ROZBIÓR KRYTYCZNY DZIEŁA

P. W. FOLKIERSKIEGO

POD TYTUŁEM

ZASADY

RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

TOM I^{szy}, RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

NAPISAŁ

ADOLF SĄGAJŁO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 5 Października 1871 r.).

Nauki Matematyczne w całéj dawnéj Polsce, były zawsze wielce poważane, powszechnie wysoko cenione, i starannie uprawiane; w pięknych historycznych epokach kwitnącéj narodowéj oświaty, zwykle naturalnie okazałe, i niekiedy bardzo świetne. « Od początku piętnastego wieku do połowy szesnastego Akademia Krakowska *była głównem w Europie nauk matematycznych siedliskiem* » (*).

« Przy końcu XV wieku *Węgrzy i Niemcy jeździli na nauki do Akademii Krakowskiéj* dla *Michała z Wrocławia* i *Brudzewskiego* (nauczyciela KOPERNIKA), jak niedawno jeździli Polacy do Berlińskiej dla *Hegla i Ryttera* » (**).

Po uszczupleniu i osłabieniu naszéj Rzeczypospolitéj, przez odpadnięcie wielu województw i przez ustęp z Polski Kozackiego narodu, nastąpił *bolesny okres schyłku* i dogorywania naszego politycznego bytu. Nauki ścisłe w każdéj epoce los narodu podzielając, gdy przy końcu XVI wieku *Humaniści* popęd do nauk matematycznych stłumili, już nie pierwéj, aż dopiero po zupełnych nauk i umiejętności

(*) Michała Wiszniewskiego *Historya Literatury Polskiéj*. Tom IX. Kraków, (1857).

(**) Michała Wiszniewskiego *Historya Literatury Polskiéj*. Tom III. Kraków, (1841).

w całym kraju reformach, podanych i szczęśliwie przeprowadzonych przez nieśmiertelnego ich twórcę : *Stanisława Konarskiego* pijara, na nowo się odradzać i rozwijać poczęły.

W kilka lat po pierwszym rozbiorze Polski *Komisya Edukacyjna*, biorąc za wzór kwitnące w całéj Polsce po *reformie Konarskiego* narodowe szkoły pijarów, postanowiła wprowadzić *nowy porządek nauk* do szkół narodowych świeckich. Całe to przekształcenie dawnéj naszych ojców narodowéj oświaty Lelewel wiernie zebrał, i w umiejętnym poglądzie historycznym tak nam przedstawił :

« Po upadku zakonu jezuickiego, we wszystkich krajach katolickich, zjawiła się wielka w zakładach naukowych próżnia, którą nowemi urządzeniami i zakładami zapełnić wypadało. Po wielu krajach fundusze pojezuickie, w części, na potrzebę edukacyi przeznaczone, w Polsce zaraz na sejmie 1775 r. całkowicie na ten koniec obrócone; oprócz téj części, którą podchwyciły ręce prywatne. *Komisya edukacyjna*, szczęśliwie fundusz pojezuicki, stosownie do jego przeznaczenia, rozporządzając, potrafiła go polepszyć, ilość znacznie podnieść i *nie przestawała nad coraz dojrzalszém szkół urządzeniem pracować*. Mało więcéj *nad milion* rocznego dochodu, w następnych kilku latach, *potrafiła* Komisya edukacyjna *do półtora miliona podnieść*. Pomnażając dochód, postawiła się w możności podejmowania większych wydatków. *Usiłowała podźwignąć szkoły główne* czyli *uniwersytety Jagielloński i Batorowski, w Krakowie i Wilnie :* oczekując po nich światłéj w naukach pomocy. Krakowski, z ciężkiego dawnych czasów przyćmienia, wydobyty, nie mógł tak prędko do światła wieku trafić. Uniwersytet Wileński, z jezuickiego na świecki przeistoczony, zasilił się przeniesionemi z Grodna do Wilna *Tyzenhauza* zakładami. »

Nie były to zaiste *zakłady Tyzenhauza fabryczne*, ale niezawodnie : 1° bogate *muzeum anatomiczne*, 2° wielkiéj wartości *muzeum nauk przyrodzonych*. Daléj Lelewel, mówiąc o *zakładaniu szkół narodowych świeckich*, tak te prace wspólne Komisyi i Pijarów ocenia.

« W swych naukowych staraniach, *znalazła* Komisya edukacyjna *największą pomoc w zgromadzeniu księży pijarów, których szkoły i konwikt*, wyprowadzając pięknie usposobionych dla ojczyzny obywateli, *stawały się wzorem do zakładania szkół świeckich*. Nieustające starania, dążyły do ulepszenia szkół tak pijarskich jak świeckich. W planie nauk, lubo łacina czyli *filologia*, była jednym z najgłówniejszych nauki przedmiotem, wszelako szkoły te, jak rzadko gdzie w Europie, *wszystkie gałązki wiadomości obejmując każdego z niemi oswajały*. Obejmując zaś razem wszystkie, takiemi się mocniéj zajmowały, które mogły człowieka publicznego i prawdziwego kształcić obywatela. Ztąd historya, moralność, znajomość prawa politycznego i głównych ekonomii polityczněj zasad, były w szkołach polskich istotnym przedmiotem. Potrzebowały te szkoły *ksiąg elementarnych*. Towarzystwo elementarne obowiązane było obmyślić środki aby téj potrzebie zadosyć uczynić. Pracą tedy wielu krajowców, a nadewszystko pijarów, były książki elementarne, dla szkół narodowych wygotowane. Niezacieśniano się do sił własnych ; wezwani byli do téj ważnéj pracy światli cudzoziemcy : Condillac wygotował loikę, Lhuilier, profesor Akademii genewskiéj, dzieła matematyczne dla szkół polskich. Nie zdołała wprawdzie Komisya z towarzystwem elementarném, zaspokoić wszystkich szkół narodowych potrzeb ; z tém wszystkiém, *szkół tych urządzenia i naukowe przepisy*, przetrwały upadek Polski, zyskały pochwałę u obcych i przez kilkadziesiąt lat następnych, nie przestały wpływać na upadły, a odrodzenia oczekający naród. »

Po zupełnym upadku kraju i *życiu pogrobowém* wielkiego niegdyś w Europie narodu, dzięki gorliwym staraniom i niesłychanym przez pół wieku wysileniom wielkich twórców i organizatorów publicznego narodowego oświecenia : nieśmiertelnych *Czackich*, *Czartoryskich*, *Kołłątajów i Sniadeckich*, widzimy na całéj przestrzeni tak nazwanéj *Kongresówki*, od *Krakowa* do *Warszawy*, a osobliwie, na *Wołyniu* i *Litwie* ściśle nauki matematyczne znakomicie kwitnące.

Któż, w ojczyznie Kopernika, upadające katedry *Brudzewskich* i *Sniadeckich* z gruzów i ruiny podniesie? Któż nam, wszystkie w ogólności *dzieła elementarne matematyczne*, te zasady i główne podstawy wszelkiego umysłowego ukształcenia, krótko, jasno i zrozumiale po polsku napisze? Któż nam nakoniec, potrzebnych funduszów na koszta druku i inne wydatki hojnie i wspaniale dostarczy?

W tym to właśnie celu, pod kierunkiem i protekcyą, poświęconego na wszelkie wzniosłe przedsięwzięcia, Hr. Jana Działyńskiego od kilku lat w Paryżu otworzyło się i uorganizowaném zostało : *wydawnictwo matematycznych nowych dzieł polskich*. Ta ważna dzieł matematycznych publikacya, zaledwo od lat kilku otwarta, obecnie nietylko że nie ustaje, ale owszem coraz bardziéj się rozwija, objawiając bogate i dojrzałe naszéj umiejętności owoce.

Po zasługujących na uwagę pracach, o *Arytmetyce i Geometryi ogólnéj*, pana Gracha Henryka Niewęgłowskiego, wkrótce się okazało w Paryżu dzieło *Wyższéj Matematyki: Zasady Rachunku Różniczkowego i Całkowego*, napisane przez p. Wł. Folkierskiego. Zająć się niezwłocznie ścisłym rozbiorem i gruntowném ocenieniem *Rachunku Różniczkowego* pana Wł. Folkierskiego będzie oczywiście naszych przychylnych dla autora uczuć niewątpliwym dowodem, i zarazem naszéj obywatelskiéj posługi surowém dopełnieniem.

STUDYUM III$^{\text{cie}}$.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

p. W. FOLKIERSKIEGO.

I

Zanim przystąpimy do krytycznego rozbioru téj ważnéj wyższego rzędu umiejętności, uważamy za stosowne dać czytelnikom naszym krótki rys historyczny rozwoju tejże nauki. Wiadomo powszechnie że Rachunek Różniczkowy, to największe późniejszych geometrów odkrycie, był wynalezionym przy końcu XVII wieku przez dwa najznakomitsze genjusze jakimi ludzkość poszczycić się może : przez Newtona i Lejbnitz'a. Pan Folkierski, w swéj przedmowie do nowo wydanego dzieła, rozbierając obszernie spór o pierwszeństwo jaki powstał tak pomiędzy samymi wynalazcami jak i pomiędzy ich uczniami, taką uwagą spór ten zamyka : oba wynalazcy, nieuważając na chronologiczną różnicę, doszli do odkrycia samodzielnie, niewiedząc nawet o wzajemnych pracach, a tém samém nie pożyczając jeden od drugiego naukowych pomysłów. Autor podaje daléj długi i świetny szereg następców tych olbrzymich genjuszów, zajętych nieprzerwanie od półtora wieku dopełnianiem i rozwojem pierwotnéj twórców myśli. Znajdujemy tam nieśmiertelne imiona Lagrange'a i Gaussa, na widokręgu odkryć nowożytnych wielkiém światłem jaśniejące.

W dzisiejszym stanie nauki, mamy w Matematyce pięć rachunków, które należy osobném rozróżnić nazwiskiem : 1° *Calculus differentiarum*, rachunek różnic; 2° *Calculus summatorius*, rachunek zbiorowy albo summ; 3° *Calculus differentialis*, rachunek różniczkowy; 4° *Calculus integralis*, rachunek całkowy; 5° *Calculus Variationum*, rozległego w Geometryi i w Fizyce użycia, powinienby się u nas, idąc za światłém zdaniem Jana Śniadeckiego, *rachunkiem przemienności* nazywać.

Dwa pierwsze uważać można jako ciąg i odnogę Algebry, ale trzy ostatnie są rachunkiem jak nazywają *transcendentalnym*, to jest, wyższego rzędu.

Gdy do pięciu poprzedzających dodamy *Calculus Probabilitatis*, będziemy mieli zbiór wszystkich rachunków. Ten ostatni rachunek, który według Daniela Bernoulli należałoby nazwać *rachunkiem sztuki domysłowéj*, albo *rachunkiem przypuszczalnym* (Principia artis conjectandi), właściwie jest u nas nazwany *rachunkiem prawdopodobieństwa*. D'Alembert i Condorcet użyli go do wielu zagadnień politycznych i fizycznych. Laplace i Lagrange wskazali pewne i ogólne sposoby prowadzenia tego rachunku stanowiącego dziś głęboki traktat algebraiczny.

Jeśliby p. Folkierski, po ogłoszeniu w drugim tomie swego *rachunku całkowego*, zechciał się zająć napisaniem i ogłoszeniem w trzecim tomie potrzebnego nam *rachunku przemienności*, mielibyśmy tym sposobem, wszystkie trzy rachunki *transcendentalne*. Cokolwiekbądź, mamy już dzięki p. Folkierskiemu, dwa *wyższego rzędu* rachunki, najwięcéj używane przy wszelkiego rodzaju zastosowniach do różnych umiejętności.

Jakże wykazać jasno przedmiot tych dwóch umiejętności; *Rachunku różniczkowego i całkowego*? Byleby, mówi nasz znakomity matematyk Sniadecki, zrozumieć to (co i p. Folkierski ściśle w swém dziele dowodzi), że ilości zmniejszając się mogą zniknąć, ale ich stosunek i związek nie niknie lecz zamienia się na stosunek i związek innego rodzaju *w ogólności* skończony, byleby to zrozumieć, każdy pojmie już łatwo przedmiot tych dwóch umiejętności.

Gdy ilości ubywając ciągle, znikną, na co się zamieni ich stosunek i związek? Rozwiązanie tego pytania jest *rachunkiem różniczkowym*.

Mając stosunek i związek który powstał ze zniknięcia ilości, wynaleźć same ilości i ich związek pierwotny? Oto jest zadanie *rachunku całkowego*.

II

Po tych ogólnych określeniach dwóch umiejętności powyżéj przytoczonych, przystępujemy do krytycznego rozbioru pięknego i starannie wydanego dzieła p. Wł. Folkierskiego.

Z prac zamierzonych przez siebie, p. Folkierski wydał tom pierwszy, zawierający trzy główne części: *Wiadomości wstępne*. *Rachunek Różniczkowy* i *Zastosowania*. Każda z tych części dzieli się znowu na pewną liczbę rozdziałów. Te zaś trzy główne jednéj umiejętności części, jak gdyby trzy mocno z sobą spojone jednéj myśli ogniwa, stanowią podanego pod nasz rozbiór dzieła doskonałą całość. Powyższe ogólne twierdzenie ściśle uzasadnić nie omieszkamy. Zbytecznémby łoby usprawiedliwiać słusznie przyjęty porządek dwóch ostatnich części tomu pierwszego: w dziełach bowiem i w wykładach tak niższéj jak i wyższéj Matematyki, zwykle po teoryach następują ich rozliczne zastosowania. Pozostaje nam zatém wykazać, że porządek dwóch pierwszych części, równie logiczny i naturalny jak dwóch ostatnich, powinien być koniecznie w zupełności zachowany. Dobrzeby nawet było, przedmiot naszych usilnych poszukiwań powoli do wyżyn nauki podnosząc, raz na zawsze należycie uzasadnić, że myśl pierwotna wielkich rachunku różniczkowego wynalazców, zarówno mocném ogniwem spaja dwie ostatnie jak i dwie pierwsze części w tém jednolitém pisarza polskiego dziele. Kilka ważnych spostrzeżeń posłużą nam za dowód powyższego twierdzenia. Zauważmy *najprzód:* że rozdziały pierwszy i piąty wiadomości wstępnych, to jest: *teorye ogólne funkcyj i szeregów* wraz z ich *rozliczném zastosowaniem* są już oddawna do różnych znakomitych traktatów rachunku różniczkowego powszechnie wprowadzone. *Powtóre:* Rozdział czwarty i szósty wiadomości wstępnych, to jest: wprowadzenie do teoryj zasad rachunku różniczkowego *metody granic* i *metody nieskończenie małych* potrzebujeż długiego usprawiedliwienia? Ta ostatnia metoda, przez wielu za nieścisłą lub tylko przybliżoną uważana, mogłaż rzeczywiście do wykładu elementarnego wyższéj Matematyki być użytą, dopókiby jéj ścisłość, doniosłość i pożytek nie zostały należycie wyświecone? *Potrzecie:* Pozostaje nam jeszcze ocenić rozdział drugi i trzeci wiadomości wstępnych, to jest przedstawienie geometryczne funkcyj i teorya ogólna ilości urojonych. Rozdział drugi streszcza w sobie wiadomości z geometryi analitycznéj niezbędne do zastosowań i przykładów podanych w dalszym ciągu dzieła. Zastosowania rachunku różniczkowego do geometryi są koniecznie potrzebne; ale wszelkie, choćby najkrócéj zebrane, wiadomości geometryi analitycznéj umieszczone obok rachunku różniczkowego, dziwnie wydają się nam rażące.

Dwie główne części: *Geometrya analityczna* i *Rachnnek analityczny*, który się dzieli na różniczkowy i integralny, składają czystą *Matematykę ilości zmiennych* czyli *analizę nowoczesną*. Rachunek analityczny już mamy napisany. Geometrya analityczna od czasu pokazania się znakomitych dzieł panów Salmona, Hessa i Painvena, ogromny postęp w dawnéj analizie Descart'a zrobiła. Dzieło polskie, w duchu wielkich przewodników odrodzenia i zupełnego przekształcenia dawnéj nauki Descart'a pojęte i porządnie wyłożone, byłoby dla nas w téj chwili niezmiernie pożądanym nabytkiem. I dlatego właśnie spodziewamy się, że przed powtórném wydaniem rachunku analitycznego p. Folkierskiego znajdzie się ktokolwiek w światłém gronie uczonych polskich, obeznanych gruntownie z dzisiejszym rozwojem geometryi analitycznéj, który zechce się zająć gorliwie napisaniem i ogłoszeniem obszernego dzieła zupełnie przekształconéj Descart'a analizy, któreby to dzieło całkiem odpowiadające wszelkim potrzebom odrodzonéj nauki, zarówno służyło nam za podstawę do rachunku analitycznego i nawzajem, w razie potrzeby, mogło się także wielkiém światłem tegoż rachunku posiłkować. Tym tylko sposobem postępując, możemy *skrócone przedstawienia geometryczne funkcyj* należycie zastąpić. Co się zaś tyczy ilości urojonych, radzimy ich w zupełności zatrzymanie. Do tego postanowienia skłania nas ta ważna uwaga. Nie ma ścisłéj nauki, któréj teorye nie są oparte na rozumowaniach i *dowodzeniach ogólnych*. A że ilości urojone wprowadzone bywają w rachunek dla *uogólnienia wypadków*, dlatego je właśnie przy rachunku różniczkowym chętnie zatrzymujemy.

Po téj ogólnéj syntezie i przeglądzie całkiem zbiorowym, przystąpmy z kolei do szczegółów i krytycznéj *Analizy Wiadomości wstępnych* (Część I) zawartych w pierwszych sześciu rozdziałach:

Rozdział I. *O funkcyach*, którego treścią jest: określenie funkcyi; różne jéj rodzaje, a mianowicie funkcye algebraiczne, przestępne, funkcye funkcyj; zamiana zmiennych; różnice funkcyj; ciągłość zmiennych i funkcyj; wyznaczenie funkcyi zadość czyniącéj pewnym warunkom; wzory interpolacyjne Newtona i Lagrange'a; nie pozostawia nic do życzenia, tak, pod względem logicznego układu, dokładności i jasności w określeniach, jak również, pod względem prostoty i ścisłości w dowodzeniach.

Rozdział II. Autor przedstawia geometrycznie funkcye jednéj i dwóch zmiennych, zawsze z tą samą prostotą, ścisłością i dokładnością jak w rozdziale pierwszym; gdyby się więc nie wdał w przytaczanie wiadomości wstępnych z geometryi analitycznéj, które bardziéj do geometryi jak do rachunku należą, zasłużyłby na takie same pochwały, jak za rozdział pierwszy.

Rozdział III za to, *o ilościach urojonych*, jest bardzo trafnie pomyślanym, w szczególności zaś, przez wstęp *o ilościach mięszanych*, daje początkującemu czytelnikowi bardzo jasne wyobrażenie, o zasadniczych własnościach ilości urojonych.

W Rozdziale IV, mówiąc o metodzie granic powszechnie w matematyce przyjętéj, p. Folkierski potrafił dodać kilka nowych i trafnych spostrzeżeń, pomimo że ta część nauki doszła w ostatnich czasach na Zachodzie do wysokiego stopnia rozwoju.

W wielu dziełach elementarnych, pewną nawet wartość mających, brak jasnych i dokładnych definicyj najlepiéj dowodzi, ile ta strona przedstawia dla autora trudności. Nie wahamy się jednak wyznać, że nie znaleźliśmy nigdzie równie dokładnéj definicyi jak ta którą p. Folkierski o granicy wielkości zmiennéj podaje:

« *Granicą wielkości zmiennéj*, mówi p. Folkierski, *nazywamy wielkość oznaczoną, do któréj wielkość zmienna zbliża się nieograniczenie tak, że różnica pomiędzy jedną a drugą ciągle się zmniejszając, może stać się ostatecznie dowolnie małą, niezwiększając się dla żadnéj z następnych wartości, jakie zmienna przybrać może.* »

Z téj definicyi wypływają *trzy twierdzenia zasadnicze metody granic :*

Twierdzenie I. *Ilość, która ciągle zwiększając się nie może stać się większą od pewnéj ilości oznaczonéj, ma granicę oznaczoną.*

Twierdzenie II. *Granice zmiennych równych są sobie równe.*

Dowodzenia tych dwóch twierdzeń odznaczają się prostotą i jasnością.

Następujący wniosek; *że ilość zmienna nie może zdążać jednocześnie do dwóch granic różnych* uważany powszechnie jako pewnik, p. Folkieski potrafił dowieść za pomocą metody znanéj *przywiedzenia do niedorzeczności.*

Twierdzenie III. *Granice funkcyj ciągłych równych, zmiennych zdążających do granic oznaczonych, są funkcyami równemi granic tychże zmiennych.*

Dowodzenie nie przedstawia żadnéj trudności, a że twierdzenie jest *ogólne*, może się więc rozciągnąć do wszystkich przypadków szczególnych. Przeto, w szczególności : granica summy równa się summie granic; jeżeli

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

to

$$\mathrm{gr}\,x = \mathrm{gr}\,x_0 + \mathrm{gr}\,x_1 + \mathrm{gr}\,x_2 + \dots + \mathrm{gr}\,x_n;$$

granica iloczynu równa się iloczynowi granic ; jeżeli

$$x = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

to

$$\mathrm{gr}\,x = \mathrm{gr}\,x_1 . \mathrm{gr}\,x_2 . \mathrm{gr}\,x_3 . \dots \mathrm{gr}\,x_n;$$

granica ilorazu równa się ilorazowi granic ; jeżeli

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

to

$$\mathrm{gr}\,x = \frac{\mathrm{gr}\,x_1}{\mathrm{gr}\,x_2} \quad \text{i t. p.}$$

Oto jest rzeczywiście piękny przykład uogólnienia wypadków szczególnych.

ROZDZIAŁ V.

Teorya Szeregów

Cauchy, który tyle przyczynił się do postępu nauk matematycznych w ogólności, stanowi także epokę w rozwoju *teoryi szeregów.* Przenikliwy umysł Cauch'ego nie mógł nigdy poprzestać na tych pół-dowodach które dla tylu innych geometrów były wystarczające ; ztąd wykład jego odznacza się wzorową ścisłością która nie jest bynajmniéj nieprzyjaciółką prostoty, ale przeciwnie, wierną jéj towarzyszką. Dowodzenie niezupełne, jest to trudność ukryta lecz nie rozwiązana, która prędzéj czy późniéj występując na jaw stanie się źródłem trudności nierównie większych, gdy przeciwnie, ścisłe dowodzenie usuwa je raz na zawsze. Dopóki Cauchy swych traktatów nie ogłosił (1826-29), dowodzenia twierdzeń zasadniczych Rachunku różniczkowego spoczywały bardzo często na rozważaniu pewnych szeregów które zwykle brano nie rozpoznając, a tém samém nie mogąc się zapewnić, czy te szeregi były zbieżne, albo nawet czy były one istotnie wyrażeniem dokładném funkcyj, które zdawały się je z siebie wydawać. Cauchy nie przestawał nigdy powstawać na podobne nadużycia. Nigdy też wielki ten geometra nie przystąpił do rozwinięcia funkcyi jakiejkolwiek na szereg, dopóki naprzód należycie nie wykazał : możebności rozwoju funkcyi danéj na szereg, prawa ciągłego wyrazów szeregu postępu, zbieżności otrzymanego szeregu, jego bytu jednėm słowem, jako wyrażenia téj a nie innéj funkcyi danéj. Te są wielkie ulepszenia które Cauchy po wielu trudach do teoryi szeregów wprowadził.

Szeregiem nazywamy zbiór ilości dodatnych lub odjemnych, postępujących po sobie według pewnego prawa, których liczba jest nieograniczoną.

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu dąży do pewnéj granicy oznaczonéj, gdy liczba tych wyrazów zwiększa się do nieskończoności, nazywamy szereg *zbieżnym.*

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu zwiększa się nieograniczenie, w miarę jak powiększamy liczbę tych wyrazów, szereg nazywamy *rozbieżnym.*

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu nie zdąża do żadnéj oznaczonéj granicy, ani też nie zwiększa się bez granic, gdy liczba wyrazów zwiększa się do nieskończoności, szereg nazywamy *nieoznaczonym.*

Warunki ogólne zbieżności szeregów.

Warunki ogólne zbieżności szeregów, p. Folkierski sprowadza do dwóch twierdzeń i tyluż wniosków następujących.

TWIERDZENIE I. Jeżeli szereg jest zbieżnym, granicą reszty jest zero.

TWIERDZENIE II. Odwrotnie, szereg jest zbieżnym jeżeli granicą jego reszty jest zero.

To sławne twierdzenie Cauch' ego potrzebuje kilku słów całą wątpliwość wyjaśniających. Aby lepiéj zrozumieć to co o nim p. Folkierski powiada, weźmy szereg

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots$$

wyraz n^{ty} szeregu

$$u_{n-1}$$

nazywać będziemy *wyrazem ogólnym*, summę wyrazów następujących

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}$$

reszta szeregu. Oznaczać będziemy przez skrócenie summę n pierwszych wyrazów szeregu przez S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

aresztę przez R_n

$$R_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}\,.$$

Mając przed oczyma resztę szeregu, łatwo zrozumiemy przypisek p. Folkierskiego usprawiedliwiający twierdzenie Cauch'ego. Oto są jego własne słowa : «Twierdzenie to podane po raz pierwszy przez Cauch'ego, było poddane pod wątpliwość przez niektórych matematyków, gdyż dawano przykłady szeregów, które nie były zbieżnemi, choć summa p wyrazów następujących po n^{tym}, gdy n dość wielkie, zdążała do granicy zero. Lecz brano p równe lub zależne od n: przypuszczając p *jakiemkolwiek* niezależném od n, wątpliwość zostaje usunięta. »

W kilku wierszach ostatnich zamyka się cała wyborna obrona twierdzenia Cauch'ego. Poczém przedstawia nam p. Folkierski następujące spostrzeżenie:

Uwaga. Szereg może być rozbieżnym, choć wyrazy jego zmniejszają się nieograniczenie, i wyraz ogólny ma za granicę zero; bo summa wyrazów w liczbie nieograniczonéj może być nieskończoną, choć każdy z tych wyrazów zdąża do granicy zero.

Granica wyrazu ogólnego równa zero, jest więc warunkiem koniecznym, lecz niedostatecznym zbieżności szeregów. Lecz z dwóch powyższych twierdzeń wynika że: *granica reszty szeregu równa zeru, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu,* byleby w tym ostatnim razie, liczba wyrazów reszty, była jakąkolwiek, niezależną od liczby wyrazów poprzedzających pierwszy wyraz reszty.

Z powyższych twierdzeń łatwo także wyciągnąć dwa wnioski:

Wniosek I. Szereg jest zbieżnym, jeżeli wartości wyrazów jego bez względu na znak, tworzą szereg zbieżny.

Wniosek II. Jeżeli wyrazy szeregu, począwszy od pewnego wyrazu są naprzemian dodatnemi i odjemnemi, a wartości bezwzględne ich ciągle się zmniejszają, granica wyrazu ogólnego równa zeru, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu.

Warunki szczególne zbieżności szeregów.

Mając dany rzereg nie mamy sposobu ogólnego rozpoznania czy szereg jest zbieżnym lub nie. Sposoby szczególne polegają głównie na porównaniu szeregu danego z innym szeregiem którego zbieżność jest znaną. Porównanie to polega na twierdzeniu następującém:

Twierdzenie III. Jeżeli wyrazy szeregu zbieżnego, które zakładamy wszystkie jednakowego znaku, pomnożymy jeden po drugim przez jakiekolwiek ilości dodatne lub odjemne, których wartość bezwzględna nie może się zwiększać do nieskończoności, otrzymamy nowy szereg zbieżny.

Dowodzenie tego twierdzenia ściśle i zrozumiale jest wyłożone. Łatwo dowieść sześciu wniosków z powyższego twierdzenia wynikających:

Wniosek I. Szereg, którego każdy wyraz jest mniejszym co do wartości od wyrazu tego samego rzędu szeregu zbieżnego, mającego wszystkie wyrazy jednakowego znaku, jest szeregiem zbieżnym.

Wniosek II. Szereg jest zbieżnym, jeżeli zacząwszy od pewnego wyrazu, stosunek wartości każdego wyrazu do poprzedzającego, bez względu na znak, jest mniejszym od pewnéj oznaczonéj ilości, mniejszéj od jedności:

Wniosek III. Szereg, którego wszystkie wyrazy są jednakowego znaku, jest rozbieżnym, jeżeli począwszy od pewnego wyrazu, stosunek każdego wyrazu do poprzedzającego jest ciągle większym od pewnéj oznaczonéj ilości, któréj wartość jest większą od jedności.

Wniosek IV. Szereg jest zbieżnym, jeżeli stosunek wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego wyraz ogólny, ma granicę skończoną mniejszą od jedności, rozbieżnym, jeżeli wszystkie jego wyrazy są jednakowego znaku a granica ta jest większą od jedności.

Wniosek V. Szereg jest zbieżnym, jeżeli zacząwszy od pewnego wyrazu, pierwiastek stopnia n^{go} z wartości n^{go} wyrazu szeregu, jest ciągle mniejszym co do wartości arytmetycznéj od pewnéj oznaczonéj ilości, mniejszéj od jedności.

Wniosek VI. Szereg jest zbieżnym, jeżeli granicą pierwiastku arytmetycznego stopnia n^{go} z wartości wyrazu n^{go}, jest ilość oznaczona, mniejsza od jedności, gdy n zwiększa się nieograniczenie.

Szeregi urojone.

Niech będą

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \ldots$$

$$(2) \qquad v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \ldots$$

dwa szeregi ilości rzeczywistych (które przez skrócenie nazywać będziemy *szeregami rzeczywistemi*).

Szereg

$$(3) \qquad u_0 + v_0 i,\ u_1 + v_1 i,\ u_2 + v_2 i, \ldots n_{n-1} + v_{n-1} i$$

gdzie i wyraża $\sqrt{-1}$, nazywać będziemy *szeregiem urojonym*. Każdy z wyrazów

$$u_0 + v_0 i = w_0,\ u_1 + v_1 i = w_1, \ldots u_{n-1} + v_{n-1} i = w_{n-1} \ldots$$

nazywać będziemy wyrazem szeregu urojonego, którén zatém napisać będziemy mogli :

$$(4) \qquad w_0, w_1, w_2, \ldots w_{n-1}, \ldots$$

Zamiast uważać każdy wyraz szeregu urojonego pod postacią

$$w = u + vi$$

możemy wyrazić go pod postacią :

$$w = \rho(\operatorname{dos}\omega + i \operatorname{wst}\omega)$$

gdzie ρ jest modułem, a ω argumentem : co oznaczamy pisząc

$$\rho = \operatorname{mod} w \qquad \omega = \arg w$$

a szereg przedstawi się wtedy pod postacią

$$(5) \qquad \rho_0(\operatorname{dos}\omega_0 + i \operatorname{wst}\omega_0) + \rho_1(\operatorname{dos}\omega_1 + i \operatorname{wst}\omega_1) + \ldots + \rho_{n-1}(\operatorname{dos}\omega_{n-1} + i \operatorname{wst}\omega_{n-1}) \ldots$$

Odwrotnie, szereg rzeczywisty może być uważanym jako szczególny przypadek szeregu urojonego : jak wiemy z teoryi ilości urojonych, każde wyrażenie rzeczywiste, może być uważaném jako wyrażenie urojone, którego moduł równy jest wartości wyrażenia rzeczywistego bez względu na znak, a argument wielokrotności parzystéj, lub nieparzystéj π, stosownie do tego, czy wyrażenie rzeczywiste jest dodatném lub odjemném. Moduł przypuszczamy zawsze dodatnym : mamy bowiem

$$+a = a(\operatorname{dos} 2n\pi + i \operatorname{wst} 2n\pi), \qquad -a = a[\operatorname{dos}(2n+1)\pi + i \operatorname{wst}(2n+1)\pi].$$

Twierdzenie IV. Szereg jest zbieżnym, jeżeli szereg modułów jego wyrazów jest szeregiem zbieżnym.

Badania p. Folkierskiego związków, zachodzących pomiędzy szeregami ilości urojonych, podają mu łatwy sposób uogólnienia kilku twierdzeń, rzucających wielkie światło na całą teoryę szeregów. Wszystkie te dowodzenia twierdzeń ogólnych, są zarówno ścisłe, zwięzłe, pełne wdzięku i nadzwyczajnéj prostoty. Żeby o tém nie wątpić, dosyć jest przeczytać z uwagą, nieocenionéj wartości dowodzenie powyższego twierdzenia.

« Aby nie powtarzać dwa razy twierdzeń, tyczących się zarówno szeregów urojonych i rzeczywistych, będziemy brali pod uwagę pierwsze, to jest urojone, jako ogólniejsze; uważając, że aby udowodnione twierdzenie, lub własność szeregów urojonych zastosować do rzeczywistych, dość jest uważać moduły wyrazów szeregów urojonych za wartości bezwzględne wyrazów szeregów rzeczywistych, a argumenty pierwszych, za wielokrotności π parzyste lub nieparzyste, stosownie do znaku drugich. Tak np. mówiąc : *szereg, którego moduły tworzą szereg zbieżny*, rozumieć będziemy nietylko szereg urojony, ale i rzeczywisty taki, *którego wartości wyrazów bez względu na znak, tworzą szereg zbieżny.*

Działania na szeregach.

Twierdzenie V. Granica summy szeregu zbieżnego się nie zmieni, jeżeli za pewną liczbę wyrazów po sobie następujących, podstawimy ich summę algebraiczną.
Twierdzenie odwrotne nie zawsze ma miejsce.

Twierdzenie VI. Granica szeregu zbieżnego, którego moduły tworzą szereg zbieżny, nie zmieni się, jeżeli przestawimy w jakikolwiek sposób porządek wyrazów.

P. Folkierski udowadnia najprzód to twierdzenie w przypadku szeregów rzeczywistych : granica szeregu zbieżnego, którego wartości wyrazów bez względu na znak tworzą szereg zbieżny, nie zmieni się i t. d.

Poczém dowodzi to twierdzenie w przypadku ogólniejszym szeregów urojonych.

Uwaga. Rozróżnić więc możemy dwa rodzaje szeregów zbieżnych: te, które są zbieżnemi w skutek prawa według jakiego wartości wyrazów po sobie następują, czyli bez względu na znaki wyrazów, i te, których zbieżność polega jedynie na następstwie znaków. Czyli ogólniéj : te, których szeregi modułów są zbieżnemi, bez względu na argumenty, (szeregi które nazywać będziemy *zbieżnemi co do modułów*), i te, które winny zbieżność swą jedynie argumentom.

Na zasadzie powyższego twierdzenia, zbieżność tych ostatnich polega także na porządku, w jakim wyrazy po sobie postępują, gdy tymczasem zbieżność pierwszych jest zupełnie niezależną od porządku wyrazów. Przestawiając wyrazy szeregu zbieżnego, lecz którego wyrazy co do wartości bez względu na znak nie tworzą szeregu zbieżnego, możemy otrzymać szereg rozbieżny, albo nawet zbieżny, lecz którego summa zdąża do całkiem różnéj granicy, jak summa szeregu pierwotnego.

Dodawanie szeregów.

Twierdzenie VII. Wyrazem ogólnym summy szeregów zbieżnych co do modułów, (w szczególności zbieżnych bez względu na znak) jest summa wyrazów ogólnych każdego szeregu, jeżeli liczba szeregów, którą dodajemy jest skończoną; jeżeli liczba szeregów tych jest nieograniczoną, summa ich stanowi szereg podwójny, którego wyrazem ogólnym będzie szereg utworzony z wyrazów ogólnych szeregów składających, byleby summy tych ostatnich, stanowiły również szereg zbieżny co do modułów.

Mnożenie szeregów.

Twierdzenie VIII. Niech będą szeregi zbieżne co do modułów :

(1) $$u_0, u_1, u_2 \ldots, u_{n-1}, \ldots$$

(2) $$v_0, v_1, v_2 \ldots, v_{n-1}, \ldots$$

niech będzie U granicą summy wyrazów pierwszego, V granicą summy wyrazów drugiego : powiadam że iloczyn UV jest granicą summy szeregu zbieżnego

(3) $u_0 v_0,\ (u_0 v_1 + u_1 v_0),\ (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_1), \ldots , (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0) \ldots$

którego wyrazem ogólnym jest

$$u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0.$$

Łatwo się można przekonać że to twierdzenie jest udowodnionėm w całéj ogólności.

Podał je pierwszy Cauchy.

Uwaga. Twierdzenie nie miałoby miejsca, gdyby szeregi (1) i (2) były *źle zbieżnymi*, to jest, gdyby zbieżność ich polegała jedynie na znakach lub argumentach wyrazów, a nie na ich wartościach lub modułach.

Zastosowania i przykłady.

Po teoryi wyłożonéj następują jak zwykle zastosowania i przykłady.

Szereg Newtona. « Niech będzie szereg :

(1) $$1,\ \frac{m}{1}x,\ \frac{m(m-1)}{1.2}x^2,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3, \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n, \ldots$$

Jeżeli m jest całkowitém i dodatném, szereg ten sprowadza się do $m+1$ wyrazów, których summa równa jest jak wiadomo, $(1+x)^m$.

Przypuścimy tu m jakiemkolwiek, lecz rzeczywistém, również jak x (przypadek x lub m urojonego będzie uważanym w dalszym ciągu). Szereg (1) w takim razie, wyłączywszy przypadek m całkowitego i dodatnego, będzie się składał z nieograniczonéj liczby wyrazów, tak gdy m będzie całkowitém lecz odjemném, jak również, gdy m przypuścimy ułamkowém lub niewymiernėm, dodatném lub odjemném. »

Pan Folkierski ściśle dowiódł : że summą szeregu (1) jest $(1+x)^m$

(2) $$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots$$

a to dla wszystkich wartości rzeczywistych m, dodatnych lub odjemnych, całkowitych lub ułamkowych, a nawet niewymiernych, byleby szereg był zbieżnym to jest, $-1 < x < +1$.

Rozwinięcie (2) nazywają pospolicie rozwinięciem *dwumianu Newtona.*

Rozwinięcie w szereg zbieżny zasady logarytmów naturalnych. Zasadę układu logarytmów naturalnych oznaczają pospolicie głoską e, uważając ją jako granicę wyrażenia

(1) $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie przybierając wartości całkowite lub niecałkowite tak dodatne jak odjemne. P. Folkierski dowodzi, że wyrażenie (1) może być uważaném jako granica szeregu zbieżnego, że zatém zdąża do granicy oznaczonéj. Nic nie mamy powiedzieć przeciw temu sposobowi pojmowania p. Folkierskiego; przyznajemy nawet, że metoda jego dowodzeń jest dokładnie ścisła i pełna wdzięku, to jednak wszystko wzięte pod uwagę nie wzbrania nam bynajmniéj przedstawić do nowego wydania, zdaniem naszém, ulepszeń następujących :

Najprzód : Jeżeli w szeregu

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\ldots,$$

przypuścimy

$$x=1,$$

otrzymamy szereg liczebny

$$2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\ldots,$$

szereg zbieżny, gdyż on jest przypadkiem szczególnym powyższego szeregu który jest zbieżny, dla wszelkich wartości x niezwiększających się nieograniczenie. Oznaczmy jego summę głoską e.

Liczba e jest zawarta pomiędzy 2 i 3, gdyż mamy widocznie

$$e>2 \quad \text{i}$$

$$e<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,\ e<3.$$

two znaleźć granicę wyższą reszty R_n szeregu, albo summy

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)}+\ldots,$$

gdyż mamy

$$R_n<\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots\right),$$

czyli

$$R_n<\frac{1}{1.2.3\ldots n}\times\frac{1}{n}.$$

Widzimy że zbieżność jest bardzo prędka. Jedenaście pierwszych wyrazów daje w rzeczy saméj $e=2,7182818$, wartość przybliżoną o mniéj niż *jedna dziesięcio-milijonowa*.

Powtóre. Granica $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ gdy m zwiększa się nieograniczenie. *Liczba e jest granicą do któréj dąży ilość* $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *gdy m zwiększa się nieograniczenie.*

Oto przedmiot téj części. Wszystkie przypadki przypuścić się dające pod względem różnych wartości rzeczywistych na m potrzeba dowieść za pomocą metody pięknie rozwiniętéj w dziele p. Folkierskiego.

Potrzecie. Liczba e *jest niewymierną*. W rzeczy saméj jeśliby e było liczbą wymierną $\frac{a}{b}$, mielibyśmy

$$\frac{a}{b}=2+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots b}+\frac{1}{1.2\ldots b(b+1)}+$$

Przenosząc $2+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots b}$ na pierwszą stronę równania, mnożąc przez $1.2.3\ldots b$, i oznaczając przez N liczbę całkowitą, będziemy mieli

$$N = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots$$

mamy więc

$$N > 0.$$

A że

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots < \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(1+b)^2} + \dots,$$

zatém

$$N < \frac{1}{b}.$$

Mielibyśmy tym sposobem liczbę całkowitą zawartą pomiędzy 0 i $\frac{1}{b}$, co jest niedorzeczném; *e* więc pozostanie niewymierném. Tym sposobem postępując, przyczynimy się znacznie do rozproszenia niektórych wątpliwości wielu osób mało z teoryą i zastosowaniem szeregów zbieżnych obeznanych. I tak, naprzykład wielu sobie wyobraża : że liczba *e* którą za pomocą szeregu liczebnego zbieżnego

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

można obliczyć z takiém przybliżeniem jak się podoba, można także wyrazić *zupełnie dokładnie*. Lub inaczéj : że liczba *e* zmniejszona o 2 jedności, może się wyrazić w *ułamku dziesiętnym skończonym*; przypuszczenie nierażące żadną niedorzecznością dopóki nie wykażemy, że *e* będąc *niewymierném* nie może być, tém samém, wyrażeniem *wymierném*.

Uwagi nad użyciem szeregów są potrzebne i bardzo pożyteczne. Ostatnia jednak uwaga traktująca o szeregach, zasługuje na szczególną wzmiankę.

« *Rozwinąć pewną ilość w szereg*, jest to uważać tę ilość jako granicę summy szeregu zbieżnego. »

Metoda wyczerpywania (methodus exhaustionis).

« Mając daną wielkość niewymierną lub dość złożonego rodzaju, by ją wprost obliczyć można było, możemy rozłożyć wielkość tę na dwie części : jednę wymierną lub którą z łatwością obliczyć możemy, i resztę zwykle tego samego co wielkość dana gatunku. Resztę tę możemy znów rozłożyć na dwie części w podobny sposób jak wielkość daną : otrzymamy drugą wielkość wymierną i drugą resztę, którą rozkładamy znów jak powyżéj i t. d. Jeżeli reszty te idą po sobie coraz zmniejszając się, tak że ostateczna reszta dąży do granicy zero, wielkość dana przedstawia się pod postacią summy szeregu wielkości wymiernych otrzymanych w powyższy sposób, przez rozkładanie każdéj reszty. Metoda ta, którą nazwano *metodą wyczerpywania* używaną była w wielu razach do obliczenia powierzchni, brył i t. p. niewymiernych.

Zastosowanie téj metody.

Powierzchnia odcinka paraboli. Wiemy, że wziąwszy na paraboli jakikolwiek punkt 0, mamy dla tego punktu jako początku układ spółrzędnych takich, że oś rzędnych jest styczną do paraboli w tym punkcie, oś zaś odcinków jest *średnicą*, to jest, dzieli każdą z cięciw równoległych do osi rzędnych na dwie równe części.

Szukamy powierzchni odcinka ograniczonego cięciwą i łukiem paraboli.

Trójkąt wpisany T jest połową równoległoboku opisanego R większego od odcinka szukanego; jest więc większym od połowy tego odcinka. Odejmując ten trójkąt, pozostają dwa odcinki, których summa jest mniejszą od połowy całego odcinka.

Postępując z temi odcinkami jak z całym odcinkiem, otrzymamy dwa trójkąty, z których każdy większym jest od połowy odcinka w który jest wpisanym; summa więc ich jest większą od czwartéj części odcinka całego.

Postępując tak daléj, otrzymamy szereg trójkątów, których summa może być tak mało różną od powierzchni odcinka szukanego, jak się podoba, bo reszta, czyli summa odcinków pozostałych, najprzód mniejsza od połowy, potém od jednéj czwartéj, następnie od jednéj ósméj i t. d. odcinka szukanego, może być tak małą jak się podoba. Szereg więc jest zbieżnym, a powierzchnia odcinka jest granicą jego summy.

Łatwo jest dowieść, że summa dwóch trójkątów drugiego rzędu, równa jest czwartéj części trójkąta T pierwszego rzędu; i w ogólności summa trójkątów jakiegokolwiek rzędu, równa jest czwartéj części summy trójkątów rzędu poprzedzającego.

Powierzchnia więc odcinka paraboli jest granicą summy szeregu

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4.4}T + \frac{1}{4.4.4}T + \ldots$$

$$T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{4.4.4} + \ldots\right)$$

Szukając właśnie powierzchni odcinka paraboli, Archimedes znalazł pierwszy granicę summy powyższego szeregu, który jest postępem ilorazowym : summa ta równa się

$$\frac{4}{3}T;$$

a że

$$T = \frac{1}{2}R,$$

więc powierzchnia odcinka paraboli, równa jest $\frac{4}{3}$ trójkąta wpisanego, lub $\frac{2}{3}$ równoległoboku opisanego.

Oto genijalny pomysł geometryczny, największego z tylu znakomitych geometrów starożytności, przedstawiony w formie naturalnéj i pełnéj prostoty.

ROZDZIAŁ VI.

Metoda nieskończenie małych.

Carnot pierwszy w dziele swém *Reflexions sur la métaphysique des infiniment petits* wyjaśnił i znakomicie ulepszył *metodę nieskończenie małych*. W ostatnich latach swego życia, wielki geometra Poisson, wypowiedział wojnę *teoryi funkcyj analitycznych takiéj* jaką stworzył genjusz Lagrange'a i użył całego talentu swego żeby zmusić niejako świat uczony do przyjęcia metody nieskończenie małych. Według niego, nieskończenie małe nie służą tylko za sam sposób badania wynaleziony przez geometrów, lecz mają swój byt rzetelny, co ma znaczyć że istnieją wielkości które nie są bynajmniéj zerami, które nawet mogą być podwójnemi, potrójnemi, poczwórnemi innych wielkości, i są jednakże mniejszemi w téj chwili jak wszelka wielkość dana.

Chociaż oparte na tak wielkiéj powadze, te propozycye były mocno zbijane i odpierane: wiele nawet umysłów rozsądnych uważało w tém widoczne niepodobieństwo. W rzeczy saméj, albo te wielkości, mniejsze jak wszelka wielkość dana, są jeszcze rozciągłe i podzielne, albo już są proste i niepodzielne. W pierwszym razie ich byt jest próżnem złudzeniem, ponieważ, koniecznie większe jak ich połowa, ich ćwiercian i t. d., tém samém nie są mniejsze w téj chwili jak wszelka wielkość dana; w drugiém zaś założeniu przestałyby być wielkościami matematycznemi. Przyjąć je, byłoby to odrzucić ideę materyi ciągłéj, podzielnéj do nieskończoności, punkt wyjścia konieczny i podstawa wszystkich nauk matematycznych. Kilka zastosowań mniéj szczęśliwych tych zasad, których największym błędem było przywodzić zanadto otwarcie naukę do jéj pierwotnego początku, dały lepiéj uczuć potrzebę metod więcéj ścisłych, których Poinssot i Cauchy stali się obrońcami. Dla tych geometrów, nieskończenie mała jest tylko ilością zmienną albo nieoznaczoną, która ma za granicę zero, i może zmniejszać się nieograniczenie, bez zatrzymania się na pewnéj wartości ocenić się dającéj ilość która wzięta odrębnie, może być pojęta mniejszą jak wszelka ilość dana. Ta definicya wystarcza dla usunięcia wszelkiéj wątpliwości przy wprowadzeniu do rachunku reguł zasadniczych metody nieskończenie małych. Mimo to, w ostatnich dopiero czasach ostatecznie wprowadzoną została do wykładu elementarnego: między innymi wiele się do tego przyczynił p. Duhamel swoim wstępem do drugiego wydania dzieła pod tytułem: « *Eléments du calcul infinitésimal* » i swemi kilkonastoletniemi wykładami w Sorbonie.

« Zdaje mi się, mówi bardzo słusznie w swéj przedmowie p. Folkierski, żem w ostatnim rozdziale części I$^{\text{éj}}$, dostateczną zgromadził liczbę objaśnień, aby nie pozostawić żadnéj wątpliwości w umyśle najbardziéj początkującego czytelnika pod względem ścisłości metody nieskończenie małych. »

My zaś, z naszéj strony dodamy, że oprócz powyższych zalet, cały wykład metody nieskończenie małych p. Folkierskiego, jest powszechnie ścisły, jasny i głęboki.

W rzeczy saméj, nic nie może być więcéj prostém i więcéj ścisłém jak ta dokładna definicya i z niéj same przez się wypływające naturalne następstwa.

Ilością nieskończenie małą nazywamy ilość, któréj granicą jest zero.

Pojęcie ilości nieskończenie małéj w niczém nie jest różném od pojęcia granicy: pierwsze jest tylko szczególnym przypadkiem drugiego; nieledwie zawsze użycie sposobu granic, można zastąpić sposobem nieskończenie małych; bo jeżeli

$$\mathrm{gr}\, x = a,$$

to z określenia

$$\mathrm{gr}(x - a) = 0;$$

czyli uważać a, jako granicę zmiennéj x, wychodzi na to samo, co uważać $x - a$, jako nieskończenie małą. Samą granicę określiliśmy jako ilość oznaczoną, któréj różnica ze zmienną nieoznaczoną, jest nieskończenie małą.

Summy, iloczyny, potęgi, pierwiastki nieskończenie małych są dobrze wyłożone.

Iloraz ilości skończonéj przez ilość nieskończenie małą jest ilością nieskończenie wielką: bo

$$\mathrm{gr}\frac{n}{\alpha} = \frac{n}{\mathrm{gr}\,\alpha} = \infty ,$$

co właściwie należałoby wziąść za określenie ilości nieskończenie wielkiéj, zamiast określenia ilorazu ilości skończonéj przez zero; bo dzielić przez zero nie można, lecz można dzielić przez ilość tak mało różną od zera jak się podoba, a w takim razie czém dzielnik będzie mniejszym, tém iloraz będzie większym; jeżeli więc dzielnik jest nieograniczenie czyli nieskończenie małym, iloraz jest nieograniczenie czyli nieskończenie wielkim.

Stosunek dwóch ilości nieskończenie małych.

Stosunek ten może być ilością skończoną stałą, lub zmienną; ilością nieskończenie małą; a nawet nieskończenie wielką.

1°. Jeżeli α jest nieskończenie małą, a n ilością skończoną, $n\alpha$ będzie również ilością nieskończenie małą; a jednak

$$\frac{n\alpha}{\alpha}=n$$

iloraz, czyli stosunek tych dwóch nieskończenie małych jest skończonym, równym n.

2°. Stosunek dwóch ilości nieskończenie małych, może być również nieskończenie małym: tak, jeżeli α jest nieskończenie małą

$$\text{gr}\,\alpha=0$$

α^2 będzie również nieskończenie małą:

$$\text{gr}\,\alpha^2=0,$$

a stosunek tych dwóch nieskończenie małych

$$\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$$

jest ilością nieskończonie małą α.

3°. Stosunek odwrotny

$$\frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}$$

jest ilością nieskończenie wielką: $\frac{1}{\alpha}=\infty$.

Jeżeli stosunek jednéj ilości nieskończenie małéj do drugiéj jest nieskończenie małym, pierwszą z tych ilości nazywamy *nieskończenie mała względem drugiéj*. Odwrotnie, druga ilość będzie *nieskończenie wielka względem pierwszéj*. Tak α^2 jest nieskończenie małą względem α, zaś α nieskończenie wielką względem α^2.

Rzędy nieskończenie małych są pięknie wyprowadzone.

Twierdzenia zasadnicze metody nieskończenie małych.

Język czysty i naturalny wielkiego naszego matematyka Jana Sniadeckiego, połączony z największą jasnością i ścisłością dowodzeń, oto są cechy charakterystyczne wszystkich twierdzeń zasadniczych p. Folkierskiego.

Twierdzenie I. Jeżeli stosunek dwóch ilości nieskończenie małych, zależnych od siebie, zdąża do granicy jedność, gdy każda z tych nieskończenie małych zdąża do zera, ich różnica jest nieskończenie małą względem każdéj z nieskończenie małych danych, czyli nieskończenie małą wyższego rzędu niż dane.

Odwrotnie, jeżeli różnica dwóch nieskończenie małych danych jest nieskończenie małą względem każdéj z nich, granicą ich stosunku jest jedność.

Twierdzenie II. Granica stosunku dwóch nieskończenie małych danych, jest równa granicy stosunku dwóch innych nieskończenie małych, mających z danemi odpowiednie stosunki w granicy równe jedności.

Wniosek. Granica stosunku dwóch nieskończenie małych, jest równa granicy stosunku dwóch innych nieskończenie małych, których różnice odpowiednie z pierwszemi są nieskończenie małemi wyższego rzędu od danych ; a to na zasadzie poprzedzającego twierdzenia.

Twierdzenie III. Jeżeli summa ilości nieskończenie małych tego samego rzędu, w liczbie nieograniczonéj lub zwiększającéj się bez granic w miarę jak każda z nieskończenie małych zdąża do zera, jest skończoną lub ma granicę skończoną, pomnożywszy każdą z nieskończenie małych odpowiednio przez nieskończenie małe jakiekolwiek, tak otrzymana summa będzie nieskończenie małą i zdążać będzie do granicy zero, wraz z nieskończenie małemi danemi.

Twierdzenie IV. Granica summy nieskończenie małych w liczbie nieograniczonéj, jest równa granicy summy innych nieskończenie małych, w téj saméj liczbie, mających z pierwszemi odpowiednie stosunki w granicy równe jedności.

Wniosek. Granica summy nieskończenie małych w liczbie nieograniczonéj, jest równa granicy summy innych nieskończenie małych w téj saméj liczbie, różniących się odpowiednio od poprzednich o ilości nieskończenie małe wyższego rzędu, czyli o nieskończenie małe względem danych; a to na zasadzie twierdzenia 1go.

Twierdzenie ogólne. Granica stosunku lub summy nieskończenie małych nie zmieni się, jeżeli podstawimy za nieskończenie małe dane inne nieskończenie małe, niekoniecznie równe pierwszym, lecz mające z niemi stosunki, których granicą jest jedność, lub różnice nieskończenie małe względem nieskończenie małych danych.

Twierdzenie ostatnie jest zebraniem w jedno trzech twierdzeń : Igo, IIgo i IVgo.

Uwagi nad użyciem nieskończenie małych.

Powiedzieliśmy już wyżéj że metoda nieskończenie małych jest tylko zastosowaniem szczególnym metody granic. Nieskończenie małe, podobnie jak ilości zmienne nieoznaczone, zdążające do granic oznaczonych, używane bywają zwykle jako ilości pomocnicze, które mogą się nie znajdować ani w danych, ani w wypadkach zadania. Widzieliśmy wyżéj, że ilości skończone, oznaczone, mogą być wyrażone jako granice stosunków lub summ nieskończenie małych. Mając więc do porównania lub obliczenia pewne ilości skończone, lub też szukając w ogólności związków pomiędzy ilościami skończonemi, które mogą być dość złożonego rodzaju, aby związki te wprost znalezionemi być nie mogły z łatwością, możemy uważać ilości dane jako granice stosunków lub summ nieskończenie małych, które to nieskończenie małe są zwykle tego samego rodzaju co ilości dane, a zatém również złożone i równie trudne do badania. Lecz wiemy również że podstawiając za te nieskończenie małe *inne* nieskończenie małe, różniące się od pierwszych o nieskończenie małe względem nich samych, lub mające z niemi stosunki w granicy równe jedności, ilości oznaczone dane, które są granicami stosunków lub summ pierwszych, będą również granicami stosunków lub summ odpowiednich drugich. Te *inne* nieskończenie małe mogą być wybrane dowolnie, byleby czyniły zadosyć żądanemu warunkowi różnienia się nieskończenie mało *od*, lub *względem* ilości nieskończenie małych danych : mogą więc być prostemi, łatwemi do porównywania, stosownemi do znalezienia związków, które, przechodząc do granic, będą związkami szukanemi między ilościami oznaczonemi danemi. Użycie więc metody nieskończenie małych, polega zwykle na czterech działaniach następujących :

1°. Wyrażenie ilości oznaczonych danych jako granic summ, lub stosunków ilości nieskończenie małych.

2° Podstawienie za te nieskończenie małe innych nieskończenie małych prostszego rodzaju, mających z pierwszemi stosunki odpowiednie równe w granicy jedności, lub różnice nieskończenie małe wyższego rzędu.

3° Szukanie związków zachodzących między temi ostatniemi podstawionemi nieskończenie małemi.

4° Przejście do granic stosunków lub summ tych nieskończenie małych podstawionych, które to granice będą ilościami oznaczonemi danemi, a związki znalezione, związkami szukanemi.

Podstawiając za nieskończenie małe, inne nieskończenie małe, mające z pierwszemi różnice nieskończenie małe względem nich samych, mówimy często « że opuszczając nieskończenie małe nie naruszamy wypadku ; » podobnego wyrażenia używamy przechodząc od zmiennéj do jéj granicy; właściwiéj byłoby powiedzieć że « granica stosunku lub summy drugich będzie tą samą, co granica stosunku lub summy pierwszych ; » a że nam chodzi tylko o związki między granicami, których szukamy, więc podstawienie jednych za drugie jest usprawiedliwioném.

Podstawienie to nie wpływa jak widzimy na ścisłość wypadku w który wchodzą same granice : wypadek ten nie jest żadném przybliżeniem, lecz jest *ściśle prawdziwym.*

Nie można nic więcej żądać od metody, które nam daje tak ściśle prawdziwe wypadki.

W naukach stosowanych często opuszczają bardzo małe wielkości w porównaniu z wielkiemi, dla uproszczenia rachunku, lub niemożliwości przeprowadzenia go z całą dokładnością; wypadek otrzymany jest wtedy tylko przybliżeniem mniéj lub więcéj dokładném, a jakkolwiek zachodzi niejakie podobieństwo metody przybliżeń różnych rzędów, z metodą nieskończenie małych, pierwsza nie ma nic wspólnego z ostatnią, która daje wypadki zupełnie dokładne, a nie przybliżone.

Przykłady : I. Znaleźć stosunek okręgów i powierzchni dwóch kół.

W dowodzeniu tém postępowaliśmy wedle wyżej wskazanego prawidła : stosunki szukane nważaliśmy najprzód jako granice, lub po prostu, jako równe stosunkom dwóch nieskończenie małych, zamiast stosunku powierzchni stosunek wycinków, przez co nie ułatwiliśmy jeszcze zadania. Lecz podstawiając za łuki cięciwy, za wycinki trójkąty, stosunki szukane nie zmieniają się, a w granicy sprowadziliśmy stosunki nieznane do stosunków znanych, przez co zadanie zostało rozwiązaném.

II. Dowieść, że dwa ostrosłupy, mające podstawy i wysokości równe, są równoważne.

W tym przykładzie rozłożyliśmy wielkości dane na summy nieskończenie małych, tego samego co dane wielkości gatunku : za każdą z tych nieskończenie małych podstawiliśmy inną nieskończenie małą, (za ostrosłup ścięty, graniastosłup) prostszego rodzaju, różniącą się od pierwszéj o ilość nieskończenie małą względem niéj saméj, przez co nie naruszyliśmy granicy : z równości zachodzącéj między témi ostatniemi, wnieśliśmy bez trudności równość granic.

Zastosowanie metody nieskończenie małych do teoryi fun

Przyrostki nieskończenie małe funkcyj. TWIERDZENIE OGÓLNE: Przyrostek funkcyi ciągłéj jest wogóle nieskończenie małą tego samego rzędu, co przyrostek nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj. Wyjątki zachodzić mogą tylko dla pojedyńczych wartości zmiennéj niezależnéj, lub dla wartości, pomiędzy któremi funkcya się nie zmienia.

To twierdzenie ogólne jest z całą ścisłością udowodnioném.

WNIOSEK I. Stosunek przyrostku funkcyj ciągłej do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj zdąża w ogóle do granicy oznaczonéj, gdy przyrostek zmiennéj niezależnéj zdąża do zera. Wyjątki mogą zachodzić tylko dla szczególnych, pojedyńczych wartości zmiennéj niezależnéj.

Niech będzie funkcya ciągła

$$y = f(x)$$

stosunek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - y_0}{\Delta x};$$

a więc i jego granice są funkcyami x_0 i y_0, które są jakiemikolwiek wartościami szczególnemi zmiennych x i y: czyli w ogólności, *granica stosunku przyrostku funkcyi do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, jest funkcyą zmiennéj niezależnéj* x: nazwijmy ją

$$f'(x) = \mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

funkcya ta może być ciągłą lub nieciągłą, jakkolwiek funkcya $f(x)$ jest ciągłą.

UWAGA. Jeżeli granica stosunku przyrostku funkcyi do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj jest funkcyą ciągłą zmiennéj niezależnéj, granica ta jest tą samą czy przyrostek zmiennéj niezależnéj uważać będziemy dodatnym, czy odjemnym.

WNIOSEK II. Odległość dwóch punktów na krzywéj ciągłéj jest w ogóle nieskończenie małą tego samego rzędu co różnice nieskończenie małe spółrzędnych, odpowiadających tym punktom, lub przyrostek odpowiedni nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj, któréj spółrzędne punktów są funkcyami ciągłemi.

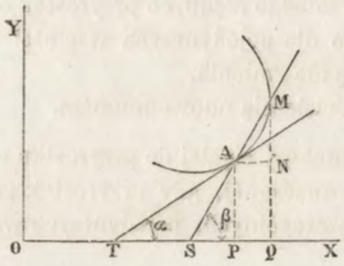
UWAGA. Odległość dwóch punktów na powierzchni jest nieskończenie małą tego samego rzędu, co różnica nieskończenie mała spółrzędnych odpowiadających tym punktom, byleby przyrostki spółrzędnych były nieskończenie małemi tego samego rzędu. Bo pomiędzy dwoma punktami na powierzchni, można zawsze poprowadzić krzywą ciągłą, dla któréj powyższy wniosek ma miejsce.

WNIOSEK III. Jeżeli prosta zmienia położenie swe w przestrzeni, wedle jakiegokolwiek prawa, lecz w sposób taki, że każde szczególne jéj położenie odpowiada szczególnéj wartości pewnéj zmiennéj niezależnéj, kąt nieskończenie mały, jaki tworzą dwa położenia téj prostéj po sobie następujące, jest nieskończenie małą tego samego rzędu, co różnica odpowiadających wartości zmiennéj niezależnéj.

Teorya stycznych. Styczną do krzywéj danéj w punkcie danym, nazywamy granicę kierunku siecznéj przecinającéj krzywę w punkcie danym i w punkcie znajdującym się na krzywéj w odległości nieskończenie małéj od punktu danego, gdy odległość ta zbliża się do zera.

Może się zdarzyć przypadek: że krzywa ma dwie styczne w punkcie danym. Punkt taki, o którym będziemy mówić w dalszym ciągu, nazwiemy *punktem kątowym* krzywéj, bo krzywa w takim punkcie dzieli się jakoby na dwie gałęzie tworzące kąt pomiędzy sobą.

Oznaczamy przez x i y spółrzędne prostokątne punktu A;



przez $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, spółrzędne prostokątne punktu nieskończenie blizkiego M.

W trójkącie MAN, kąt MAN$=\beta$, a że

$$\mathrm{sty}\,\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

przechodząc do granicy

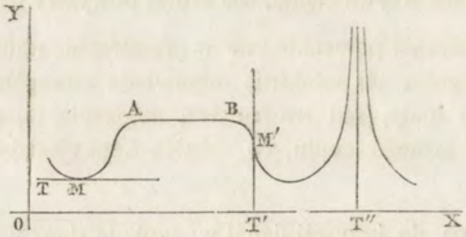
$$\mathrm{sty}\,\alpha=\mathrm{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Stosunek więc przyrostku funkcyi do przyrostku odpowiedniego zmiennéj niezależnéj jest w granicy przedstawionym geometrycznie w spółrzędnych prostokątnych przez styczną trygometryczną kąta, jaki styczna do krzywéj tworzy z osią odciętych. Kąt ten wyznacza zupełnie styczną w danym punkcie A; bo trójkąt prostokątny APT którego jednym bokiem jest rzędna AP, jest wyznaczonym, gdy kąt ostry α jest danym.

Dowiedliśmy wyżéj, że stosunek przyrostku funkcyi ciągłéj do przyrostkn nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj ma granicę oznaczoną : z równania (1) wnieśćby można, że każda ciągła ma styczną oznaczoną w każdym punkcie. Odwrotnie, dowiedliśmy że w punkcie danym na krzywéj można w ogólności zawsze do téj krzywéj poprowadzić styczną : wnieśćby można z równania (1), że przyrostek funkcyi ciągłéj do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, ma granicę oznaczoną, bo każda funkcya ciągła, może być przedstawioną geometrycznie przez krzywę ciągłą.

Rozbierzmy niektóre szczególne przypadki.

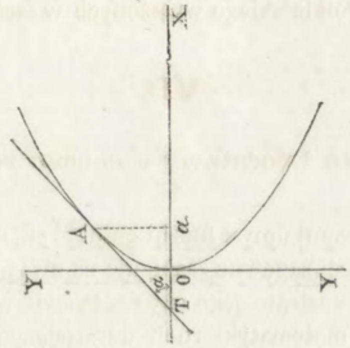
Styczna kąta α równa zeru odpowiada stycznéj równoległéj do osi odciętych; przypadek ten może



zdarzyć się tylko w jednym punkcie M, chybaby krzywa zamieniła się w pewnéj swéj części AB w prostę równoległą do osi odciętych; co się zupełnie zgadza z tém cośmy wyżéj powiedzieli o granicy stosunku przyrostku funkcyj do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, która może być zerem tylko dla szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, lub dla wartości stałych funkcyj. Styczna kąta α równa ∞ odpowiada stycznéj prostopadłéj do osi odciętych, co może mieć miejsce w szczególnym tylko punkcie M′, lub też odpowiadać zerwaniu ciągłości funkcyj jak dla odciętéj OT′ chybaby krzywa zamieniła się w prostę prostopadłą do osi odciętych; co również zgadza się z tém cośmy powiedzieli wyżéj.

Przykłady : Styczna do paraboli.

Niech będzie równanie paraboli, odniesionéj do spółrzędnych prostokątnych



$$y^2 = 2px.$$

Wiemy że

$$\text{sty}\,\alpha = \text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

lecz

$$(y + \Delta y)^2 = 2p\,(x + \Delta x)$$

$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = 2px + 2p\Delta x.$$

czyli

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = 2p\Delta x$$

a więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{y} - \frac{\Delta y^2}{2y\Delta x}$$

przechodząc do granicy, ponieważ,

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y^2}{\Delta x} = 0\,,$$

bo Δy^2 jest nieskończenie małém względem Δx

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sty}\,\alpha = \frac{p}{y}\,;$$

a że podstyczna

$$a\text{T} = \frac{\text{A}a}{\text{sty}\,\alpha} = \frac{y^2}{p} = 2x,$$

więc podstyczna jest zawsze równą dwa razy odciętéj, czyli $\text{OT} = \text{O}a$.

Mamy nadto gdy $y = 0$ $x = 0$

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sty}\,\alpha = \infty$$

czyli że styczna jest prostopadłą do osi odciętych w wierzchołku paraboli.

Gdy $y = \infty$ $x = \infty$

$$\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{sty}\,\alpha = \frac{p}{\infty} = 0$$

czyli że styczna nie może być równoległą do osi odciętych, lecz może zbliżyć się nieograniczenie do kierunku równoległego w miarę jak odcięta zwiększa się bez granic.

Są jeszcze i inne zastosowania, lecz tym przykładem zamkniemy nasze poszukiwania pod względem różnych teoryj starannie przez p. Folkierskiego wyłożonych w sześciu rozdziałach części pierwszéj.

VII

Fundamenta i podstawy rachunku różniczkowego.

Ze wszystkich wielkich pojęć któremi umysł ludzki chlubić się może, analiza nieskończenie małych albo rachunek różniczkowy najwięcéj zapewne zasługuje na uwagę, bądź to przez wybitną cechę wynalazku, bądź też przez rozmaite i rozległe jego użycia. Prawie w samym zawiązku, nadaje on geometryi i powoli innym częściom matematyki ruch wzrastający pospiesznie, stosownie do tego jak sztuka coraz bardziéj się doskonali. Zagadnienia najwięcéj nieuległe i wprost przeciwne dawnym metodom, poddają się bez trudności nowéj analizie; ogólność i jednostajność środków zbliżają pod jeden punkt widzenia teorye, które dotąd zdawały się istnieć najwięcéj rozdzielone i na pozór wcale niezależne jedne od drugich: budowa regularna, wspaniała wznosi się na podstawie stałéj, która utrzymuje wszystkie jéj części w dokładnéj proporcyi i doskonałéj równowadze. Źródło rachunku różniczkowego, jak to wkrótce dokładniéj wykażemy, wypływa z téj szczęśliwéj i płodnéj idei podstawienia zamiast stosunków wielkości i ilości zmiennych wziętych w nich samych, stosunków ich przyrostków nieskończenie małych albo ich elementów. Zrobiliśmy już na samym wstępie wzmiankę o téj wielkiéj idei; wiadomo iż ona zrodziła się jednocześnie w najwznioślejszych dwóch umysłach czasów nowożytnych, Leibnitza i Newtona, którzy długo spór wiedli z sobą o pierwszeństwo wynalazku. Około 1655 r. Newton zaczął myśleć że byłaby wielka korzyść ze stanu przyrostku stopniowego ilości, wynaleźć wartości skończone i oznaczone, które te przyrostki nabywają późniéj. Dla otrzymania tego, uważa on je nie już jako skupienia małych cząstek jednorodnych między sobą, lecz jako wypadki ruchów ciągłych, tak, że w tym sposobie widzenia, linije są zakreślone ruchem punktu, powierzchnie ruchem linij, bryły ruchem powierzchni, kąty obrotem ich boków, i t. d. Rozważając później, że wielkości tak utworzone są większe lub mniejsze, po przerwie czasów równych, stosownie jak ich prędkości rozwinięcia albo tworzenia są więcéj lub mniéj szybkie, Newton stara się wynaleźć ich wartości oznaczone, znając wyrażenia prędkości wspomnionych wyżéj wartości które nazywa (fluxiones) *wypływającemi* czyli *pochodnemi*, nazywając (fluentes) *pierwotnemi* ilości skończone one same. Tak więc dla utkwienia myśli, gdy pewna krzywa, powierzchnia albo bryła natury danéj są utworzone tym sposobem, różne elementa, które w ich skład wchodzą albo do nich należą, jako rzędne, odcinki, długości łuków, powierzchnie, objętości, nachylenia stycznych i płaszczyzn stycznych; wszystkie te elementa, zmieniają się różnie i nierównie, lecz jednakże w sposób wyraźny i oznaczony, za pomocą wyrażeń analitycznych przedstawiających dokładnie naturę krzywéj, powierzchni albo bryły nad którą się zastanawiamy. Newton mógł zatém wyprowadzić z tego zrównania płynienia (fluxiones) albo prędkości przyrostku wszystkich tych elementów w funkcyi jednéj jakiéjkolwiek ze zmiennych, i płynienie (fluxio) albo prędkość téj zmiennéj, przypuszczając ją dowolną lub zmieniającą się wedle przyrostków stałych. Aby uczynić te pierwsze wiadomości więcéj dotykalnemi, wyobraźmy sobie wielkość, która zależy od drugiéj w taki sposób, że zmiana w wartości drugiéj sprowadza w pierwszéj zmiany odpowiednie: gdy druga wielkość wzrasta lub ubywa w sposób stały i jednostajny, pierwsza będzie także wzrastać lub ubywać, lecz nie już więcéj, w ogólności, jednostajnie; wzrost lub ubytek y' pierwszéj wielkości y, będzie w ogólności funkcyą drugiéj zmiennéj x i jéj przyrostku jednostajnego x', albo lepiéj, jeśli ten przyrostek przypuścimy bardzo mały iloczyn x' przez funkcyę x i y: a więc będziemy mieli:

$$y'=f\,(x,\ y)\,x';$$

owoż, x' i y' są to co Newton nazywa *płynienia* (fluxiones) *wielkości* x i y *pierwotnych* (fluentes).

W przypadku, naprzykład, gdybyśmy mieli $y=x^3$, y' będzie równe $3x^2\,x'$, tak zatém otrzymamy

$$y'=3x^2\,x'.$$

Fluksya y' albo prędkość wzrostu y, będąc sama funkcyą x, może być uważaną jako nowa pierwotna (nova fluens), która będzie miała także swoją fluksyę y'', a ta będzie, rzeczywiście fluksyą fluksyi, i t. d.

Newton przed rokiem 1655 miał więc jasno wyrobioną ideę o fluksyach; wyrachował je do wielkiéj liczby funkcyj albo ilości pierwotnych (quantitates fluentes); użył te fluksye do rozwinięcia na szeregi i rozwiązania wielu zagadnień analizy i geometryi, i t. d. Zrobił on więcéj; w swojéj pięknéj rozprawie, *De quadratura curvarum*, przyszedł, albo raczéj powrócił z fluksyj do ilości pierwotnych (e fluxionibus ad fluentes): wychodząc z elementu nieskończenie małego łuku, powierzchni, objętości, wyrachował łuk, powierzchnię, objętość ichże samych. Zredagował on i zebrał te odkrycia analityczne w pismie noszącém tytuł: *Analisis per æquationes numero terminorum infinitas;* lecz to pismo bynajmniéj nie ogłosił i nawet swych spostrzeżeń nie komunikował nikomu przed rokiem 1704: aż nareszcie umieścił je natenczas przy pierwszéj edycyi swojéj *Optyki*.

Zrozumiał on bezwątpienia, że czas był nadszedł żeby ustalić prawa swoje do odkrycia i zastosowania nowych metod które on mniemał że sam jeden posiada, a które jednakże kwitnęły już na lądzie w owym czasie.

Około roku 1676, Lejbnitz, słysząc rozprawiających o nowych rezultatach otrzymanych przez Newtona, oświadczył geometrze angielskiemu, nazwiskiem Oldenbourg, sekretarzowi towarzystwa królewskiego w Londynie, chęć żywą jaką pałał do poznania takowych, a ten skłonił Newtona do udzielenia mu téj kumunikacyi, która tyle dlań była zaszczytną. Przeto, dnia 23 czerwca 1676 roku, Newton napisał do Oldenbourga list przeznaczony do przesłania Lejbnitzowi w którym przedstawia mu wyrażenia rozwinięte na szeregi potęg dwumianowych, rozwinięcie wstawy przez łuk, łuku przez wstawę i t. d., wszystko dane bez dowodzeń i żadnego śladu jakiéjkolwiek metody, mówiąc tylko iż on posiada jedną, za pomocą któréj te różne szeregi będąc dane, on może wynaleźć kwadratury krzywych zkąd te szeregi pochodzą, jako też powierzchnie i środki ciężkości brył utworzonych ruchem wirowym tych krzywych około ich osi. W swojéj odpowiedzi z dnia 27 sierpnia następującego roku, Lejbnitz nawzajem donosi Newtonowi o metodzie przez niego odkrytéj która się opiera na rozłożeniu wielkości na jéj elementa, i na przekształceniu tych elementów na inne wyrażone analitycznie przez funkcye wymierne zmiennéj niezależnéj, odcinka na przykład; dodawał nakoniec, iż on odkrył sposoby wprost analityczne przez które przychodził z wielką łatwością ze stycznych do krzywych. Newton spostrzegł natenczas, że Lejbnitz był przynajmniéj na drodze analizy nieskończenie małych, że się nawet blizko téj kwestyi dotykał, jeżeli jéj zupełnie nie posiadał, pospieszył zatém zawiadomić w swym liście z 24 października, iż posiadał on także na poprowadzenie stycznych do krzywych, metodę zarówno zastosować się dającą do zrównań wymiernych jako téż niewymiernych czyli zawierających pierwiastki jakiegokolwiek stopnia; lecz przydał: « jako nie mogę rozwijać daléj tłumaczenie moich sposobów, skryłem ich fundament pod to anagramma : »

6a ad æ 13eff 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12vx.

Znaczenie jakie Newton do tego anagrammu przywiązywał było: *data æquatione quatrumque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa.* Odpowiadając Newtonowi 21 Czerwca 1677 roku, Lejbnitz nie używa ani anagrammu, ani żadnych kryjących sens formułek, lecz wystawia mu po prostu z całą dokładnością metodę rachunku nieskończenie małych z wygodném oznaczeniem różniczkowém, prawidłami różniczkowania, tworzeniem zrównań różniczkowych, z zastosowaniami tych sposobów do zadań analizy i geometryi i wszystko to z temi samemi oznaczeniami, z tąż samą wyraźną sygnaturą podaną w liście pisanym 24 czerwca roku zeszłego. Newton nic nie odpisał na ten list ze wszech miar zasługujący na uwagę. W 1684 roku, Lejbnitz ogłosił swą metodę różniczkową w *Acta Eruditorum* w Lipsku, i samże Newton, w trzy lata później, uwiecznił prawa Lejbnitza przyznając je w swéj księdze *de Principiis*, gdzie się wyraża sposobem następującym (*):

« W korespondencyi listownéj jaką miałem przed dziesięciu laty z bardzo biegłym geometrą p. Lejbnitzem, doniosłem mu, iż posiadałem do wyznaczenia największości i najmniejszości, do poprowadzenia stycznych i innych działań odpowiednich, metodę dającą się zastosować zarówno do ilości wymiernych jak i niewymiernych, metodę, którą przed nim skryłem pod klucz utworzony z liter przełożonych. Ten znakomity uczony odpowiedział mi, że i on także doszedł do metody tegoż rodzaju, którą mi dokładnie przedstawił, a która nie różniła się od mojéj, jak tylko sposobem wyrażenia, oznaczenia i tworzenia ilości. »

Nie myślimy powtarzać napróżno długiego ich sporu o pierwszeństwo wynalazku. Dziś uznano wszędzie, nawet w saméj Anglii, że Lejbnitz jest prawdziwym wynalazcą rachunku różniczkowego, chociaż przeczyć nie można, że Newton ze swéj strony, położył pierwsze zasady téj gałęzi najpłodniéjszéj dokładnych umiejętności matematycznych. Nieskażony w swéj pierwotnéj formie i ścisły w gruncie, jeśli możemy tak się wyrazić, Newton pozostaje zimnym i obojętnym na cuda formy zewnętrznéj, i właśnie ta wydatna na zewnątrz forma albo oznaczenie wyraźne metody pełnéj wdzięku Lejbnitza, wznosi się wysoko po nad niewygodną i omyłkom podległą sygnaturę Newtona. Różnica tych dwóch metod, uznana przez Keilla, i innych stronników Newtona za zupełnie małoważną, jest przeciwnie, pod tym względem rzeczywiście stanowczą, gdyż to od niéj zależy zastosowanie łatwe rachunku różniczkowego, sprowadzenie jego działań złożonych do prawideł ogólnych bardzo prostych, nakoniec możebność odkrycia i rozwinięcia analogij wskazanych niemal przez sam algorytm, analogij tyle pożytecznych w umiejętności, co wyraża swe działania za pomocą znaków. Jakiegoż nie potrzeba było wytężenia umysłu śledząc cierpliwie niewyraźne oznaczenia metody fluksyi, ażeby jasno pojąć i dokładnie obliczyć atrakcye sferoid eliptycznych, naprzykład!

Lejbnitz rozwinął swą metodę z zapałem i płodnością geniuszu niesłychaną; przebiegł szybkim krokiem zastosowania do teoryj krzywych, do wynalezienia stycznych, do wyznaczenia krzywych ściśle stycznych, w ogólności, i krzywych przecinających się, pod warunkami danymi, do zadań mechaniki, do zagadnień łańcuszka i t. d.; z każdym dniem, dodawał cokolwiek do wyjaśnienia metody, tak naprzykład, gdy przedsięwziął rozważyć skutki zmienności stałych dowolnych, gdy gruntownie zbadał analogie między potęgami i różnicami, położył rzeczywiście podstawy świeżych odkryć, które dopiero znacznie później się urzeczywistniły. Słusznie jest wspomnieć, iż dwaj bracia Jan i Jakób Bernoulli, uczniowie Lejbnitza i powiernicy jego myśli, wspólnie z ich mistrzem nad rozwojem i zastosowaniem rachunku różniczkowego gorliwie pracowali.

Poprzednicy Newtona i Lejbnitza, Archimedes, Cavalieri, Wallis, Barrow, Fermat, Roberval tak

(*) *Scholia* czyli przypisek do lemmu IIgo, propozycyi VIIéj, księgi IIéj.

wiele zbliżyli się w swoich genialnych metodach do rachunku różniczkowego, że nie ma wątpliwości, iż niektórzy z nich przynajmniéj, byliby miejsce zajęli jednego z tych wielkich wynalazców, gdyby byli więcéj obeznani z tajnikami analizy algebraicznéj : po pracach Viėta, Deskarta, Wallisa, przystęp do nowego rachunku został znakomicie ułatwionym.

Po Lejbnitzu, Newtonie i braciach Berouillich, następstwo wielkich geometrów nie zostało przerwaném. Euler i d'Alembert, Lagrange i Laplace, Gauss i Abel, Cauchy i Jacobi kierowali z kolei ruchem nieustającym nauk ścisłych matematycznych : każdy z tych geometrów umieścił się pod pewnym punktem widzenia szczególnym i rozwinął podług swego sposobu pojmowania zasady fundamentalne rachunku różniczkowego. Lejbnitz przyjął metodę nieskończenie małych; uważa on głównie różne wielkości jako złożone z liczby nieskończonéj elementów nieskończenie małych : jest to pewien rodzaj teoryi atomicznéj wielkości matematycznych. Niech nikt jednak nie mniema, żeby metodzie Lejbnitza były wspólne błędy i złudzenia metody sławnego Poissona poprzednio przez nas rozebranéj. Lejbnitz bezwątpienia tak dalece się nie posunął; przyjmuje on jedynie, że wszelką wielkość wyobrazić sobie możemy podzieloną przez jakąkolwiek liczbę większą jak wszelka liczba dana na części mniejsze jak wszelka wielkość oznaczona; to wyrażenie zawiera w sobie to wszystko co właściwie stanowi język czysty i prawdziwie poprawny.

Newton wynalazł dwie teorye, jedna z nich jest to teorya pierwszych i ostatnich stosunków, druga zaś, teorya płynień albo fluksyj : w piewszéj z tych teoryj, która w gruncie jest metodą granic, przyjętém powszechnie zostało podstawienie na miejscu stosunków wielkości stosunku ich przyrostków bardzo małych, albo raczéj granicy do któréj dąży ten stosunek tych przyrostków, gdy każdy z wyrazów stosunku zbliża się do 0 : stosunki tych przyrostków których wyrazy nieskończenie przybliżają się do 0, są to co Newton nazywa *ostatniemi i pierwszemi stosunkami*. Powiedzieliśmy już wyżéj, na czém właściwie polega metoda płynień (fluxionum); zawiera ona w sobie nader wielką niedogodność wprowadzając złożoną ideę ruchu do zadań analizy i czystéj geometryi.

Euler, całe życie uprawą analizy gorliwie się zajmujący, nim przystąpił do rozwoju i upowszechnienia *rachunku analitycznego*, który się dzieli na różniczkowy i integralny, zajmował się najprzód rozszerzeniem i upowszechnieniem *analizy geometrycznéj* albo raczéj *algebraicznéj*. Jakiż był téj wysokiéj umiejętności znakomity początek i historyczny rozwój? lub inaczéj, któż tę świetną analizę pierwszy odkrył i rozwinął? Oto pytanie, którego rozwiązaniem niezwłocznie się zajmiemy.

Pierwsze początki nauki zwanéj Geometryą z Egiptu i z krajów wschodnich wnieśli do Grecyi Tales z Miletu i Pytagoras z Samos : późniejsi uczeni greccy doskonalili ją i rozszerzali, Euklides Aleksandryjski pierwszy napisał jéj wykład systematyczny, Archimedes poczynił w niéj wiele wynalazków a Apolloniusz z Pergamu jest autorem traktatu sekcyj konicznych, których odkrycie winniśmy Platonowi i uczniom jego szkoły.

Diofantes z Aleksandryi, żyjący w IV^{tym} wieku po Chrystusie, pierwszy położył zasady Algebry : w następnych wiekach Arabowie uprawiali tę naukę którą w XV^{tym} wieku do Europy wprowadził Kamil Leonard Toskańczyk, a w XVI^{tym} wieku Viète z Fontenay nadał jéj postać ogólną. Również w XV^{tym} wieku żyli twórcy Trygonometryi Purbach z Austryi i Jan Miller Regiomontanus z Frankonii. Te są znaczniejsze epoki w których umysł ludzki postępując drogą syntetyczną wznosił się od najprostszych wiadomości do coraz więcéj złożonych.

Z tak przygotowanego przez wiele wieków i geniuszów stanowiska, można było rzucić okiem na przebieżoną już przestrzeń nauk matematycznych i na drogę po któréj iść należało. To stanowisko pierwszy zajął Réné Descartes, który algebrę uogólnioną przez swego poprzednika Viète'a, zastosował do geometryj linij krzywych, i utworzył roku 1637 dzisiejszą (oprócz nowych metod genialnym pomysłem p. Salmona od kilku lat odkrytych i świeżo do nauki Descart'a szczęśliwie wprowadzonych) analizę geometryczną; mówimy do geometryi linij krzywych, ponieważ zastosowanie algebry do początkowéj geometryi jest daleko dawniejsze i należy do analizy starożytnych.

Na poparcie i wyjaśnienienie powyżéj przez nas podanéj relacyi, przytoczymy kilka odpowiednich wyjątków z rysu historycznego p. Chasl'a.

Geometrya analityczna datuje od Descart'a, lecz jak to dobrze p. Chasles przy rozbiorze poryzmów Euklidesa (Porismes d'Euclide) wyraził (rys historyczny str. 276). « Brakowało tylko Euklidesowi « użycia algebry dla stworzenia systemów spółrzędnych, które datują od Descart'a. » Euklides żył na lat 285 przed Chrystusem.

« Viète (1540 do 1603) po uzupełnieniu *metody analitycznéj Platona* przez wynalezienie *Algebry* « albo *Arytmetyki ogólnéj*, okrył się jeszcze sławą wprowadzając tę cudownéj potęgi dźwignię do « ścisłéj nauki rozciągłości, jużto aby wykreślić równania 2go i 3go stopnia czyli znaleźć ich pierwia- « stki w linijach, jużto aby przedstawić geometrycznie wypadki algebraiczne; pierwszy krok zrobiony « ku ściślejszemu związkowi Algebry z Geometryą, który musiał sprowadzić wielkie odkrycia « Descart'a (rys historyczny str. 52).

« Największa przysługa oddana Geometryi należy się słusznie Descart'owi. Ten filozof swym nieo- « cenionym pomysłem *Zastosowania Algebry do teoryj krzywych* stworzył sobie sposoby do przebycia « przeszkód dotychczas wstrzymujących największych geometrów i do zmienienia postaci ścisłych « nauk matematycznych. (rys historyczny, str. 94).

« Descartes wskazał użycie spółrzędnych przy teoryi krzywych podwójnéj krzywizny; zwykle on « je przedstawiał za pomocą zrównań ich rzutów na dwóch płaszczyznach prostokątnych. Geometrya « analityczna w przestrzeni nie rozwija się jak dopiero więcéj niż pół wieku późniéj.

« Parent, w 1700 roku, pierwszy przedstawia powierzchnię krzywéj za pomocą zrównania z trzema « zmiennemi. I wnet potém zjawił się Clairaut który w szesnastym roku życia rozwijając piękny « swój traktat o krzywych podwójnéj krzywizny, wyłożył po raz pierwszy, sposobem metodycznym, « teoryę spółrzędnych w przestrzeni (rys historyczny, str. 138).

Jakkolwiek ważne jest i genialne dzieło Descart'a, mała jednak liczba osób mogła je zrozumieć i przeniknąć się ważnością treści jego : zresztą, dziwném byłoby żeby ludzie porzucili odrazu dawny sposób rozumowania do którego przywykli zamieniając go na nowy. Przyjaciel tego geometry, Florimond de Beaune, pierwszy upowszechniał i uprawiał jego naukę. Po Beaunie, geometrya karte- zyańska winna Hollendrom i Flamandczykom swój wzrost i wydoskonalenie.

W roku 1707, wyszła w Londynie *Arithmetica universalis sen de resolutione et compositione mathematica* obejmująca algebrę i jéj zastosowania do zadań geometrycznych. To ważne dzieło Newtona przetłumaczył na język francuzki Noël Beaudeux i powiększył je dodatkami i objaśnieniami w roku 1802.

Niektórzy uczeni XVIIIgo wieku pisali sposobem starożytnych dzieła matematyczne : i tak, Robert Simpson Anglik, professor z Glasgowa, jest autorem traktatu sekcyj konicznych z roku 1735 tym sposobem napisanego : w dziełach wydanych dopiero po jego śmierci w 1787 roku, dopełnił Simpson prace Euklidesa i Apolloniusza. Ztąd p. Chasles wyciągnął Euklidesa poryzmy. Hutton, professor artyleryi w Woolwich, jest autorem dzieła *Elements of conics sections* w tymże stylu jasno i dokładnie napisanego.

Descartes miał wszakże ciągle stronników swojéj analizy. I tak, w roku 1706, wyszło w Londynie dzieło Newtona pod tytułem : *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Autor opisuje postać linij 3go rzędu i dzieli je na siedmdziesiąt dwie klassy. Euler napisał obszerny traktat linij rzędów wyższych w dziele *Introductio in analisim infinitimorum*, Lausannæ, 1747, w którém wynalazł wiele rzeczy i te z dawniejszémi uporządkował. Tegoż rodzaju traktat odznaczający się jasnością i dokładnością, wydany został przez Kramera pod tytułem : *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, Genève, 1750.

Pomimo badań i prac analitycznych Descart'a, Newtona, Clairaut'a, Eulera, Kramera i wielu innych geometrów, dzieła elementarne XVIIIgo wieku niżéj stały stosunkowo do ówczesnego stanu nauki, a autorowie elementarnych dzieł nie pojęli jeszcze ducha analizy nowoczesnéj chociaż swoje dowodzenia na algebrze opierali. Dzieło Jana Sniadeckiego : *Teorya rachunku algebraicznego zastosowana do linij krzywych*, Kraków, 1783, nietylko wolne od tego zarzutu, ale nawet tak jest ściśle napisane w duchu analizy nowoczesnéj, iż pod tym względem przewyższa niektóre późniejsze tego rodzaju dzieła, jak naprzykład wydane w roku 1813 *Essai de Géometrie analytique par* Biot, którego plan nie jest zupełnie analityczny. Biot bowiem, najprzód z przecięć ostrokręgu wywodzi liniie drugiego rzędu, potém opisuje ich własności, a nareszcie pod tytułem dyskussyi wywodzi te liniie z równania stopnia drugiego z dwiema ilościami zmiennemi i kończy rzecz na tém od czego właściwie zacząć był powinien. Liczne zalety dzieła Jana Sniadeckiego, tak są widoczne, że uważamy to dzieło wyższém nad ówczesny stan nauk matematycznych : że jednak ta znakomita praca nie dosyć w Polsce upowszechnioną i użytą została, to pochodzi z téj jedynie przyczyny, iż w ciągu czterdziestu lat (ten sąd o dziele Sniadeckiego Adryan Krzyżanowski po raz pierwszy w roku 1822 objawił), od wyjścia na świat tego dzieła, nie zajął się autor nowém jego wydaniem, powiększoném w pewnych częściach a skróconém w innych, zbliżającém się więcéj do obecnego stanu umiejętności. Dzieło to jest tém dla matematyki w Polsce czém praca Kopczyńskiego dla ojczystéj mowy : obadwa doznały tego losu że w samém zjawieniu się oznaczone cechą doskonałości, więcéj przez swych twórców, niezależnie od ówczesnego stopnia oświaty, nie były tkniętemi.

Ten rozbiór scientyficzny znakomitych dzieł matematycznych Jana Sniadeckiego, wprawną ręką Adryana Krzyżanowskiego po raz pierwszy w roku 1822 napisany, z uczuciem dumy narodowéj pod rozwagę uczonych polskich przedstawiamy. Winniśmy jeszcze kilka słów powiedzieć o Sniadeckim jako pierwszym pisarzu narodowym na polu nauk ścisłych. Prawdziwym twórcą języka narodowego w matematyce jest niewątpliwie Jan Sniadecki. Któż z ludzi myślących nie wie u nas że cała Polska jemu zawdzięcza podniesienie i wzbogacenie jéj naukowego języka. Pismiennictwo naukowe polskie było w owym czasie dosyć ubogie i powszechnie zaniedbane ; Sniadecki jednak zostawił swym następcom język naukowy jasny, prosty, bogaty i tak pięknie wykończony, iż często pod biegłém piórem tego znakomitego pisarza, prace naukowe polskie zbliżały się do najcelniejszych utworów matematycznych wielkich i zdumiewających swą naiwną prostotą pisarzy francuzkich. Cztery tomy *Pism rozmaitych* Jana Sniadeckiego zawierają w sobie : 1° Żywoty uczonych Polaków, 2° rozprawy o języku i literaturze polskiéj; 3° przemowy uniwersyteckie, rozprawy naukowe, rozbiory scientyficzne i recenzye różnych dzieł matematycznych tak własnych jak i obcych znakomitych autorów. W trzeciéj części na szczególną zasługuje uwagę uczona rozprawa Sniadeckiego o dziełach i wynalazkach rozlicznych de Lagrange'a. We wstępie do téj głębokiéj rozprawy, Jan Sniadecki tak wzniośle nauki matematyczne ocenia :

« Nauki matematyczne trzymają bez wątpienia pierwsze miejsce w rzędzie wiadomości ludzkich :
« i dlatego, że są składem prawd pewnych, wzorowego ich związku i ścisłości ; i dlatego, że są rze-
« telnym zaszczytem ludzkiego rozumu w rozległych wynalazkach i w ważnych przysługach wyrzą-
« dzonych tylu naukom i kunsztom. Po Descarcie, Newtonie i Leibnitzu miały one w ciągu ośm-
« nastego, i na początku dziewiętnastego wieku znaczną liczbę wielkich ludzi, którzy je wzbogacili,
« objaśnili i rozszerzyli użycie; ale w szeregu tych ludzi świetnieć zawsze będą dwa nieśmiertelnéj
« sławy imiona, Leonarda Eulera i Józefa Ludwika de Lagrange. »

Ta scientyficzna Jana Sniadeckiego rozprawa posłuży nam do skreślenia *krótkiéj wiadomości o dzie-*

łach i odkryciach tych wielkich, w ciągu ośmnastego i na początku dziewiętnastego wieku, *Rachunku różniczkowego* przewodnikach.

Tym sposobem wrócimy na nowo do *Rachunku analitycznego*, któryśmy byli chwilowo zaniedbali, śledząc uważnie odkrycie i rozwój *Geometryi analitycznéj*.

Mając z góry plan wytknięty, przystąpmy do praktycznego tegoż planu urzeczywistnienia. Jan Sniadecki, który wysoko cenił prace naukowe Eulera, w tych słowach daje nam o nich ogólne wyobrażenie :

« Euler rachunek linij trygonometrycznych z rzuconych od Rogera Cotes myśli do wysokiego « stopnia doskonałości przyprowadziwszy, i do wszystkich prawie odnóg matematyki wciągnąwszy, « wielką massą nowych prawd, i rozwiązaniem wielu zawiłych zagadnień wyższe rachunki matema- « tyki zbogacił, rozszerzył, i w porządek ułożył. Te znowu prawdy przystosowawszy do *Optyki*, « *Mechaniki* i *Astronomii*, daleko granice tych umiejętności rozprzestrzenił; i niezmiernie ważnemi « prawdami do znacznego stopnia doskonałości posunął skład instrumentów optycznych, budowę « okrętów, sztukę artyleryi, prawa biegu w ciałach niebieskich, i ich tablice. Sposób i rachunek « analityczny nowemi napełniwszy myślami, okazał wielką i ledwo nieczarodziejską jego dzielność, « jakiéj się przed Eulerem ledwo można było domyślać i spodziewać. »

Te badania Sniadeckiego nad matematycznemi dziełami Eulera jakkolwiek przyjmujemy w całości, potrzebujemy jednakże nad niektóremi z nich szczegółowie się zastanowić. Krytyka nowożytna dostarczy nam potrzebnych wiadomości o ważnych dziełach tego wielkiego geometry które się najwięcéj przyczyniły do wzrostu i wydoskonalenia umiejętności. *Wstęp do analizy nieskończonych* i *Rachunek różniczkowy* są dziełami Eulera tego rzędu. Wiemy już zkądinąd, iż Euler napisał obszerny traktat linij rzędów wyższych w dziele *Introductio in analysim infinitimorum*, (Lausannæ 1747 roku), w którém wynalazł wiele rzeczy i te z dawniejszemi uporządkował. Zauważmy także, iż geometrowie żyjący w świetnéj epoce wielkich odkryć Newtona i Lejbnitza przedewszystkiém gorliwie się zajmowali rozwiązaniem zagadnień przełamując niesłychane trudności i używając wszelkich środków byleby tylko ułatwić lub przyspieszyć rozwiązanie podanych zadań. Ztąd wynikło, że gdy l'Hopital w 1694 i Euler w 1755 roku ogłosili swe dzieła które zawierają (osobliwie dzieła Eulera) obok poglądów wielkich i prawdziwych liczne i wyborne przykłady, jeden i drugi wyłożyli, po raz pierwszy, teorye ogólne genialnych nowożytnych odkryć. Oto są nakoniec piękne wynalazki Eulera które tyle wzbogaciły Rachunek różniczkowy. Wiemy, że mając jakikolwiek szereg, można go przekształcić na inny. Jedna z najsławniejszych transformacyj (przemian) jest ta którą Euler nam przedstawia na szereg urządzony podług potęg wszelkiéj zmiennéj. Euler pierwszy także podał : 1° Rozwinięcia wstmx i dosmx na szereg urządzony podług potęg wst$x$ i dos$x$; 2° Dał rozwinięcie $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ na szereg urządzony podług potęg zmiennéj x; 3° Wyprowadził formułę $(2\mathrm{dos}x)^m = \mathrm{dos}mx + m\,\mathrm{dos}(m-2)x + \ldots$ i t. d.

D'Alembert jasno określił początkową wiedzę o funkcyach pochodnych i spółczynnikach różniczkowych i przyczynił się tym sposobem do oznaczenia więcéj dokładnego pierwszych i ostatnich stosunków Newtona.

De Lagrange, pierwszy geometra XVIIIgo wieku, zeszedł z tego świata w roku 1813. Po jego śmierci, sławny astronom Delambre we Francyi i Jan Sniadecki w Polsce wiadomość o życiu i wynalazkach De Lagrange'a ogłosili. Sniadecki o tym wielkim człowieku tak się wyraża :

« Sławny z głębokiéj i rozległéj nauki, ze znakomitych dzieł, zasług i talentów geometra i astronom, « sekretarz Iéj klassy Instytutu Narodowego i podskarbi Uniwersytetu francuzkiego Delambre, czytał « na publicznej sessyi Instytutu 3go stycznia 1814 roku wiadomość o życiu i niektórych wynalazkach « senatora De Lagrange, ogłoszoną w magazynie encyklopedycznym na miesiąc luty. Ztąd wycią-

« gnęliśmy treść niektórych wiadomości dla polskich czytelników; dopełniając, albo raczéj całkiem « nową zdając sprawę o jego wynalazkach z przydaniem uwag, jakie nastręczyć nam mogły czytanie « i rozważanie dzieł, oraz znajomość osobista tego wielkiego człowieka. »

Sniadecki tak mówi daléj w swym ogólnym poglądzie nad dziełami i wynalazkami Legrang'a : « Zgruntowawszy najsubtelniejsze myśli Eulera, Lagrange zapuścił się i przeniknął jeszcze w większą « ich głębię, i jednych niedokładność dopełnił, drugich zapory i trudności przełamał; odkrył nowe « drogi i sposoby w sztuce rachunkowéj; któremi jego geniusz tak dzielnie władał, iż najtrudniejsze « napomknięcia w nieśmiertelném dziele Newtona : *Philosophiæ naturalis principia mathematica* « objaśnił, sprostował albo dowiódł : wiele zagadnień zawiłych w układzie świata rozwiązał, Astro- « nomii fizycznéj, Mechanice i całéj sztuce analitycznéj nadał postać trudniejszą wprawdzie, ale « śmielszą, głębszą, i dzielniejszą. W zawodzie tak rozległym, bo ledwo nie do wszystkich odnóg « wiadomości ludzkich niosącym światło albo podporę: tak trudnym, gdzie nawet do czystego rzeczy « już odkrytych ogarnienia, potrzeba pewnego hartu głowy na głębsze i dzielniejsze rzeczy pojęcie : « w zawodzie mówię tym, widzieć człowieka prawie igrającego z trudnościami uważanemi ledwo za « podobne do pokonania, otwierającego nowe drogi do wyśledzenia prawd niezmiernie zawiłych; « w tém co miano za skończone i doskonałe, objawiającego niedokładności, i rozleglejsze rzeczy « ogarnienie; a w tém nawet, czego pokonać nie mógł, rzucającego nowe światło, i nowe widoki « przyszłym pokoleniom do szczęśliwéj rozwagi zostawione; zgoła nadającego całéj nauce ledwo « nie nową postać, a rozumowi ludzkiemu nowe sposoby i środki do przeniknienia w głęboko ukryte « tajemnice *Prawdy* i *Przyrodzenia*: widzieć zaiste takiego człowieka, jest to zjawiskiém obcho- « dzącém wszystkie narody, naukami i prawdziwém oświeceniem ludzkiego umysłu szczerze za- « prządnione. »

Sławne dzieło Lagrang'a, *Teoryę funkcyj analitycznych*, Sniadecki głęboko roztrząsa. Z téj jego dyskussyi kilka skróconych ustępów przytoczymy : « Wszystkie prawie gatunki rachunku analitycz- « nego w Matematyce, chciał de Lagrange jednym że tak powiem, wzrokiem rozumu ogarnąć, i ich « fundamentalne początki z jednego źródła wyciągnąć, i z sobą powiązać. Ta śmiała i wielka myśl « podała mu plan sławnego i głębokiego dzieła *Teorya funkcyj analitycznych*. W niém jednak założył « sobie szczególniéj, *rachunek różniczkowania i całkowania z działań prostéj Algebry wydobyć*. Nie « tykając działań, których wypadki we wszystkich teoryach są te same, i niewątpliwe, chciał także « de Lagrange odmienić fundament tłumaczenia i *sygnaturę* rachunku. Teorya funkcyj jest pasmo « ważnych, wielkich i wielu nowych prawd. »

« Ale fundamenta i początki rachunku różniczkowego wskazane przez de Lagrange'a są li ściślejsze, « dokładniejsze i prostsze? Przyznam się, że czytając tylokrotnie to ważne dzieło, nie mogłem się « o tém przekonać. Wyznaje de Lagrange że początek granic z dawnych geometrów wzięty jest « ścisły, i prawdziwie geometryczny : ale, mówi, dawni geometrowie zbliżali tylko ilości do tych « granic, ale ich nie uważali w stanie niknienia : że stosunek ilości niknących nie daje się jasno poj- « mować; a zatém teorya granic nie jest początkiem tak prostym i czystym, jaki panować powinien « w rachunku analitycznym. Odpowiadam : że dawni geometrowie nie mając języka rachunkowego, « ale tłumacząc swoje rozumowanie językiem pospolitym nie mieli potrzeby uważać ilości w stanie « niknącym ; bo tego, co nam pokazuje język rachunkowy, nie mógł im oczywiście wskazać język « pospolity. Ale kiedy unikali to wyrażać, żeby mowy nie zaciemnić; mogliż tego w swych dowodach « nie myśleć, co my myślimy? Kiedy Archimedes wpisuje i opisuje liniami prostemi koło, kiedy « kwadrując *Parabolę* wpisuje w nią trójkąty, i tych liczbę coraz bardziéj wzrastającą uważa; mógłże « zrobić wniosek o stosunku obwodu do promienia w kole, albo do placów trójkątnych do placu para- « bolicznego w *Paraboli*, nie myśląc o zniknieniu téj różnicy, która zachodziła między obwodem koła « a linjiami wpisanemi i opisanemi, albo między placami trójkątnemi, a placem parabolicznym?

« Owszem wszystkie wnioski i twierdzenia dawnych geometrów wyciągnione z początku wyczerpania « (Methodus exhaustionis) nie mogłyby się utrzymać, gdyby nie mieli zawsze na myśli téj prawdy; że, « gdy ilości ciągle się zmniejszające zachowują ten sam niezmienny do siebie stosunek, stosunek ten « jest stosunkiem granic. Uważanie ilości w swoich granicach jest to właśnie krok, o którymy się « daléj posunęli nad starożytność, idąc za jéj początkiem wcale nic nie tracącym na swéj ścisłości « geometrycznéj. Winniśmy ten dalszy krok rachunkowi, który wskazuje nam oczywiście wypadki « rodzące się z téj uwagi. Dziwno mi nawet, dla czego de Lagrange ma pojęcie wypadków rachun- « kowych powstających ze zniknienia za nie jasne; kiedy cała teorya jego na niém się opiera. Wszakże « treść jego teoryi zależy na tém; że rachunek różniczkowania nic innego nie jest, tylko sposób « oznaczenia współczynników funkcyi rozwinionéj. Jakże on te współczynniki wynajduje? Oto, « rozdzieliwszy całe zrównanie rozwinionéj funkcyi przez wzrost lub ubytek ilości zmiennéj, ten « wzrost lub ubytek uważa w stanie niknącym: przez co jedna strona zrównania staje się $\frac{0}{0}$, co na- « zywa *funkcyą pochodną*, druga strona zrównania daje termin niezawierający tego wzrostu lub ubytku « i ten termin (wyraz) jest wartością funkcyi pochodnéj. Jestże tu jakakolwiek różnica od tego, co « się robi w teoryi granic tak wystawionéj, jak jest przez p. Cousin ».

La Grange, w swém sławném dziele o *Rachunku funkcyj analitycznych*, bierze za punkt wyjścia rachunku różniczkowego rozwinięcie na szeregi podług wzoru Taylora, który, przedewszystkiém, ściśle udowadnia. Ta metoda w oczach dzisiejszych geometrów nie zdaje się być wcale racyonalną; rozwinięcie na szeregi jest prostém zastosowaniem rachunku różniczkowego, i niepodobna uniknąć wielkich niedogodności biorąc jakiekolwiek rozwinięcie za punkt wyjścia. Wszelkie dowodzenie opierające się na użyciu szeregów, których zbieżność nie jest wprost wykazaną, jest koniecznie niezupełne: Cauchy oddał ogromną przysługę umiejętności wzbraniając bez restrykcyi podobnych szeregów użycie. Dalsze uwagi nad śmiałém przedsięwzięciem Lagranża do późniejszego rozbioru o wydoskonaleniu i uogólnieniu wzoru Taylora zostawiając, nateraz się zajmiemy wykazaniem jego pięknych w rachunku różniczkowym wynalazkach. Z tych zasługujące na szczególną uwagę są następne: Wyrażenie Lagranża wyrazu dopełniającego czyli reszty szeregu Taylora. — Wzór Lagranża na rozwinięcie funkcyi oznaczonéj zrównaniem $z = a + x\varphi(z)$. — Uogólnienie tego wzoru należy się Laplasowi. — Jaki jest pierwiastek rozwinięty przez wzór Lagranża? — Drugie dowodzenie należne Jacobiemu. — Zastosowanie wzoru do rozwinięcia $(1 - 2x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$. — Zastosowanie wzoru do rozwinięcia $\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^n$. — Rozwinięcie pierwiastku zrównania drugiego stopnia. — Rozwinięcie pierwiastku zrównania $x^{n+1} + ax - b = 0$. — Rozwinięcie pierwiastku zrównania

$$a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

— Rozwinięcie funkcyi $\frac{1}{\varphi(z)}$ gdy się umie rozwinąć podług potęg całkowitych funkcyę $\varphi(z)$. — Wyrażenie symboliczne szeregu Taylora. — Wzór Lagranża dla funkcyj dwóch zmiennych. Zamkniemy wiadomości o Lagranżu przepisami Sniadeckiego dla czytelników chcących zgłębić ważne dzieło tego wielkiego geometry. « We wszystkich swoich dziełach jest de Lagrange bardzo zwięzły, wyciągający « po czytelniku oswojenia się ze sposobami i wzorami gdzieindziéj już od niego użytemi; i dokładnéj « znajomości tego, co jest już zrobione w rzeczy, o któréj pisze. Używa sygnatury dawnéj, ale często « i swojéj własnéj. Chcąc przyzwyczaić uwagę czytających do czystéj Analizy, i do trafnego czytania « rachunków, naprzód rzadko używał rysunku i objaśnienia przez figury geometryczne, a potém zupeł- « nie je zniósł i porzucił. Poszedł za jego przykładem de Laplace w swojéj *Mechanice Niebieskiéj*: co « lubo dla wyćwiczonych analistów jest niepotrzebne; dla początkowych atoli czyni pojęcie rachunku « trudném i zawiłém tam, gdzie zachodzą do uwagi linije, kąty i płaszczyzny. W każdéj prawie

« materyi, o któréj pisze, wystawia wierną historyę dawnych i teraźniejszych prac, każdemu oddaje « ścisłą sprawiedliwość w tém co zrobił, skazując co jeszcze do zrobienia pozostaje. Omyłki i « uchybienia drugich wytyka skromnie i z wielką wyrozumiałością. Niesłusznie nawet od drugich czy- « nione sobie zarzuty rozważa z tą ciszą, i z tym pokojem umysłu, jakie przystoją prawdzie, i geome- « trycznemu przekonaniu. Zgoła każdy prawie wstęp do jego pism, jest składem obszernéj matema- « tycznéj *erudycyi*, zbiorem głębokich uwag, i oraz wzorem dokładnéj historyi każdego wynalazku. « Sprawiedliwie powiedział de Lambre: że de Lagrange trwałą i nieporuszoną budowę matematycz- « nych nauk zamienił w pyszny i rozległy pałac odnowiwszy fundamenta i podniosłszy jego szczyt i « wyniosłość. Przechodząc się po tym wspaniałym gmachu, gdzie tyle umiejętności, sztuk i nauk, « szuka zasilenia i wzrostu; spotykamy ledwo nie co krok ze czcią i podziwieniem wieczne pa- « miątki jego nadzwyczajnego talentu i geniuszu : » Tak nasz znakomity matematyk pisał, wykładał, i z wszechnicy Jagielońskiéj w roku 1815 po całéj Polsce wiadomości nauk ścisłych rozsiewał. Cześć Ci! wielki twórco narodowego w matematyce języka.

Laplace, wielki z początku dziewiętnastego wieku Geometra i nieśmiertelny *Mechaniki Niebieskiéj* autor, zajmował się w chwilach od zatrudnień wolnych uprawą Rachunku różniczkowego. Jemuśmy winni : Nowe dowodzenie, które on wynalazł, do wzoru Lagranża. — Uogólnienie tegoż wzoru. — Jest on także autorem funkcyj tworzących. — Dał wyrażenie symboliczne rozwinięcia funkcyi $\varphi(x+h,\ y+k)$; rozciągnął wzór Lagranża dla funkcyj dwóch zmiennych (niezależnych).

Gauss (Karol, Fryderyk), jeden z największych Geometrów dziewiętnastego wieku, narodził się w Brunświku 25 kwietnia 1777 roku, umarł w nocy z 22 na 23 lutego 1855 r.

Z swego zacisza w Brunświku, gdzie Gauss przed wrzawą świata na zawsze ukryty, całkiem się oddał głębokim poszukiwaniom, jego prace występowały na widok publiczny z szybkością niepomału uczonych Europy zdumiewającą. Każda praca stanowi epokę w historyi umiejętności, objawia rewolucyę, co wywracając dawne teorye i metody, nie waha się zastąpić je nowemi i podnosi umiejętność do takiéj wysokości, na jakiéj ją kiedykolwiek zobaczyć nikt nawet tego sobie wcale nie przypuszczał. Prace Gaussa są powszechnie wszystkie wybitném piętnem najwyższéj doskonałości naznaczone; jest to rodzaj w całym swym składzie zupełnie skończony, a tém samém, stanowczo odrzucający wszelkie zmiany i ulepszenia. Jego godłem było : *Pauca, sed matura*. Gauss posiadał umysł niezmiernie orygi- nalny, wszystkie zdumiewające sławnego Geometry odkrycia mają ich źródło w głębokości jego własnego geniuszu, i nie noszą na sobie żadnego śladu obcego wpływu. Nie myślimy bynajmniéj zajmować się podaniem wiadomości o życiu i wszystkich nieśmiertelnych Gaussa odkryciach; przytoczymy tu tylko te, któremi ten wielki Geometra najbardziéj się przyczynił do rozwoju i wydoskonalenia Rachunku różniczkowego. Gaussowi winniśmy : Prawidła zbieżności pewnéj klassy szeregów. — Rozwinięcie na ułamek ciągły ogólnego szeregu $F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$ Definicya krzywéj należącéj do pewnéj powierzchni, któréj postać jednym ze sposobów geometrycznych jest ściśle oznaczoną. — Kilka twierdzeń Gaussa dotyczące krzywizny całéj mogą się policzyć do najpiękniejszych i najbardziéj zasługujących na uwagę podań Geometryi. — Gdy się rozwija pewna powierzchnia krzywizna pozostaje niezmienną. — Wyrażenie iloczynu promieni krzywizny.

Abel (Niels Henryk), jeden z najgenijalniéjszych geometrów naszych czasów, urodził się 5 sierpnia 1802 roku w Findöe w Norwegii, umarł 6 kwietnia 1829 roku w Froland przy Arendal, żyjąc niespełna lat dwadzieścia siedm. Po ukończeniu nauk szkolnych zatopił się młody Abel w czytaniu dzieł genialnych wielkich mistrzy umiejętności nowożytnéj; późniéj, zwiedził uczone zakłady obficie rozrzucone po całych Niemczech i Francyi; nakoniec stwarzał i po dziennikach umiejętnych ogłaszał piękne i zupełnie skończone typy swych nieśmiertelnych badań matematycznych. Wspomnimy tu tylko o tych Abela wynalazkach, któremi się on najbardziéj przyczynił do podniesienia i zbogacenia

Rachunku różniczkowego. Abelowi jesteśmy winni: Twierdzenie dotyczące zbieżności szeregów. — Twierdzenie dotyczące ciągłości szeregów urządzonych podług potęg pewnéj zmiennéj niezależnéj. — Dowodzenie wzoru

$$\varphi(x+a)=\varphi(x)+2\varphi'(x+b)+\frac{a.a-2b}{1.2}\varphi''(x+2b)+\dots$$

Kilka przedziwnie pięknych twierdzeń należących do teoryi funkcyj urojonych.

Cauchy, jeden z najsławniejszych tego wieku Geometrów francuzkich, urodził się w Paryżu, 21 sierpnia 1789 r., umarł w Scaux 22 maja 1857 roku.

Długo Cauchy pracował nad rozwiązaniem ogólném i ścisłém kilku pytań zawiłych Rachunku różniczkowego. Tych ocenienie na późniéj zostawiając, w téj chwili się zajmiemy podaniem jego wynalazków następujących: Wyrażenie Cauch'ego reszty szeregu Taylora. — Stworzył on także teoryę resztek albo pozostałości. — Naszém zdaniem oddał Cauchy niezmierną przysługę umiejętności wynajdując, przez prawdziwie genialne podejścia rachunkowe, pochodne funkcyj prostych.

Jacobi (Karol Gustaw Jakób), jeden z najsławniéjszych tego wieku geometrów niemieckich, urodził się w Poczdamie 1804 roku, umarł w Berlinie w r. 1851. Ten wielki Geometra długo przewodniczył świetnemu rozwojowi Rachunku różniczkowego. Teorya wyznacznika jakiéjkolwiek liczby funkcyj zawierających równą liczbę zmiennych niezależnych należy się prawie całkiem Jacobiemu. Definicya tego wyznacznika jest taką, że w przypadku jednéj funkcyi ten się zamienia na pochodną. Analogia wyznaczników i pochodnych jest wreszcie zupełną, i ważność zastosowań, podanych po największéj części przez sławnego autora teoryi, daje temu genialnemu pomysłowi prawo figurowania pomiędzy zasadami Rachunku różniczkowego. Oprócz tego pięknego odkrycia, dał jeszcze Jacobi wyrażenie proste pochodnéj

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}.$$

— Nowe dowodzenie wzoru Lagranża. — Nowe dowodzenie wzoru Lagranża w przypadku dwóch zmiennych niezależnych. — Twierdzenie tyczące się jakiéjkolwiekbądź krzywéj zamkniętéj.

Zdaje nam się iż, w dzisiejszym stanie umiejętności, jedna metoda ścisła i przypuścić się dająca jest ta która się opiera na wyprowadzeniu wprost z funkcyj danych tychże funkcye pochodne.

Aby można było łatwiéj schwycić charakter każdéj metodzie właściwy, podamy dwie propozycye, jedną z Geometryi, drugą z Algebry, w języku dla każdéj z nich odpowiednim.

Propozycya geometryczna. *Metoda nieskończenie małych.* Łuk nieskończenie mały jest równy swéj cięciwie.

Metoda pierwszych i ostatnich stosunków. Gdy łuk koła zmniejsza się nieograniczenie, jego stosunek ostatni ze swą cięciwą jest stosunkiem równości; gdy łuk bierze swój początek poczynając od 0, jego stosunek pierwszy, albo stosunek łuku rodzącego się ze swą cięciwą, jest stosunkiem równości; jedném słowem, łuk się poczyna i kończy stając się równym swéj cięciwie.

Metoda płynień albo fluxyj. Gdy łuk wzrasta, poczynając od 0, z prędkością jednostajną, prędkość z jaką cięciwa wzrasta jest, w pierwszéj chwili, równa prędkości łuku.

Metoda granic. Gdy łuk i, następnie, cięciwa zmniejszają się nieograniczenie, granica stosunku łuku do cięciwy jest równą jedności.

Analiza resztek albo pozostałości Landena. Gdy łuk koła jest zerem, stosunek tego łuku do cięciwy, lubo przedstawiający się pod kształtem $\frac{0}{0}$, jest właściwie równy 1, jak to widać dzieląc oba wyrazy ułamku który wyraża ten stosunek, przez czynnik im spólny co znikał jednocześnie z łukiem.

Teorya funkcyj de la Grange'a. Rozwijając łuk A na szereg *uporządkowany* podług potęg cięciwy C, otrzymamy

$$A = C + AC^2 + AC^3 + \dots$$

rozdzieliwszy całe zrównanie przez C, to nam daje

$$\frac{A}{C} = 1 + AC + AC^2 + \dots$$

owoż, gdy C staje się *zerem*, przez co jedna strona zrównania staje się $\frac{0}{0}$, druga strona 1; a więc $\frac{C}{A} = 1$, zkąd $A = C$.

Propozycya analityczna. *Metoda nieskończenie małych.* Jeśli przypuścimy że x przyjmuje wzrost nieskończenie mały dx, x^3 przybiera wzrost nieskończenie mały $3x^2\ dx$.

Metoda pierwszych i ostatnich stosunków. Stosunek wzrostu x do wzrostu jeden po drugim następującego x^3 jest ostatecznie stosunkiem 1 do $3x^2$.

Metoda fluksyj. Gdy x jest pewną linią co wzrasta z prędkością, x', x^3 będzie wzrastać z prędkością $3x^2\,x'$.

Metoda granic. Granica stosunku otrzymanego dzieląc wzrost x^3 przez wzrost x, co go wydaje, jest, przypuszczając że ten ostatni wzrost zmniejsza się niżéj wszelkiéj granicy, równą $3x^2$.

Analiza resztek albo pozostałości Landena. Ponieważ

$$\frac{y^3 - x^3}{y - x} = x^2 + xy + y^2,$$

będzie, biorąc

$$y = x, \quad \frac{x^3 - x^3}{x - x} = 3x^2.$$

Teorya funkcyj. Jeśli rozwiniemy $(x + h)^3$ wedle potęg rosnących h, spółczynnik pierwszéj potęgi h jest równym $3x^2$.

W rzeczy samėj,

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

zkąd

$$\frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2;$$

owoż gdy $h = o$, pierwsza strona zrównania staje się $\frac{0}{0}$, druga strona $3x^2$: a więc stosunek

$$\frac{(x + h)^3 - x^3}{n} = 3x^2.$$

Zobaczymy wkrótce, iż p. Folkierski przyjął jako najprostszą i najściślejszą metodę nieskończenie małych albo funkcyj pochodnych.

Po opowiedzeniu dość obszernėm historycznego rozwoju Rachunku różniczkowego i wykazaniu ducha różnych metod, damy teraz poznać ich oznaczenia i ich fundamentalne zasady.

Pan Folkierski wyprowadza naprzód *pochodną* i *różniczkę*. Tak przy wyprowadzeniu tych dwóch zasad fundamentalnych nowożytnego odkrycia, jak równie i przy innych poszukiwaniach w Rachunku różniczkowym i jego zastosowaniach natrafionych, p. Folkierski nie przestanie używać za punkt wyjścia i stałego swych twierdzeń oparcia *metody nieskończenie małych* uprzednio dokładnie wyłożonéj. Winniśmy także, raz na zawsze ostrzedz, iż jakkolwiek zachodzi niejakie podobieństwo metody przybliżeń różnych rzędów, z metodą nieskończenie małych, pierwsza nie ma nic wspólnego z ostatnią, która daje wypadki zupełnie dokładne, a nie przybliżone.

Pochodna. Niech będzi y funkcyą ciągłą zmiennéj x:

$$y = f(x) \tag{1}$$

jeżeli zmiennéj x nadamy przyrostek Δx i nazwiemy Δy przyrostek odpowiedni funkcyi y:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

z określenia ciągłosci funkcyi wiemy, że przypuściwszy przyrostek Δx nieskończenie małym, przyrostek funkcyi Δy będzie również nieskończenie małym. Dowiedliśmy nadto (VI), że nieskończenie małe Δx i Δy są *w ogólności* nieskończenie małemi tego samego rzędu, gdy x zmienia się pomiędzy dwiema jakiemikolwiek wartościami szczególnemi x_0 i X, pomiędzy któremi funkcya jest ciągłą, że zatém granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest *w ogólności* skończoną oznaczoną funkcyą zmiennéj x, a tylko dla *szczególnych*, pojedynczych wartości zmiennéj niezależnéj stosunek ten może być w granicy nieoznaczonym, nieskończenie wielkim dodatnym lub odjemnym, lub zerem. Granicą stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy x zdąża do zera nazywamy *pochodną* funkcyi i oznaczamy ją, według Lagrange'a, kréskując znak funkcyjny

$$f'(x) = \mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{gr}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

co możemy wyrazić mówiąc, że

Pochodną funkcyi nazywamy granicę stosunku przyrostku funkcyi do przyrostku odpowiedniego zmiennéj niezależnéj, gdy przyrostek ten zdąża do zera.

Różniczka. Jeżeli $f'(x)$ jest granicą $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, to jak wiemy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

gdzie ε oznacza nieskończenie małą zdążającą do zera wraz z Δx; a więc

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\Delta x. \tag{3}$$

Widzimy ztąd, że przyrostek Δy funkcyi, który jest nieskończenie małą tego samego w ogóle rzędu co przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj, składa się z dwóch części:

1°. $f'(x)\,\Delta x$, która jest nieskończenie małą tego samego rzędu co Δx, bo ma z Δx w ogólności stosunek skończony, równy pochodnéj $f'(x)$.

2°. $\varepsilon\Delta x$, która jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż Δx bo ma z Δx stosunek nieskończenie mały ε.

Pierwszą tę część przyrostku Δy funkcyi, nazywamy *różniczką* funkcyi, i oznaczamy ją przez dy a zatém

(4) $$dy = f'(x)\Delta x$$

Różniczką funkcyi nazywamy iloczyn pochodnéj przez przyrostek nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj.

Mamy również

(5) $$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x) = \text{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a zatém

Różniczką dy funkcyi, nazywamy nieskończenie małą, któréj stosunek do przyrostku nieskończenie małego Δx zmiennéj niezależnéj, równa się granicy stosunku przyrostku odpowiedniego Δy funkcyi, do tegoż przyrostku Δx zmiennéj niezależnéj, gdy Δx zdąża do zera.

Wyrażenie różnicy pomiędzy przyrostkiem Δy a różniczką dy

(6) $$\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x,$$

pokazuje nam że :

Przyrostek Δy funkcyi nie jest równym różniczce dy téjże funkcyi : lecz przyrostek Δy jest nieskończenie małą różniącą się od nieskończenie małéj dy, którą nazwaliśmy różniczką, o ilość $\varepsilon\Delta x$ nieskończenie małą względem niéj samej,

Z tego wypada [VII] że

(7) $$\text{gr}\frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

Przyrostek funkcyi Δy i różniczka dy są nieskończenie małemi tego samego rzędu, których stosunek w granicy równa się jedności.

Przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj można zawsze uważać jako niezmienny jakąkolwiek funkcyę x, jak : $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ bierzemy pod uwagę : bo przyrostek ten będąc stałym, niezależnym ani od x, ani od funkcyi x, można go nie zmieniać przechodząc z jednéj funkcyi do drugiéj. Weźmy w szczególności pod uwagę funkcyę

$$y = x,$$

mamy

$$\Delta y = \Delta x,$$

czyli

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dx}{\Delta x} = \text{gr}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

a zatém

$$\Delta x = dx,$$

więc w tym przypadku przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj równym jest różniczce dx. A zatém i dla wszelkiéj innéj funkcyi przyrostek zmiennéj niezależnéj Δx możemy wziąść równym różniczce dx tejże zmiennéj niezależnéj. Różniczka dx zmiennéj niezależnéj będzie więc uważaną jako *stała* to jest niezależna od x, równa przyrostkowi Δx zmiennéj niezależnéj. Możemy więc używać znaku Δx

lub dx zarówno, jak nam będzie dogodniéj. I tak możemy napisać

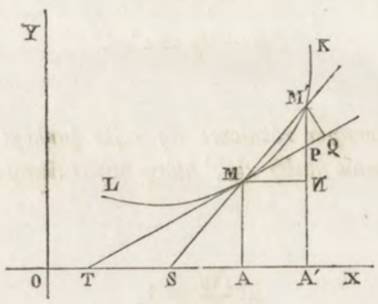
(8) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{lub} \quad dy = f'(x)\,dx.$$

Ztąd to pochodnę nazywają niekiedy *ilorazem różniczkowym*, bo pochodna równa jest ilorazowi różniczki funkcyi i różniczki zmiennéj niezależnéj; lub jeszcze *spółczynnikiem różniczkowym*, bo mnożąc przez pochodnę różniczkę zmiennéj niezależnéj, otrzymujemy różniczkę funkcyi.

Jakkolwiek przyrostek funkcyi nie jest równym jéj różniczce, jednak na zasadzie twierdzenia ogólnego metody nieskończenie małych, *za przyrostek funkcyi można podstawić jéj różniczkę lub odwrotnie, ile razy chodzi o granicę stosunku lub summy nieskończenie małych*; bo z równania (6) i (7) widzimy, że te dwie nieskończenie małe różnią się o nieskończenie małą względem nich samych, czyli mają stosunek równy w granicy jedności.

Przedstawienie geometryczne pochodnéj i różniczki. Niech będzie krzywa LK przedstawiająca funkcyę

(1) $$y = f(x).$$



$OA = x$, $AM = y$, spółrzędne jakiegokolwiek punktu M téj krzywéj;

$OA' = x + \Delta x$, $A'M' = y + \Delta y$, spółrzędne punktu M′ w odległości nieskończenie małéj MM′ od punktu M.

Stosunek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{M'N}{MN} = \frac{\text{wst}\, M'MN}{\text{wst}\, MM'N}$$

przyrostku funkcyi do przyrostku zmiennéj niezależnéj jest spółczynnikiem kątowym siecznéj MM′: w rzeczy saméj oznaczywszy przez X, Y spółrzędne téj siecznéj i przedstawiwszy jéj zrównanie na przód pod ogólnym kształtem zrównania prostéj

(2) $$Y = mX + n$$

na wyznaczenie spółczynników m i n mamy dwa zrównania, wskazujące że prosta przechodzi przez punkta M i M′, że zatém spółrzędne tych punktów czynią zadosyć zrównaniu (2)

$$y = mx + n$$

$$y + \Delta y = m(x + \Delta x) + n;$$

zkąd otrzymujemy odejmując pierwsze od drugiego

$$\Delta y = m\Delta x \quad \text{czyli} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Otrzymamy również

$$n = y - \frac{\Delta y}{\Delta x} x,$$

tak że zrównaniem siecznéj MM' będzie, podstawiając te wartości w (2)

(3) $$\mathrm{Y} - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\mathrm{X} - x).$$

W granicy, gdy M'M zdąża do zera, sieczna MM' zdąża do stycznéj MT : zrównaniem więc stycznéj będzie

(4) $$\mathrm{X} - y = f'(x)(\mathrm{X} - x) \quad \text{czyli} \quad \mathrm{Y} - y = \frac{dy}{dx}(\mathrm{X} - x);$$

a jéj spółczynnikiem kątowym

$$\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{gr}\frac{\mathrm{M'N}}{\mathrm{MN}} = \mathrm{gr}\frac{\mathrm{wst\,M'MN}}{\mathrm{wst\,MM'N}} = \frac{\mathrm{wst\,PMN}}{\mathrm{wst\,MPN}} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{MN}},$$

lub

(5) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{MN}};$$

czyli że :

Pochodna przedstawiona jest geometrycznie przez spółczynnik katowy stycznéj.

Lecz mamy również

$$dx = \Delta x = \mathrm{MN}, \quad \Delta y = \mathrm{M'N},$$

a więc z (5)

(6) $$dy = \mathrm{PN},$$

czyli że :

Różniczka przedstawiona jest geometrycznie przez przyrostek nieskończenie mały rzędnéj stycznéj, odpowiadający przyrostkowi nieskończenie małemu odciętéj punktu styczności.

Różnica pomiędzy przyrostkiem nieskończenie małym funkcyi a jéj różniczką

$$\Delta y - dy = \varepsilon \Delta x = \mathrm{M'N} - \mathrm{PN} = \mathrm{M'P}$$

przedstawiona jest przez odległość M'P punktu M' na krzywéj od punktu P na stycznéj, liczoną równolegle od osi rzędnych, nieskończenie małą względem Δx, równie jak odległość prostopadła M'Q, byleby styczna nie była równoległą do osi rzędnych.

W razie spółrzędnych prostokątnych, spółczynnik kątowéj stycznéj jest styczną trygonometryczną kąta, jaki styczna tworzy z osią odciętych

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \mathrm{st\,MTX},$$

ta styczna trygonometryczna przedstawia więc w tym razie pochodną.

Pochodna równa zeru dla pewnéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, przedstawia styczną równoległą do osi odciętych w punkcie odpowiednim téj wartości odciętéj : w rzeczy saméj, spółczynnikiem kątowym téj stycznéj jest zero i odwrotnie.

Pochodna równa nieskończoności, przedstawia styczną równoległą do osi rzędnych. Jedno i drugie może miéć miejsce tylko w szczególnych punktach, chybaby krzywa zmieniła się w prostą przedstawiającą wartość stałą zmiennéj niezależnéj lub funkcyj.

Kilka twierdzeń ogólnych metody nieskończenie małych posłużyły p. Folkierskiemu do ścisłego wyprowadzenia *pochodnéj i różniczki*. Możnaż było jaśniéj, prościéj, więcéj ogólniéj i naturalniéj, przez inną jakąkolwiek metodę zasady fundamentalne Rachunku różniczkowego wyprowadzić? Za pomocą ścisłéj *metody granic* głęboki i oryginalny geniusz Sturma pięknie i gruntownie wyprowadził fundamentalne zasady swego sławnego Rachunku różniczkowego. W innym języku i za pomocą innéj metody młody nasz pisarz tenże sam przedmiot traktując z równym wdziękiem, prostotą i ścisłością główne i zasadnicze swego Rachunku różniczkowego zadanie *w ogólności* rozwiązał.

Cel rachunku różniczkowego. Rachunek różniczkowy ma na celu wyznaczenie pochodnéj, lub różniczki dla wszelkiéj funkcyi danéj, jakoteż badanie własności i związków zachodzących pomiędzy funkcyami i ich pochodnemi lub różniczkami. Geometrycznie możnaby powiedzieć, że rachunek różniczkowy jestto teorya ogólna prostych stycznych do krzywych.

Widzieliśmy powyżéj, że *pochodna* i *różniczka* funkcyi odpowiadają jednemu i temu samemu pojęciu : pochodna jest ilorazem dwóch różniczek, różniczki funkcyi i różniczki zmiennéj niezależnéj. Pochodna jest ilością skończoną, różniczka nieskończenie małą : używając pochodnéj postępujemy według metody granic ; używając różniczki według równoważnéj z metodą granic metody nieskończenie małych. Znając pochodnę, znamy różniczkę i odwrotnie.

$$\frac{dx}{dy}=f'(x), \quad \text{zkąd} \quad dy=f'(x)dx\cdot$$

Możnaby przeprowadzić cały rachunek różniczkowy nie wspominając o różniczce, tak jak z drugiéj strony nic łatwiejszego, jak zastąpić wyrażenie pochodnéj, przez iloraz dwóch różniczek : lecz metoda nieskończenie małych daje nam tyle ułatwień w rachunku za pomocą twierdzeń podanych w poprzedzającym rozdziale, że użycie różniczek przedstawia liczne korzyści, których innym sposobem osiągnąć niepodobna.

Metoda nieskończenie małych posłuży także p. Folkierskiemu do przeprowadzenia *własności ogólnych funkcyj pochodnych.*

Twierdzenie I. Jeżeli pochodna funkcyi jest dodatną dla pewnéj wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj, funkcya się zwiększa ; jeżeli pochodna ta jest odjemną, funkcya się zmniejsza, gdy zwiększamy zmienną niezależną i odwrotnie.

Wniosek. Jeżeli pochodna funkcyi jest dodatną dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x zawartych pomiędzy x_0 i X, funkcya ciągle się powiększa, gdy x przechodzi od x_0 do X.

Twierdzenie II. Jeżeli pochodna funkcyi jest równa zeru dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj zawartych pomiędzy pewnemi jéj wartościami szczególnemi, funkcya jest stałą pomiędzy temi granicami.

Uwaga. Zauważmy naprzód, że pochodna może być zerem dla jednéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, choć funkcya nie będzie stałą gdy zmienimy zmienną niezależną o ilość skończoną.

Jeżeli tak funkcya $f(x)$, jak jéj pochodna $f'(x)$ są funkcyami ciągłemi zmiennéj niezależnéj x, pochodna z dodatnéj nie może stać się odjemną, lub odwrotnie, nie przechodząc przez wartość zero ; więc *dla wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj, dla któréj funkcya przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać lub odwrotnie, pochodna musi być równą zeru.*

Odwrotnie, nie można powiedzieć żeby dla wartości szczególnéj x, dla któréj pochodna jest równą zeru, funkcya koniecznie miała przestać się zwiększać a zacząć zmniejszać lub przeciwnie : bo pochodna będąc nawet ciągłą, może z dodatnéj stać się zerem, a późniéj znów dodatną nie przybierając wartości odjemnych, i przeciwnie. Lecz *jeżeli pochodna nie przestając być ciągłą, z dodatnéj staje się odjemną lub przeciwnie, przechodząc przez wartość zero, funkcya przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać lub przeciwnie, dla wartości odpowiedniéj zmiennéj niezależnéj.*

Wartości te szczególne nazwanemi zostały *największościami* lub *najmniejszościami* funkcyi, bo wartości te są większemi w pierwszym razie, mniejszemi w drugim, od wartości sąsiednich, odpowiadających przyrostkowi dodatnemu i odjemnemu zmiennéj niezależnéj.

Twierdzenie III. Dwie funkcye jednéj i téj saméj zmiennéj niezależnéj, których różnica jest stałą, mają pochodne i różniczki równe.

Twierdzenie IV. Odwrotnie, dwie funkcye, których pochodne lub różniczki są sobie równe, różnić się mogą tylko o ilość stałą.

Twierdzenie V. Jeżeli pochodna jednéj funkcyi jest ciągle większą od pochodnéj drugiéj funkcyi jednéj i téj saméj zmiennéj, przyrostek pierwszéj funkcyi odpowiadający przyrostkowi skończonemu zmiennéj niezależnéj, jest większym od przyrostku drugiéj funkcyi, odpowiadającego temu samemu przyrostkowi skończonemu zmiennéj niezależnéj.

Twierdzenie VI. Iloraz różniczek dwóch funkcyj jest równym pochodnéj jednéj funkcyi względem drugiéj, uważanéj za zmienną niezależną.

Wszystkie *sześć* poprzedniczych twierdzeń zostały przez p. Folkierskiego ściśle i wybornie dowiedzione.

Pochodna funkcyi funkcyj. Z twierdzenia powyższego (VI) z łatwością wyprowadzić możemy prawidło, jak otrzymać pochodną funkcyi funkcyj, nie sprowadzając jéj do funkcyi pojedynczéj. Niech będzie funkcya u funkcyi v zmiennéj niezależnéj x

$$u = f(v) \qquad v = \psi(x)$$

możnaby podstawiając za v wartość

$$u = f[\psi(x)] = \varphi(x)$$

otrzymać wprost funkcyę u wyrażoną przez x, i szukać jéj pochodnéj: lecz można również wyrazić tę pochodną przez pochodną u względem v, jako zmiennéj niezależnéj to jest przez $f'(v)$, i przez pochodną $\psi'(x)$ funkcyi v. W rzeczy saméj

$$du = f'(v)\,dv$$

z twierdzenia poprzedzającego; a więc

(1) $$\frac{du}{dx} = f'(v)\frac{dv}{dx} = f'(v)\,\psi'(x)$$

pochodna więc funkcyi funkcyj równa się iloczynowi pochodnéj funkcyi danéj względem funkcyi uważanéj za zmienną niezależną, przez pochodną téj ostatniéj względem zmiennéj niezależnéj.

Równanie (1) piszą niekiedy w następujący sposób:

(2) $$du = \frac{du}{dv}\,dv$$

bo $f'(v) = \dfrac{du}{dv}$.

Twierdzenie to z łatwością uogólnić można, rozciągając je do ilukolwiek funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj.

Niech będą zmienne

$$u,\ v,\ w,\ \ldots\ z,\ x$$

zależne od siebie za pomocą związków

$$u = f(v),\ \ v = \varphi(w),\ \ \ldots\ z = \psi(x)$$

Jedną z tych zmiennych naprzykład x możemy uważać za zmienną niezależną, pozostałe będą jéj funkcyami.

Mamy na zasadzie poprzedzającego

$$du = f(v)\,dv,\quad dv = \varphi'(w)\,dw \ldots dz = \psi'(x)\,dx$$

a więc

$$du = f'(v)\,\varphi'(w) \ldots \psi'(x)\,dx$$

czyli

$$\frac{du}{dx} = f'(v)\,\varphi'(w) \ldots \psi'(x);$$

co niekiedy piszemy

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdots \frac{dz}{dx}.$$

Pochodna funkcyi odwrotnéj. Niech będzie funkcya

(1) $$u = f(v)$$

gdzie w ogólności tak u, jak v, mogą być funkcyami pewnéj niezależnéj x. Wyciągnąwszy z równania (1) v wyrażone przez u lub przypuszczając działanie to wykonane, otrzymamy

$$v = \mathrm{F}(u)$$

funkcyę $\mathrm{F}(u)$ nazywamy *odwrotną* funkcyi $f(v)$.

Mamy widocznie

$$du = f'(v)\,dv \quad dv = \mathrm{F}'(u)\,du$$

oznaczając przez $f'(v)$ pochodną $f(v)$ względem v, a przez $\mathrm{F}'(u)$ pochodną $\mathrm{F}(u)$ względem u, wziętą tak jakby u było zmienną niezależną: a zatém mnożąc powyższe zrównania przez siebie, znosząc czynnik spólny $du\,dv$ otrzymamy

$$f'(v)\,\mathrm{F}'(u) = 1;$$

czyli

$$\mathrm{F}'(u) = \frac{1}{f'(v)}$$

pochodna funkcyi odwrotnéj, jest odwróceniem pochodnéj funkcyi danéj.

Możeż być co prościéj i przystępniéj wyłożone? Tém ostatniém prawdziwie pięknem twierdzeniem p. Folkierski zasady fundamentalne swego Rachunku różniczkowego zamyka.

VIII

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCYJ PROSTYCH czyli ZASADNICZYCH JEDNÉJ ZMIENNÉJ NIEZALEŻNÉJ.

Przedewszystkiém, należy ściśle określić: co to jest właściwie *różniczkować funkcyę*?

Różniczkować funkcyę, jestto mając daną funkcyę, szukać jéj pochodnéj lub różniczki: znając pochodną znamy różniczkę i odwrotnie.

Otrzymywanie pochodnych i różniczek wszystkich znanych nam dotąd funkcyj sprowadza się, jak zobaczymy poniżéj, do znajomości pochodnych i różniczek pewnéj liczby funkcyj prostych, saméj zmiennéj niezależnéj, lub utworzonych w sposób prosty z innych funkcyj zmiennéj niezależnéj. Te różniczki i pochodne nazywać będziemy *zasadniczemi* i zajmiemy się, dla pokazania sposobów używanych przez p. Folkierskiego, *niektórych z nich* wyznaczeniem.

Różniczki i pochodne zasadnicze są:

1° Różniczki i pochodne funkcyj algebraicznych. — Summa. — Iloczyn. — Iloraz. — Potęga. — Wielomian algebraiczny.

2° Różniczki i pochodne funkcyj przestępnych. — Funkcye: logarytmowa. — Wykładnicza. — Trygonometryczne. — Kołowe.

Weźmy na przykład z funkcyj algebraicznych iloczyn.

Iloczyn. 1° Niech będzie a ilością stałą, u funkcyą jakąkolwiek zmiennéj niezależnéj x:

$$u = f(x)$$

weźmy pod uwagę funkcyę

$$y = au.$$

Nadając zmiennéj niezależnéj przyrostek Δx, oznaczając przez Δu, Δy, przyrostki odpowiednie funkcyi u i y, zważając że a jako stała pozostaje tą samą, mamy

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u)$$

czyli odejmując $y = au$:

$$\Delta y = a\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = a;$$

przechodząc do granicy, ponieważ $\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}$,

$$\frac{dy}{du} = a;$$

a więc

$$dy = adu$$

różniczka iloczynu zmiennéj przez stałą, równa się iloczynowi różniczki zmiennéj, przez stałą.

2° Niech będą dwie funkcye zmiennéj niezależnéj x:

$$u = f(x) \qquad v = \varphi(x)$$

i ich iloczyn

$$y = uv.$$

Nadając zmiennéj niezależnéj przyrostek Δx i oznaczając przez Δu, Δv, Δy przyrostki odpowiednie u, v i y mamy

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

dzieląc przez Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x$$

przechodząc do granic i zważywszy że

$$\operatorname{gr} \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x = 0$$

otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

czyli

$$dy = vdu + udv$$

różniczka iloczynu dwóch funkcyj, równa się summie iloczynów różniczki pierwszéj funkcyi przez funkcyę drugą, i różniczki drugiéj funkcyi przez funkcyę pierwszą.

Dzieląc powyższe zrównanie przez iloczyn $y = uv$, otrzymamy

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Iloraz różniczki funkcyi przez samą funkcyę jak $\frac{dy}{y}$, $\frac{du}{u}$, $\frac{dv}{v}$ nazywać będziemy *różniczką logarytmową:* tak jak logarytm iloczynu równym jest summie logarytmów czynników, tak: *różniczka logarytmowa iloczynu równą jest summie różniczek logarytmowych czynników.*

3° Niech będzie ilekolwiek funkcyj zmiennéj niezależnéj x:

$$u = f(x) \quad v = \varphi(x) \quad w = \psi(x) \ldots z = \mathrm{F}(x)$$

a ich iloczyn

$$y = u.v.w \ldots z$$

Stosując wzór poprzedzający, otrzymamy kolejno:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{d(vw \ldots z)}{vw \ldots z} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{d(w \ldots z)}{w \ldots z} = \ldots$$

a w końcu

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots + \frac{dz}{z};$$

Różniczka logarytmowa iloczynu ilukolwiek czynników równa jest summie różniczek logarytmowych czynników.

Aby otrzymać różniczkę zwyczajną, dość jest pomnożyć wzór poprzedzający przez iloczyn

$$y = uvw \ldots z$$

co daje

$$dy = vw \ldots zdu + uw \ldots zdv + uv \ldots zdw + \ldots + uvw \ldots dz.$$

Pochodna iloczynu ilukolwiek czynników będzie miała wyrażenie

$$\frac{dy}{dx} = vw \ldots z \frac{du}{dx} + uw \ldots z \frac{dv}{dx} + uv \ldots z \frac{dw}{dx} + \ldots + uvw \ldots \frac{dz}{dx}.$$

Weźmy teraz z funkcyj przestępnych naprzód logarytm.

Logarytm. Niech będzie funkcya

$$y = \log x$$

gdzie x jest zmienną lub funkcyą zmiennéj niezależnéj, a y jéj logarytm wziętym względem jakiéjkolwiek zasady (base), którą nazwiemy a. Przypuszczamy nadto, że x zmieniając się przybierać może tylko wartości dodatne, większe od zera. Używając zwykłego znakowania, mamy

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x)$$

ztąd

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

oznaczywszy przez m stosunek $\frac{\Delta x}{x}$, czyli założywszy

$$\Delta x = \frac{x}{m}$$

m zwiększa się bez granic, (x z założenia jest większém od zera) w miarę jak Δx zdąża do zera; podstawiając, otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x}\log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Lecz wiemy z wiadomości wstępnych o szeregach, że

$$\mathrm{gr}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2{,}718981829459035\ldots$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie; więc

$$\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log e$$

czyli pochodna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log e$$

lub różniczka

(1) $$dy = \frac{dx}{x}\log e$$

różniczka logarytmu zmiennéj, równa się ilorazowi różniczki zmiennéj podzielonéj przez zmienną, pomnożonemu przez logarytm liczby e.

Jeżeli logarytm dany jest logarytmem naturalnym

$$y = l.x$$

którego zasadą jest e

$$l.e = 1$$

mamy

(2) $$d.lx = \frac{dx}{x}.$$

różniczka logarytmu naturalnego zmiennéj, równa się ilorazowi różniczki zmiennéj przez samą zmienną.

Gdyby x nie było zmienną niezależną, lecz funkcyą pewnéj zmiennéj niezależnéj z, pochodna wyrażoną by była przez

(3) $$\frac{d\log x}{dz} = \frac{\log e}{x}\frac{dx}{dz}$$

(4) $$\frac{d.lx}{dz} = \frac{1}{x}\frac{dx}{dz}.$$

Weźmy jedną z funkcyj trygonometrycznych czyli kątowych.

WSTAWA. Niech będzie

$$y = \text{wst}\, x,$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcyą zmiennéj niezależnéj. Używając zwykłego znakowania :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)$$

czyli

$$\Delta y = \text{wst}\,(x + \Delta x) - \text{wet}\, x = 2\,\text{wst}\,\frac{\Delta x}{2}\,\text{dos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ztąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{wst}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\text{dos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

przechodząc do granic i zważywszy, że gdy Δx zdąża do zera :

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},\quad \text{gr}\,\frac{\text{wst}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,\quad \text{gr}\,\text{dos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \text{dos}\, x$$

otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \text{dos}\, x \quad \text{lub} \quad dy = \text{dos}\, x\, dx\,;$$

a że $\text{dos}\, x = \text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{wst}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, więc powyższe wyrażenie można napisać

$$d.\text{wst}\, x = \text{wst}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx.$$

Różniczka wstawy równa się dostawie pomnożonéj przez różniczkę łuku; a uważając x za zmienną niezależną, *pochodna wstawy względem łuku równa się dostawie, lub wstawie łuku zwiększonego o* $\frac{\pi}{2}$.

Nakoniec, weźmy jedną z funkcyj kołowych.

ŁUK WST x. Niech będzie

$$y = \text{łuk wst}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcyą zmiennéj niezależnéj; ztąd

$$x = \text{wst}\, y$$

a zatém

$$dx = \text{dos}\, y\; dy = \sqrt{1 - x^2}\, dy$$

czyli

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{lub} \quad d\text{łuk wst}\, x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

znak pierwiastku wziąść należy ten sam, co znak dos y, to jest odpowiadającéj wartości zmiennéj x, czyli wstawie danéj.

Podobnie znaleźć można różniczki i innych funkcyj kołowych.

IX

ROZNICZKOWANIE FUNKCYJ ZŁOŻONYCH I NIEWYRAŹNYCH JEDNÉJ ZMIENNÉJ NIEZALEŻNÉJ.

Znając rożniczki funkcyj prostych, za pomocą twierdzenia na różniczkowanie funkcyj funkcyj, z łatwością możemy różniczkować wszelkie funkcye znane, złożone z funkcyj zasadniczych, których otrzymaliśmy różniczki i pochodne. Najłatwiéj jest postępować według jednego z dwóch następujących sposobow:

1° *Różniczkowanie przez podstawienie.*

Różniczkowanie za pomocą *podstawienia* polega na tém, że funkcyę daną uważamy jako złożoną z kilku funkcyj prostszych, i otrzymujemy jéj rożniczkę wyrażoną przez różniczki tych funkcyj prostszych. Każda z tych ostatnich funkcyj może być znów złożona z kilku funkcyj jeszcze prostszych i różniczka jéj wyrażoną przez różniczki tych ostatnich i t. d. aż ostatecznie działanie sprowadzoném zostaje do różniczek funkcyj zasadniczych znanych, które podstawione w poprzednie i t. d. dadzą na wypadek różniczkę funkcyi danéj, wyrażoną przez różniczkę zmiennéj niezależnéj, pomnożoną przez pewną funkcyę zmiennéj niezależnéj.

2° *Różniczkowanie częściowe.*

Niech będzie funkcya ciągła

(1) $$y = F(u, v)$$

dwóch funkcyj ciągłych u i v zmiennéj niezależnéj x:

(2) $$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x).$$

Pan Folkierski używając częścią zwykłego, częścią na nowo przybranego znakowania otrzymuje za pomocą ścisłego rozumowania, na pochodną funkcyi y względem zmiennéj niezależnéj x wyrażenie równie jasne jak proste następujące:

(3) $$\frac{dy}{dx} = F_u(u, v)\frac{du}{dx} + F_v(u, v)\frac{dv}{dx}$$

pochoana funkcyi złożonéj z dwóch fnnkcyj, równa się summie iloczynów pochodnych częściowych względem *każdéj z funkcyj składających, przez pochodną odpowiedniéj funkcyi składającéj względem zmiennéj niezależnéj.*

Różniczkę funkcyi złożonéj otrzymamy mnożąc przez dx

$$dy = F'_u(u, v)\,du + F'_v(u, v)\,dv \tag{4}$$

gdzie $F'_u(u, v)du$, $F'_v(u, v)dv$ są różniczkami funkcyi danéj otrzymanemi uważając kolejno jedną z funkcyj składających *za stałą*.

Pochodne częściowe oznaczać będziemy w następujący sposób :

$$F'_u(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$F'_v(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v}$$

mamy zatém

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv. \tag{5}$$

Ile razy używać będziemy znaku ∂ uważać będziemy, że różniczkując funkcyę złożoną uważamy jedną tylko funkcyę składającą za zmienną, inne za stałe.

Iloczyny $\frac{\partial y}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial v}dv.$, pochodnéj częściowéj, względem jednéj ze zmiennych u, v przez różniczkę téjże zmiennéj, nazywamy *różniczkami częściowemi.*

Twierdzenie zawarte w równaniu (5) rozciągnąć można z łatwością do funkcyj złożonych z ilukolwiek funkcyj. Niech będzie funkcya

$$y = F(u, v, w \ldots z)$$

gdzie $u, v, w \ldots z$ są funkcyami zmiennéj niezależnéj. P. Folkierski ściśle rozumując otrzymuje

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots + \frac{\partial y}{dz} dz \tag{6}$$

gdzie $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \ldots \frac{\partial y}{\partial z}$, wyrażają pochodne częściowe, funkcyi y względem $u, v, w \ldots z$; czyli $\frac{\partial y}{\partial u}du$, $\frac{\partial y}{\partial v}dv$, $\frac{\partial y}{\partial w}dw \ldots \frac{\partial y}{\partial z}dz$ różniczki funkcyi y otrzymane, uważając kolejno jedną z funkcyi u, v, $w \ldots z$ za zmienną, a pozostałe za stałe. Możemy więc wysłowić :

TWIERDZENIE. *Różniczka funkcyi złożonéj z ilukolwiek funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, równa się summie różniczek częściowych otrzymanych, uważając kolejno jedną z funkcyj składających jako zmienną, pozostające jako stałe.*

W wyrażeniu (6) różniczki dy funkcyi złożonéj, zmienna niezależna x wcale się nie znajduje wyraźnie. Biorąc pochodnę, dość jest podzielić różniczkę tę (6) przez różniczkę dx zmiennéj niezależnéj :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{7}$$

Lecz wyrażenie (6) jest ogólniejszém, bo zamiast zmiennéj niezależnéj x możemy z łatwością podstawić inną zmienną niezależną naprzykład t; tak jeżeli

$$x = f(t)$$

zastąpić możemy wszędzie x przez t w funkcyach $u, v, w, \ldots z$, a zawsze mieć będziemy równanie (6) z którego otrzymamy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Przypuściliśmy powyżéj, że funkcya x jest funkcyą złożoną z funkcyj $u, v, w \ldots$ zmiennéj niezależnéj x, lecz że zmienna niezależna x nie wchodzi wyraźnie w skład téj funkcyi. Lecz gdyby zmienna ta wchodziła nawet wyraźnie w skład funkcyi y naprzykład, gdybyśmy mieli

$$y = \mathrm{F}(u, v, x)$$

wzór ogólny (6) nie przedstawia wyjątku; dość jest założyć jedną z funkcyi składających równą saméj zmiennéj niezależnéj, co nam da

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial x}dx.$$

Różniczkowanie funkcyj niewyraźnych.

Funkcya niewyraźna jednéj zmiennéj niezależnéj może być daną albo przez jedno równanie o dwóch zmiennych

$$f(x, y) = 0$$

z którego wyciągnąwszy wartość na y wyrażone przez x, możnaby uczynić y funkcyą wyraźną zmiennéj niezależnéj x; albo w ogólności przez n zrównań

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) = 0$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) = 0$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n+1}$, z których można wyrugować $n-1$ zmiennych, otrzymać jedną z nich, naprzykład x_{n+1} wyrażoną przez jedną z pozostałych naprzykład x_1: to jest uczynić x_{n+1} funkcyą wyraźną zmiennéj niezależnéj x_1. W jednym i w drugim razie możnaby więc rozwiązując równania funkcyę niewyraźną uczynić wyraźną i różniczkować według powyższych prawideł; lecz można także otrzymać różniczki funkcyj nie rozwiązując równań, co jest tém dogodniéj, że równania szczególniéj przestępne nie dają się zwykle z łatwością rozwiązać.

Uwaga. Równanie

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

w ogólności nie wyznacza *ściśle* jako funkcyi zmiennéj niezależnéj x: bo związek wyrażony przez to równanie może być tego rodzaju, że jednéj i téj saméj wartości x odpowiada kilka wartości y. Naprzykład, jeżeli (1) jest równaniem algebraicznem 2go stopnia, każdéj wartości x odpowiadają dwie wartości y, które zarówno mogą być uważane jako funkcye x. Przypadki te rozbierzemy w dalszym ciągu : nateraz przypuścimy, że do związku (1) dodane zostają warunki określające ściśle y jako funkcyę x : naprzykład w razie równania 2^{go} stopnia że pierwiastek ma być branym zawsze ze znakiem $+$, lub zawsze ze znakiem $-$.

I. Weźmy zatém pod uwagę funkcyę daną przez równanie $f(x, y) = 0$ pomiędzy dwiema zmiennemi x i y. Równanie to daje nam y jako funkcyę x, więc

$$f(x, y)$$

może być uważane jako funkcya złożona, a różniczka jéj będzie [różniczkowanie częściowe]

$$d[f(x, y)] = \frac{\partial[f(x, y)]}{\partial x} dx + \frac{\partial[f(x, y)]}{\partial y} dy,$$

co zwykle przez skrócenie piszemy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy;$$

a że $f(x, y)$ jest stałą, to jest równą zeru, jéj różniczka zupełna df jest równą 0, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

równanie, które daje nam różniczkę

$$dy = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx$$

lub pochodnę

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

funkcyi y względem zmiennéj niezależnéj x.

II. Zanim przyjdziemy do przypadku ogólnego, weźmy jeszcze pod uwagę dwa równania

(1) $$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

pomiędzy trzema zmiennemi x, y, z. Ponieważ jedną z tych zmiennych, naprzykład y, możemy wyrugować, otrzymując jéj wartość z drugiego równania i podstawiając w pierwsze, które da nam w takim razie z wyrażone przez x; ponieważ moglibyśmy również wyrugowawszy z, otrzymać y wyrażone przez samo x : więc układ (1) przedstawia nam jedną tylko zmienną niezależną naprzykład x i dwie funkcye téj zmiennéj niezależnéj y i z. Uważając funkcye f i F jako złożone, prawidło (6) da nam, zakładając różniczki zupełne funkcyj tych stałych, bo równych zeru, równemi zeru :

(2) $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \cdot \end{cases}$$

Rozwiązując dwa równania (2) co do dy, dz, otrzymamy:

(3)
$$\begin{cases} dy = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}} dx \\ dz = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}} dx \end{cases}$$

a że pochodne częściowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, z łatwością otrzymać możemy z równań (1), więc wartości (3) wyznaczają nam zupełnie różniczki i pochodne funkcyj y i z względem zmiennéj niezależnéj x, przyczém niepotrzebujemy rozwiązywać równań (1).

III. Przejdźmy nakoniec do przypadku ogólnego. Niech będzie n równań

(1)
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n-1}) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi. Możemy, rozwiązując te równania, wyrazić kolejno każdą z n zmiennych naprzykład $x_2, x_3, \ldots x_{n+1}$, przez jedną z nich: x_1. Układ (1) przedstawia nam więc n funkcyi $x_2, x_3 \ldots x_{n+1}$ jednéj niezależnéj naprzykład x_1. Uważając więc funkcye $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ jako funkcye złożone, różniczkując według prawidła (6) i zakładając różniczki te funkcyj równych 0, równemi 0, otrzymamy:

(2)
$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_3}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_n}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Równania te stopnia 1^{go} w liczbie n pomiędzy $n+1$ nieznanemi: $dx_1, dx_2, dx_3 \ldots dx_n, dx_{n+1}$, wyznaczają nam w ogólności n z tych nieznanych różniczek funkcyj, przez jedną z nich uważaną jako różniczkę zmiennéj niezależnéj. Za zmienną niezależną możemy przyjąć którąkolwiek ze zmiennych $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}$, niezmieniając układu (2): pozostałe będą jéj funkcyami. Spółczynniki

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \cdots$$

otrzymamy z łatwością z równań (1). Działanie za pomocą którego z układu (1) otrzymujemy układ (2), nazywamy *różniczkowaniem równań* (1).

Nie wypisujemy tu wartości tych n nieznanych, które z równań (2) otrzymać możemy; dość jest powiedzieć że ogólna teorya n równań algebraicznych 1go stopnia o n nieznanych stosuje się do układu (2) : do niéj więc odsyłamy wraz z *niemożebnościami* i *niewyznaczeniami* jakie się przy tém rozwiązaniu w szczególnych razach przytrafić mogą.

Rugowanie stałéj dowolnéj. Równanie różniczkowe.

Równanie dane i równanie otrzymane przez różniczkowanie danego, przedstawiają układ dwóch równań, z których zwykłym spobem algebraicznym można wyrugować jedną ze *stałych :* równanie tak otrzymane zawierające zmienną niezależną, jéj funkcyę, różniczki, lub pochodnę funkcyi, lecz niezawierające wyrugowanéj stałéj nazywamy *równaniem różniczkowém.* Stałą wyrugowaną nazywamy *stałą dowolną*, bo jakąkolwiek nadamy jéj wartość niezależnie od zmiennych uważanych w równaniu daném, równanie różniczkowe będzie zawsze to samo.

Niech będzie równanie dane

$$f(x, y, \mathrm{C}) = 0 \tag{1}$$

pomiędzy zmiennemi x i y i stałą C. W tém równaniu jedna ze zmiennych naprzykład y jest funkcyą drugiéj x, którą moglibyśmy uczynić wyraźną rozwiązując równanie co do y; stałą zać C uważamy jakąkolwiek, byleby niezależną od x i y.

Różniczkując to równanie, otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

równanie zawierające stałą C pod znakiem funkcyjnym f, który piszemy przez skrócenie zamiast $f(x, y, \mathrm{C})$.

Wyciągając wartość na stałą C z jednego z dwóch równań (1) lub (2), i podstawiając w drugie, (lub rugując C pomiędzy (1) i (2) w inny jakikolwiekbądź sposób) otrzymamy równanie kształtu

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3}$$

które nazywamy *równaniem różniczkowém* równania (1)go. Równanie (1) nazywamy niekiedy równaniem *pierwotném* lub *całkowém* równania (3)go. Równanie pierwotne równania różniczkowego zawiera w ogólności pewną stałą C nieznajdującą się w tém ostatniém; stała ta *dowolna* może być jakąkolwiek, byle nie zależała od x i y, bo zawsze wyrugowawszy ją otrzymamy to samo równanie różniczkowe (3).

Równania jednoczesne. Niech będzie układ n równań

$$\left\{\begin{aligned} & f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0 \\ & f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n+1}$ (z których jedną naprzykład x_1 możemy uważać za zmienną niezależną, a pozostałe n jak : $x_2 \ldots x_n, x_{n+1}$ za n funkcyj téj zmiennéj niezależnéj) i n

stałemi dowolnemi $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$. Różniczkując układ (1) podług znanego prawidła otrzymamy:

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} + \frac{df_2}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0
\end{array}
\right.
$$

n równań, w których stałe dowolne $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ znajdują się pod znakami funkcyjnemi $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$. Rugując n stałych $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$, z $2n$ równań (1) i (2) (naprzykład wyciągając ich wartości z (1) i podstawiając w (2)) otrzymamy na wypadek w ogólności n równań kształtu:

$$F_1\left(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right) = 0$$

$$F_2\left(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right) = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_n\left(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right) = 0$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi i ich różniczkami lub pochodnemi, w które równania nie wchodzą już stałe $c_1, c_2, \ldots c_n$, wyrugowane. Równania te nazywają *równaniami różniczkowemi jednoczesnemi*.

X

POCHODNE I RÓŻNICZKI WYŻSZYCH RZĘDÓW FUNKCYJ JEDNÉJ ZMIENNÉJ NIEZALEŻNÉJ.

Rzędy pochodnych. Pochodna funkcyi pewnéj zmiennéj niezależnéj, jest sama funkcyą téj zmiennéj niezależnéj (w szczególnych tylko przypadkach może być zerem lub stałą); wziąwszy znów pochodnę téj ostatniéj funkcyi, otrzymamy *pochodnę drugiego rzędu* funkcyi danéj; wziąwszy pochodnę téj pochodnéj drugiego rzędu, otrzymamy *pochodnę trzeciego rzędu* funkcyi danéj, i t. d.: pochodna pochodnéj $m-1$ rzędu, będzie *pochodną* m*go* *rzędu funkcyi danéj*.

Niech będzie na przykład funkcya

$$y = x^m$$

pochodna jéj

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

jest funkcyą zmiennéj x; oznaczmy ją przez y':

$$y' = mx^{m-1}$$

Biorąc pochodną funkcyi y'

$$\frac{dy'}{dx} = m(m-1)\, x^{m-2} = y''$$

funkcya y'' będzie pochodną drugiego rzędu funkcyi y; podobnież

$$\frac{dy''}{dx} = m(m-1)(m-2)x^{m-3} = y'''$$

będzie pochodną trzeciego rzędu funkcyi y; w ogólności

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-u+1)x^{m-n} = y^{(n)}$$

będzie pochodną $n$tego rzędu funkcyi y.

Niech będzie w ogólności funkcya

$$y = f(x)$$

pochodnę pierwszego rzędu, oznaczyliśmy przez

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

pochodne wyższych rzędów oznaczać będziemy przez

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} \text{ pochodnę drugiego rzędu;}$$

$$f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx} \text{ pochodnę trzeciego rzędu;}$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} \text{ pochodnę } n\text{go rzędu.}$$

Nie potrzebujemy dodawać, że w ogólném wyrażeniu, znak (n) lub $(n-1)$ nad znakiem funkcyjnym oznacza nie wykładnik, lecz rzęd pochodnéj.

Rzędy różniczek. Różniczkę funkcyi

(1) $$y = f(x)$$

określiliśmy przez równanie

(2) $$dy = f'(x)\,dx$$

powiedzieliśmy nadto, że różniczką zmiennéj niezależnéj dx równą przyrostkowi nieskończenie małemu Δx uważamy zwykle jako niezależną od x.

Zastrzeżenie to, nie było jednak konieczném przy uważaniu różniczek pierwszego rzędu. Przy uważaniu pochodnych wyższych rzędów zakładać będziemy koniecznie różniczkę dx zmiennéj niezależnéj, niezależną od zmienéj niezależnéj x, to jest uważać ją będziemy jako *stałą*.

Różniczki zaś funkcyi dy podobnież jak pochodna $f'(x)$ są *zmiennemi*, bo są zmieniającemi się zależnie od (x).

Różniczkując więc wyrażenie (2), w którém uważamy dy i $f'(x)$ za zmienne, dx za stałe, zważywszy że z powyższego określenia

$$df'(x) = f''(x)\,dx$$

otrzymamy

$$d.dy = dxd\,[f'(x)] = dx\,[f''(x)\,dx]$$

czyli

$$d.dy = f''(x)\,dx^2$$

Wyrażenie

$$d.dy$$

nazywamy *różniczką drugiego rzędu* funkcyi y, i piszemy je przez skrócenie

$$d^2y$$

tak że

(3) $$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

W podobny sposób różniczkując wyrażenie (3), w którém dx^2 podobnie jak dx, ma być uważaném jako stała, otrzymamy

$$d(d^2y) = dx^2 d[f''(x)]$$

a że określenia

$$df''(x) = f'''(x)\,dx$$

więc

$$d(d^2y) = dx^2[f'''(x)\,dx]$$

czyli

(4) $$d^3y = f'''(x)\,dx^3$$

oznaczając przez skrócenie

$$d.d^2y = d^3y$$

nazywając wyrażenie to różniczką 3go rzędu funkcyi y.

W ogólności, różniczką n^{tego} rzędu będzie

$$d.d^{n-1}y = dx^{n-1}d[f^{(n-1)}(x)]$$

czyli

(5) $$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

co możemy napisać także

(6) $$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)\,.$$

Na oznaczenie pochodnych wyższych rzędów funkcyi używamy często znakowania (6); różniczkę w takim razie napiszemy

$$d^ny = \frac{d^ny}{dx^n}dx^n$$

co jest tożsamością z określenia, że pochodna n^{tego} rzędu jest ilorazem z różniczki n^{tego} rzędu funkcyi, przez $n^{tą}$ potęgę różniczki zmiennéj niezależnéj.

Dogodném jest często znakowanie Cauch'ego pochodnéj jedną głoską D, przyczém zmienna niezależna pisze się jako wskaźnik u dołu, a rząd pochodnéj jak wykładnik u góry : tak, że

$$\mathrm{D}_x y = \frac{dy}{dx} \quad \mathrm{D}^2{}_x y = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \mathrm{D}^n{}_x y = \frac{d^ny}{dx^n}$$

lub

$$D_x f(x) = f'(x), \quad D^2_x f(x) = f''(x), \ldots D^n_x f(x) = f^{(n)}(x).$$

Uwaga. Nie potrzebujemy dodawać, że

$$d^2y, \ d^3y, \ldots d^{n-1}y, \ d^ny \ldots$$

oznaczają nie potęgi 2ga, 3cia, ... nta różniczki dy, lecz są różniczkami rzędów 2go, 3go, ... ngo funkcyi y; potęgi oznaczać będziemy jak zwykle przez

$$dy^2, \ dy^3, \ dy^{n-1}, \ dy^n \ldots$$

tak, że

$$d^2y = d(dy), \ d^3y = d(d^2y) \ldots d^ny = d(d^{n-1}y)$$

zaś

$$dy^2 = (dy)^2, \ dy^3 = (dy)^3 \ldots dy^n = (dy)^n$$

co jest znów różném od różniczek pierwszego rzędu:

$$d(y^2) = 2ydy, \ d(y^3) = 3y^2dy \ldots d(y^n) = ny^{n-1}dy$$

potęgi 2éj, 3éj ... ntéj funkcyi y.

Nie należy również uważać

$$dx^2, \ dx^3 \ldots dx^n \ldots$$

za różniczki drugiego trzeciego ... ngo rzędu zmiennéj niezależnéj: bo różniczka pierwszego rzędu będąc *stałą*, to jest niezależną od x, jakeśmy to tyle razy powtarzali, pochodne jéj a więc i różniczki wyższych rzędów są wszystkie zerami:

$$d^2x = 0, \ d^3x = 0 \ldots d^nx = 0 \ldots$$

Twierdzenie że pochodna jest ilorazem różniczek funkcyi i zmiennéj niezależnéj, nie może mieć miejsca dla różniczek i pochodnych wyższych rzędów nad pierwszy.

Zamiast mówić: *pochodna* lub *różniczka pierwszego, drugiego ... ngo rzędu, mówią często: pochodna, różniczka pierwsza, druga ... nta*, przez skrócenia.

Jak ta uwaga p. Folkierskiego dla początkujących jest ważną nie potrzebujemy nad tém długo się zastanawiać.

Różniczki wyższych rzędów funkcyj zasadniczych.

Funkcye algebraiczne. Niech będzie funkcya

$$y = x^m$$

widzieliśmy już powyżéj, że

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = m(m-1)x^{m-2}$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

Ogólności tego wzoru, można z łatwością dowieść wiadomym sposobem, zakładając, że ma miejsce dla $n=k$, gdzie k oznacza całkowitą dodatną i dowodząc go dla $n=k+1$. Jakoż różniczkując pochodnę

$$\frac{d^k y}{dx^k}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k}$$

otrzymamy

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)(m-k)x^{m-(k+1)}$$

wypadek z podstawienia $n=k+1$ we wzorze danym.

Wzór więc ten zachodząc dla $k=1, k=2$, zachodzi dla $k=3, k=4\ldots k=n$, a więc jest ogólnym.

Jeżeli m jest całkowitém dodatném, m^{ta} pochodna będzie stałą, a zakładając $m=n$ w powyższém wyrażeniu otrzymamy:

$$\frac{d^m x^m}{dx^m} \text{ vu } \frac{d^n y}{dx^m}=m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1$$

następne pochodne będą więc *zerami*.

Podobnież, wielomian całkowity stopnia m^{go}

$$y=ax^m+bx^{m-1}+\ldots+px+q$$

ma $m^{tą}$ pochodnę stałą

$$\frac{d^m y}{dx^m}=am(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1$$

a następne równe *zeru*.

Funkcya logarytmowa. Niech będzie funkcya

$$y=\log x$$

Mamy

$$\frac{dy}{dx}=x^{-1}\log e$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-1.x^{-2}\log e$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=1.2x^{-3}\log e$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)x^{-n}\log e.$$

Jeżeli logarytm jest naturalnym

$$\frac{d^n \mathrm{l}.x}{dx^n}=(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)x^{-n}$$

Pochodne wszystkich rzędów funkcyi logarytmowéj są funkcyami algebraicznemi.

Funkcya wykładnicza. Niech będzie

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \mathrm{l}.a \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\mathrm{l}.2)^2 \ldots$$

a więc

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^x (\mathrm{l}.a)^n$$

Jeżeli $a = e$

$$\frac{d^ne^x}{dx^n} = e^x$$

Ogólności tych wzorów można z łatwością udowodnić jak powyżéj.

Wszystkie pochodne funkcyi wykładniczéj są takiemi samemi funkcyami wykładniczemi, pomnożonemi przez stałą potęgę całkowitą logarytmu naturalnego zasady.

Funkcye trygonometryczne. Niech będzie

$$y = \mathrm{wst}x \qquad y = \mathrm{dos}x$$

mamy, biorąc kolejno pochodne

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{dos}x \qquad \frac{dy}{dx} = -\mathrm{wst}x$$

$$\frac{dy^1}{dx^2} = -\mathrm{wst}x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{dos}x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\mathrm{dos}x \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{wst}x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \mathrm{wst}x \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = \mathrm{dos}x$$

Pochodne powtarzają się co cztery rzędy. Aby znaleźć wzór ogólny, weźmy pod uwagę funkcyę.

$$x = \mathrm{wst}(x + \alpha)$$

gdzie α jest stałą:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{dos}(x + \alpha) = \mathrm{wst}\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

tak, że pochodnę wstawy otrzymujemy dodając do łuku stałą $\frac{\pi}{2}$ i biorąc znów wstawę. Jakiekolwiek więc będzie n mamy zawsze

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{wst}\left(x + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Zakładając $\alpha = 0$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$ otrzymamy dwa wzory ogólne:

$$\frac{d^n\,\mathrm{wst}x}{dx^n} = \mathrm{wst}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^n\,\mathrm{dos}x}{dx^n} = \mathrm{dos}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Można więc powiedzieć że i funkcye trygonometryczne rodzą pochodne podobne im samym, własność podobna funkcyom wykładniczym.

Funkcye kołowe mają pierwsze zaraz pochodne algebraiczne, a zatém co do dalszych, podchodzą pod ogół funkcyj algebraicznych.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów funkcyj złożonych i niewyraźnych.

Umiejąc znaleźć pochodnę pierwszego rzędu funkcyi złożonéj, z łatwością przez n różniczkowań po sobie następujących otrzymać możemy pochodną n^{go} rzędu. Często jednak pożyteczném będzie postawienie ogólnego wzoru na pochodnę lub różniczkę n^{go} rzędu funkcyi złożonéj, wyrażoną przez pochodne lub różniczki funkcyj prostych składających

Pochodna iloczynu. Weźmy naprzód pod uwagę funkcyę

$$y = uv$$

będącą iloczynem dwóch funkcyj u i v zmiennéj niezależnéj x. Wiemy już że

$$dx = vdn + udv. \tag{1}$$

Różniczkując powtórnie otrzymamy

$$d^2y = d(vdu) + d(udv) = vd(du) + dvdu + ud(dv) + dudv$$

czyli

$$d^2y = vd^2u + 2dvdu + ud^2v. \tag{2}$$

Różniczkując jeszcze raz otrzymamy w podobny sposób

$$d^3y = vd^3u + dvd^2u + 2(dvd^2u + dud^2v) + ud^3v + dud^2v\,;$$

czyli

$$d^3y = vd^3u + 3dvd^2u + 3dud^2v + ud^3v\,. \tag{3}$$

Porównywając wzory (1), (2), (3), widzimy że w rozwinięciach różniczek funkcyi złożonéj, rzęd jednéj z funkcyj składających zmniejsza się o jedność, a rzęd drugiéj zwiększa się o jedność od wyrazu do wyrazu, spółczynniki liczebne są spółczynnikami wyrazów odpowiednich rozwinięciu dwumianu; naprowadzeni więc jesteśmy na napisanie wzoru ogólnego

$$d^ny = vd^nu + \frac{n}{1}dvd^{n-1}u + \frac{n(u-1)}{1.2}d^2vd^{n-2}u + \ldots \tag{4}$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \quad d^kvd^{n-k}u + \ldots + d^nv.u$$

Aby dowieść ogólności wzoru (4) dość jest dowieść, że jeżeli zachodzi dla rzędu n, zachodzi również dla rzędu $n+1$: wniesiemy następnie, że ponieważ zachodzi dla $n=3$ zrównania (3), zachodzi dla $n=4$, a więc i dla $n=5$ i t. d., jest więc ogólnym.

Różniczkując wzór (4), otrzymamy w saméj rzeczy:

$$d^{n+1}y = vd^{n+1}u + \frac{n}{1}dvd^nn + \frac{n(u-1)}{1.2}d^2vd^{n-1}u + \ldots + d^nvdu$$
$$+ dvd^nu + \frac{n}{1}d^2vd^{n-1}u + \ldots + \frac{n}{1}d^nvdu + d^{n+1}v.u$$

łącząc wyrazy podobne jak $\frac{n}{1} dvd^n u$ i $dvd^n u$, $\frac{n(n-1)}{1.2} d^2 v d^{n-1} u$ i $\frac{n}{1} d^2 v d^{n-1} u$ i t. d. otrzymamy:

$$d^{n+1}(uv) = vd^{n+1}u + \frac{n+1}{1} dvd^n u + \frac{u(n+1)}{1.2} d^k u d^{n-k} u + \ldots + d^{n+1} v.u$$

wzór, któren otrzymalibyśmy byli wprost z (4), podstawiając za n wartość $n+1$. Wzór więc (4) jest ogólnym.

Wzór (4) można napisać *symbolicznie* w następujący sposób:

$$(5) \qquad d^n(uv) = (du + dv)^{(n)}$$

uważając, że w rozwinięciu $n^{\text{téj}}$ potęgi dwumianu

$$(du + dv)^n = 1.du^n + \frac{n}{1} dvdu^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} dv^2 du^{n-2} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} dv^k dn^{n-k} + \ldots + dv^n.1$$

wszędzie zamiast wykładników różniczek du i dv pisać należy wskaźniki rzędów różniczkowania; w pierwszym zaś wyrazie, zastąpić 1, to jest potęgę 0 różniczki dv, przez v, w ostatnim potęgę 0 różniczki du przez u, przyjmując że różniczką rzędu 0 funkcyi jest sama funkcya, co jest usprawiedliwioném.

W ogólności P. Folkierski ściśle dowodzi, że różniczka iloczynu ilukolwiek czynników $u, v, w \ldots z$ będących funkcyami jednéj zmiennéj niezależnéj x, może być przedstawioną za pomocą wzoru *symbolicznego*.

$$(6) \qquad d^n(nvw \ldots z) = (du + dv + dw + \ldots + dz)^{(n)}$$

różniącego się od rozwinięcia $n^{\text{téj}}$ potęgi summy różniczek tém, że wszędzie zamiast potęg odpowiednich różniczek, piszemy wskaźniki rzędów różniczkowania i że zastępujemy potęgę zero téj różniczki która nie znajduje się w pewnym wyrazie czyli jedność, przez odpowiednią funkcyę.

Różniczkowanie częściowe wyższych rzędów.

TWIERDZENIE. *Oznaczmy przez $f(u, v)$ funkcyę dwóch funkcyj u i v zmiennéj niezależnéj x, przez $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ pochodne częściowe funkcyi $f(u, v)$ względem u i v: powiadam, że pochodna częściowa wyrażenia $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$ względem v. równa się pochodnéj częściowéj wyrażenia $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$ względem u; to jest, że*

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]}{\partial v} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f(n,v)}{\partial v}\right]}{\partial u}$$

byleby

$$f(u, v), \quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$

były funkcyami ciągłemi zmiennych u i v.

To twierdzenie P. Folkierski ściśle uzasadnia.

Pochodne te drugiego rzędu oznaczamy przez skrócenie przez $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$: twierdzenie poprzedzające zawartém będzie w równości

$$\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v \partial u}$$

która wyraża że *porządek różniczkowania częściowego nie wpływa na wartość pochodnéj częściowéj.*

Twierdzenie to, które z łatwością uogólnić można do funkcyi złożonéj z ilukolwiek funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, daje nam wyrażenia pochodnych częściowych wyższych rzędów funkcyj złożonych.

Niech będzie funkcya

$$y = f(u, v, w \ldots z) \tag{1}$$

złożona z m funkcyj $u, v, w \ldots z$ zmiennéj niezależnéj x. Ponieważ możemy brać pochodne częściowe téj funkcyi względem każdéj ze zmiennych $u, v, w \ldots z$, otrzymamy m pochodnych pierwszego rzędu

$$\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \cdots \frac{\partial y}{\partial z}$$

Każda z tych pochodnych jest w ogólności funkcyą wszystkich zmiennych $u, v\, w \ldots z$, każda więc miałaby znów m pochodnych częściowych, czyli mielibyśmy razem m^2 pochodnych drugiego rzędu. Lecz ponieważ porządek różniczkowania częściowego nie wpływa na wartość pochodnych, właściwie będziemy mieli tylko tyle pochodnych częściowych drugiego rzędu, ile możemy uczynić zestawień z m przedmiotów dwa po dwa, (wraz z temi, które otrzymujemy podstawiając jeden dwa razy) to jest

$$\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m^2 - m + 2m}{2} = \frac{m^2 + m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Pochodne te oznaczać będziemy jak następuje

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}, \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} \\
 & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}, \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z} \\
 & & \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}, \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial w \partial z} \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\
 & & & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}.
\end{array}$$

W podobny sposób, różniczkując częściowo pochodne drugiego rzędu, otrzymamy

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3}$$

pochodnych częściowych trzeciego rzędu, które oznaczymy przez

$$\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}, \frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}, \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v \partial w} \quad \text{i t. d.}$$

W ogólności: liczba pochodnych częściowych n^{go} rzędu funkcyi złożonéj z m funkcyj, będzie

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Wyrażeniem ogólném jednéj z pochodnych częściowych n^{tego} rzędu, będzie

$$\frac{\partial^n y}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma \ldots \partial z^\mu}$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ są liczbami całkowitemi (niektóre z nich mogą być rownemi 0), których summa równa się n i z których każda oznacza liczbę różniczkowań częściowych dokonanych względem odpowiedniéj zmiennéj.

Wyrażenia różniczek zupełnych wyższych rzędów funkcyj złożonych, przez różniczki i pochodne częściowe funkcyj składających. Niech będzie funkcya złożona

$$y = f(u, v, w \ldots z)$$

z funkcyj $u, v, w \ldots z$ zmiennéj niezależnéj x.

Wiemy że

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}dz. \tag{1}$$

Różniczkując każdy wyraz tego wyrażenia jako iloczyn, otrzymamy:

$$\begin{aligned} d^2y = {} & d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv + d\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)dw + \ldots + d\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)dz \\ & + \frac{\partial y}{\partial u}d^2u + \frac{\partial y}{\partial v}d^2v + \frac{\partial y}{\partial w}d^2w + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}d^2z. \end{aligned} \tag{2}$$

Stosując do $\frac{dy}{du}, \frac{dy}{dv} \ldots \frac{dy}{dz}$ które są funkcyami $u, v\ w \ldots z$, prawidło (1) różniczkowania częściowego, znajdziemy

$$\left\{\begin{aligned} d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}dv + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}dw + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}dz \\ d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}du + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}dw + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z}dz \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}du + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z}dv + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}dw + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}dz \end{aligned}\right. \tag{3}$$

a podstawiając te wartości w (2), otrzymamy wartość różniczki częściowéj drugiego rzędu d^2y funkcyi złożonéj y, następująca:

$$\left\{\begin{aligned} d^2y = {} & \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}dudw + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}dudw + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}dudz\right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}dvdw + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z}dvdz + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}dz^2\right) \\ & + \frac{\partial y}{\partial u}d^2u + \frac{\partial y}{\partial v}d^2v + \frac{\partial y}{\partial w}d^2w + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}d^2z. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

W podobny sposób otrzymać można różniczki wyższych rzędów d^3y, d^4y, ...; lecz wzory stają się coraz dłuższymi i w praktyce zwykle daleko łatwiéj postępować wprost, otrzymując naprzód wyrażenie *różniczki zupełnéj pierwszego rzędu* jako funkcyę zmiennych danych (podstawiając za pochodne częściowe ich wartości); następnie różniczkując tak otrzymane wyrażenie zwykłym sposobem, utworzyć *różniczkę drugą* w funkcyi zmiennych danych; z różniczki drugiéj różniczkę trzecią ... z różniczki $(n-1)^{téj}$ różniczkę $n^{tą}$.

Pochodne: drugą, trzecią ... funkcyi y względem zmiennéj niezależnéj x otrzymamy, dzieląc różniczkę zupełną drugą, trzecią, ... przez potęgę drugą, trzecią, ... przyrostku stałego dx zmiennéj niezależnéj x.

Uwaga. Gdyby funkcye składające $u, v, w \ldots z$ były wszystkie funkcyami linijnemi zmiennéj niezależnéj x:

$$u = a_1 x + b_1, \quad v = a_2 x + b_2, \quad w = a_3 x + b_3, \ldots z = a_m x + b_m$$

mielibyśmy

$$d^2u = 0 \quad d^2v = 0 \quad d^2w = 0 \ldots d^2z = 0$$

a wzór (4) stałby się

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial y^2}{\partial u \partial w} dudv + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} dudz$$
$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z} dvdz$$
$$+ \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz^2;$$

wyrażenie, które przedstawić możemy symbolicznie:

$$d^2y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z} dz\right)^{(2)} = (dy)^{(2)}$$

rozwijając w wyrażeniu (1) różniczki pierwszego rzędu jak kwadrat i zastępując wykładniki przez wskaźniki rzędów różniczkowania.

Prawidło to uogólnić można dla różniczki jakiegokolwiek rzędu:

Jeżeli funkcye $u, v, w \ldots z$ składające funkcyę

$$y = f(u, v, \ldots z)$$

są funkcyami linijnemi zmiennéj niezależnéj x, powiadam że

$$d^n y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z} dz\right)^{(n)} = (dy)^{(n)}$$

byleby rozwijając nawias jak $n^{tą}$ potęgę, zastępować wszędzie wykładniki przez wskaźniki rzędów różniczkowania: to jest iloczyny

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{\beta} \cdots \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\mu}$$

przez pochodne częściowe

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots+\mu} y}{\partial u^{\alpha} \partial v^{\beta} \dots \partial z^{\mu}}$$

Ogólności tego twierdzenia udowodnić można z łatwością, przypuszczając że zachodzi dla rzędu n i dowodząc że zachodzi również dla rzędu $n+1$: jak powyżéj.

Różniczki wyższych rzędów funkcyj niewyraźnych. Weźmy naprzód pod uwagę funkcyę jednéj zmiennéj niezależnéj, wyrażoną przez równanie

(1) $$f(x, y) = 0$$

które daje y jako funkcyę zmiennéj niezależnéj x. Uważając funkcyę tę jako funkcyę złożoną i zakładając różniczki zupełne téj funkcyi mającéj wartość stałą równą zero, równemi zeru, otrzymamy uważając dx za stałą, dy i pochodne częściowe za zmienne :

(2) $$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \\ & \left(\frac{\partial x^2}{\partial^2 f} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\right) + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y = 0 \\ & \left(\frac{\partial x^3}{\partial^3 f} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3\right) \\ & \qquad + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^9} dy\right) d^2y + \frac{\partial f}{\partial y} d^3y = 0 \\ & \;.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \end{aligned}\right.$$

Pierwsze z tych równań daje nam wartość pierwszéj różniczki dy podstawiwszy wartość tę w równanie drugie, otrzymamy z niego wartość drugiéj różniczki d^2y; podstawiwszy tą i poprzednią wartość w równanie trzecie otrzymamy z niego wartość trzeciéj różniczki d^3y i t. d. Różniczki te wyrażonemi są przez pochodne częściowe różnych rzędów funkcyi $f(x, y)$ które to pochodne z równania (1) z łatwością, różniczkując, otrzymanemi być mogą.

Mając różniczki, mamy od razu pochodne dzieląc przez odpowiednią potęgę dx :

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Weźmy teraz przykład ogólny n równań

(1) $$\left\{\begin{aligned} & f_1(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ & f_2(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ & \quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ & f_n(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}) = 0 \end{aligned}\right.$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi. Z tych równań moglibyśmy w ogólności wyrugować $n-1$ zmiennych czyli wyrazić wszystkie zmienne przez jedną z nich. Mamy więc tu jedną zmienną niezależną (którąkolwiek z $x_1, x_2 \dots x_{n+1}$); i n funkcyi téj zmiennéj niezależnéj (pozostałe z $x_1 \dots x_{n+1}$); idzie nam o wyznaczenie różniczek i pochodnych różnych rzędow tych funkcyj.

Różniczki pierwszego rzędu w liczbie n są wyznaczone jakeśmy widzieli za pomocą n równań

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}=0\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}=0 \end{cases}$$

pierwszego stopnia co do $dx_1, dx_2, \ldots dx_n, dx_{n+1}$, które wyznaczą n z tych różniczek przez jedną uważaną jako różniczkę zmiennéj niezależnéj. Pochodne częściowe funkcyj $f_1, f_2, \ldots f_n$ otrzymamy z łatwością przez różniczkowanie równań (1).

Różniczkując układ (2) otrzymamy

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}dx_1^2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}d^2x+\ldots\right)=0\\ \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}dx_1^2+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}d^2x+\ldots\right)=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2}dx_1^2+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots\right)=0 \end{cases}$$

n równań pierwszego stopnia co do różniczek drugiego rzędu $d^2x_1, d^2x_2 \ldots d^2x_{n+1}$ w liczbie $n+1$. Lecz różniczka drugiego rzędu zmiennéj niezależnéj jest równa 0 (jeżeli naprzykład x_1 obierzemy za zmienną niezależną, założyć należy $d^2x_1=0$), bo różniczka jéj pierwszego rzędu jest stałą: mamy więc n równań o n nieznanych rożniczkach drugiego rzędu funkcyj: różniczki te z równań powyższych otrzymać możemy, podstawiając w nich różniczki pierwszego rzędu otrzymane z równań (2), i pochodne otrzymane przez różniczkowanie równań (1).

W podobny sposób otrzymać można różniczki i pochodne 3^{go}, 4^{go} ... rzędu: różniczkując równania (3) i t. d.

Rugowanie stałych dowolnych. Równania różniczkowe wyższych rzędów.

Niech będzie równanie

$$(1)\qquad f(x, y, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n)=0$$

zawierające dwie zmienne x i y, i n stałych: $c_1 \ldots c_n$.

Różniczkując n razy to równanie, otrzymamy n równań

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x dy}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0\\ \ldots\ldots \end{cases}$$

(podzieliwszy pierwsze przez dx, drugie przez dx^2 ..., aby zamiast różniczek wprowadzić pochodne) pomiędzy pochodnemi funkcyi y względem zmiennéj niezależnéj x od pierwszego aż do n^{go} rzędu włącznie i pochodnemi częściowemi funkcyi f względem x i y od pierwszego aż do n^{go} rzędu włącznie, pochodnemi, które zawierają w ogólności stałe $c_1, c_2, \ldots c_n$. Rugując te n stałych pomiędzy $n+1$ równaniami (1) i (2), otrzymamy równanie

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

pomiędzy zmienną niezależną x, funkcyą y i pochodnemi od pierwszego aż do n^{go} rzędu włącznie funkcyi względem zmiennéj niezależnéj. Równanie to, niezawierające wyrugowanych stałych, nazywamy *równaniem różniczkowém n^{go} rzędu*, którego równanie (1) jest równaniem pierwotném.

XI

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCYJ WIELU ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH.

Określenia. — Pochodne i różniczki częściowe funkcyj wielu zmiennych niazależnych. — Różniczka zupełna i jéj własności. — Pochodne częściowe i różniczki zupełne wyższych rzędów. — Funkcye złożone i niewyraźne wielu zmiennych niezależnych. — Rugowanie funkcyj dowolnych. — Równania różniczkowe o pochodnych częściowych. — Własności funkcyj jednorodnych.

Wszystkie te twierdzenia i własności Rachunku różniczkowego ściśle, jasno i wyborną polszczyzną pan Folkierski starannie udowodnił.

ZAMIANA ZMIENNYCH.

Zamiana zmiennych dla funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj. — Zamiana zmiennéj niezależnéj. — Zamiana wszystkich zmiennych. — Zamiana zmiennych dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych. — Przekształcenie Legendre'a.

Ścisłość, jasność i często naturalna wielkich pisarzy narodowych prostota są główne cechy znamienujące dobitnie piękne dowodzenia pana Folkierskiego. Tym sposobem bez przerwy i niejako jednym ciągiem pióra młody nasz autor przeprowadził dokładnie cały swój Rachunek różniczkowy. Rozliczne i wybornie dobrane na końcu każdego rozdziału umieszczone całkiem rozwiązane przykłady i podane do rozwiązania ćwiczenia dopełniają i stanowczo wykazują niezmierną dla młodzieży kształcącéj się pożyteczność elementarnego dzieła pana Folkierskiego.

XII

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO TEORYI FUNKCYJ.

WZÓR TAYLORA.

Dzieło Taylora pod tytułem *Methodus incrementorum* zawiera, obok bardzo pięknych zastosowań, nowy sposób przedstawienia analizy nieskończenie małych przywiązując ją do rachunku różnic skończonych. Tam to ogłosił on po raz pierwszy sławne swe twierdzenie które nosi jego imię, i którego prace największych geometrów ciągle odtąd podnosiły wziętość. Wszystkie szeregi dotąd znane są łatwemi powyższego twierdzenia wnioskami, i może ono przytém dostarczyć nieskończoną ilość jeszcze innych. Taylor jednak nie przytoczył żadnego swego wzoru zastosowania, i ta okoliczność jasno tłumaczy niewielką ważność jaką geometrowie zdają się na początku przywiązywać do jego odkrycia. Dziś nawet twierdzenie Taylora, zmienione w sposób nic nieznaczący, często bywa wytknięte pod imieniem twierdzenia Maclaurina, i było często cytowane jako należące do pomysłów Dalamberta, który, nie wiedząc o jego poprzedniém i bardzo już dawném ogłoszeniu, podał je jako nowe w ówczesnéj Encyklopedyi.

Taylor jest dalekim wreszcie od zupełnego ogarnienia rozległego znaczenia kwestyi; badanie warunków koniecznych żeby jego szereg był zbieżnym nie mogło się wyrobić jak tylko z wielkim trudem i powoli. Sławni geometrowie nie wahali się wprowadzić wiele głębokich spostrzeżeń do swych nowych wzoru Taylora dowodzeó wyjaśniających coraz lepiéj wszystkie dotyczące zbieżności szeregu przepisy, i oto dopiero niedawno Cauchy potrafił nakoniec zamknąć je pod pewne ogólne prawidło, które słusznie sam autor uważał jako jedno z najważniejszych swoich odkryć.

Wszyscy geometrowie jednomyślnie dziś się zgadzają uważać zbieżność szeregu jako warunek konieczny jego prawego użycia. Pierwsi wynalazcy téj wielkiéj teoryi podzielali to zdanie, co zdaje się wreszcie równie prostém jak naturalném. Szeregi których oni używali powinny były zawsze, podług nich, dawać wartość liczebną funkcyi przedstawionéj. Leibnitz występuje pierwszy z żądaniem wyraźném przepisów zbieżności.

Czytamy w liście przezeń do Hermanna adresowanym, 2 lipca 1705 roku:

« Nie żądam ja wcale aby poszukiwano wartości jakiegokolwiekbądź szeregu pod formą skończoną; takie zagadnienie przewyższałoby widocznie siły geometrów. Pragnąłbym jednak usilnie, ażeby wynaleziono sposób decydujący stanowczo czy wartość wyrażona przez pewien szereg jest możebna, to jest zbieżna, i to nieznając bynajmniéj pochodzenia szeregu. W rzeczy saméj, warunkiem jest koniecznym, w razie gdy szereg nieograniczony przedstawia ilość skończoną, żeby można było dowieść zbieżności tego szeregu, i żeby można było się zapewnić przedłużając go dostatecznie iż błąd popełniony może się stać mniejszym od pewnéj oznaczonéj ilości, tak małéj jak się podoba. »

Przez długi czas jednakże geometrowie, prawie bez wyjątku, przyjęli na tym punkcie doktrynę dosyć dziwną; niepoprzestając na zwykłych zastosowaniach dotyczących rozwinięć na szeregi w przypadkach prawych, to jest, gdy szeregi są zbieżne, mniemali za rzecz słuszną rozciągnąć te zastosowania bez restrykcyi. Sam nawet Euler w błąd powszechny wpadając długo się przy nim fatalnie utrzymywał.

Dopiero na początku tego wieku Poisson uwagę geometrów ku prawdzie i ścisłości skierował, pokazując do jakich wypadków może doprowadzić użycie szeregów rozbieżnych. Kilka słów ognistych i oburzeń energicznych Gaussa i Abla zarówno się przychyliły tak do umorzenia tego geometrycznego zgorszenia (skandalu) jak i do trwałego ustalenia zupełnéj potrzeby zbieżności, wyrzucając raz na zawsze z umiejętności błąd co, przywiązany do zasad, mógł zrodzić mnóstwo innych.

Prawidła dozwalające sądzić o zbieżności szeregu nabywają nowéj wziętości gdy ta zbieżność została uznaną za nieuchronnie potrzebną. Rozwiązanie zagadnienia w kilku przypadkach szczególnych jest tak dawne jak użycie szeregów; lecz całe i głębokie nad tym przedmiotem studyum nie zostało wykonane jak tylko daleko późniéj.

Możemy zacytować naprzód kilka przepisów prawie widocznych wskazanych przez Dalemberta, i dotyczących szeregów liczebnych, wyrażenie reszty szeregu Taylora przez Lagranża, studyum ważnego szeregu którego Gauss podał warunek zbieżności przywiązując doń przepisy pełne wdzięku, i nakoniec liczne metody, z pod których bardzo mało przypadków wyłamać się mogą, służące dla wyznaczenia zbieżności szeregów liczebnych złożonych z wyrazów dodatnych.

Do badań warunków zbieżności szeregów, możemy przyłączyć, wykład metod ułatwiających ich summowanie przybliżone w razie gdy szeregi są powoli zbieżne. Powszechnie są użyte *trzy* opierające się na zasadach bardzo różnych, i z których każda osobno wzięta, w pewnych przypadkach, będzie mogła się znaleźć daleko korzystniejszą aniżeli dwie inne. Jedna z tych metod należy się Stirlingowi, druga Eulerowi, a trzecią, co jest prawdziwie równie piękna jak wytworna, świeżo nam przedstawił p. Kummer.

Szereg Taylora, z przyczyny swego wielkiego uogólnienia, powinien był więcéj jak jakakolwiek inna praca zwrócić uwagę geometrów; wyrażenie reszty, kolejno otrzymanéj pod różnemi kształtami więcéj lub mniéj zastosowanemi do przypadków najznakomitszych które miano traktować, zdawało się, przed pięknemi pracami Cauchego, wydawać ostatnie słowo kwestyi uważanéj pod względem teoretycznym. Zgłębiając wypadek Taylora, byleby tylko nie spuszczać z uwagi punktu widzenia pod jakim się on umieścił, spostrzega się tam naprzód i dosyć łatwo uogólnienie zasady na któréj spoczywa Rachunek różniczkowy: wzrost nieskończenie mały jakiéjkolwiekbądź funkcyi, jeśli w rozwinięciu zaniedbamy nieskończenie małe rzędu wyższego nad pierwszy, jest proporcyonalny do wzrostu zmiennéj niezależnéj; wyjątki których możebność jest widoczna, ponieważ funkcya pozostaje nieoznaczoną, nie mogą nigdy zachodzić tylko dla pewnych wartości szczególnych zmiennéj niezależnéj i twierdzedzenie pozostaje dokładném w ogólności i dla wszelkiéj funkcyi ciągłéj. Jeśli się zajmiemy zgłębianiem kwestyi bliżéj, ograniczając się zawsze jednak do przypadku wzrostu nieskończenie małego, dostrzedz albo dowieść łatwo można, że przewyżka przyrostku funkcyi nad częścią co może się nazwać główną i proporcyonalną do przyrostku zmiennéj niezależnéj, stanie się koniecznie proporcyonalną do kwadratu tegoż przyrostku, byleśmy w rozwinięciu zaniedbali nieskończenie małe rzędu wyższego nad drugi; część główna która została zaniedbaną w tém drugiém przybliżeniu jest sama proporcyonalną do sześcianu z przyrostku zmiennéj niezależnéj, i tak daléj nieograniczenie; wyjątki możebne zachodzą, nie dla funkcyj szczególnych, gdyż twierdzenie jest następstwem koniecznem prawa ciągłości, lecz dla wartości szczególnych zmiennéj niezależnéj dla których ciągłość jest zerwaną.

Ten punkt widzenia bardzo ważny i bardzo świetny twierdzenia Taylora nie dawałby przecież o niém jak tylko niezupełną znajomość.

Cauchy miał honor zająć się pierwszy przywiązaniem téj kwestyi ważnéj do jéj prawdziwych zasad. Możebność lub niemożebność rozwinięcia pewnéj funkcyi podług wzoru Taylora może być rozeznaną niepotrzebując napróżno wynajdywać wyrazów szeregu, byleby funkcya mająca się rozwinąć była określoną za pomocą wartości rzetelnych i urojonych zmiennéj niezależnéj. To wprowadzenie ilości urojonych do kwestyi dla któréj ich teorya zdaje się naprzód zupełnie obcą jest jednym z największych postępów jaki analiza pod wpływem genialnych pojęć Cauchego zrobiła w tym wieku.

Wyrażenia urojone przedstawiają się jako następstwa konieczne najprostszych formuł Algebry; pierwiastki zrównań drugiego stopnia niepodobne mają formę $a + b\sqrt{-1}$, co także jest formą pierwiastków wszelkiego zrównonia algebraicznego, i w ogólności wypadków wynikłych z działań algebraicznych jakichkolwiek, wykonanych na takichże wyrażeniach. Te twierdzenia były przyjęte przez geometrów wprzód nim przystąpiono zająć się jasnym wykładem ich ścisłych dowodzeń. Euler umieścił je 1742, w *Miscelanea Berolinensia*, jakby już były mu dobrze natenczas znane. Wszakże dopiero w 1746 znajduje się pierwsze ich dowodzenie ogólne dane przez Dalemberta, dowodzenie niedostateczne, przynać należy, równie jak i te wszystkie co były dane aż do memoryału w którym Gauss rozbiera na nowo tę kwestyę słusznie ganiąc rozumowania przedstawione aż do czasu jego badań. Mało kwestyj wreszcie były częściéj traktowane niż ilości urojone. Gauss im poświęcił nie mniéj nad pięć memoryałów, i Cauchy, któremu często przyznawano pierwsze dowodzenie ściśle, samże do urojonych powrócił w kilkokrotnych powtórzeniach.

Nietylko działania algebraiczne wykonane na wyrażeniach urojonych dają na wypadek wyrażenia téjże formy co one same, lecz jeszcze logarytm wyrażenia urojonego przyjmuje nieskończoną ilość wartości, wszystkie formy $a + b\sqrt{-1}$, i potęga któréj wykładnik jest urojony może być podciągniętą pod tęż samą formę, do jakiéj każde wyrażenie urojone po wykonaniu na niém jakichkolwiek przekształceń algebraicznych zostaje zawsze przywiedzione. Jest to odkrycie ważne Eulera, przynoszące tém więcéj honoru jego przenikliwości, iż dyskussye Leibnitza i Bernoulli'ego nad tym przedmiotem témbardziéj jeszcze kwestyę podaną zaciemniły niewskazując żadnéj drogi do jéj rozwiązania. Euler rozproszył wszystkie te ciemności dając poznać wyrażenie linij trygonometrycznych za pomocą wyrażeń wykładniczych urojonych, zkąd wyprowadzono tyle pięknych następstw, wskazanych po większéj części przez niego samego. Eulerowi równie winniśmy szeregi wstawy i dostawy wielokrotności łuku w funkcyi potęg całkowitych wstawy lub dostawy tegoż łuku, i odwrotnie potęgi całkowite wstawy lub dostawy łuku rozwinięte na szereg którego wyrazy są wstawy lub dostawy wielokrotności tegoż łuku; wypadki które on daje poznać są poddane, w rzeczy saméj, pod pewne restrykcye zupełnie dlań nieznane, i geometrowie złudzeni swemi ideami o uogólnieniu formuł algebraicznych, przez długi czas wypadki Eulera nie posądzali bynajmniéj uległe jakimkolwiek restrykcyom. Poisson wskazał pierwszy sprzeczność jaką one przedstawiają, i któréj wyjaśnienie nie było dane bezpośrednio; lecz w matematyce formuły nigdy wzajemnie się nie przeczą, i jeśli się w téj nauce przedstawia jaki wypadek zdaniu powszechnemu przeciwny, można śmiało twierdzić że pod głębszą rozwagą cała ta trudność zupełnie zniknie. Poinssot pospieszył niebawem, w rzeczy saméj, w swym memoryale o przecięciach kątowych, dokładnie oznaczyć kierunek i warunki ścisłości tych różnych rozwinięć. Badanie zbieżności powyższych szeregów jest na nieszczęście całkiem w jego pracy zaniedbane, i było wykonane po raz pierwszy przez Abla, w jego ważnym memoryale dotyczącym własności przy rozwinięciu na szereg jakiéjkolwiek formy dwumianu.

Ten memoryał Abla sprowadza nas na nowo do teoryi funkcyj urojonych, od któréj nie oddaliliśmy się jak tylko na pozór mówiąc o szeregach trygonometrycznych. Sławny geometra norwegski bada tam, ze ścisłością dotąd bardzo rzadką w kwestyach tego rodzaju, szereg dwumianu, w którym przypuszcza dla liter w tém wyrażeniu położonych wartości urojone. Nie zamierza on sobie bynajmniéj przekonać się jedynie czy wzór Newtona pozostaje ścisłym i przedstawia jeszcze $(1 + x)^m$, gdy x i m są urojone. Takie podanie nie miałoby żadnego dokładnie oznaczonego sensu. Szereg, w rzeczy saméj, jest zupełnie oznaczonym gdy x i m są dane, i funkcya przyjmuje, podług definicyi, nieskończoną ilość wartości; która z nich jest ta co właściwie reprezentuje szereg? Abel rozwiązuje zupełnie kwestyę, przygotowując tym sposobem przez głębokie badanie jednego przypadku szczególnego trudnego i ważnego teoryę ogólną stworzoną nieco późniéj przez Cauchego, i która przybrała nagle taką wziętość, że musimy się nad tém zjawiskiem zastanowić szczególnie.

Aby zrozumieć doniosłość téj teoryi, potrzeba naprzód dokładnie sobie wyrobić ideę czystą stopnia uogólnienia zamkniętego w tém wyrażeniu: *funkcya urojona jakakolwiek*, i nie dać się obłąkać przez anologię bardzo zwodniczą, jaką funkcya podana przedstawia tą razą, z funkcyą rzetelną jakąkolwiek. Mamy ideę bardzo jasną stopnia nieoznaczenia jakie obejmuje to wyrażenie: *funkcya jakakolwiek zmiennéj rzetelnéj*. Tak się wyrażając rozumiemy że, dla wszelkiéj wartości zmiennéj niezależnéj można, wybrać dowolnie wartość funkcyi, ten wybór nie będąc ograniczony żadnym innym warunkiem jak tylko byleby funkcya była zobowiązaną dostarczyć ciągły szereg wartości przedstawiających punkta pewnéj krzywéj któréj postać pozostaję zupełnie dowolną. Analogia zniewala nas bardzo naturalnie uważać jakąkolwiek funkcyę urojoną jako uwikłaną pod równy stopień nieoznaczenia, mogącą przyjąć, dla pewnéj wartości danéj zmiennéj $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, część rzetelną i część urojoną, dowolne zarówno obiedwie, bez żadnych innych restrykcyj, prócz tych które wypływają z warunku ciągłości. Biorąc, jedném słowem, α, β za spółrzędne punktu mającego za trzecią spółrzędną część rzetelną wartości odpowiednéj funkcyi dowolnéj, należy wnosić niezwłocznie, że powierzchnia zakreślona tym punktem jest całkiem dowolną, jak funkcya co ją tworzy; lecz tak rozumując popełnilibyśmy błąd goromny. Warunek posiadania pochodnéj oznaczonéj równoważy w rzeczy saméj dwóm zrównaniom, co są przywiązane tak dobrze do części rzetelnéj jak i do części urojonéj funkcyi jakiéjkolwiek, i jakie to zrównania przypuszczać będziemy warunkom podanym zawsze zadość czyniące. Istnienie tych zrównań tłumaczy jakim sposobem funkcya któréj określenie nie jest dane, może mieć jednak własności bardzo dokładne, i przyznaje całą słuszność uzasadnionego bytu pięknych twierdzeń Cauchego, które bez tego byłyby całkiem niezrozumiałemi. Ograniczymy się w naszych poszukiwaniach na przytoczeniu jak łatwo powyższe rozumowania zastosowane do wartości nieskończonych albo źle oznaczonych funkcyi dają poznać téjże funkcyi granice na zewnątrz których jéj rozwinięcie jest niepodobném. Ta teorya jest témbardziéj ważną, iż Lagrange utrzymuje w swém sławném dziele że twierdzenie Taylora, nietylko niepowinno być uważane jako następstwo rachunku różniczkowego, lecz przeciwnie musi być wprost dowiedzione i powinno zawierać prawdziwe zasady tego rachunku, niezależne od wszelkiéj idei nieskończenie małéj albo granicy. Dowodzenie dane przez sławnego autora, pomimo powagi nakazującéj poszanowanie dla jego imienia, nie mogło być przez geometrów przyjęte, lecz nie należy mniéj podziwiać to zeznanie tak stanowcze, lubo nieusprawiedliwione, równie ważnéj jak świetnéj zasady, co ustalona w pół wieku późniéj na podstawach zupełnie różnych, powinna była nabyć jednocześnie stopień uogólnienia o którym stronnicy tych idej nie pomyśleli nawet natenczas. Widząc ile objaśnień delikatnych potrzeba nagromadzić na utkwienie znaczenia i granic twierdzenia Taylora, pojmujemy że owe twierdzenie ściśle się wiąże z prawdami przystępu zbyt trudnego aby można było zeń zrobić, jak tego sobie życzył Lagrange, kamień węgielny i niewzruszone fundamenta rozległego gmachu nowożytnéj umiejętności; jakkolwiekbądź elegancka i łatwa jest doktryna do jakiéj jesteśmy przywiedzeni zajmując na samym wstępie tak wysokie stanowisko, geometrowie nie mogą zapomnieć że zwięzłość dokładnych wysłowień i moc zupełna ścisłych dowodów są cechą główną umiejętności matematycznych; i jeśli się nie zważa bynajmniéj na chwilowe zaniedbanie tych przepisów, byleby tylko równie łatwo jak pospiesznie można było osiągnąć cel ważny, niepodobna nigdy okazać się zbyt surowym gdy idzie o położenie podstaw długiego łańcucha teoryj.

Po tych naszych, widocznie, długich i mozolnych, lecz zarazem, przyznać także należy, dokładnie historycznych i prawdziwie wielkie światło, na rozliczne przekształcenia w rozmaitych epokach twierdzenia Taylora, obficie rzucających badaniach, należy nam się zająć niezwłocznie krótkim rozbiorem niemniéj pięknych jak umiejętnych nad tym ważnym przedmiotem P. Folkierskiego poszukiwań.

O téj własnéj jego pracy, młody nasz autor, w swéj przedmowie tak się wyraża :

« Wzór Taylor'a, na którym cała część pierwsza zastosowań rachunku różniczkowego do *teoryi funkcyj* głównie się opiera, jest zwykle wyprowadzony w sposób naciągany, często niedokładny, lub za mało ogólny: jest to zwykle najsłabsza strona bardzo zresztą szacownych traktatów Rachunku Różniczkowego. Wyprowadziliśmy go *w sposób najbardziéj zbliżony do sposobu podanego przez wynalazcę*, udoskonalony tylko i uogólniony. »

Metoda Wynalazców (Méthode des Inventeurs) powszechnie w matematyce jest wysoko ceniona. W niéj to geometrowie zwykle czerpią obok idei wynalazców, te proste i zupełnie skończone kwestyj ważnych rozwiązania, jakie umiejętność, pomimo jéj ciągłych postępów, na prostsze i ogólniejsze trudno przekształcić podoła. Te uwagi widocznie zastosować się nie dadzą do wzoru Taylora, gdzie, jak wiemy, dowodzenie pierwotne (przez samegoż wynalazcę tego wzoru podane) nie ma zupełnéj matematycznéj ścisłości. W takiém położeniu P. Folkierski zostając łatwo zrozumiał, że przed rozwinięciem przyrostku funkcyi podług potęg zwiększających się przyrostku zmiennéj niezależnéj, należy mu koniecznie uprzednio przygotować wyraz dopełniający, czyli resztę rozwinięcia. Winniśmy także dodać; iż reszta, tylko co chwila, przez pisarza polskiego otrzymana w niczém się nie różni i ma kształt zupełny sławnéj *reszty Lagrange'a*, ale jest ona daleko inaczéj i bardzo naturalnie *z przyrostków* *skończonych funkcyi* wyprowadzoną. Po tém dopiero młody nasz matematyk wyprowadza wzór Taylor'a *w sposób najbardziéj zbliżony do sposobu podanego przez wynalazcę*, to jest„ rozwija naprzód funkcyę $f(x+h)$, i niezwłocznie na końcu rozwiniętéj funkcyi przyłącza powyższą resztę. Tak postępując otrzymamy :

$$(1)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

Wzór ten znanym jest pod nazwiskiem *wzoru Taylor'a*; wyrażenie

$$(2)\quad R_n=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

nazywamy *Resztą* lub *wyrazem dopełniającym* rozwinięcia.

Po tém pierwszém, przyznać należy, zbyt lekkiém i prawie nic nieznaczącém ulepszeniu przystąpił P. Folkierski niezwłocznie do swych *ważnych uwag nad wzorem Taylora*. Nie należy sądzić żeby wzór Taylora mógł zawsze stać się szeregiem : gdybyśmy zamiast napisać po $(n-1)^{ym}$ wyrazie *resztę* w rozwinięciu (1) chcieli prowadzić rozwinięcie to do nieskończoności, otrzymalibyśmy szereg niekoniecznie zbieżny, a choćby był zbieżnym, niekoniecznie równy $f(x+h)$: tak że równanie (1) mogłoby się stać nieprawdziwém. Z tych pięknych dyskussyj wyprowadza nasz znakomity pisarz warunki konieczne i dostateczne rozwinięcia do nieskończoności, zbieżności i granicy szeregu Taylora. Wszystkie te warunki są zamknięte w twierdzeniu ogólném następującém :

Szereg Taylor'a. *Jeżeli tak funkcya dana, jak wszystkie jéj pochodne są ciągłemi i nie stają się nieskończenie wielkiemi w granicach pomiędzy jakiemi zmieniamy zmienną niezależną; jeżeli nadto granicą wyrazu dopełniającego wzoru Taylor'a jest zero, kiedy powiększamy nieognaniczenie liczbę wyrazów rozwinięcia: rozwinięcie to jest szeregiem zbieżnym, postępującym podług potęg zwiększających się przyrostku zmiennéj niezależnéj, a granicą summy tego szeregu jest wartość funkcyi odpowiadająca uważanemu przyrostkowi zmiennéj niezależnéj.*

Jeżeli w rozwinięciu

$$(3)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

tak funkcya $f(x)$ jak i jéj pochodne $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)\ldots$ do nieskończoności są i pozostają ciągłemi, gdy zmieniamy x pomiędzy granicami x_0 i X; jeżeli nadto

$$(4)\quad \mathrm{gr}\,R_n=\mathrm{gr}\,\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)=0$$

gdy n zwiększa się nieograniczenie, powiadam że rozwinięcie to przedłużone do nieskończoności, będzie szeregiem zbieżnym którego granicą jest : $f(x+h)$; to jest że mieć będziemy

$$(5)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+\ldots$$

W rzeczy saméj, z założenia wiemy że dla wszelkiego n, pochodna n^{ta} nie przestaje być ciągłą skończoną: możemy więc wziąść tyle wyrazów rozwinięcia, ile nam się podoba. Lecz różnica pomiędzy $f(x+h)$ a summą n wyrazów rozwinięcia, którą nazwaliśmy resztą R_n coraz się zmniejsza i może stać się tak małą jak się podoba biorąc n dość wielkiém': summa więc n wyrazów rozwinięcia, gdy n zwiększa się nieograniczenie, zbliża się nieograniczenie do $f(x+h)$, ma więc granicę skończoną $f(x+h)$; rozwinięcie zatém jest szeregiem zbieżnym. Szereg ten (5) nazywamy *szeregiem Taylora*; jest on wzorem Taylora rozwiniętym do nieskończoności, i wymaga więcéj warunków niż wzór (I): bo gdy ten ostatni ogranicza warunki ciągłości i wartości skończonych do pewnéj tylko liczby pierwszych pochodnych, szereg Taylora wymaga tyle warunków dla wszystkich pochodnych.

Oto jest dowodzenie ścisłe, proste i ogólne szeregu Taylora.

Parę uwag granicy reszty szeregu Taylora dotyczących. — Parę przypadków szczególnych ogólnego twierdzenia Taylora na uwagę zasługujących. — Piękne wyrażenie Cauch'ego na resztę wzoru Taylora

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\theta h). —$$

nakoniec, rozwinięcie przyrostku nieskończenie małego funkcyi, podług różniczek rzędów zwiększających się téjże funkcyi. — Wszystkie te kwestye, powyżéj przytoczone, razem zebrane posłużyły P. Folkierskiemu na wydoskonalenie już zogólnionego wzoru Taylor'a.

Jest jeszcze inne, równie świetne jak znakomite, wyrażenie wyrazu dopełniającego, czyli Reszty wzoru Taylor'a. Ta reszta zwykle się wyraża

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\ldots n(p+1)} \varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)].$$

Biorąc $X - x = h$, formuła na początku podana staje się po tém podstawieniu istotném rozwinięciem szeregu Taylor'a

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n(p+1)}\varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

To nowe wyrażenie reszty wzoru Taylor'a jednocześnie przez p. Schlömilch'a i przez p. Roche'a od lat kilkunastu odkryte, niebawem przez geometrów do swych traktatów specyalnych wprowadzone, dziś nareszcie, powszechnie w nowoczesnéj analizie uprzejmie przyjęte i wysoko cenione, każdodziennie coraz większéj wziętości nabiera. Dobrzeby zatém było, żeby P. Folkierski to piękne dwóch znakomitych geometrów odkrycie do nowego wydania swego Rachunku różniczkowego wprowadzić nie omieszkał. Należałoby równie, przy powtórném wydaniu dzieła P. Folkierskiego, starannie rozwinąć genialne dowodzenie szeregu Taylor'a niedawno wynalezione przez p. Todhunter'a. Jest to jedno z najważniejszych odkryć sławnego geometry angielskiego; przytém, jest ono także jedném z najpiękniejszych dowodzeń szeregu Taylor'a i pod tym względem, zdaniem naszém, w niczém nie ustępuje pięknéj pracy Cauch'ego. Słuszna jest także nadmienić: iż p. Rouché wiele się przyczynił do wydoskonalenia powyższego dowodzenia przydając doń pod jedném ogólném wyrażeniem dwie formy (dwa kształty) reszty wzoru Taylor'a.

ROZWIJANIE FUNKCYJ NA SZEREGI.

Wzory Taylor'a i Maclaurin'a. — Warunki rozwijalności funkcyj podług tych wzorów. — Rozwinięcie na szereg funkcyi wykładniczéj. — Wstawy. — Dostawy. — Logarytmu. — Rachunek logarytmów naturalnych i logarytmów pospolitych. — Dwumian Newtona. — Inne wzory na rozwijanie funkcyi na szeregi. Wzór Bernouill'ego. — Metoda spółczynników niewyznaczonych. — Rozwinięcie funkcyi na szereg podług potęg funkcyi danéj. — Uogólnienie powyższych wzorów dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych. — Twierdzenie funkcyj jednorodnych.

P. Folkierski w tym rozdziale dał obszerne zastosowanie wzoru Taylora' do rozwijania funkcyj na szeregi, przyczém zwracał ciągle uwagę na ścisłość i ogólność, względy tak często zaniedbywane w tego rodzaju kwestyach.

XIII

WYRAŻENIA NIEOZNACZONE.

Określenia. — Granica stosunków ilości dążących do zera, lub do nieskończoności. — Granice iloczynów z których jeden dąży do zera a drugi do nieskończoności. — Granice potęg przedstawiających się jako wyrażenia nieoznaczone. — Przykłady. — Wyrażenia nieoznaczone wielu zmiennych niezależnych.

W zastosowaniach Rachunku różniczkowego do wyznaczenia wyrażeń nieoznaczonych P. Folkierski starał się usunąć niektóre niedokładności; a gdy te całkiem usunięte zostaną wyznaczenie wyrażeń nieoznaczonych stanie się prostszém i zupełnie niewątpliwém.

NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI.

Określenia. — Warunki analityczne największości i najmniejszości. — Przykłady: — Iloczyn dwóch czynników, których summa jest stałą. — Najmniejszości funkcyi x^x. — Trójkąt utworzony przez dwa boki dane. — Najmniejszość siły działającéj na drąg cięźki. — Zadanie Fermat'a. — Największość i najmniejszość odległości punktu od krzywéj. — Najmniejszości i największości funkcyj niewyraźnych. — Największości i najmniejszości funkcyj wielu zmiennych niezależnych, funkcyj zmiennych czyniących zadosyć pewnym warunkom. — Najmniejszości i największości względne. — Przykłady i zastosowania. — Odległość dwóch krzywych. — Odległość punktu od powierzchni. — Ćwiczenia.

Teorya największości i najmniejszości traktowana w całéj obszerności, jaką dziś jéj w elementarném dziele nadać można, objaśniona jest licznemi przykładami, dającemi miarę jéj bezpośredniego praktycznego zastosowania. Najlepiéj nas o téj prawdzie przekona przytoczenie jakiekolwiekbądź z powyższéj teoryi zastosowania.

Przykład. *Znaleźć najmniejszość funkcyi*

$$y = x^x$$

gdzie x przybiera wartości większe od zera, całkowite lub ułamkowe.

Nie pytamy o największość, gdyż ta widocznie nie istnieje, bo zwiększając x, funkcya powiększa się nieograniczenie.

Różniczkując dwa razy otrzymamy

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \mathrm{l}.x + 1$$

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

Ponieważ z założenia ani x ani y nie może przejść przez zero, ani przybrać wartości zero, żadna z tych ani następnych pochodnych nie może stać się nieskończoną; funkcya więc jest rozwijalną podług szeregu Taylor'a.

Zakładając pierwszą pochodnę równą zeru, otrzymamy

$$\mathrm{l}.x + 1 = 0 \quad \text{czyli} \quad x = \frac{1}{e} = 0{,}36787944\ldots, \; y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0{,}6922065$$

a podstawiając wartość tę w drugą pochodnę

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = e, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

a ponieważ ta wartość szczególna $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatną, więc dla $x = \frac{1}{e}$, funkcya x^x staje się najmniejszością.

Słusznie przyznać należy: iż niektóre części wyższéj analizy w ostatnich latach w Polsce znakomity postęp zrobiły. Pierwszą z analizy wyższéj istotnie ważną pracę professor Zajączkowski przedstawił p. t. *Przyczynek do teoryi największości i najmniejszości*, w Rocznikach Towarzystwa Naukowego Krakowskiego na rok 1867. Nieco pierwéj, professor Żmurko już był także ogłosił swą głęboką o tymże samym przedmiocie pracę p. t. *Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima*, naprzód po niemiecku, w pamiętnikach Akademii Wiedeńskiéj na rok 1866; w kilka lat zaś potém, ta piękna znacznie powiększona i zmieniona praca, wyszła z pod prass drukarskich Paryża, poprawnie napisana i starannie odbita po polsku, w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych na rok 1871. Jest to, zdaniem naszém, w obecnéj chwili *ostatnie wymówione słowo* o téj ważnéj teoryi. Ten piękny i oryginalny utwór professora Żmurki ze wszech miar zasługuje na swe, o ile tylko podobna, jak najobszerniejsze w całéj Polsce upowszechnienie. Spodziewać się zatém należy: że P. Folkierski o postęp nauki gorliwy zrobiwszy z téj pięknéj pracy stosowne wyciągi, te, jasno i elementarnym sposobem wyłożone, do nowego wydania swego Rachunku różniczkowego, na pożytek naszéj kształcącéj się w matematyce młodzieży, należycie wprowadzić nie omieszka.

XIV

FUNKCYE ZMIENNYCH UROJONYCH.

Określenia. — Ciągłość zmiennych urojonych. — Funkcye jednowartościowe. — Określenie funkcyj zasadniczych zmiennych urojonych. — Funkcye algebraiczne. — Funkcye określone przez szeregi zbieżne. — Funkcya wykładnicza, wstawa, dostawa,... zmiennéj urojonéj. — Funkcye odwrotne. — Logarytmy. — Różniczkowanie funkcyj zmiennych urojonych. — Funkcye jednopochodne. — Funkcye doskonałe.

Zmienne urojone i funkcye ich wprowadzone zostały do analizy przez Cauch'ego. Cauchy dał im określenie całkiem ogólne takie, jak się to znajduje dokładnie podane, na str. 657 N° **322**, w dziele elementarném P. Folkierskiego. Późniejsi geometrowie zauważyli, że teorya funkcyi tak ogólnie pojętéj nie przedstawia wielkiego użytku, redukując się do teoryi funkcyj 2 zmiennych niezależnych: Bertrand i Serret przyjmują za funkcye zmiennych urojonych tylko funkcye jednopochodne (monogènes); zobacz, określenie tych funkcyj na str. 705 N° **361**. Jednakże, aby nie zmniejszać ogólności i nie wprowadzać zaciemniającéj dla początkującego restrykcyi, P. Folkierski zachował w zupełności określenie Cauch'ego, rozróżniając razem z nim: funkcye *jednopochodne* (monogènes), *jednowartościowe* (monodromes) i *doskonałe* (synectiques). Cauchy i inni geometrowie wyprowadzają własności tych funkcyj z szeregów które je określają: młody nasz matematyk podał przedstawienie całkiem elementarne własności tych funkcyj gdzie tylko można było i przedstawienie ich geometryczne, aby przyzwyczaić początkującego do urojonych i pokazać mu: że one wyrażają tak jak rzeczywiste pewne pojęcia określone tylko w odmienny jak rzeczywiste sposób, a nie po prostu *niedorzeczności* jak początkujący często przez mylną naukę sądzą; lub też coś *mylnego* i *dwuznacznego*, z czém ostrożnie! żeby przypadkiem nie uledz złudzeniu stawiania matematyki na ilościach urojonych, jak to znowu inni zawołani przeciwnicy *postępowéj umiejętności* szumnie w swych manifestach rozgłaszać nie przestają. Zasady podane w Rozdziale XVIII^{ym}, których *nigdzie* w elementarny sposób wyłożonych nie widzieliśmy, usunąć muszą wszelką wątpliwość co do nieścisłości w używaniu zmiennych urojonych. W tém jest pierwsza ważna polskiego pisarza zasługa.

Ścisłe określenie funkcyj *jednowartościowych* (patrz, str. 668 N° **333**), stosujące się nawet do funkcyj *rzeczywistych* nigdzie przed ogłoszeniem dzieła P. Folkierskiego nie było jasno i kategorycznie podane. Nazywano je w elementach *fonctions bien determinées*, nieokreślając ściśléj samych funkcyj i nietłumacząc co się pod tym wyrazem rozumie. Dla braku tego określenia, jak również koniecznego *zastrzeżenia* które twierdzenie stosują się do wszystkich funkcyj urojonych, które do jednowartościowych, które do jednopochodnych lub doskonałych, bardzo wiele błędów popełnionemi były, sam Cauchy ciągle tworząc i drukując z pospiechu nie mało błędów nie dostrzegł, ztąd mniemanie niesłuszne jakoby teorye oparte na urojonych były *zwodnicze*.

Przekonaliśmy się że P. Folkierski podał na początek dostateczną segregacyę tych funkcyj i cechy po których je rozróżnić można: przy każdém twierdzeniu powiedzianém jest wyraźnie do jakich funkcyj podane twierdzenie wprost się stosuje. Odróżnienie to jest ważném nawet dla funkcyj rzeczywistych, na co pospolicie autorowie piszący o tym przedmiocie nie zwracają uwagi (patrz, str, 335 N° **177**; str. 839 N° **443**; str. 840 N° **444** i inne podziały).

Dla funkcyj zasadniczych dowodzenia co do ich gatunku znakomity nasz autor przeprowadził wszystkie, również co do szeregów ważniejszych funkcye *doskonałe* (synectiques) grają podobną rolę względem innych, jak *szeregi dobrze zbieżne* względem *źle zbieżnych*, *rozbieżnych* lub *nieoznaczonych*: funkcye doskonałe będą przedewszystkiém używane w dalszych zastosowaniach. Do nich to stosuje się to ważne twierdzenie Cauch'ego: *Wszelka funkcya doskonała jest rozwijalną zbieżnie na szereg Taylora*, i *odwrotnie*, wszelka funkcya określona zbieżnym szeregiem Taylora jest funkcyą doskonałą. Lecz twierdzenie to dowodzi się w bardzo prosty, ogólny i ścisły sposób tylko za pomocą *Rachunku Całkowego*: wolał więc P. Folkierski odłożyć je do drugiego tomu, niż dawać w pierwszym dowodzenie naciągane sposobem Cauch'ego lub jak w Serrecie. Twierdzenie to i wnioski z niego wynikające będą dalej podane.

Abel, jak sam zeznaje, zaczerpnął wszystkie swe wiadomości matematyczne w pismach Cauch'ego: takie sławnego geometry norwegskiego zeznanie jest najlepszym panegirykiem, jak go Terquem nazywa, Gauss'a francuzkiego. Mistrz i jego świetny uczeń już od dawna w grobie spoczęli, ale ich prace nieprzerwanie wielkie światło na całą ludzkość rzucają. Oprócz Cauch'ego i Abla nie wiemy czy kto co ważnego w teoryi funkcyj urojonych I[go] *rodzaju* kiedykolwiek napisał (o innych wiele w angielskich znajduje się pisarzach). Czytając te genialne płody dwóch największych swego czasu geometrów, zanurzając się głęboko w teoryi funkcyj urojonych, P. Folkierski uczuł w sobie po raz pierwszy zapał szlachetny *doświadczenia sił własnych* przy opracowaniu tak trudnego przedmiotu. Co nasz autor skorzystał z Cauch'ego, co się dało naciągnąć w elementa, to tylko to co się znajduje na 17[tu] stronach pierwszych Briot i Bouquet *Théorie des fonctions doublement periodiques* i trochę z Serreta, a i z tego dowodzenia niektóre pozmieniane noszą na sobie *wybitne piętno* indywidualnéj naszego autora samodzielności.

Taka jest piękna (ostatnia w Rachunku różniczkowym) praca naszego młodego matematyka, która go jednym skokiem stawia w pierwszym rzędzie obecnie żyjących matematycznych w Polsce pisarzy.

XV

Trzy pierwsze Części klassycznego dzieła P. Folkierskiego to jest: *Wiadomości wstępne*, *Rachunek Różniczkowy* i *Zastosowanie tegoż rachunku do teoryi funkcyi* będąc już uprzednio przez nas należycie ocenione, pozostaje nam jeszcze, dla uzupełnienia naszych umiejętnych poszukiwań, kilka słów powiedzieć o *czwartéj* i ostatniéj *Części* tego dzieła to jest: o *ważnych zastosowaniach Rachunku Różniczkowego do Geometryi*. W tych zastosowaniach pospolicie rozróżniamy *dwie odrębne kategorye*: 1[ód]. Zastosowania Rachunku Różniczkowego do figur geometrycznych jakkolwiek położonych na płaszczyznie; 2[re] zastosowania tegoż rachunku do figur geometrycznych zajmujących jakiekolwiek miejsce w przestrzeni.

Z pomiędzy zastosowań należących do *pierwszéj kategoryi* na szczególną uwagę zasługują : Assymptoty czyli niemaltyczne. — Punkta przegięcia. — Wklęsłość i wypukłość. — Koło ściśle styczne. — Poszukiwania bardzo ważne punktów nadzwyczajnych płaskich. — Różniczka powierzchni ograniczonéj linią krzywą. — Różniczka łuku krzywéj na płaszczyznie. — Krzywość linii na płaszczyznie. — Koło krzywości. — Promień i środek krzywości. — Rozwinięte i rozwijające. — Obwinięte i obwijające. — Zastosowania i przykłady : Linie drugiego stopnia. — Cykloida. — Epicykloida. — Spiralne.— Linie palące przez odbicie.

Z pomiędzy zastosowań należących do *drugiéj kategoryi* szczególniéj się odznaczają : Prosta styczna i płaszczyzna normalna do krzywéj jakiéjkolwiek w przestrzeni. — Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni. — Różniczka łuku krzywéj w przestrzeni. — Powierzchnia ściśle styczna. — Płaszczyzna ściśle styczna.—Normalna główna.—Kula ściśle styczna do krzywéj w przestrzeni.—O styczności krzywych pomiędzy sobą w przestrzeni.—Krzywe ściśle styczne.—Powierzchnie ściśle styczne.— Pierwsza krzywość linij skośnych.—Promień i środek krzywości.—Prosta biegunowa.—Różnica łuku i cięciwy krzywéj jakiéjkolwiek. — Skręcenie, czyli druga krzywość linij skośnych. — Koło i promień skręcenia.—Piękne twierdzenie p. Serret'a.—Spółrzędne środka kuli ściśle stycznéj.—O powierzchniach obwijających. — Linia charakterystyczna i krawędź zwrotu. — O powierzchniach rozwijalnych.—O rozwiniętych linij krzywych w przestrzeni. — Powierzchnia biegunowa.— Zastosowania : Linia śrubowa. *Nakoniec :* O krzywości linij nakreślonych na powierzchni. — Twierdzenie Meunier'a. — Krzywość przecięć normalnych.—Przecięcia główne.—Punkta krzywości kulistéj czyli pępki powierzchni. — Linia wskazująca. — Styczne sprzężone. — Wzory ogólne na promienie krzywości główne. — O ukłdzie potrójnym prostokątnym powierzchni. — Twierdzenie Karola Dupin'a. — Układ potrójny prostokątny drugiego stopnia. — Przykłady : Punkta krzywości kulistéj elipsoidy. — Linie krzywości powierzchni obrotowych. — Powierzchni rozwijalnych.

Oto są ważne kwestye przedstawiające nam dokładnie prosty i naturalny układ *czwartéj części* dzieła naszego autora. Eleganckie tych ważnych kwestyj przedstawienie, piękne i proste rozlicznych wzorów i symetrycznych równań rozwijanie, nakoniec, trafne wykazanie najnowszych metod nowoczesnych mistrzów umiejętności, charakteryzuje ten bogaty i kunsztownie wykończony analizy nowoczesnéj ułamek.

XVI

« Dołączony na końcu dzieła przypisek p. Trzaski o *Wyznacznikach*, wykazując głęboką znajomość przedmiotu, zawiera wszystko co jest godném uwagi w téj teoryi i co w tak szczupłym rozmiarze (w 50 str.) zawrzeć można. Eleganckie przedstawienie kwestyj i *dowodzenie wielu twierdzeń zaledwie wysłowionych w różnych dziełach* charakteryzuje ten przypisek. »

To trafne i umiejętne przypisku p. Trzaski ocenienie, skreślone biegłém piórem bezimiennego *Przeglądu Polskiego* krytyka, wyszło z druku na widok publiczny po raz pierwszy w Krakowie 1 kwietnia 1870 roku. Ten światły sąd, jako zupełnie zgodny z naszém wewnętrzném przekonaniem, uznając za nasz własny bezwarunkowo przyjmujemy. A przecież, pomimo tylu znakomitych zalet, przypisek p. Trzaski ma także i swą stronę ujemną. W istocie, piękna praca p. Trzaski o wyznacznikach nie może być przystępną dla każdego posiadającego nawet dokładnie samą tylko niższą matematykę. A jeśli mała liczba naszych matematycznych znakomitości czytając ten oryginalny utwór p. Trzaski przyjmie go z zapałem i serdecznie powita; to natomiast, bardzo wątpimy aby nasza gimnazyalna a nawet uniwersytecka młodzież, jeszcze nieobznajmiona z *kongruencyami* Gaussa lub też z *ilościami* które pierwszy używał Galoa (Gallois), mogła cokolwiek z téj pięknéj pracy obecnie skorzystać.

Tenże sam znakomity krytyk, mówiąc o dziele P. Folkierskiego, tak się zaszczytnie o niém wyraża :

« Pan Folkierski sumiennem skompletowaniem wszystkiego co stanowi zasady rachunku różniczkowego i co najliczniejsze ma zastosowania, daje swém dziełem, każdemu posiadającemu niższą matematykę, możność postawienia się na stopniu takim by z zupełną łatwością posługiwać się tym rachunkiem we wszystkich zawodach mających styczność z matematyką, czytać bez trudu utwory mistrzów, rozwijające w całym obszarze różne teorye lub zastosowania, wreszcie iść samemu na tém polu naprzód bez żadnych przeszkód. Być pożytecznym jak największéj liczbie, było kierującą myślą w całém dziele; tam tylko autor wprowadził własny sposób przedstawienia kwestyi, gdzie dotychczasowe sposoby zostawiły coś do życzenia. Dzieło to posłuży zarazem za nowy dowód bogactwa i dojrzałości naszego języka, wykazując że nawet subtelności matematyczne mogą być wyrażone jasno i zwięźle. »

Tym ustępem zdrowo dzieło P. Folkierskiego oceniającym kończąc nasze sprawozdanie, dowodzimy jak wielką dziełu temu przyznajemy wartość.

Naturalna przeto że gorąco pragniemy uzupełnienia jego, zapowiedzianym przez autora Rachunkiem Całkowym. Śmiemy nawet upraszać P. Folkierskiego aby przez wzgląd na postęp w nauce młodzieży naszéj umiejętnościom ścisłym poświęcającéj się, druk dzieła przyspieszać raczył.

My zaś z góry przekonani, że jak Rachunek Różniczkowy zalicza się do pierwszorzędnych dzieł elementarnych tak i Rachunek Całkowy na téj wysokości stanie, zobowiązujemy się do zwięzłego a umiejętnego ocenienia nowéj pracy młodego Matematyka naszego.

Pisałem w Paryżu dnia 27 Lipca 1871 roku.

Adolf SĄGAJŁO.