

DOWÓD PEWNEGO TWIERDZENIA
TYCZĄCEGO FUNKCYJ WIELO WYMIAROWYCH OKRESOWYCH

NAPISAŁ.

Władysław TRZASKA.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa dnia 15 września 1871 roku.

W poprzedniej mojej pracy o funkcjach wielowymiarowych, dowiodłem geometrycznie kilku twierdzeń tyczących funkcji dwu i trójwymiarowych. Funkcje więcej jak trójwymiarowe, nie dają się z równą łatwością przedstawić geometrycznie jak funkcje dwu i trójwymiarowe, i dla tego też, nie udało mi się dowieść dla pierwszych geometrycznie twierdzenia tyczącego funkcji okresowych, jak to zrobiłem dla drugich w poprzedniej pracy. Trudności powiększają się jeszcze bardziej w razie funkcji o wielu zmiennych niezależnych. Starłem się więc znaleźć dowód, czysto za pomocą rachunku i takowy poniżej opisuję. Oto wysłowienie twierdzenia które mam na widoku.

Jeżeli ilości lwymiarowe o których mowa w niniejszym twierdzeniu, ulegają zwykłym prawom dodawania algebrycznego, to funkcja lwymiarowa m zmiennych niezależnych, nie będąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń, a jeżeli nieskończoną to nie różniących się nieskończenie mało, dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych, nie może być więcej jak 1m okresową, to jest mieć więcej jak 1m układów okresów jednoczesnych różnych, rozumiejąc przez układy różne okresów jednoczesnych takie tylko układy, których okresy jednoczesne nie są summami wielokrotników całkowitych rzeczywistych jednakowych układów pozostałych, wszystkich lub w części lub też innych układów lecz w mniejszej liczbie.

Pan Ermit (HERMITE) znalazł poprzednio szczególny przypadek powyższego twierdzenia, mianowicie w razie funkcji dwuwymiarowych uważanych przez Kosziego (CAUCHY), lecz dowodu, o ile mi wiadomo nie ogłosił. Pan Pjuize (PUISEUX) przedstawił Akademji nauk Paryżkiej dwa dowody twierdzenia Pana Ermita (!), lecz takowe zdaje mi się nie zostały także ogłoszone. Twierdzenie zaś ogólne wyżej wysłowione nie zostało (jeżeli się nie mylę) ani spostrzeżoném, ani dowiedzioném.

Nim przystąpię do dowodu twierdzenia głównego niniejszej pracy, podam kilka określeń i dowiodę kilku prawd pomocniczych.

Przedstawmy przez

$$z_{\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} v_{\lambda} z_{\mu, \lambda}, \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

przez

$$u = \sum_{x=1}^{z=l} t_x u_x$$

$m+1$ ilości l wymiarowych w których t_x , ($1 \leq x \leq l$) są jednościami urojonymi dowolnymi zaś l ilości rzeczywistych u_x , ($1 \leq x \leq l$), są funkcjami rzeczywistymi lm ilości rzeczywistych $z_{\mu,\lambda}$, ($1 \leq \mu \leq m$), ($1 \leq \lambda \leq l$); mianowicie:

$$u_x = f_x(z_{1,1}, \dots, z_{1,\lambda_1}, \dots, z_{1,l}; \dots; z_{\mu,1}, \dots, z_{\mu,\lambda_\mu}, \dots, z_{\mu,l}; \dots; z_{m,1}, \dots, z_{m,\lambda_m}, \dots, z_{m,l}), \quad (1 \leq x \leq l)$$

wtedy ilość u nazwę funkcją l wymiarową m zmiennych niezależnych z_{μ} , ($1 \leq \mu \leq m$) i wyrażę znakiem

$$u = f(z_1, \dots, z_\mu, \dots, z_m)$$

Funkcję tak określoną nazwę *okresową*, jeżeli istnieje przynajmniej jeden układ m ilości stałych l wymiarowych a_μ , ($1 \leq \mu \leq m$) taki, że jest przy wszelkich znaczeniach zmiennych niezależnych z_μ , ($1 \leq \mu \leq m$)

$$f(z_1 + a_1, \dots, z_\mu + a_\mu, \dots, z_m + a_m) = f(z_1, \dots, z_\mu, \dots, z_m)$$

a układ ilości stałych dopiero wymienionych *układem okresów jednoczesnych*.

Z tego określenia wynika, że jeżeli jest n układów okresowych jednoczesnych (odróżniając okresy różnych układów wskaźnikiem v układu) $a_{\mu,v}$, ($1 \leq \mu \leq m$), ($1 \leq v \leq n$), jest także zawsze

$$f\left(z_1 + \sum_{v=1}^{v=n} a_{1,v}, \dots, z_\mu + \sum_{v=1}^{v=n} a_{\mu,v}, \dots, z_m + \sum_{v=1}^{v=n} a_{m,v}\right) = f(z_1, \dots, z_\mu, \dots, z_m)$$

gdzie p_v , ($1 \leq v \leq n$) oznaczają n liczb całkowitych rzeczywistych dowolnych.

Dowiodę teraz twierdzenia pomocniczego następującego:

a) *Mając r ilości rzeczywistych*

$$a_\rho = \sum_{\pi=1}^{\pi=r+1} a_{\rho,\pi} p_\pi, \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

w których $a_{\rho,\pi}$, ($1 \leq \rho \leq r$), ($1 \leq \pi \leq r+1$) oznaczają $r(r+1)$ ilości rzeczywistych stałych, zaś p_π , ($1 \leq \pi \leq r+1$) oznaczają $r+1$ liczb całkowitych rzeczywistych; można zawsze te ostatnie dobrać tak, że bezwzględne znaczenia tych r wyrażeń a_ρ , ($1 \leq \rho \leq r$) będą odpowiednio mniejsze od n ilości rzeczywistych dodatnich tak małych jak się podoba.

Jakkolwiek twierdzenie to jest znanym, przytaczam jednakże dowód takowego dla dogodności czytelnika.

Przypuśćmy twierdzenie prawdziwym dla liczb mniejszych od r , a dowiedzimy, że jest prawdziwym i dla r . Uważmy bowiem r wyrażeń

$$a_{\rho,r+2} = \sum_{\pi=1}^{\pi=r+1} a_{\rho,\pi} p_{1,\pi}, \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

w których przynajmniej jedna z r ilości $a_{\rho,r+2}$, ($1 \leq \rho \leq r$) jest różną od zera i przypuśćmy, że nią

jest ilość $a_{r,r+1}$. Z powyższych r wyrażeń, wypada przez działania zawsze możebne r wyrażeń następujących

$$a_{\rho,r+2} - a_{r,r+2} a_{r,r+1}^{-1} a_{\rho,r+1} = \sum_{\pi=1}^{\pi=r} \left| \begin{array}{cc} a_{\rho,\pi} & a_{\rho,r+1} \\ a_{r,\pi} & a_{r,r+1} \end{array} \right| a_{r,r+1}^{-1} p_{1,\pi}; \quad (1 \leq \rho \leq r-1)$$

$$a_{r,r+2} a_{r,r+1}^{-1} = \left(\sum_{\pi=1}^{\pi=r} a_{r,\pi} a_{r,r+1}^{-1} p_{1,\pi} \right) + p_{1,r+1}$$

z pomiędzy których $r-1$ pierwszych na mocy przypuszczenia zrobionego wyżej, przez stosowny wybór r całkowitych $p_{1,\pi}$ ($1 \leq \pi \leq r$) można uczynić co do bezwzględnych znaczeń mniejszymi odpowiednio od ilości rzeczywistych dodatnich danych tak małych jak się podoba; w ostatniem zaś wyrażeniu można zawsze dobrać całkowitą $p_{1,r+1}$ tak, że bezwzględne znaczenie tegoż wyrażenia będzie mniejsze od $\frac{1}{2}$. Z tego wypada, że znaczenia bezwzględne r wyrażeń $a_{\rho,r+2}$, ($1 \leq \rho \leq r$) jeżeli nie są mniejsze odpowiednio od znaczeń bezwzględnych wyrażeń $\frac{1}{2} a_{\rho,r+2}$, ($1 \leq \rho \leq r$) to bardzo mało są od nich większe. W każdym razie można napisać (oznaczając dla krótkości znaczenie bezwzględne wyrażenia danego pisząc przed niem z. b.)

$$(1) \quad \text{z. b. } (a_{\rho,r+2}) < \text{z. b. } (u_1 a_{\rho,r+1}), \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

gdzie u_1 oznacza ułamek właściwy dodatni mniejszy od jedności, mianowicie mniejszy albo też mało co większy od $\frac{1}{2}$. Gdyby niektóre z ilości $a_{\rho,r+1}$, ($1 \leq \rho \leq r-1$) były zerami możnaby od razu napisać zamiast drugiej strony odpowiednie nierówności (1) ilość dodatnią rzeczywistą tak małą jak się podoba.

Uważmy teraz r wyrażeń

$$a_{\rho,r+3} = \sum_{\pi=2}^{\pi=r+2} a_{\rho,\pi} p_{2,\pi}; \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

z którymi podobnie postępując jak z r wyrażeniami $a_{\rho,r+2}$, ($1 \leq \rho \leq r$) przyjdziemy również do wniosku

$$(2) \quad \text{z. b. } (a_{\rho,r+3}) < \text{z. b. } (u_2 a_{\rho,r+2}); \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

. d.

Powtarzając takie postępowanie s razy przyjdziemy do wniosku

$$(s) \quad \text{z. b. } (a_{\rho,r+s+1}) < \text{z. b. } (u_s a_{\rho,r+s}), \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

Nakoniec jeżeli u oznacza największy z pomiędzy ułamków u_1, u_2, \dots, u_s , wniesiemy że

$$(s+1) \quad \text{z. b. } (a_{\rho,r+s+1}) < u^s \{ \text{z. b. } (a_{\rho,r+1}) \}, \quad (1 \leq \rho \leq r)$$

Ponieważ $a_{\rho,r+s+1}$, ($1 \leq \rho \leq r$) wyrażone przez ilości $a_{\rho,\pi}$, ($1 \leq \rho \leq r$), ($1 \leq \pi \leq r+1$), mają właśnie kształt wyrażeń a_{ρ} , ($1 \leq \rho \leq r$) o jakich mowa w twierdzeniu, i ponieważ potęgi całkowite ułamku właściwego u mogą się stać tak małymi jak się podoba, biorąc tylko potęgę dostatecznie wysoką, wniesiemy z nierówności (s+1), że twierdzenie jest prawdziwem i dla r jak zamierzeliśmy dowieść.

Dowodzenie stosuje się prawie w zupełności i do przypadku $r = 1$. Jakoż uważając wyrażenie

$$a_{1,3} = a_{1,1}p_{1,1} + a_{1,2}p_{1,2}$$

zład jeżeli $a_{1,2}$ jest zerem

$$a_{1,3}a_{1,2}^{-1} = a_{1,1}a_{1,2}^{-1}p_{1,1} + p_{1,2}$$

Ponieważ zawsze można dobrać całkowitą $p_{1,2}$ w ten sposób żeby znaczenie bezwzględne wyrażenia $a_{1,3}a_{1,2}^{-1}$ było mniejsze od $\frac{1}{2}$, wniesiemy więc że :

$$\text{z. b. } (a_{1,3}) < \frac{1}{2} \text{ z. b. } (a_{1,2})$$

Uważając znów wyrażenie

$$a_{1,4} = a_{1,2}p_{2,1} + a_{1,3}p_{2,2}$$

wniesiemy, że można dobrać całkowite $p_{2,1}, p_{2,2}$ tak że będzie

$$\text{z. b. } (a_{1,4}) < \frac{1}{2} \text{ z. b. } (a_{1,3}),$$

i t. d. Powtarzając to działanie s razy, otrzymamy zbierając razem co powiedziano że :

$$\text{z. b. } (a_{1,s+2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^s \text{ z. b. } (a_{1,2})$$

Lecz wyrażenie $a_{1,s+2}$ przez ilości $a_{1,1}$ i $a_{1,2}$ ma właśnie kształt, wymagany przez twierdzenie, a nadto $\left(\frac{1}{2}\right)^s$ można uczynić tak małym jak się podoba biorąc całkowitą s dostatecznie wielką. Ostatnia więc nierówność dowodzi twierdzenia w razie $r = 1$, i dowodzi ostatecznie twierdzenia w zupełności.

Drugie twierdzenie pomocnicze jest następujące :

b) *Jeżeli ilości dwymiarowe o których mowa niżej, ulegają zwykłym prawom dodawania algebrycznego, to funkcja dwymiarowa m zmiennych niezależnych, niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń lub jeżeli nieskończoną to nieróżniących się nieskończenie mało, dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych, nie może mieć więcej jak km układów okresów jednoczesnych różnych, przypuszczając, że w skład każdego z okresów, wchodzi tylko pewnych k z pomiędzy 1 jedności urojonych, składających tak zmienne niezależne jako też i samą funkcję.*

Przypuścimy, że k jednościami urojonymi wchodzącymi w skład okresów są naprzykład k jedności v_λ , ($1 \leq \lambda \leq k$) i że m okresów jednoczesnych $v_{\mu\sigma}$ układu są :

$$a_{\mu,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} v_\lambda a_{\mu,\nu,\lambda} \quad , \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

Ponieważ funkcja jest z założenia okresową, nie zmieni się więc jeżeli odpowiednio każdą z m zmiennych niezależnych z_μ , ($1 \leq \mu \leq m$) powiększymy odpowiednio o

$$(s+2) \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu} p_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} v_\lambda a_{\mu,\nu,\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} v_\lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu,\lambda} p_\nu ; \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

gdzie n oznacza liczbę układów okresów jednoczesnych jaką funkcja uważana posiada.

Jeżeliby n było tylko równe $km + 1$, to według wyżej dowiedzionego twierdzenia pomocniczego, możnaby dobrać n całkowitych p_v , ($1 \leq v \leq n$) tak, że powiększenia te a raczej współczynniki przy k jednościach urojonych v_λ , ($1 \leq \lambda \leq k$) byłyby mniejszemi odpowiednio co do znaczenia bezwzględne, od tyluż ilości danych jakkolwiek małych. Skoro więc funkcja przy małych zmianach zmiennych niezależnych nie zmienia się, jest więc stałą lub przybiera wszelkie możliwe znaczenia w liczbie nieskończonej nieskończenie mało się różniące między sobą dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych, co przeciwne twierdzeniu i co zatem dowodzi takowego.

Dowód powyższy przypuszcza, że wyrażenia $(s + 2)$ nie są zerami jednocześnie, co też jest koniecznym następstwem założenia zrobionego w samym twierdzeniu, że układy okresów jednoczesnych są różne, to jest że okresy tych układów nie są summami wielokrotników całkowitych jednakowych okresów jednoczesnych innych układów w liczbie $n - 1$ lub mniejszej. Okażemy bowiem że :

Jeżeli jest m równań

$$(s + 3) \quad 0 = \sum_{v=1}^{v=n} a_{\mu,v} p_v, \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

to wtedy okresy jednoczesne któregokolwiek z n układów wyrażają się przez okresy jednoczesne $n - 1$ układów innych, mianowicie :

$$a_{\mu,1} = (d_1^{-1} a_{\mu,1}) d_1;$$

$$a_{\mu,\rho} = (d_1^{-1} a_{\mu,1}) (p_1 r_{1,\rho}) + \sum_{v=2}^{v=\rho-1} \begin{vmatrix} a_{\mu,\rho}, a_{\mu,v} \\ r_{1,\rho}, r_{1,v} \end{vmatrix} (d_1^{-1} p_v) + \sum_{v=\rho+1}^{v=n} \begin{vmatrix} a_{\mu,\rho}, a_{\mu,v} \\ r_{1,\rho}, r_{1,v} \end{vmatrix} (d_1^{-1} p_v),$$

$$(1 \leq \mu \leq m), \quad (2 \leq \rho \leq n)$$

gdzie przypuszcza się że całkowite p_v , ($1 \leq v \leq n$) są pierwszemi między sobą; że największym wspólnym dzielnikiem $n - 1$ całkowitych p_v , ($2 \leq v \leq n$) jest d_1 , i że nakoniec całkowite $r_{1,\rho}$, ($2 \leq \rho \leq n$) zadość czynią równaniu

$$1 = \sum_{\rho=2}^{\rho=n} d_1^{-1} p_\rho r_{1,\rho}$$

co zawsze jest możebnym, bo w tém równaniu pierwszego stopnia współczynniki przy nieznanym $r_{1,\rho}$, ($2 \leq \rho \leq n$) są całkowitemi pierwszemi między sobą.

Gdyby $n - 1$ układów okresów jednoczesnych

$$d_1^{-1} a_{\mu,1}; \quad \begin{vmatrix} a_{\mu,\rho}, a_{\mu,v} \\ r_{1,\rho}, r_{1,v} \end{vmatrix};$$

$$(1 \leq \mu \leq m), \quad (2 \leq \rho \leq n)$$

nie były różnemi, to możnaby je podobnież wyrazić przez $n - 2$ innych układów, i postępując tak dalej przyszlibyśmy do pewnej liczby układów okresów jednoczesnych, którójby zmniejszyć nie można. i układy te ostatnie byłyby różnemi. Lecz nateraz dowiedzimy tylko niemożebności równań

(s + 3) które dają m równań:

$$(s + 4) \quad d_1^{-1} a_{\mu,1} p_1 = \sum_{v=2}^{v=n} (-d_1^{-1} p_v) a_{\mu,v}, \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

i zkład wnosimy, że układ m ilości $d_1^{-1} a_{\mu,1} p_1$, ($1 \leq \mu \leq m$) jest układem okresów jednoczesnych, jako złożony z wielokrotników całkowitych jednakowych okresów danych układów. Ponieważ dwie całkowite d_1 i p_1 są z założenia pierwszymi między sobą, można więc zawsze dobrać dwie inne całkowite $s_{1,1}$ i $s_{1,2}$ takie, że będzie:

$$d_1 s_{1,1} + p_1 s_{1,2} = s_1$$

gdzie s_1 oznacza którąkolwiek liczbę rzeczywistą całkowitą. Przyniem układ ilości

$$a_{\mu,1} s_{1,1} + d_1^{-1} a_{\mu,1} p_1 s_{1,2} = (d_1^{-1} a_{\mu,1}) s_1; \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

jest także układem okresów jednoczesnych, i właściwiej okresami tego układu są ilości:

$$d_1^{-1} a_{\mu,1}; \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

Pomnóżmy teraz równania (s + 4) przez jedną z całkowitych $r_{1,\rho}$, ($2 \leq \rho \leq n$) otrzymamy $m(n-1)$ równań

$$(d_1^{-1} a_{\mu,1})(p_1 r_{1,\rho}) = \sum_{v=2}^{v=n} -d_1^{-1} p_v r_{1,\rho} a_{\mu,v}; \quad (1 \leq \mu \leq m), \quad (2 \leq \rho \leq n)$$

i zastąpmy w tych równaniach ilości $-d_1^{-1} p_v r_{1,\rho}$ przez wyrażenia odpowiednie

$$-d_1^{-1} p_v r_{1,\rho} = \sum_{v=2}^{v=\rho-1} d_1^{-1} p_v r_{1,v} - 1 + \sum_{v=\rho+1}^{v=n} d_1^{-1} p_v r_{1,v}, \quad (2 \leq \rho \leq n)$$

a otrzymamy także $m(n-1)$ równań następujących

$$\begin{aligned} & (d_1^{-1} a_{\mu,1})(p_1 r_{1,\rho}) = \\ & \sum_{v=2}^{v=\rho-1} -d_1^{-1} p_v r_{1,\rho} a_{\mu,v} + \left(\sum_{v=2}^{v=\rho-1} d_1 p_v r_{1,v} - 1 + \sum_{v=\rho+1}^{v=n} d_1^{-1} p_v r_{1,v} \right) a_{\mu,\rho} + \sum_{v=\rho+1}^{v=n} -d_1^{-1} p_v r_{1,\rho} a_{\mu,v} = \\ & \sum_{v=2}^{v=\rho-1} \begin{vmatrix} a_{\mu,v} & a_{\mu,\rho} \\ r_{1,v} & r_{1,\rho} \end{vmatrix} (d_1 p_v) - a_{\mu,\rho} + \sum_{v=\rho+1}^{v=n} \begin{vmatrix} a_{\mu,v} & a_{\mu,\rho} \\ r_{1,v} & r_{1,\rho} \end{vmatrix} (d_1^{-1} p_v); \\ & (1 \leq \mu \leq m), \quad (2 \leq \rho \leq n) \end{aligned}$$

z których to równań otrzymujemy wyrażenia $m(n-1)$ okresów $a_{\mu,\rho}$, ($1 \leq \mu \leq m$), ($2 \leq \rho \leq n$) przez tyleż ilości

$$(s + 5) \quad d_1^{-1} a_{\mu,1}; \quad \begin{vmatrix} a_{\mu,v} & a_{\mu,\rho} \\ r_{1,v} & r_{1,\rho} \end{vmatrix}; \\ (1 \leq \mu \leq m), \quad (2 \leq \rho \leq n)$$

z których drugie są okresami, jako summy wielokrotników jednakowych okresów dawnych okresów, a zaś pierwsze stanowią układ okresów jednoczesnych jako wyżej dowiodłem. Nakoniec okresy $a_{\mu,1}^{\bar{m}}$, ($1 \leq \mu \leq m$) wyrażają się także przez okresy $d_1^{-1} a_{\mu,1}$, ($1 \leq \mu \leq m$) mianowicie

$$a_{\mu,1} = (d_1^{-1} a_{\mu,1}) d_1; \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

i tym sposobem wszystkie okresy dawne

$$a_{\mu,1}, \quad (1 \leq \mu \leq m), \quad (1 \leq \rho \leq n)$$

wyrażają się przez okresy $n-1$ układów ($s+5$) jak to zamierzyłem dowieść.

W szczególności gdy $k=l$ mamy twierdzenie wymienione na początku niniejszego pisma. Jeżeli nadto $m=1$, zaś $l=2$ lub $l=3$ otrzymamy dwa twierdzenia dotyczące funkcji okresowych dwu i trójwymiarowych jednej zmiennej niezależnej, których dowiodłem geometrycznie w poprzedniej pracy na stronicach 35 i 36 drugiego zeszytu niniejszego Pamiętnika.

W razie zaś gdyby $l=1$ i nadto $\iota_1=1$ mamy godne uwagi twierdzenie następujące :

c) *Funkcja rzeczywista m zmiennych niezależnych rzeczywistych, nie może mieć więcej nad m układów okresów jednoczesnych rzeczywistych, jeżeli nie jest stałą, ani też nie posiada dla każdego układu znaczeń zmiennych niezależnych nieskończonej liczby znaczeń różniących się między sobą tak mało jak się podoba.*

Dodajmy nakoniec że twierdzenie główne niniejszej pracy możnaby dowieść jeszcze w następujący sposób. Dowiodłszy naprzód twierdzenia pomocniczego a) możnaby następnie dowieść twierdzenia szczególnego c) z którego następnie przejśćby można do twierdzenia b) którego twierdzenie główne jest szczególnym przypadkiem. Lecz zdaje się byłoby zbyt ciężkim podawać to drugie dowodzenie, gdyż takowe po powyższych wskazówkach nie może przedstawiać trudności.

(¹) Przedstawione 11 sierpnia i 6 października 1856 roku. Wzmianki o tém znajdują się w *Comptes rendus* tomie 43 na stronicach 321 i 681.

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...