Uwagi o pojęciu ciągłości funkcji.

(Dokończenie)).*

Określenia, któreśmy dali powyżej, można uogólnić na funkcje dowolnej liczby zmiennych. Tak np. gdy mamy funkcję 3-ch zmiennych $f(x, y, z)$, to odróżnimy 3 główne rodzaje ciągłości funkcji w danym punkcie (x_1, y_1, z_1): 1) ciągłość względem prostych, leżących w przestrzeni trójwymiarowej x-ów, y-ów i z-ów, i przechodzących przez dany punkt; 2) ciągłość względem płaszczyzn, przechodzących przez ten punkt; w szczególności, jeżeli mamy np. płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny x-ów i y-ów, to ciągłość względem niej może być nazwana ciągłością względem *zespołu* 2-ch zmiennych x i y z liczby 3-ch rozważanych; 3) ciągłość względem przestrzeni trójwymiarowej x-ów, y-ów i z-ów czyli ciągłość względem *zespołu* zmiennych: x, y, z. Jeżeli funkcja zależy od n zmiennych, to można ją badać, jako funkcję punktu $(x, y, z \ldots w)$ w przestrzeni n—wymiarowej. Przestrzeń n—wymiarowa będzie dla nas stanowiła pewne podłoże myślne rozmaitości kombinacji liczbowych, jakie otrzymujemy, nadając n zmiennym wszelkie możliwe wartości rzeczywiste, podobnie, jak przestrzeń trójwymiarowa, będąc zresztą wynikiem idealizacji stosunków empirycznych, jest podłożem rozmaitości kombinacji z 3-ch wartości rzeczywistych. W przestrzeni n—wymiarowej odróżniamy następujące utwory zasadnicze: 1) punkt, który się określa zapomocą n równań linjowych, pomiędzy n współrzędnemi; postać najprostsza tych równań: $x=x_1$; $y=y_1$; $z=z_1$; ... $w=w_1$; gdzie $x_1, y_1, z_1 \ldots w_1$—liczby dane, 2) przestrzeń jednowymiarowa pierwszego stopnia, czyli linja prosta, określona zapomocą n-1 równań pierwszego stopnia pomiędzy $x, y, z \ldots w$; 3) przestrzeń dwuwymiarowa pierwszego stopnia czyli płaszczyzna, dana przez n—2 równań linjowych; 4) przestrzeń trójwymiarowa pierwszego stopnia, dana przez n—3 takich równań i t. d., aż do przestrzeni (n—1) wymiarowej pierwszego stopnia, danej przez

---

*) *Sprostowanie.* W pierwszej części artykułu na str. 428 w wierszu 6-ym, 7-m, 9-m, 10-m, 12-m i pierwszej połowie w. 13 zamiast ε winno być $\sqrt{\varepsilon}$; w drugiej połowie w. 13-ym i w w. 15-ym zamiast ε^2 winno być ε. Równanie ostateczne: $|a| . x^2 + |b| . y^2 = \varepsilon$.

jedno tylko równanie pomiędzy $x, y, z, \ldots w$. Biorąc zamiast równań 1-go stopnia dowolne równania algiebraiczne lub przestępne, określimy inne „przestrzenie" o różnej liczbie wymiarów, odmienne ogólnie od typów, wyliczonych w poprzednim zdaniu. W takim razie najogólniejsze pojęcie ciągłości funkcji ilukolwiek zmiennych da się zamknąć w następującem określeniu:

Funkcja n zmiennych $x, y, z \ldots w$ czyli funkcja punktu $(x, y, z \ldots w)$ w przestrzeni n—wymiarowej jest w punkcie $M\,(x_1, y_1, z_1, \ldots w_1)$ ciągła względem dowolnej przestrzeni r—wymiarowej, $(r \leqq n)$, zawartej o rozważanej przestrzeni n—wymiarowej (lub identycznej z nią, gdy $r=n$) i zawierającej punkt M, jeżeli dla danej dowolnie małej liczby ε można znaleźć takie δ, iżby w stosunku do każdego punktu K, leżącego wewnątrz „kuli n—wymiarowej" o promieniu δ i środku w punkcie M, t. j. takiego, którego spółrzędne czynią zadość nierówności

$$+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\ldots+(w-w_1)^2}<\delta$$

i jednocześnie należącego do wymienionej przestrzeni r—wymiarowej *), zachodziła nierówność

$$|f(K)-f(M)|<\varepsilon\ .$$

W dalszym ciągu będziemy się zajmowali wyłącznie ciągłością względem przestrzeni zasadniczych, czyli pierwszego stopnia, które będę nazywał dla krótkości poprostu przestrzeniami (jednowymiarowemi, dwuwymiarowemi i t. d.). W tych warunkach punkty K, które mają spełniać kryterjum ciągłości będą leżały wewnątrz „kul r—wymiarowych" (w szczególności: kul w zwykłem znaczeniu, kół i odcinków $=2\delta$), otrzymanych jako „przekroje środkowe" **) kuli n—wymiarowej przez daną przestrzeń r—wymiarową (w szczególności: trójwymiarową 1-go stopnia, płaszczyznę, linję prostą). Tak np. funkcja n zmiennych: $x, y, \ldots t, u \ldots w$ jest w punkcie $(x_1, y_1, \ldots w_1)$ ciągła względem przestrzeni r—wymiarowej, „równoległej" do przestrzeni r—wymiarowej x-ów, y-ów ... t-ów, czyli inaczej: ciągła względem zespołu r—zmiennych: $x, y, \ldots t$, jeżeli dla danego ε, można znaleść takie δ, iż przy:

$$+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1^2+\ldots+(t-t_1)^2}<\delta$$

---

*) Możnaby jeszcze dodać: i należącego do obszaru, w którym funkcja jest określoną—zakładamy zawsze, że taki obszar, wystarczający do zastosowania danego kryterjum, mamy do rozporządzenia.

**) Pod nazwą „przekroju środkowego" rozumiem ogół punktów, należących jednocześnie do kuli n—wymiarowej i do danej przestrzeni r—wymiarowej, przechodzącej przez środek tej kuli. Zwracam uwagę na to, że w pojęciu przekroju zamykam właśnie *określenie* tego, co ma oznaczać „kula r—wymiarowa" $(r<n)$ w przestrzeni n—wymiarowej. Pojęcie zaś kuli n—wymiarowej opiera się bezpośrednio na czysto analitycznem określeniu „odległości" δ dwóch punktów przestrzeni n—wymiarowej $(x_1, y_1, \ldots w_1)$ i $(x_2, y_2 \ldots w_2)$ zapomocą wzoru

$$\delta=+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+\ldots+(w_1-w_2)^2}\ .$$

zachodzi nierówność

$$|f(x, y, \dots t, u_1, \dots w_1) - f(x_1, y_1 \dots t_1, u_1 \dots w_1)| < \varepsilon \ .$$

Moduł ciągłości danego rodzaju w danym punkcie (dla danego ε) określimy, podobnie jak poprzednio, jako maximum odpowiednich δ. Odkładając w obie strony od punktu na każdej z prostych, przechodzących przezeń, i leżących w rozważanej przestrzeni r—wymiarowej, odpowiedni moduł ciągłości (t. j. moduł ciągłości względem tej prostej), utworzymy z końców otrzymanych odcinków „przestrzeń charakterystyczną ciągłości" — wypadek szczególny takiej przestrzeni stanowi „krzywa 1-go rodzaju" w płaszczyźnie. Krzywej ciągłości 2-go rodzaju odpowiada również przestrzeń charakterystyczna, którą otrzymamy, odkładając odpowiednie moduły na każdym z osobna *promieniu*, wychodzącym z punktu. Uogólniając poprzednie rozważania, możemy sformułować twierdzenie następujące:

Warunek niezbędny i wystarczający ciągłości w danym punkcie funkcji n zmiennych względem przestrzeni (1-go stopnia) r—wymiarowej ($r \leqslant n$) polega na *ciągłości jednostajnej* względem wszystkich prostych, przechodzących przez dany punkt i zawartych w owej przestrzeni r—wymiarowej. Moduł ciągłości względem przestrzeni r—wymiarowej (dla danego ε) równa się krańcowi dolnemu modułów ciągłości względem omawianych prostych.

Temu samemu faktowi zasadniczemu można nadać jeszcze przeróżne inne postacie, czego już tutaj nie rozwinę, nie chcąc obciążać wykładu bardziej jeszcze szczegółowem roztrząsaniem własności przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów.

W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy mówili o ciągłości funkcji n zmiennych już nie w jakimś jednym punkcie, ale w punktach, należących do odpowiedniej przestrzeni n—wymiarowej i stanowiących dowolną mnogość. Mnogość będziemy nazywali jedno, dwu wogóle r—wymiarową ($r < n$), zależnie od najmniejszej z pośród liczb, oznaczających wymiarowość tych przestrzeni pierwszego stopnia, w którym mogą być zamknięte wszystkie punkty mnogości. Jeżeli nie można znaleść żadnej takiej przestrzeni (o jednym, dwuch i t. d. aż do (n — 1) wymiarach), to mnogość nazwiemy n—wymiarową. Z tego punktu widzenia, dogodnego dla późniejszych sformułowań, mnogość np. złożona ze wszystkich punktów zwykłej powierzchni kulistej będzie uważana za trójwymiarową i t. p. Mnogość punktów, w których badamy ciągłość danej funkcji n — zmiennych, może mieć tedy jeden, dwa i t. d. aż do n wymiarów; będziemy je nazywali ogólnie *obszarem* badanym.

Stosownie do czynionych już dawniej zastrzeżeń, przy badaniu ciągłości funkcji n zmiennych względem powierzchni r—wymiarowej w pewnym obszarze, będziemy brali pod uwagę nietylko punkty, należące do obszaru, ale również punkty, stanowiące pewne otoczenie tych punktów w owej przestrzeni r—wymiarowej. Formułując ściśle ten sposób pojmowania rzeczy, powiemy, że uważamy funkcję daną za określoną nietylko w punktach badanego obszaru, ale również wewnątrz wszystkich „kul r—wymiarowych", otaczających te punkty, zawartych w przestrzeni r—wymiarowej, względem której badamy ciągłość, i posiadających jednakowy promień o wielkości dowolnie małej, ale stałej i określonej. Odmienny punkt widzenia, użyty np. przez A. Schönfliesa („Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten"), polega na tym, że funkcja jest uważana za określoną jedynie w tych punktach, w których badamy jej ciągłość — i że przeto bierzemy w rachubę przy tym badaniu tylko te punkty sąsiednie, które należą również do rozważanej mnogości.

Ciągłość *jednostajna* w danym obszarze względem danej przestrzeni o liczbie wymiarów r, równej liczbie wymiarów obszaru, mniejszej lub większej (w każdym razie $\leqslant n$), polega na tym, że odpowiednie moduły ciągłości we wszystkich punktach obszaru posiadają kraniec dolny nie równy zeru, który nazwiemy modułem ciągłości jednostajnej względem danej przestrzeni r—wymiarowej w danym obszarze (dla danego ε). Inaczej: ciągłość jest jednostajna, jeżeli możemy dla dowolnie małej liczby ε znaleść takie δ, że wartości funkcji w 2-ch *jakichkolwiek* punktach M i K 1) należących do omawianej przestrzeni r—wymiarowej, z których jeden należy jednocześnie do badanego obszaru, a drugi albo do tego obszaru albo do opisanego poprzednio otoczenia któregoś z punktów obszaru; 2) spełniających warunek: odległość $MK < \delta$; — czynią zadość nierówności

$$|f(M) - f(K)| < \varepsilon .$$

U w a g a. Obszary w poniższym wykładzie uważany za skończone, usuwając na bok rozważania o punktach w nieskończoności i t. d.

Możemy teraz sformułować:

Twierdzenie I. Funkcja n zmiennych, ciągła względem przestrzeni r—wymiarowej ($r \leqslant n$) w obszarze o liczbie wymiarów k, mniejszej od r lub równej r, leżącym w owej przestrzeni r—wymiarowej i stanowiącym *mnogość zamkniętą* *), jest w tym obszarze jednostajnie ciągła względem tejże przestrzeni r—wymiarowej.

Dowód będzie zasadniczo taki sam, jak użyty przez A. Schönfliesa na str. 119 cytowanego dzieła w zastosowaniu do twierdzenia zupełnie analogicznego; dowód twierdzenia III-go opieram również na tej samej myśli przewodniej, wymagającej zresztą w tamtym wypadku dalszego rozwinięcia.

Oznaczmy moduł ciągłości dla ε względem przestrzeni r—wymiarowej P_r w punkcie M obszaru przez ρ_i. ρ_i w żadnym punkcie obszaru nie może równać się 0; jeżeli jednak założymy, że ciągłość nie jest jednostajna (t. j.

---

*) Mnogością zamkniętą nazywamy taką mnogość, która zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. Tak np. mnogość wszystkich punktów odcinka, z wyjątkiem końców, czyli mnogość punktów wewnętrznych odcinka nie jest zamknięta, bo 2 jej punkty skupienia (końce) nie należą do niej.

że moduły ciągłości nie posiadają krańca dolnego, nierównego 0) to można ułożyć taki ciąg malejący ($\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \ldots$) wartości modułów, iż $\lim_{i=\infty} \rho_i = 0$. Punkty, odpowiadające modułom, należącym do tego ciągu, posiadają przynajmniej jeden punkt skupienia A. Oznaczmy moduł ciągłości w tym punkcie dla $\frac{\varepsilon}{2}$ przez ρ; wewnątrz kuli r—wymiarowej o promieniu $\frac{\rho}{2}$ i środku w punkcie A, leżącej w P_r, istnieją napewno punkty obszaru, w których moduły (*dla* ε) są dowolnie małe, np. $< \frac{\rho}{2}$; N niech będzie jednym z takich punktów. Weźmy jeszcze jakikolwiek inny punkt K, należący do obszaru badanego lub do otoczenia jego punktów, w którem funkcja jest określona i położony wewnątrz kuli r—wymiarowej o promieniu $= \rho$ (i środku w punkcie A). Mamy

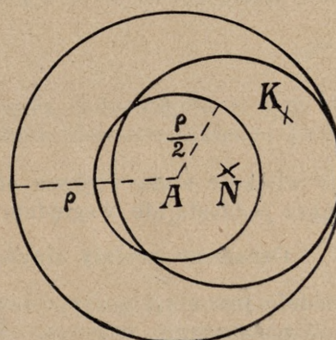
$$|f(A) - f(N)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(A) - f(K)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

stąd wynika:

$$|f(N) - f(K)| < \varepsilon\,.$$

W szczególności czynią zadość temu warunkowi punkty zamknięte wewnątrz kuli stycznej do kuli o promieniu ρ i mającej za środek punkt N. Promień tej kuli jest oczywiście $> \frac{\rho}{2}$; wypadłoby tedy, że moduł ciągłości w punkcie N jest $> \frac{\rho}{2}$; wbrew założeniu. Przypuszczenie tedy, że moduły ciągłości w punktach obszaru nie posiadają krańca dolnego, nie równego O, jest mylne; przeto ciągłość jest jednostajna.



Rys. 5.

Z dowiedzionego w ten sposób twierdzenia wynika jako wypadek szczególny.

Tw. I-a. Funkcja n zmiennych $x, y \ldots t, u \ldots w$ ciągła względem zespołu r zmiennych $x, y \ldots t$ ($r \leqslant n$) w obszarze, określonym zapomocą warunków następujących

$$x_0 \leqslant x \leqslant X$$

$$y_0 \leqslant y \leqslant Y$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T$$

$$u = u_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$w = w_1$$

jest w tym obszarze *jednostajnie* ciągła względem zespołu r zmiennych $x, y \dots t$ (czyli względem przestrzeni r wymiarowej danej przez równania $u = u_1$; $\dots w = w_1$; x_0, X, y_0, $Y \dots t_0$, T, $u_1 \dots w_1$ stanowią pewne stałe, określone wartości liczbowe). Zauważmy, że tembardziej będzie jednostajną ciągłość względem zespołu, złożonego z części tylko wszystkich r zmiennych $x, y, \dots t$, w szczególności względem każdej z tych zmiennych. (To samo twierdzenie w stosunku do 2-ch zmiennych dowiedzione w Humbert'a Cours d'Analyse, w postaci skądinąd ogólniejszej).

Tw. II. Funkcja n zmiennych $x, \dots z, t, u, \dots w$, ciągła jednostajnie we wszystkich punktach obszaru (1), określonego, jak w tw. I-a, względem każdej z r zmiennych: $x, y, \dots z, t$ *z osobna*, jest również w dowolnym obszarze (2), którego punkty czynią zadość warunkom

$$\begin{array}{l} x_0 + \eta \leqslant x \leqslant X - \eta \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_0 + \eta \leqslant z \leqslant Z - \eta \\ t_0 + \eta \leqslant t \leqslant T - \eta \\ u - u_1 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ w = w_1 \end{array}$$

(η—wielkość stała większa od 0, zresztą dowolnie mała). ciągła jednostajnie względem *zespołu* zmiennnych $x, y, \dots t$.

Oznaczmy moduły ciągłości jednostajnej dla $\frac{\varepsilon}{r}$ względem $x, \dots z, t$ odpowiednio przez $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_r$. Liczbę, mniejszą od najmniejszego z tych modułów i od η oznaczmy przez ρ. Weźmy dowolny punkt M obszaru (2). Każdy punkt N odległy od M o mniej niż ρ (i spełniający warunki: $u = u_1, \dots w = w_1$) należy do obszaru (1), bo jego spółrzędne $x, y, \dots t$ muszą różnić się od odpowiednich spółrzędnych punktu M o mniej niż ρ, a więc i niż η. Rzecz oczywista, że pomiędzy punktami M i N, zmieniając kolejno po jednej spółrzędnej z liczby spółrzędnych $x, \dots t$, można ustawić takie punkty obszaru (1) $M_1, M_2 \dots M_{r-1}$ iż

$$|f(M_1) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{r} \text{ bo } MM_1 < \rho_1$$

$$|f(M_2) - f(M_1)| < \frac{\varepsilon}{r} \text{ bo } M_1M_2 < \rho_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$|f(N) - f(M_{r-1})| < \frac{\varepsilon}{r} \text{ bo } M_{r-1}N < \rho_r$$

Stąd, dodając nierówności, otrzymujemy

$$|f(N)-f(M)| < \varepsilon .$$

Każdy punkt M obszaru (2) można tedy otoczyć taką kulą r—wymiarową o określonym promieniu ρ, położoną w przestrzeni r — wymiarowej, „równoległej“ do osi: x-ów, ... t-ów $[u=u_1, \dots w=w_1]$, iż punkty, leżące wewnątrz niej, spełniają warunek ciągłości. W ten sposób dowód zostaje uskuteczniony.

Można jeszcze udowodnić, czego nie czynię tutaj dla krótkości, twierdzenie następujące:

Tw. III. Funkcja n zmiennych $x, \dots z, t, u \dots w$ ciągła we wszystkich punktach obszaru, określonego przez warunki

$$\begin{array}{ll} x_0 \leqslant x \leqslant X & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ z_0 \leqslant z \leqslant Z & \\ t_0 \leqslant t \leqslant T & \\ u=u_1 & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & (x_0, X \dots u_1 \dots \text{liczby stałe}) \\ w=w_1 & \end{array}$$

względem zespołu $(r-1)$ zmiennych: $x \dots z$ i ciągła jednostajnie w tym obszarze względem r—tej zmiennej t, jest w *dowolnym* obszarze, którego punkty czynią zadość warunkom

$$\begin{array}{ll} x_0+\eta \leqslant x \leqslant X-\eta & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ z_0+\eta \leqslant z \leqslant Z-\eta & [\eta\text{—wielkość stała większa od} \\ t_0+\eta \leqslant t \leqslant T-\eta & \quad 0, \text{ zresztą dowolnie mała}] \\ u=u_1 & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & [X > x_0 \text{ i t. d.}] \\ w=w_1 & \end{array}$$

jednostajnie ciągłą względem wymienionego zespołu $(r-1)$ zmiennych — więc podobnież ciągłą — i do tego jednostajnie — względem zespołu r zmiennych: $x, y \dots z, t$. W szczególności:

Funkcja 2-ch zmiennych $f(x, y)$ ciągła jednostajnie względem x i ciągła względem y w obszarze wszystkich wartości, spełniających warunki

$$x_0 \leqslant x \leqslant X$$

$$y_0 \leqslant y \leqslant Y$$

jest w *każdym* obszarze, którego punkty czynią zadość warunkom

$$x_0+\eta\leqslant x\leqslant X-\eta$$
$$y_0+\eta\leqslant y\leqslant Y-\eta$$

jednostajnie ciągłą zarówno względem y, jak i względem zespołu x i y

---

Odmienny system wykładu oraz inne jeszcze dane i wyniki, dotyczące ciągłości funkcji, znajdzie czytelnik w cytowanym już niejednokrotnie klasycznym dziele A. Schönfliesa: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung. Tom ósmy. Lipsk 1900) a mianowicie w 3-ej części (Dritter Abschnitt), rozdz. 1-ym i 2-im. Tam również są podane liczne wskazówki co do innych autorów.

Tadeusz Łazowski.
