I GRUPPI CHE POSSONO PENSARSI COME SOMME DI TRE LORO SOTTOGRUPPI (*)

Se H_1, H_2 sono sottogruppi di un gruppo G, nessun dei quali coincida con G, è impossibile che valga l'eguaglianza

$$G = H_1 + H_2 .$$

E infatti, se tale eguaglianza sussistesse, detto h_1 un elemento di G fuori di H_2 ed h_2 un elemento di G fuori di H_1, h_1 apparterrebbe ad H_1, h_2 ad H_2 e il prodotto h_1h_2 o ad H_1 o ad H_2. Ma ciò è impossibile, perchè, se h_1h_2 si trovasse in H_1 (in H_2), ivi si troverebbe anche, insieme con h_1 (con h_2), l'elemento $h_2(h_1)$.

Invece è facile riconoscere mediante esempi che un gruppo può benissimo coincidere con la somma di tre suoi sottogruppi, nessun dei quali coincida con esso. Tale è il caso del gruppo quadrinomio (*Vierergruppe*), che è la somma dei suoi tre sottogruppi ciclici del 2° ordine; e del gruppo dei quaternioni, che è la somma dei suoi tre sottogruppi ciclici del 4° ordine.

Ebbene noi vogliamo dimostrare a tale proposito il seguente teorema:

Perchè un gruppo (finito, o non) possa pensarsi come somma di tre suoi sottogruppi, nessun dei quali coincida con esso, occorre e basta che esso ammetta un sottogruppo invariante, il cui corrispondente gruppo complementare sia un gruppo quadrinomio.

1. La sufficienza della condizione è manifesta, perchè se un gruppo G ammette un sottogruppo invariante K, tale che $\frac{G}{K}$ sia un gruppo quadrinomio, questo è somma dei suoi tre sottogruppi ciclici del 2° ordine e quindi G è somma di tre suoi sottogruppi contenenti K (e in ognuno dei quali K è di indice 2).

(*) *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5 (1926), pp. 216-218.

2. Dimostriamo dunque che essa è necessaria e per questo supponiamo che G sia un gruppo per il quale sussista un'eguaglianza della forma

$$G = H_1 + H_2 + H_3 ,$$

con H_1, H_2, H_3 sottogruppi di G, nessun dei quali coincida con G.

È chiaro, innanzi tutto, che nessuno dei sottogruppi H_i può esser contenuto in uno dei due rimanenti, perchè, se, ad es., H_1 contenesse H_2, sarebbe $H_1 + H_2 = H_1$, indi $G = H_1 + H_3$, con H_1, H_3 diversi da G; e una tale eguaglianza, per quanto più sopra è stato detto, è assurda.

Ed è pur chiaro che ciascuno dei sottogruppi H_i contiene elementi non appartenenti ad alcuno degli altri due; perchè, se, ad es., ogni elemento di H_1 appartenesse o ad H_2 o ad H_3, H_1 dovrebbe essere la somma delle sue intersezioni con H_2 e H_3; e ciò non potrebbe avvenire, se non a patto che una di tali intersezioni coincidesse con esso, cioè che H_1 fosse contenuto in H_2 o in H_3, il che, come or ora è stato osservato, è impossibile.

3. Ciò posto dico che H_1, H_2, H_3 *si intersecano, a due a due, secondo un medesimo sottogruppo di* G, o, in altri termini, che non esiste alcun elemento il quale sia comune a due dei sottogruppi H_i, ma non al terzo.

E infatti suppongasi, ad es., se è possibile, che $h_{1,2}$ sia un elemento comune ad H_1, H_2 non appartenente ad H_3; e sia h_3 un elemento di H_3, certo esistente, fuori di H_1 ed H_2.

Il prodotto $h_{1,2} h_3$ non può trovarsi in H_3, perchè altrimenti ivi si troverebbe anche $h_{1,2} h_3 \cdot h_3^{-1} = h_{1,2}$; non può trovarsi in H_1 o in H_2, perchè altrimenti ivi si troverebbe anche $h_{1,2}^{-1} \cdot h_{1,2} h_3 = h_3$; quindi esso non può neppure trovarsi in $H_1 + H_2 + H_3$, cioè in G.

Ma questo è assurdo, dunque l'affermazione fatta è dimostrata.

4. Ebbene indichiamo con K il sottogruppo di G, secondo cui si intersecano a due a due i sottogruppi H_i e poniamo

$$H_1 = K + X_1 , \quad H_2 = K + X_2 , \quad H_3 = K + X_3 ,$$

indi

$$G = K + X_1 + X_2 + X_3 ,$$

con l'ipotesi che X_i sia l'insieme degli elementi di H_i non appartenenti a K.

Dico, in primo luogo, che:

a) Il prodotto di due qualunque dei sistemi X_i è uguale al terzo; di guisa che *essi saranno a due a due permutabili.*

E infatti sia r, s, t una qualunque permutazione degli indici 1, 2, 3 e sia x_r (x_s) un qualsiasi elemento di X_r (di X_s), indi di H_r (di H_s), ma non di H_s (di H_r). Il prodotto $x_r x_s$, non potendo appartenere, per ragioni ormai evidenti, nè ad H_r, nè ad H_s, apparterrà ad H_t. Ma $H_t = K + X_t$ e K è in H_r ed H_s, dunque $x_r x_s$ appartiene ad X_t.

Ciò significa intanto che il prodotto $X_r X_s$ è contenuto in X_t.

Adesso sia x_t un qualsiasi elemento di X_t, x'_r un qualsiasi elemento di X_r ed y l'elemento di G per il quale è $x_t = x'_r y$. L'elemento y non può trovarsi nè in H_r, nè in H_t, dunque apparterrà ad H_s, ma non a K, cioè ad X_s.

Segue che X_t è contenuto nel prodotto $X_r X_s$; ossia, per quanto è stato già dimostrato, che è, come volevasi, $X_r X_s = X_t$.

5. Dico, in secondo luogo, che:

b) Il quadrato di ciascun sistema X_i è K.

E infatti da $X_r X_s = X_t$ si deduce $X_r^2 X_s = X_r X_t$. Ma $X_r X_t$, per il teorema dimostrato è X_s; dunque resta $X_r^2 X_s = X_s$.

Ciò significa che, se x_r, x'_r sono elementi qualsiasi di X_r, e x_s è un elemento qualsiasi di X_s, esiste in X_s un elemento x'_s per il quale è

$$x_r x'_r x_s = x'_s,$$

ossia

$$x_r x'_r = x'_s x_s^{-1}.$$

Ora qui $x_r x'_r$ è un elemento di H_r, $x'_s x_s^{-1}$ è un elemento di H_s e l'intersezione di H_r ed H_s è K, dunque $x_r x'_r$ è un elemento di K; cioè X_r^2 è contenuto in K.

Ma se k è un qualsiasi elemento di K, x_r un qualsiasi elemento di X_r e z è l'elemento di H_r per il quale è $k = x_r z$, z è un elemento di H_r esterno a K, cioè di X_r; dunque anche K è contenuto in X_r^2 ed è, come volevasi, $X_r^2 = K$.

6. Le proposizioni *a)* e *b)* mostrano che, rispetto all'operazione di prodotto fra sistemi, K, X_1, X_2, X_3 formano un gruppo quadrinomio, e che questo resta riferito in isomorfismo meriedrico a G, ove si faccia corrispondere a ciascun elemento di G quello dei sistemi K, X_1, X_2, X_3 che lo contiene.

Ma allora K è invariante in G e il teorema oggetto di questa Nota è pienamente dimostrato.

Avvertasi che H_1, H_2, H_3, essendo i sottogruppi di G corrispondenti nel detto isomorfismo ai sottogruppi ciclici del 2º ordine del gruppo quadrinomio, sono, al pari di K, invarianti in G.

Mostreremo in una Nota successiva il profitto che dal teorema quivi stabilito può esser tratto per la teoria, dovuta al CIPOLLA, dei sottogruppi fondamentali di un gruppo.

Morano Calabro, 24 agosto 1926.