ_1' e λ_2' omologhi ad un dato S_{k-1} di λ stiano in un medesimo S_{r-k} della stella col centro A'.

Sia $\overline{R}_3$ una reciprocità-inviluppo del fascio individuato da $\overline{R}_1$ ed $\overline{R}_2$.

Gli iperpiani di σ passanti per λ sono singolari tanto per $\overline{R}_1$, quanto per $\overline{R}_2$; dunque sono tali anche per $\overline{R}_3$ ed $\overline{R}_3$, al pari di $\overline{R}_1$ ed $\overline{R}_2$, ha per primo asse λ. Sia λ_3' il suo secondo asse.

Se per i nuclei di $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ un S_{k-1} di λ va, rispettivamente, nei punti A_1', A_2' e A_3' di $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$, i punti A_1', A_2', A_3 sono allineati, perchè $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ appartengono a un fascio, e A_1', A_2' sono contenuti in un S_{r-k} per A'. Ma allora in codesto S_{r-k} sta pure A_3' ed $\overline{R}_3$ è la reciprocità fra σ e σ' avente per nucleo quella che aderisce alla reciprocità indotta da R fra λ e λ_3'. Segue che $\overline{R}_3$ è rappresentata in Σ dal polo P_3 di ϱ rispetto alla $L^{(k)}$ rispondente agli spazi λ e λ_3', e P_3 è, come volevasi, allineato con P_1 e P_2.

Dal teorema dimostrato discende subito che:

La varietà $G_\varrho^{(k)}$ contiene due schiere $\infty^{(r-k)(k+1)}$ di $S_{(r-k)(k+1)}$, — corrispondentemente alle due totalità di S_k contenute l'una in σ, l'altra in σ' —; e che:

Mentre due spazi di una medesima schiera in generale non hanno punti comuni, due spazi appartenenti a schiere diverse hanno in generale uno ed un solo punto comune.

Per $k = 0$, nel qual caso a quest'ultimo enunciato può darsi forma più precisa, si ritrovano le due schiere di S_r di $F^{(r)}$ e il modo di comportarsi dei loro spazi.

18. Manteniamo le ipotesi e le notazioni del n⁰ precedente e domandiamoci di qual natura sia la varietà descritta da λ_3' al variare di $\overline{R}_3$ nel fascio individuato da $\overline{R}_1$ ed $\overline{R}_2$, supponendo che λ_1' e λ_2', per quanto ha tratto alla ricerca dei loro eventuali punti comuni, presentino la posizione più generale compatibilmente con la dimensione loro e quella di σ'.

Si consideri la prospettività fra λ_1' e λ_2' col centro A'. Le rette congiungenti i punti omologhi si appoggiano a λ_3' in tutte le sue posizioni; quindi la V_{k+1} che le contiene è la varietà descritta da λ_3'.

Se x è l'ordine di tale V_{k+1}, x è il numero dei punti comuni ad essa e ad un S_{r-k-1} A_1' di σ', cioè x è il numero delle coppie di punti omologhi tanto nella prospettività fra λ_1' e λ_2' di centro A', quanto nella prospettività fra gli stessi spazi di centro A_1'.

Si faccia il prodotto della trasformazione prospettiva di λ'_1 in λ'_2 col centro A' per quella di λ'_2 in λ'_1 col centro A'_1. Si otterrà in λ'_1 un'omografia ω.

Ora distinguiamo due casi, secondo che è $2k \geq r$ o $2k < r$.

Nel primo caso λ'_1 e λ'_2 si tagliano in un S_{2k-r}, che per ω è tutto di punti uniti; quindi ω subordina un'omografia nella stella ∞^{r-k-1} di λ'_1 avente per centro quell'S_{2k-r}. Ma allora in codesta stella vi sono $r-k$ S_{2k-r+1} uniti per ω in ciascun dei quali ω subordina un'omologia con l'asse nel centro della stella

Segue che ω fuori dell'intersezione di λ'_1 e λ'_2 non ha che altri $r-k$ punti uniti; e dunque nel caso attuale è $x = r - k$.

Suppongasi, invece, che sia $2k < r$.

Allora λ'_1 e λ'_2 sono indipendenti, ω ha $k+1$ punti uniti e $x = k + 1$.

Si conclude che:

L'ordine della V_{k+1} luogo di λ'_3 è $r-k$ o $k+1$, secondo che è $2k \geq r$ o $2k < r$;

di guisa che, se si indica con t la dimensione dell'intersezione di λ'_1 e λ'_2 con la solita convenzione che sia da fare $t = -1$, se λ'_1 e λ'_2 non hanno punti comuni, può dirsi che *l'ordine della nostra V_{k+1} è, in entrambi i casi, $k - t$.*

Occorre appena avvertire che quando λ'_1 e λ'_2 sono indipendenti, la V_{k+1}^{k+1} in discorso è una varietà di SEGRE di 2ª specie con gl'indici $(1, k)$.

19. Poggiando sul teorema ora stabilito possiamo far vedere che:

I sistemi omaloidici della corrispondenza cremoniana segnata dagli spazi di una delle due schiere di $G_\varrho^{(k)}$ su due spazi τ_1 e τ_2 dell'altra schiera sono dell'ordine $r-k$ o $k+1$, secondo che è $2k \geq r$ o $2k < r$.

Supponiamo che τ_i $(i = 1,2)$ sia lo $S_{(r-k)(k+1)}$ di $G_\varrho^{(k)}$ riempito dai poli di ϱ rispetto alle $L^{(k)}$ di $F^{(r)}$ che corrispondono alle coppie di S_k ottenute con l'associare lo S_k fisso λ_i di σ coi singoli S_k di σ'.

Se λ' è un S_k di σ', lo $S_{(r-k)(k+1)}$ dell'altra schiera di $G_\varrho^{(k)}$, legato a λ' nel modo che τ_i è legato a λ_i, taglia τ_1 e τ_2 nei punti A_1 e A_2 che sono poli di ϱ rispetto alle $L^{(k)}$ di $F^{(r)}$ relative alle coppie di S_k (λ_1, λ') e (λ_2, λ').

Suppongasi che A_1 descriva in τ_1 una retta: il teorema sarà dimostrato appena sia fatto vedere che A_2 descrive in τ_2 una linea dell'ordine $r-k$ o $k+1$, secondo che è $2k \geq r$ o $2k < r$.

Per quanto è detto nel nº precedente, al variare di A_1 λ' descrive in σ' una V_{k+1}^x, con x uguale ad $r-k$ o $k+1$, secondo che è $2k \geq r$ o $2k < r$; ed è chiaro inoltre che A_2 descrive in τ_2 la curva C i cui punti rappresentano in Σ le ∞^1 reciprocità-inviluppo aventi per nuclei quelle che aderiscono alle reciprocità indotte da R fra λ_2 e i singoli S_k di V_{k+1}^x.

Dicasi Λ_2' lo S_{r-k-1} omologo a λ_2 in R: la reciprocità-inviluppo aderente a quella indotta da R fra λ_2 e un S_k di V_{k+1}^x si otterrà facendo corrispondere a un S_{k-1} di λ_2 il punto nel quale l'S_k di V_{k+1}^x è tagliato dallo S_{r-k} per Λ_2' che corrisponde a quell'S_{k-1} in R; di guisa che, se quell'S_{k-1} di λ_2 si tien fisso e l'S_k di V_{k+1}^x si fa variare, il punto in discorso descriverà la curva di ordine x secondo la quale V_{k+1}^x è tagliata dallo S_{r-k} ora nominato.

Ciò posto, sia y l'ordine della curva C: sarà y il numero delle reciprocità-inviluppo della ∞^1 suddetta che riescono coniugate ad una data reciprocità-luogo fra σ e σ', per es. a quella di specie r, che ha per assi gli iperpiani π e π' di σ e σ'.

Perchè una reciprocità-inviluppo sia coniugata a codesta reciprocità-luogo occorre e basta che per essa π e π' sia una coppia di iperpiani coniugati, dunque bisognerà cercare quante sono le reciprocità della nostra ∞^1 che hanno in π e π' due iperpiani coniugati.

Se Γ è la curva d'ordine x rispondente, nel senso più sopra chiarito, allo S_{k-1} secondo cui π taglia λ_2, Γ è tagliata da π' in x punti; dunque sono x le reciprocità or ora richieste e il teorema è dimostrato.

Per $k=r-1$ è $x=1$; dunque in tal caso la corrispondenza cremoniana quivi considerata è un'omografia. Si ritrova così la ben nota proprietà di $F^{(r)}$, secondo la quale gli S_r di una sua schiera punteggiano omograficamente due qualsiasi S_r dell'altra schiera.

Capitolo II

LE VARIETÀ DEGLI AUTOMODULI E IL GRUPPO AUTOMORFO DI UN'ALGEBRA REGOLARE COMPLESSA

§ 1. Considerazioni preliminari

20. Sia A un'algebra regolare complessa ([10]) d'ordine n^2, e supponiamo, com'è lecito, che essa sia addirittura l'algebra costituita da tutte le matrici ad elementi complessi d'ordine n.

([10]) Parliamo di algebra complessa per fissare le idee; ma tutto quanto si dice sta anche per algebre regolari reali.

Allora, se con $c_{i,j}$ si indica la matrice d'ordine n avente eguale ad 1 l'elemento che occupa il posto (i, j) e nulli tutti gli altri, le n^2 matrici $c_{i,j}$ potranno essere assunte come unità di A e rispetto ad esse la tavola di moltiplicazione sarà

$$c_{i,j}\, c_{h,k} = \begin{cases} 0\ , & \text{se } j \neq h, \\ c_{i,k}\, , & \text{se } j = h, \end{cases}$$

21. Sia v un automodulo di A diverso dal modulo, cioè dalla matrice identica

$$u = c_{1,1} + \dots + c_{n,n}\, ,$$

(di guisa che bisognerà supporre $n > 1$) e poniamo

$$v' = u - v\, ;$$

v' sarà anch'esso un automodulo e v, v' saranno mutuamente nullifici.

In base a un teorema generale che ho dimostrato altrove ([11]), se x è un elemento qualsiasi del sistema vAv' (o del sistema $v'Av$), la somma $v + x$ à un automodulo equivalente a v.

È utile per quanto segue precisare nel caso attuale gli ordini dei sistemi vAv' e $v'Av$, i quali, com'è noto e come del resto si vede subito, quando non sono nulli sono delle zero-algebre.

Poichè si tratta di caratteri che non variano se a v si sostituisce un automodulo equivalente, e poichè, se p è la caratteristica di v, v è equivalente a

$$c_{1,1} + \dots + c_{p,p}\, ,$$

possiamo supporre che v coincida addirittura con questa somma ([12]).

Dopo ciò si ha

$$v' = c_{p+1,p+1} + \dots + c_{n,n}\, ,$$

e se l'elemento corrente di A è

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} \alpha_{i,j}\, c_{i,j}\, ,$$

quello di vAv' sarà

$$(c_{1,1} + \dots + c_{p,p}) \cdot \sum_{i,j}^{1\dots n} \alpha_{i,j}\, c_{i,j} \cdot (c_{p+1,p+1} + \dots + c_{n,n}),$$

([11]) Loc. cit. in ([1]), pp. 279-280.
([12]) Loc. cit. in ([1]), pp. 418-419.

ossia

$$\sum_{i}^{1\ldots p}\ \sum_{j}^{p+1\ldots n} \alpha_{i,j}\, c_{i,j}\,;$$

e quello di $v'Av$ sarà

$$(c_{p+1,p+1}+\ldots+c_{n,n})\cdot \sum_{i,j}^{1\ldots n} \alpha_{i,j}\, c_{i,j}\cdot(c_{1,1}+\ldots+c_{p,p}),$$

ossia

$$\sum_{i}^{p+1\ldots n}\ \sum_{j}^{1\ldots p} \alpha_{i,j}\, c_{i,j}\,.$$

Si conclude che:

Gli ordini di vAv' e $v'Av$ se la caratteristica di v è p, sono entrambi eguali a $p\,(n-p)$.

In base al calcolo fatto si vede che, quando

$$v=c_{1,1}+\ldots+c_{p,p}\,,$$

le matrici rappresentanti gli automoduli del tipo $v+x$, con x elemento di vAv' o di $v'Av$, sono, rispettivamente, della forma

$$\left\|\begin{matrix} J, & M\\ 0, & 0\end{matrix}\right\| \quad \text{o} \quad \left\|\begin{matrix} J, & 0\\ N, & 0\end{matrix}\right\|,$$

dove J è la matrice identica d'ordine p, M una qualsiasi matrice di tipo $(p, n-p)$ ed N una qualsiasi matrice di tipo $(n-p, p)$. Naturalmente esse riescono tutte di caratteristica p, d'accordo col teorema generale ricordato e col fatto che in un'algebra regolare due automoduli sono equivalenti quando, e solo quando, hanno la medesima caratteristica.

Notisi infine che *se si pone*

$$v^*=v+x,$$

con x in vAv' o $v'Av$, dei due automoduli v e v^* ciascuno è per l'altro un modulo sinistro o un modulo destro, secondo che x appartiene a vAv' o $v'Av$.

Infatti, se x, ad es., è in vAv', v è per x un modulo sinistro e un nullifico destro; quindi è

$$v^*-v=x=vx=v(v^*-v)=vv^*-v,$$

ossia

$$vv^* = v^*,$$

e inoltre

$$0 = xv = (v^* - v)\, v = v^*v - v,$$

ossia

$$v^*v = v.$$

22. Per quanto segue ci è necessario determinare la dimensione della totalità degli automoduli di A di data caratteristica: essa può esser calcolata agevolmente per la via che passiamo ad indicare.

Sia

$$w = \| \alpha_{i,j} \| \tag{34}$$

un automodulo di A con la caratteristica p, e le formule

$$x'_i = \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{i,j}\, x_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{35}$$

siano quelle di una sostituzione lineare omogenea avente per modulo w.

Interpretando le x e x' come coordinate di un punto in un S_n euclideo (complesso), le (35) saranno le equazioni di un'affinità φ, con un punto unito nell'origine.

L'automodulo w è equivalente a quello dato dalla matrice d'ordine n

$$\left\| \begin{matrix} J, & 0 \\ 0, & 0 \end{matrix} \right\|,$$

dove J è la matrice identica d'ordine p: ciò significa, premettendo, ove occorra, una conveniente trasformazione di coordinate che tenga ferma l'origine, che le equazioni dell'affinità φ possono supporsi ricondotte alla forma

$$x'_1 = x_1, \ldots, x'_p = x_p, \quad x'_{p+1} = 0, \ldots, x'_n = 0.$$

Su queste si legge subito il modo di operare dell'affinità φ sui punti dello S_n ambiente.

Si dica λ lo S_{n-p} con le equazioni

$$x_1 = 0, \ldots, x_p = 0,$$

e μ lo S_p con le equazioni

$$x_{p+1} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Allora φ porta nell'origine tutti e solo i punti di λ: ogni altro punto P di S_n è portato in un punto P' di μ; precisamente nel punto P' che è intersezione di μ con lo S_{n-p} condotto per P parallelamente a λ. Donde segue, in particolare, che dei punti di μ ognuno è portato da φ in sè stesso.

In conformità di una nomenclatura stabilita altrove ([13]), λ e μ possono dirsi, rispettivamente, il primo ed il secondo asse di φ.

Essi sono un S_p ed un S_{n-p} uscenti dall'origine e non aventi alcun altro punto comune; ed è chiaro che, assunti comunque un S_p ed un S_{n-p} per l'origine, privi di altri punti comuni, esiste uno ed un solo automodulo di caratteristica p, tale che la corrispondente affinità abbia in essi i suoi due assi.

Ora in un S_n le coppie di S_p ed S_{n-p} uscenti da un punto sono $\infty^{2p(n-p)}$, dunque:

La totalità degli automoduli dell'algebra A aventi per caratteristica p è della dimensione $2p(n-p)$.

§ 2. Rappresentazione dell'algebra A sui punti di un S_{n^2} euclideo

23. La rappresentazione degli elementi di A sulle affinità di un S_n euclideo, che ne lascino fermo un punto, come nel n^0 precedente ci ha permesso di calcolare la dimensione della totalità degli automoduli di caratteristica p, così si presenta utile in molti altri casi; ma per la completa caratterizzazione di codesta totalità conviene meglio far ricorso a quella che è oggetto del presente paragrafo.

24. Sia Σ uno spazio euclideo complesso ad n^2 dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $x_{i,j}$ $(i,j = 1, \dots, n)$. Allora facendo corrispondere alla matrice $x = \| x_{i,j} \|$ di A il punto $\overline{x} \equiv (x_{i,j})$ di Σ si ottiene fra gli elementi di A e i punti di Σ una corrispondenza biunivoca.

Alluderemo alla relazione intercedente fra x e $\overline{x}$ dicendo che $\overline{x}$ è l'*immagine* di x.

([13]) Loc. cit. in ([1]), pag. 409 e seg.^{ti}.

La matrice x è degenere quando, e solo quando, è

(36) $$|x_{ij}| = 0,$$

e questa è in Σ l'equazione di una $V^n_{n^2-1}$ conica col vertice nell'origine, che indicheremo con $V^{(1)}$; dunque:

Le immagini dei divisori dello zero di A sono i punti del cono $V^{(1)}$ diversi dal vertice.

25. Ampliamo lo spazio Σ in uno spazio proiettivo Σ^* mediante l'introduzione di elementi impropri; e in Σ^* assumiamo come coordinate le coordinate cartesiane omogenee che si deducono al solito modo da quelle non omogenee già introdotte, ponendo $\frac{x_{i,j}}{z}$ al posto di $x_{i,j}$; di guisa che l'iperpiano all'infinito di Σ^*, che denoteremo con Π^*, sarà rappresentato dall'equazione $z = 0$.

La (36) in Π^* rappresenta una $V^n_{n^2-2}$, che diremo $F^{(1)}$, della stessa natura di quella indicata col medesimo simbolo nel n° 7; ad essa sono dunque collegate altre $n-2$ varietà.

$$F^{(2)}, \dots, F^{(n-1)}$$

delle quali $F^{(i)}$ rappresenta il luogo dei punti aventi per $F^{(1)}$ molteplicità $\geq i$ ed $F^{(n-1)}$ è una varietà di SEGRE con gl'indici $(n-1, n-1)$.

Il cono $V^{(1)}$ non è altra cosa che l'insieme dei punti propri del cono di Σ^* proiettante $F^{(1)}$ dall'origine; dunque:

Al cono $V^{(1)}$ di Σ sono collegati altri $n-2$ coni dello spazio stesso

$$V^{(2)}, \dots, V^{(n-1)},$$

dei quali $V^{(i)}$ è il luogo dei punti aventi per $V^{(1)}$ molteplicità $\geq i$, e non è altra cosa che l'insieme dei punti propri del cono proiettante dall'origine la varietà $F^{(i)}$.

Notisi che $F^{(i)}$ è il luogo dei punti di Π^* che con le loro coordinate annullano tutti i minori della matrice $\| x_{i,j} \|$ di ordine $> n-i$, dunque $V^{(i)}$ è il luogo delle immagini delle matrici a caratteristica $\leq n-i$, quelle di caratteristica $< n-i$ appartenendo a $V^{(i+1)}$, dove è da intendere che $V^{(i+1)}$ stia per l'origine, se $i = n-1$; quindi:

Le immagini degli elementi di A a caratteristica p sono tutti e solo i punti di $V^{(n-p)}$ non situati su $V^{(n-p+1)}$.

In particolare:

Le immagini degli elementi a caratteristica 1 *sono tutti e solo i punti di* $V^{(n-1)}$, *diversi dall'origine.*

Sia infine avvertito esplicitamente che, per quanto è stato ricordato nel n⁰ 7:

Il cono $V^{(i)}$ $(i=1,\dots,n-1)$ *ha la dimensione*

$$n^2-i^2 \tag{37}$$

e l'ordine

$$\frac{\binom{2i}{i}\binom{2i+1}{i}\cdots\binom{n-1+i}{i}}{\binom{i}{i}\binom{i+1}{i}\cdots\binom{n-1}{i}}. \tag{38}$$

26. La penultima proposizione del n⁰ precedente ci dà subito modo di caratterizzare il luogo delle immagini degli automoduli primitivi.

Un automodulo primitivo di A, essendo equivalente all'automodulo

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0,\dots, & 0 \\ 0, & 0,\dots, & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0,\dots, & 0 \end{Vmatrix}, \tag{39}$$

ha la caratteristica e la traccia eguali entrambe ad 1.

Inversamente si vede subito che:

Un elemento x *di* A *con la caratteristica e la traccia eguali ad* 1 *è un automodulo primitivo.*

Infatti, se la caratteristica e la traccia di x sono eguali ad 1, l'equazione caratteristica di x è

$$\xi^n-\xi^{n-1}=0,$$

e quindi le sue radici sono date dalla radice semplice 1 e dalla radice $(n-1)$-pla 0.

Ma allora la matrice equivalente ad x e di forma canonica [14] è necessariamente del tipo (39), perchè in essa, la caratteristica es-

[14] Loc. cit. in [1], pag. 429 e seg.ti.

sendo 1, ai posti $(2, 3)$, $(3, 4)$, ..., $(n-1, n)$ non possono comparire che elementi nulli, dunque x è, come volevasi, un automodulo primitivo.

Segue dalle osservazioni ora fatte che:

Le immagini degli automoduli primitivi di A sono tutti e solo i punti dell'intersezione del cono $V^{(n-1)}$ con l'iperpiano

$$x_{1,1} + \dots + x_{n,n} = 1,$$

la quale è l'insieme dei punti propri di una varietà di SEGRE *con gl'indici $(n-1, n-1)$.*

Denoteremo con W_1^* codesta varietà di SEGRE e con W_1 l'insieme dei suoi punti propri, cioè il luogo delle immagini degli automoduli primitivi.

Notisi che:

Nessuno degli S_{n-1} delle due schiere di W_1^* giace per intero nello S_{n^2-2} all'infinito dello S_{n^2-1} cui appartiene.

Infatti la sezione di W_1^* con quell'S_{n^2-2} è, nell'iperpiano all'infinito di Σ^*, l'intersezione dello S_{n^2-2}, ivi rappresentato dall'equazione

$$x_{1,1} + \dots + x_{n,n} = 0$$

con la varietà di SEGRE luogo dei punti $(n-1)$-pli della $V_{n^2-2}^{n}$ avente *ivi* per equazione

$$\begin{vmatrix} x_{1,1}, & \dots, & x_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1}, & \dots, & x_{n,n} \end{vmatrix} = 0;$$

e quindi basta tener presente quanto è stato detto alla fine del n⁰ 8 per riconoscere la verità dell'affermazione fatta.

27. Se $x' = \| x'_{i,j} \|$ è un automodulo di caratteristica $n-1$ ed $x = \| x_{i,j} \|$ è la differenza fra la matrice identica u e l'automodulo x', x riesce un automodulo primitivo. E, inversamente, se x è un automodulo primitivo qualsiasi, $x' = u - x$ è un automodulo di caratteristica $n-1$.

Intanto da

$$x + x' = u$$

segue

$$x_{i,i} + x'_{i,i} = 1, \qquad \text{per } i = 1, \dots, n,$$

e

$$x_{i,j} + x'_{i,j} = 0, \qquad \text{per } i \neq j,$$

dunque il punto medio del segmento $\overline{x\,x'}$ avente per estremi le immagini di x ed x' è il punto $(y_{i,j})$ pel quale si ha

$$y_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

cioè il punto medio M del segmento congiungente l'origine O con l'immagine I della matrice identica.

Ma dunque:

Le immagini degli automoduli di caratteristica $n-1$ sono anch'esse i punti propri di una varietà di Segre *con g'indici $(n-1, n-1)$ e questa è la simmetrica rispetto al punto M della varietà rispondente agli automoduli primitivi.*

Notisi che la varietà di Segre ora trovata sta nell'iperpiano

$$x_{1,1} + \dots + x_{n,n} = n - 1,$$

perchè la traccia di un automodulo con caratteristica $n-1$ è appunto $n-1$; e che questo iperpiano è, come dev'essere, il simmetrico di

$$x_{1,1} + \dots + x_{n,n} = 1$$

rispetto al punto M.

28. In analogia con la notazione già adottata per gli automoduli primitivi, cioè di caratteristica 1, indicheremo con W_p il luogo delle immagini degli automoduli di caratteristica p e con W_p^* quel che potrebbe dirsi il *prolungamento* di W_p in Σ^*, cioè la meno ampia varietà algebrica di Σ^* i cui punti propri sono quelli di W_p.

Per quanto precede W_1^* e W_{n-1}^* sono varietà di Segre con gl'indici $(n-1, n-1)$; restano da caratterizzare le W_p^* per $p = 2, \dots, n-2$.

29. Per questo partiamo dalla osservazione che segue.

Sia v un automodulo di A con la caratteristica p: esso sarà equivalente a

$$v_1 = \begin{Vmatrix} J, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix},$$

dove J è la matrice identica d'ordine p e le linee e colonne formate da elementi tutti nulli sono $n-p$; ossia potrà determinarsi (e in infiniti modi) una matrice non degenere a, sì che riesca

$$v = a^{-1} v_1 a,$$

indi

$$vAv = a^{-1} v_1 A v_1 a .$$

Allorchè, indicato con a un elemento fisso non degenere e con x un elemento variabile di A, si pone

$$x' = a^{-1} x a,$$

la corrispondenza fra x ed x' in A (che è un automorfismo) si traduce, per le loro immagini $\bar{x}$ ed $\bar{x}'$ in Σ, in un'affinità, quindi le immagini degli elementi di vAv costituiranno una varietà affine a quella riempita dalle immagini degli elementi di v_1Av_1.

Ora gli elementi di v_1Av_1, dovendo avere in v_1 un modulo, sono tutte e solo le matrici di ordine n che si ottengono orlando con elementi nulli le matrici d'ordine p, ossia formano un'algebra regolare d'ordine p^2; quindi gli automoduli primitivi di v_1Av_1 (che sono primitivi anche per A) hanno per immagini in Σ i punti propri di una varietà di SEGRE con gl'indici $(p-1, p-1)$, appartenente allo S_{p^2-1} intersezione dell'iperpiano

$$x_{1,1} + \dots + x_{p,p} = 1$$

con lo S_{p^2} rappresentato dalle equazioni

$$(40) \qquad \begin{aligned} x_{i,p+1} = \dots = x_{i,n} = 0 \qquad & (i = 1, \dots, p) \\ x_{i,1} = \dots = x_{i,n} = 0 \qquad & (i = p+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Segue che:

Le immagini degli automoduli primitivi dell'algebra vAv, con v automodulo di caratteristica p, sono date dai punti propri di una varietà di SEGRE *con gl'indici $(p-1, p-1)$.*

Osservisi che per un ragionamento simile a quello che chiude il n° 26 nessuno spazio delle due schiere di S_{p-1} appartenenti alla varietà di SEGRE i cui punti propri sono le immagini degli automoduli primitivi di v_1Av_1 giace per intero nello S_{p^2-2} all'infinito dello S_{p^2-1} cui la varietà appartiene. Ma allora *lo stesso sta per la varietà di* SEGRE, *i cui punti propri dànno le immagini degli automoduli pri-*

mitivi di vAv, una volta che questa varietà si deduce dalla precedente mediante una trasformazione affine.

30. Si avverta, che nell'iperpiano all'infinito di Σ^* la varietà di SEGRE, luogo dei punti $(n-1)$-pli della $V_{n^2-2}^{n}$

$$\begin{vmatrix} x_{1,1}, \dots, x_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_{n,1}, \dots, x_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

ha nella varietà di SEGRE, luogo dei punti $(p-1)$-pli della $V_{p^2-2}^{p}$ che nello S_{p^2-1} di codesto iperpiano, per il quale sono soddisfatte le (40), è rappresentata dall'equazione

$$\begin{vmatrix} x_{1,1}, \dots, x_{1,p} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_{p,1}, \dots, x_{p,p} \end{vmatrix} = 0,$$

una di quelle che, in conformità delle notazioni stabilite nel n⁰ 10, è da dirsi una $L^{(p-1)}$ della schiera $[p-1]$; dunque il luogo delle immagini degli automoduli primitivi di v_1Av_1 è l'insieme dei punti propri di una $L^{(p-1)}$ della schiera $[p-1]$ di W_1^*. Intanto W_1^*, al al pari di W_1, è trasformata in sè da ogni affinità che corrisponda ad un automorfismo di A, dunque:

Le varietà di SEGRE *con gl'indici* $(p-1, p-1)$ *corrispondenti nel senso del teorema più sopra dimostrato agli automoduli di caratteristica* p *appartengono tutte alla schiera* $[p-1]$ *di* W_1^*.

Questa proposizione può essere precisata; può stabilirsi cioè che condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà della schiera $[p-1]$ di W_1^* corrisponda nel senso ormai chiarito ad un automodulo di caratteristica p, è che nessuno dei suoi S_{p-1} giaccia nell'iperpiano all'infinito di Σ^*.

Ciò sarà fatto più innanzi (cfr. n⁰ 39); ma intanto per riconoscere che *in generale* una varietà della detta schiera risponde realmente ad un automodulo di A a caratteristica p basta osservare che la schiera $[p-1]$ di W_1^* e la totalità degli automoduli di A di caratteristica p hanno entrambe la dimensione $2p(n-p)$.

31. Torniamo a considerare l'automodulo v_1 e la corrispondente $L^{(p-1)}$, che diremo $L_1^{(p-1)}$, della schiera $[p-1]$ di W_1^*.

Le p-ple di automoduli primitivi mutuamente nullifici aventi per somma v_1 hanno per immagini p-ple di punti tali che le coordinate dell'immagine di v_1 sono le somme delle loro coordinate omonime.

Ma allora, se G è il baricentro di una tale p-pla e $\overline{v}_1$ è l'immagine di v_1, G è il punto del segmento $O\overline{v}_1$ per il quale è

$$\frac{OG}{O\overline{v}_1} = \frac{1}{p},$$

ossia G si ottiene da $\overline{v}_1$ applicando a questo punto l'omotetia col centro nell'origine che ha per costante $\frac{1}{p}$.

Dico ora che *G è il polo dell'iperpiano all'infinito rispetto ad $L_1^{(p-1)}$.*

Si osservi infatti che gli elementi di $v_1 A v_1$ sono le matrici del tipo

$$\left\|\begin{matrix} x_{1,1}, \dots, x_{1,p}, 0, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{p,1}, \dots, x_{p,p}, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \end{matrix}\right\|,$$

le quali hanno per immagini i punti propri dello S_{p^2} con le equazioni (40).

In questo S_{p^2} abbiamo un cono $V_{p^2-1}^{p}$, col vertice nell'origine, che rappresenta coi suoi punti propri lo zero e i divisori dello zero di $v_1 A v_1$, e che è dotato di una varietà $(p-1)$-pla, costituita da un ulteriore cono proiettante dall'origine una varietà di SEGRE con gl'indici $(p-1, p-1)$; e la nostra $L_1^{(p-1)}$ non è altra cosa che la sezione di quest'ultimo cono con l'iperpiano

$$x_{1,1} + \dots + x_{p,p} = 1. \tag{41}$$

Il punto G per il quale le coordinate $x_{i,i}$ per $i = 1, \dots, p$ sono tutte eguali a $\frac{1}{p}$ e le rimanenti sono tutte nulle, appartiene allo S_{p^2} in discorso, e in questo il suo S_{p^2-1}, polare rispetto al cono $V_{p^2-1}^{p}$, è quello avente per equazione

$$x_{1,1} + \dots + x_{p,p} = 0, \tag{42}$$

dunque il punto G, che sta nell'iperpiano (41), rispetto alla $V^p_{p^2-2}$, sezione di $V^p_{p^2-1}$ con l'iperpiano (41), ha per S_{p^2-2} polare l'intersezione dello S_{p^2} con gl'iperpiani (41) e (42), cioè l'S_{p^2-2} all'infinito della sezione di S_{p^2} con l'iperpiano (41).

Ma dunque G è, come volevasi, il polo dell'iperpiano all'infinito rispetto ad $L_1^{(p-1)}$.

32. Ricorrendo al solito fatto che qualunque automodulo di caratteristica p può portarsi nell'automodulo v_1 mediante un'affinità che muta in sè W_1^*, badando a ciò che è stato dimostrato nel n⁰ precedente e ricordando che con W_p^* si è rappresentata la meno ampia varietà algebrica contenente il luogo delle immagini degli automoduli di caratteristica p, si ha che:

Il luogo dei poli dell'iperpiano all'infinito rispetto alle $L^{(p-1)}$ della schiera $[p-1]$ di W_1^* è la trasformata di W_p^* mediante l'omotetia col centro nell'origine e la costante $\frac{1}{p}$.

Ma dunque la varietà W_p^* è della natura di quelle che nel capitolo precedente sono state denotate con $G_\varrho^{(k)}$.

33. Facendo $p = n - 1$ nel teorema or ora enunciato e ricordando che W_{n-1}^* è, come W_1^*, una varietà di Segre con gl'indici $(n-1,\ n-1)$, si ha che:

Il luogo dei poli dell'iperpiano all'infinito rispetto alla $L^{(n-2)}$ della schiera $[n-2]$ di W_1^* è, come W_1^*, una varietà di Segre *con gl'indici $(n-1,\ n-1)$.*

Ma, com'è ben noto, W_1^* ammette $\infty^{2(n^2-1)}$ trasformazioni omografiche in sè, e fra queste ve n'è certo di quelle che hanno una coppia di iperpiani omologhi in due iperpiani assegnati, dunque:

Dal teorema ora stabilito si deduce senz'altro quello che chiude il n⁰ 13 [15]

34. Dal teorema dimostrato nel n⁰ 17 discende che la varietà W_p^* possiede due schiere $\infty^{p(n-p)}$ di $S_{p(n-p)}$; ebbene è utile osservare che ciò può anche esser dedotto immediatamente da quanto è detto nel n⁰ 21.

(15) Ed è stata appunto questa la via per la quale codesto teorema fu primieramente stabilito. E l'osservazione analoga si intenda fatta anche per quanto è detto nel n⁰ 32.

Infatti W_p, ossia l'insieme dei punti propri di W_p^*, è il luogo delle immagini degli automoduli di caratteristica p; e se v è un tale automodulo, mantenute le notazioni del n[0] 21, sono pure automoduli di caratteristica p quelli del tipo

$$v + x,$$

x essendo un qualsiasi elemento del sistema $v\,A\,v'$ o del sistema $v'\,A\,v$. Ora quando x percorre uno di codesti sistemi l'immagine di $v + x$ percorre l'insieme dei punti propri di uno spazio lineare e ognuno dei detti sistemi ha l'ordine $p\,(n - p)$, quindi ogni punto di W_p sta su due $S_{p(n-p)}$, i cui punti propri appartengono tutti alla varietà stessa.

Con ciò non solo viene ritrovato un fatto che già ci era noto, ma si vede di più che *le due schiere di $S_{p(n-p)}$, i cui punti propri appartengono a W_p, hanno significati ben diversi, quando si guardi a W_p come al luogo delle immagini degli automoduli dell'algebra A con la caratteristica p.*

E infatti dei due $S_{p(n-p)}$ uscenti dal punto di W_p, che è immagine dell'automodulo, quello rispondente al sistema $v\,A\,v'$ ha per punti propri le immagini di automoduli ognun dei quali è per ciascuno dei rimanenti un modulo sinistro, mentre quello rispondente al sistema $v'\,A\,v$ ha per punti propri le immagini di automoduli ognun dei quali è per ciascun dei rimanenti un modulo destro (n[0] 21).

Ma allora, per ragioni evidenti di continuità, le due schiere di spazi in discorso si distinguono per ciò, che per le coppie di automoduli, aventi per immagini punti di uno dei detti spazi, si verifica l'una o l'altra delle due alternative ora indicate, secondo che lo spazio, di cui si tratta, appartiene all'una o all'altra delle due schiere.

§ 3. Caratterizzazione del gruppo di affinità di Σ nel quale si riflette il gruppo automorfo di A.

35. Ho dimostrato in una mia Nota del 1921 [16] che gli automorfismi dell'algebra A sono tutti degli automorfismi interni; quindi

[16] G. Scorza, *Alcune proprietà delle algebre regolari* (Note e Memorie di Matematica vol. I, 1921, Catania). Alcuni dei teoremi contenuti in codesta Nota sono stati ritrovati da A. A. Albert nel 1931: alludo più precisamente ai lemma 2, 4 e 6 alle pag. 75 e 76 della Memoria dello Albert: *The structure of pure* Riemann *matrices with non commutative multiplication algebras* (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. LV, 1931).

il più generale automorfismo di A si ottiene, fissando in essa un elemento a dotato di inverso, e poi facendo corrispondere all'elemento corrente x di A l'elemento x' per il quale si ha

$$x' = a^{-1} xa.$$

Indichiamo con φ_a l'automorfismo così generato.

Allora se b è un'altro elemento dell'algebra dotato di inverso e φ_b è l'automorfismo avente per b il significato che φ_a ha per a, si vede subito che *riesce*

$$\varphi_a = \varphi_b$$

se, e solo se, a e b non differiscono che per un fattore numerico (*non nullo*).

Infatti dire che è $\varphi_a = \varphi_b$ equivale a dire che è, qualunque sia x in A,

$$a^{-1} xa = b^{-1} xb ,$$

ossia

$$ba^{-1} \cdot x = x \,.\, ba^{-1} ;$$

quindi è $\varphi_a = \varphi_b$ quando, e solo quando, ba^{-1} è permutabile con ogni elemento di A.

Ma, com'è ben noto, nell'algebra A un elemento è permutabile con ogni altro se, e solo se, è un multiplo scalare del modulo; e dire che ba^{-1} è un multiplo scalare del modulo è quanto dire che b è un sì fatto multiplo di a; dunque l'affermazione fatta più sopra è giustificata.

Da ciò e dalla circostanza che un elemento di A, essendo una matrice d'ordine n, dipende da n^2 parametri, si deduce che:

Il gruppo degli automorfismi di A è un gruppo ad $n^2 - 1$ parametri.

Intanto ogni automorfismo di A, a traverso la rappresentazione di A su Σ, si muta in un'affinità di Σ, che tiene ferma l'origine, dunque:

Il gruppo Γ delle affinità di Σ nel quale si riflette il gruppo automorfo G dell'algebra è, come questo, un gruppo ad $n^2 - 1$ parametri.

36. Il gruppo Γ muta in sè la W_1, giacchè per un automorfismo di A gli automoduli primitivi non fanno che scambiarsi fra di loro; ora W_1 possiede due schiere ∞^{n-1} di S_{n-1}, dunque un'o-

perazione di Γ o deve mutare in sè ciascuna schiera o deve scambiarle fra di loro.

Ma da quanto è detto nel n⁰ 34 risulta che questa seconda alternativa deve essere esclusa; quindi ogni operazione di Γ muta in sè ciascuna delle due schiere, subordinando in ciascuna di esse, ove questa si consideri come uno spazio lineare di dimensione $n - 1$, un'omografia.

Intanto le omografie di un tale spazio dipendono appunto da $n^2 - 1$ parametri, dunque:

Il gruppo Γ muta in sè ciascuna delle due schiere di S_{n-1} di W_1, subordinando in ciascuna di esse il gruppo totale delle sue omografie.

37. Naturalmente, occorre appena avvertirlo, le omografie subordinate da un'operazione di Γ nelle due schiere di S_{n-1} di W_1 non sono indipendenti. Sorge quindi il problema di cercare come siano collegate fra loro le omografie subordinate da un'operazione di Γ nelle dette due schiere.

Ebbene dimostriamo che:

Di codeste due omografie, ciascuna è individuata dall'altra:
e per potere adoperare liberamente il linguaggio della geometria proiettiva riferiamoci non già allo spazio Σ, a W_1 e al gruppo Γ, ma allo spazio ampliato Σ^*, a W_1^* e al gruppo Γ^* le cui operazioni sono quelle in cui si *ampliano* le operazioni di Γ per l'ampliamento di Σ in Σ^*.

Dette Λ_1 e Λ_2 le due schiere di S_{n-1} di W_1^*, sia φ un'operazione di Γ^* e siano φ_1 e φ_2 le omografie che essa subordina nelle schiere Λ_1 e Λ_2.

Immaginiamo W_1^* rappresentata, al solito modo, sulle coppie di punti estratte da due S_{n-1} λ_1 e λ_2; e supponiamo che gli S_{n-1} di Λ_1 (di Λ_2) rispondano ai punti di λ_1 (di λ_2), nel senso che un tale S_{n-1} corrisponda alle coppie che possono formarsi associando un punto fisso di λ_1 (di λ_2) con un punto variabile in λ_2 (in λ_1).

La sezione di W_1^* con lo S_{n^2-2} all'infinito dello S_{n^2-1} cui appartiene, verrà allora ad esser rappresentata sulla totalità delle coppie di punti coniugati di una reciprocità-luogo R non degenere fra λ_1 e λ_2 (cfr. n⁰ 8, in fine) e l'omografia φ_i $(i = 1, 2)$ si rifletterà in un'omografia ψ_i fra i punti di λ_i.

Giacchè φ è un'affinità, per effetto di essa i punti impropri di W_1^* non fanno che scambiarsi fra di loro; ciò significa che, se P_1 e P_2 sono due punti coniugati in R, con P_i in λ_i, e P_i' è il punto in cui P_i è portato da ψ_i, anche P_1' e P_2' debbono risultare coniugati in R. Segue che, se π_1 e π_1' sono gli S_{n-2} di λ_2 corrispondenti in R ai punti P_1 e P'_1 di λ_1, l'omografia ψ_2 deve portare π_1 in π'_1.

Ma allora le coppie di S_{n-2} omologhi in ψ_2 si ottengono trasformando mediante R le coppie di punti omologhi di ψ_1, e dunque ciascuna delle omografie ψ_i è individuata quando sia assegnata l'altra.

È quanto dire che φ_1 e φ_2, come volevasi, si individuano reciprocamente.

Notisi che, come il dare φ individua φ_1 e φ_2, così il dare una delle omografie φ_i individua l'altra e l'affinità φ. In particolare si ha che:

Il gruppo Γ^* o, ciò che è lo stesso, il gruppo Γ è oloedricamente isomorfo a quello delle omografie di un S_{n-1} in sè.

38. A pieno chiarimento di quanto è stato detto nel presente § facciamo vedere, mantenute le notazioni precedenti, come data, ad es., l'omografia φ_1 si risalga all'affinità φ.

In primo luogo data φ_1 si individuerà φ_2 tenendo conto della circostanza che per effetto di φ_1 e φ_2 i punti impropri di W_1^* debbono scambiarsi fra di loro. Dopo ciò resta fissata la trasformazione di W_1^* in sè subordinata da φ, e quindi addirittura l'affinità che φ subordina nell'iperpiano di Σ^*, cui W_1^* appartiene, cioè nell'iperpiano

$$x_{1,1} + \dots + x_{n,n} = 1.$$

Ora si badi che φ tiene ferma l'origine O e muta in sè ogni iperpiano del fascio rappresentato dall'equazione

$$x_{1,1} + \dots + x_{n,n} = \text{cost.}^{\text{e}},$$

perchè elementi di un'algebra corrispondentisi in un suo automorfismo hanno tracce eguali; quindi, se X è un qualsiasi punto di Σ^*, diverso da O, per ottenere il punto X' in cui X è portato da φ basterà tagliare la retta OX in Y con l'iperpiano contenente W_1^*, determinare, come — per quanto è stato detto — è possibile, il punto Y' in cui Y è portato da φ e infine tagliare in X' la retta OY' con l'iperpiano del fascio sopra considerato passante per X.

Notando che φ tiene fermo ciascun iperpiano di codesto fascio appena ne tiene fermi tre e riferendo il discorso a Γ e W_1, anzi che a Γ^* e W_1^*, abbiamo che:

Il gruppo Γ può essere caratterizzato dicendo che è l'insieme delle affinità di Σ ognuna delle quali trasforma in sè l'origine, la varietà

W_1 *e un iperpiano, parallelo a quello contenente* W_1, *che non passi per l'origine* (17).

39. Ed ora dimostriamo com'era stato preannunziato (n^0 30) che: *Una varietà della schiera* $[p-1]$ *di* W_1^* *dà coi suoi punti propri il luogo delle immagini degli automoduli primitivi di una sotto-algebra di* A *del tipo* $v\,A\,v$, *con* v *conveniente automodulo a caratteristica* p, *se, e solo se, nessuno dei suoi* S_{p-1} *giace per intero nell'iperpiano all'infinito.*

Che la condizione espressa in questo enunciato come necessaria e sufficiente sia necessaria è ben chiaro, dopo quanto è stato detto alla fine del n^0 29; basterà dunque dimostrare che essa è sufficiente.

Sia $L^{(p-1)}$ una varietà della schiera $[p-1]$ di W_1^*, con gli S_{p-1} tutti propri, e indicato con v_1 un automodulo di A a caratteristica p, sia $L_1^{(p-1)}$ la varietà della detta schiera che coi suoi punti propri fornisce il luogo degli automoduli primitivi di $v_1\,A\,v_1$.

Infine nella rappresentazione di W_1^* sulle coppie di punti estratte dai due S_{n-1} λ_1 e λ_2 utilizzata nel n^0 37, si dicano τ_1 e τ_2 i due S_{p-1} da cui sono da estrarre le coppie rispondenti ai punti di $L^{(p-1)}$ e τ_1' e τ_2' gli S_{p-1} riferentisi in maniera simile alla varietà $L_1^{(p-1)}$.

Mantenuto per la reciprocità R fra λ_1 e λ_2 il significato del n^0 37, siano μ_1 e μ_1' gli S_{n-p-1} di λ_1 che da R sono trasformati in τ_2 e τ_2'.

Dico che μ_1 è indipendente da τ_1 e μ_1' da τ_1'.

E infatti, se μ_1 avesse un punto comune con τ_1, a questo corrisponderebbe per R un S_{n-1} di λ_2 passante per τ_2. Ma allora lo S_{p-1} di $L^{(p-1)}$ rispondente alle coppie costituite da quel punto fisso di τ_1 con un punto variabile in τ_2 sarebbe, contro l'ipotesi, improprio. E in modo analogo si dimostra l'asserto per μ_1' e τ_1': solo che qui il fatto che gli S_{p-1} di $L_1^{(p-1)}$ sono tutti propri è conseguenza dell'altro che $L_1^{(p-1)}$ contiene le immagini degli automoduli primitivi di di $v_1\,A\,v_1$.

Ciò posto, è chiaro che esistono certo in λ_1 infinite omografie non degeneri atte a portare τ_1 e μ_1 in τ_1' e μ_1'; se ω_1 è una di esse, ed ω_2 è l'omografia di λ_2, che insieme con ω_1 costituisce la coppia

(17) Per il caso $n=2$ questo teorema è stato dimostrato per via algebrica dal mio assistente volontario D. GRIECO nella sua Nota: *Sul gruppo automorfo dell'algebra regolare complessa del 4⁰ ordine*, che uscirà prossimamente nel Giornale di Matematiche.

di omografie in cui si riflettono quelle subordinate nelle due schiere Λ_1 e Λ_2 di W_1^* da un'operazione ω del gruppo Γ^*, poichè per ω_1 μ_1 va in μ_1' e per R μ_1 va in τ_2 e μ_1' in τ_2', da ω_2 τ_2 sarà portato in τ_2'.

Ma allora per ω_1 e ω_2, τ_1 e τ_2 vanno in τ_1' e τ_2', cioè per ω $L^{(p-1)}$ va in $L_1^{(p-1)}$; e quindi, se v è l'automodulo che per l'automorfismo di A corrispondente a ω va in v_1, $L^{(p-1)}$ dà, coi suoi punti propri il luogo delle immagini degli automoduli primitivi di $v\,A\,v$.

Con ciò il teorema è pienamente dimostrato.