KILKA UWAG

O LICZBIE RÓŻNYCH WARTOŚCI

JAKIE FUNKCYA MOŻE PRZYBIERAĆ W SKUTKU PRZESTAWIEŃ ZMIENNYCH DO NIÉJ WCHODZĄCYCH.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 4 Sierpnia 1870 r.

---

1. Niech

$$v = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

będzie funkcyą *m* zmiennych niezależnych. Jeżelibyśmy w miejsce tych zmiennych podstawili jakieś dowolne wartości, funkcya v otrzymałaby odpowiednią wartość v_1; a oznaczając szereg tych nowych wartości przez P_1, mielibyśmy równanie $v_1 = f(P_1)$. Może się trafić, że po podstawieniu innego jakiegoś szeregu P_2, obok równania $v_2 = f(P_2)$, będzie istniało drugie, mianowicie $v_1 = v_2$, lub co na jedno wychodzi, $f(P_1) = f(P_2)$. Gdy ilości składające oba szeregi P_1 i P_2 są te same, powiadamy, że równanie $v_1 = v_2$ wtedy tylko za istniejące rozumieć będziemy, jeżeli się utrzyma przy wszelkich wartościach ilości zmiennych. Gdyby zaś było v_1 różne od v_2, różność ta nie przestaje istnieć, chociażby zamieniała się na równość, przy pewnych szczególnych wartościach tych zmiennych.

2. Z określenia równości i różności wartości funkcyi v, wypada, że wartości zmiennych w jéj skład wchodzących nie wpływają bynajmniej na liczbę jéj równych lub różnych wartości, z czego wynika:

a) że wartości funkcyi otrzymamy przestawiając tylko ilości zmienne,

b) że gdy ilości zmienne zwiążemy pewnemi warunkami, a mianowicie takiemi, aby wszystkie były różne między sobą; przy takich ich wartościach uważane wartości funkcyi, pozostaną względem siebie takiemi, jakiemiby były przy wszelkich wartościach tych ilości zmiennych. Ponieważ równanie dwumienne

$$z^m - 1 = 0$$

ma *m* pierwiastków różnych, będzie dogodnie uważać nasze zmienne za pierwiastki tego równania.

3. Z powodu że z m ilości, $1.2.3\ldots m = m!$ wszystkich przemian utworzyć można, funkcya v najwyżéj $m!$ różnych wartości przyjmuje. Pośród tych wartości funkcyj, równych sobie lub różnych poszukiwać będziemy. Aby zaś wszystkie te wartości otrzymać, potrzeba w funkcyi v za szereg zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ wszystkie $m!$ przemian po kolei podstawić. Gdy więc w miejsce przemiany $x_1 x_2 \ldots x_m$, piszemy inną $x_\alpha x_\beta \ldots x_\nu$, (w szeregu liczb $\alpha, \beta, \ldots \nu$, wszystkie są między sobą różne, i stanowią szereg $1, 2, 3, \ldots m$ inaczéj uporządkowany), otrzymujemy inną wartość funkcyi:

$$v_1 = f(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu),$$

a o tem cośmy wykonali, mówi się, że w danéj funkcyi dokonanem zostało *podstawienie* wyrażone przez symbol:

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_m \\ x_\alpha\, x_\beta\, x_\gamma \ldots x_\nu \end{pmatrix}$$

Porównywając ten symbol z wartościami v_1 i v, widzimy, że v_1 od v różni się podstawieniem x_α za x_1, x_β za x_2, x_γ za $x_3 \ldots x_\nu$ za x_m, w funkcyi v dokonanem, co symbol (1) doskonale przedstawia. Jeżeli symbol (1) ma tylko oznaczać dopiero co wymienione działanie, co zakładamy, przestawienie dowolne kolumn go składających znaczenia jego nie zmieni. Tak więc, każdy symbol podstawienia, lub krócéj, każde podstawienie

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \ldots x_{\nu_1} \\ x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}, \ldots x_{\nu_2} \end{pmatrix},$$

przez przestawienie jego kolumn do kształtu (1) sprowadzić można, nie naruszając przez to jego pierwotnego znaczenia.

4. Weźmy pod uwagę podstawienie (2) złożone z m kolumn. Jeżeli każde l kolumn ($l < m$) przedstawiają w szeregu górnym inną kombinacyę jak w szeregu dolnym, i jeżeli cały szereg górny stanowi tę samą kombinacyę co szereg dolny, podstawienie takie nazywa się *kołowém*. Podstawieniu kołowemu można nadać postać:

$$\begin{pmatrix} x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots, x_\nu \\ x_\beta, x_\gamma, \ldots\ldots, x_\alpha \end{pmatrix}.$$

Wiadomo jest, że każde podstawienie daje się rozdzielić na podstawienia *kołowe cząstkowe*.

Gdy α jest pierwiastkiem urojonym równania $x^m - 1 = 0$, szereg wszystkich pierwiastków wyrazi się przez:

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^m.$$

Kładąc zatém,

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \alpha^2,\ x_3 = \alpha^3, \ldots x_m = \alpha^m$$

wypada $x_{m+\mu} = x_\mu$.

Dodajmy do znaczku każdéj z ilości $x_1, x_2, \ldots, x_m$, liczbę całkowitą dodatną $\mu < m$, otrzymamy

$$x_{1+\mu}, x_{2+\mu}, \ldots x_{m+\mu} = x_{1+\mu} = x_{1+\mu}, x_{2+\mu}, \ldots x_m, x_1, x_2, \ldots x_\mu,$$

na zasadzie powyższéj uwagi. Nowy ten szereg podpiszmy pod pierwszym tak, aby każde dwie ilości x_α i $x_{\alpha+\mu}$ stanowiły jednę kolumnę pionową. W ten sposób znajdziemy następujące podstawienie

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_m \\ x_{1+\mu}, x_{2+\mu}, \ldots x_{m+\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_m \\ x_{1+\mu}, x_{2+\mu}, \ldots x_\mu \end{pmatrix}.$$

Otóż można dowieść, że wiele razy μ jest liczbą pierwszą względem m, tyle razy podstawienie (1) jest kołowem. Ztąd zaś wypada, że gdy m jest liczbą pierwszą, podstawienie (1) jest zawsze kołowém dla $\mu < m$, i to samo ma miejsce dla m jakiegokolwiek, gdy $\mu = 1$. Jeżeli m jest wielokrotnością liczby μ, podstawienie (1) rozdzieli się na μ podstawień kołowych cząstkowych, z których każde jest złożonem z $\frac{m}{\mu}$ kolumn (*).

Podstawienie (1) będziemy zawsze oznaczali przez $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu+1} \end{pmatrix}$ zaś znak $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\mu \end{pmatrix}$ wyobrażać będzie podstawienie jakiekolwiek.

5. Twierdzenie I. Gdy mamy daną przemianę P_1 z m ilości danych i podstawienie $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, za jego pomocą otrzymamy z przemiany P_1 przemianę P_2; stosując do téj ostatniéj to samo podstawienie, otrzymamy przemianę P_3, i tak daléj działając dojdziemy do takiéj przemiany P_l że następująca będzie już przemianą P_1. Otóż, przemiany

$$P_1, P_2, P_3, \ldots P_l$$

w opisany sposób otrzymane, mają tę własność, że którebądź z podstawień

(1) $$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \\ P_3 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} P_1 \\ P_l \end{pmatrix}$$

do nich zastosowane, doprowadzi zawsze do tego samego szeregu przemian, inaczej tylko uporządkowanego.

Uważmy najprzód, że wypisane przemiany w liczbie l są wszystkie między sobą różne, i te tylko które za pomocą podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, w opisany w twierdzeniu sposób, otrzymać można. Z tego powodu przemiana P_l, za pomocą podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, dać może tylko jednę z poprzedzających ją $P_\alpha (\alpha < l)$, która także powstała za pomocą tego samego podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ z przemiany $P_{\alpha-1}$. A że z dwóch różnych przemian P_l i $P_{\alpha-1}$, przy użyciu tego samego podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, dwóch jednakowych przemian P_α otrzymać nie można, przemianą zatém P_α musi być koniecznie przemiana P_1, i pierwsza część naszego twierdzenia jest dowiedzioną.

Ponieważ, na podstawie w téj chwili dowiedzionéj prawdy, za pomocą podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ z szeregu l wypisanych przemian, otrzymujemy szereg następujący:

$$P_2, P_3, \ldots P_l, P_1,$$

a każde z podstawień (1), jest równoważne kilka razy zastosowanemu podstawieniu $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ do pierwotnego szeregu przemian, widocznem jest, że każde z podstawień (1) może tylko zmienić porządek przemian pierwotnie wypisanych, c. b. d. d.

Wypisany w twierdzeniu szereg przemian, nazwiemy *przemianami nierozdzielnemi względem podstawienia danego* $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$; podstawienia zaś (1) będziemy nazywali *podstawieniami przez te przemiany wy-*

(*) Wyżéj przytoczone określenie podstawienia kołowego, i użycie pierwiastków równania dwumiennego ($x^m - 1 = 0$) w dowodzeniu zamieszczonego tu twierdzenia Cauchy'ego, podane zostały po raz pierwszy przez profesora Babczyńskiego, przy wykładzie Algebry Wyższéj w Szkole Głównéj Warszawskiéj w 1864 r. Nadawszy takie same znaczenia ilościom zmiennym wchodzącym w skład jakiéjkolwiek funkcyi, udało mi się dowieść kilka twierdzeń odnoszących się do liczby różnych jéj wartości, jeszcze w roku 1866, które stanowią przedmiot niniejszéj rozprawy.

znaczonemi.

6. Twierdzenie II. Liczba l przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu+1} \end{pmatrix}$, wyraża się

$$l = \frac{m}{\rho},$$

gdzie ρ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb m i μ.,

Ponieważ podstawieniém danėm $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu+1} \end{pmatrix}$ jest następujące :

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_m \\ x_{1+\mu}, x_{2+\mu}, \ldots x_{m+\mu} \end{pmatrix},$$

każda z przemian względem niego nierozdzielnych, otrzyma się z wzoru

(1) $$x_{1+\omega\mu}, x_{2+\omega\mu}, x_{3+\omega\mu}, \ldots, x_{m+\omega\mu}$$

zastępując w nim ω, przez liczby : $0, 1, 2, \ldots l-1$.

Napisawszy w (1) za ω liczbę l, przemana tak otrzymana zamieni się na pierwszą podług poprzedzającego twierdzenia, a na zasadzie naszéj ugody, mieć będziemy

$$l\mu - km = 0,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą nieoznaczoną. Wziąwszy ją i liczbę l za niewiadome tak napisanego równania, znajdujemy :

$$l = \frac{m}{\rho}t, \quad k = \frac{\mu}{\rho}t.$$

gdzie t jest liczbą całkowitą, a ρ największym wspólnym dzielnikiem liczb m i μ.

Widocznem jest teraz, że najmniéjsza wartość l różna od zera, i zadosyć czyniąca naszemu równaniu, to jest, $l = \frac{m}{\rho}$, jest liczbą przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu+1} \end{pmatrix}$ c. b. d. o.

Wniosek. Gdy liczby m i μ są pierwsze względem siebie, wtedy $\rho = 1$ a $l = m$. A zatém przemian z m ilości, nierozdzielnych względem podstawienia kołowego, jest m.

Przykład. Dana przemiana pierwotna $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ i dane podstawienie $\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \\ x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2 \end{pmatrix}$, przemiany nierozdzielne względem tego podstawienia są :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$$

$$x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2,$$

$$x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4,$$

których liczba ze wzoru $l = \frac{m}{\rho}$, daje się oznaczyć, albowiem $\mu = 2$, $m = 6$, więc $\rho = 2$, a zatem

$$l = \frac{6}{2} = 3.$$

Przykład Dana przemiana pierwotna $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, i dane podstawienie kołowe

$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \\ x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{pmatrix}$; przemiany względem niego nierozdzielne są następujące:

$$\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \\ x_5, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \\ x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, \\ x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, \\ x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, \\ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, \end{array}$$

których jest $l = m = 6$.

Twierdzenie III. Jeżeli mamy podstawienie dające się rozdzielić na α cząstkowych kształtu $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_x + 1} \end{pmatrix}$, gdzie m_x oznacza liczbę kolumn cząstkowe podstawienie składających, a x którąbądź z liczb całkowitych między 1 i α zawartych, tak, że $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_\alpha = m$; jeżeli ρ_x jest największym spólnym dzielnikiem liczb m_x i μ_x; l przemian nierozdzielnych względem takiego podstawienia, wyraża się:

$$l = \frac{m_1 . m_2 . m_3 . \ldots m_\alpha}{\rho_1 . \lambda_2 . \rho_2 . \lambda_3 . \rho_3 . \lambda_4 . \ldots \lambda_\alpha . \rho_\alpha}$$

gdzie λ_x wyobraża największy wspólny dzielnik, liczb:

$$\frac{m_1 . m_{2 . 3} . \ldots m_{x-1}}{\rho_1 . \lambda_2 . \rho_2 . \lambda_3 . \rho_3 . \lambda_4 . \lambda_x . \rho_{x-1}} \quad \text{i} \quad \frac{m_x}{\rho_c}$$

dla każdego x pomiędzy 2 i α.

Wyobraźmy sobie że wypisaliśmy wszystkie l przemian, o liczbę których nam chodzi. Z podstawienia danego odrzućmy jednocząstkowe, złożone z ostatnich m_α kolumn, i względem podstawienia wyrażonego przez symbol pozostały, utwórzmy przemiany nierozdzielne z $m - m_\alpha$ pozostałych ilości; liczbę ich oznaczmy przez $F_{\alpha-1}$.

Względem podstawienia odrzuconego, złożonego z m_α kolumn, utwórzmy także przemiany nierozdzielne z odrzuconych m_α ilości, i każdą z nich dopisujmy po kolei do każdéj z $F_{\alpha-1}$, w ten sposób, że gdy się raz wyczerpną, zaczynamy powtórnie takie same działanie w dalszym ciągu.

Ponieważ przemian jednych, jest $\frac{m_\alpha}{\rho_\alpha} = \varphi$, mniéj jak drugich $F_{\alpha-1}$, (zrobić tak zawsze można); po wydzieleniu liczby $F_{\alpha-1}$ przez φ, na resztę otrzymamy r_α, taką liczbę, że przemiana do ostatniéj z $F_{\alpha-1}$ dopisana, otrzyma się z pierwszéj za pomocą następującego podstawienia:

$$\begin{pmatrix} x_{m-m_\alpha+1}, & x_{m-m_\alpha+2}, & \ldots & x_m \\ x_{m-m_\alpha+r_\alpha\mu_\alpha+1}, & x_{m-m_\alpha+r_\alpha\mu_\alpha+2}, & \ldots & x_{m+r_\alpha\mu_\alpha} \end{pmatrix}$$

Z drugiéj strony wiemy, że liczba przemian nierozdzielnych względem tego podstawienia, jest równą $\frac{m_\alpha}{p_\alpha}$, jeżeli p_α wyobraża największy wspólny dzielnik liczb m_α i $\mu_\alpha r_\alpha$, a zatém liczba przemian l, wyrazi się:

$$l = F_{\alpha-1} . \frac{m_\alpha}{p_\alpha} . \qquad (1)$$

Oznaczając następnie przez λ_α, największy wspólny dzielnik dla φ i r_α, jest oczywiście $p_\alpha = \lambda_\alpha . \rho_\alpha$, z kąd równanie (1) przekształca się na

(2) $$l = F_{\alpha-1} \cdot \frac{m_\alpha}{\lambda_\alpha \cdot \rho_\alpha},$$

w którym, po uwzględnieniu równania $F_{\alpha-1} = Q\varphi + r_\alpha$, widzimy, że λ_α oznacza także największy wspólny dzielnik liczb $F_{\alpha-1}$ i φ.

Podobnym sposobem jak liczbę przemian l wyraziliśmy przez $F_{\alpha-1}$, wyrazimy $F_{\alpha-1}$ przez $F_{\alpha-2}$, $F_{\alpha-2}$ przez $F_{\alpha-3}$ i t. d; nareszcie, wyrazimy F_2 przez F_1 a $F_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$. Wypisując pod sobą wartości na l, $F_{\alpha-1}$, $F_{\alpha-2}$, ... F_2, F_1, otrzymamy następujące równania:

$$l = F_{\alpha-1} \cdot \frac{m_\alpha}{\lambda_\alpha \cdot \rho_\alpha},$$

$$F_{\alpha-1} = F_{\alpha-2} \cdot \frac{m_{\alpha-2}}{\lambda_{\alpha-1} \cdot \alpha\rho_{-1}},$$

$$F_{\alpha-2} = F_{\alpha-3} \cdot \frac{m_{\alpha-2}}{\lambda_{\alpha-2} \cdot \rho_{\alpha-2}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \rho_2}{m_2},$$

$$F_1 = \frac{m_1}{\rho_1},$$

a z nich

(3) $$l = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots m_\alpha}{\rho_1 \cdot \lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot \lambda_3 \cdot \rho_3 \cdot \lambda_4 \cdot \ldots \lambda_\alpha \cdot \rho_\alpha}.$$

Wniosek. Gdy w szczególności μ_1, μ_2, μ_3, ... μ_α są odpowiednio względem m_1, m_2, m_3, ... m_α liczbami pierwszemi, każda z liczb ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... ρ_α jest wtedy jednością, a wzór otrzymany przechodzi na następujący:

$$l = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_\alpha}{\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \ldots \lambda_\alpha}$$

w którym λ_x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb:

$$\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_{x-1}}{\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \ldots \lambda_{x-1}} \quad \text{i} \quad m_x$$

przy wszelkich wartościach x od 2 do α.

Uwaga. We wzorze (3), oznaczmy liczbę $\frac{m_1 \cdot m_2 \ldots m_n}{\rho_1 \cdot \lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot \lambda_3 \ldots \lambda_n \cdot \rho_n}$ przez p_n, i weźmy jeszcze liczbę:

$$\frac{m_{n+1} \cdot m_{n+2} \ldots m_{n'}}{\lambda_{n+1} \cdot \rho_{n+1} \cdot \lambda_{n+2} \cdot \rho_{n+2} \ldots \lambda_{n'} \cdot \rho_{n'}}$$

w której λ_{n+1} jest największym wspólnym dzielnikiem liczb p_n i $\frac{m_{n+1}}{\rho_{n+1}}$. Oznaczając przez τ_{n+2} największy wspólny dzielnik liczb: $\frac{p_n}{\lambda_{n+1}}$ i $\frac{m_{n+2}}{\rho_{n+2}}$, a przez ς_{n+2} największy wspólny dzielnik liczb: $\frac{m_{n+1}}{\rho_{n+1}}$ i $\frac{m_{n+2}}{\rho_{n+2}}$, będzie $\lambda_{n+2} = \tau_{n+2} \cdot \varsigma_{n+2}$. Oznaczając następnie, największy wspólny dzielnik liczb:

$\dfrac{p_{\cdot}}{\lambda_{n+1}\tau_{n+2}}$ i $\dfrac{m_{n+3}}{\rho_{n+3}}$ przez τ_{n+3}, a liczb: $\dfrac{m_{n+1}.m_{n+2}}{\rho_{n+1}.\varsigma_{n+2}.\rho_{n+2}}$ i $\dfrac{m_{n+3}}{\rho_{n+3}}$ przez τ_{n+3}, będzie $\lambda_{n+3}=\tau_{n+3}.\varsigma_{n+3}$, i tak daléj postępując znajdziemy także $\lambda_{n'}=\tau_{n'}.\varsigma_{n'}$.

Z równania tego wypada :

$$\frac{m_{n+1}.m_{n+2}\ldots m_{n'}}{\lambda_{n+1}.\rho_{n+1}.\lambda_{n+2}.\rho_{n+2}\ldots\lambda_{n'}.\rho_{n'}}=\frac{1}{\lambda_{n+1}.\tau_{n+2}.\tau_{n+3}\ldots\tau_{n'}}\cdot\frac{m_{n+1}.m_{n+2}\ldots m_{n'}}{\rho_{n+1}.\sigma_{n+2}.\varsigma_{n+2}\ldots\sigma_{n'}.\rho_{n'}}.$$

Położywszy za czynnik pierwszy drugiéj strony tego równania $\dfrac{1}{q_{n'}}$, a za czynnik drugi $p_{n'}$, będzie:

(4) $$\frac{m_1.m_2.m_3\ldots m_{n'}}{\rho_1.\lambda_2.\rho_2.\lambda_3.\rho_3.\lambda_4\ldots\lambda_{n'}.\rho_n}=\frac{p_n.p_{n'}}{q_{n'}},$$

gdzie p_n wyobraża liczbę przemian nierozdzielnych względem podstawienia złożonego z n podstawień cząstkowych; $p_{n'}$ liczbę przemian nierozdzielnych względem podstawienia złożonego z $n'-n$ podstawień cząstkowych; zaś $q_{n'}$ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb p_n i $p_{n'}$.

Rozciągając podobne rozumowanie daléj, przyjdziemy do równania

$$l=\frac{p_n.p_{n'}.p_{n''}\ldots p_{n^{(\alpha-1)}}}{q_{n'}.q_{n''}.q_{n'''}\ldots q_{n^{(\alpha-1)}}},$$

które znaczy co następuje: jeżeli dane podstawienie rozdzielić można na α cząstkowych jakichkolwiek, i jeżeli $p_n, p_{n'}, p_{n''}, \ldots p_{n^{(\alpha-1)}}$, są liczbami przemian nierozdzielnych względem pomienionych podstawień, *najmniejsza wspólna wielokrotna* liczb $p_n, p_{n'}, p_{n''}, \ldots p_{n^{(\alpha-1)}}$, jest liczbą przemian nierozdzielnych względem podstawienia danego.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15},$$

i dane podstawienie

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15} \\ x_7, x_8, x_9, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{10}, x_{11} \end{pmatrix},$$

oznaczyć liczbę przemian nierozdzielnych względem tego podstawienia. Mamy w tym przypadku $m=15$, $m_1=9$, $m_2=6$, $\mu_1=6$, $\mu_2=2$, $\rho_1=3$, $\rho_2=2$, $\lambda_2=3$. Zatém liczba przemian jest $l=\dfrac{m_1.m_2}{\rho_1.\lambda_2.\rho_2}=\dfrac{9.6}{3.3.2}=3$; przemianami zaś są :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15},$$

$$x_7, x_8, x_9, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{10}, x_{11},$$

$$x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_1, x_2, x_3, x_{14}, x_{15}, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13},$$

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}.$$

i dane podstawienie :

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \\ x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_7 \end{pmatrix},$$

oznaczyć liczbę przemian nierozdzielnych względem tego podstawienia. Mamy w tym razie $m=10$, $m_1=6$, $m_2=4$, $\mu_1=5$, $\mu_2=1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=1$, $\lambda_2=2$. Liczba przemian jest: $l=\dfrac{m_1.m_2}{\lambda_2}=\dfrac{6.4}{2}=12$;

zaś przemianami są :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10},$$
$$x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_7,$$
$$x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_7, x_8,$$
$$x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_7, x_8, x_9,$$
$$x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_7, x_8, x_9, x_{10},$$
$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_8, x_9, x_{10}, x_7,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, x_7, x_8,$$
$$x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}, x_7, x_8, x_9,$$
$$x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9, x_{10},$$
$$x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_9, x_9, x_{10}, x_7,$$
$$x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_2, x_{10}, x_7, x_8,$$
$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_{10}, x_7, x_8, x_9,$$

7. Niech symbol $\binom{P}{P_{\mu+1}}$ wyobraża podstawienie kołowe, a zatém, dające się napisać pod postacią

(1) $$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \dots x_m \\ x_{\mu+1}, & x_{\mu+2}, & x_{\mu+3}, & \dots x_{\mu+m} \end{pmatrix}$$

Jeżeli z symbolu tego wyjmiemy ilość x_α, a obok niéj napiszemy tę, która się pod nią znajduje, to jest: $x_{\alpha+\mu}$, daléj tę, która się pod $x_{\alpha+\mu}$ znajduje, to jest: $x_{\alpha+2\mu}$; to postępując w podobny sposób daléj, dojdziemy zawsze do takiéj ilości $x_{\alpha+\omega\mu}$, w któréj $\omega=m$. Gdyby bowiem tak się nie stało, przyszlibyśmy do innéj ilości $x_{\alpha+\omega m}$ dla któréj $\omega<m$, i w tym przypadku w symbolu (1), $\omega<m$ kolumn, stanowiłyby w wierszach górnym i dolnym tę samą kombinacyę. Symbol więc (1) nie przedstawiałby podstawienia kołowego z m ilości, co jest przeciwném założeniu. A zatém, dojdziemy zawsze do takiéj ilości $x_{\alpha+\omega\mu}$, w któréj $\omega=m$. Ale, gdy $\omega=m$, $x_{\alpha+\omega\mu}=x_\alpha$, więc prowadząc daléj podobne działanie od tego miejsca, doszlibyśmy powtórnie do tego samego wypadku. Kończymy przeto kładąc $\omega=m-1$, i tym sposobem otrzymujemy przemianę :

(1') $$x_\alpha, x_{\alpha+\mu}, x_{\alpha+2\mu}, x_{\alpha+3\mu}, \dots x_{\alpha+(m-1)\mu}$$

którą będziemy nazywali *przemianą odpowiednią podstawieniu* (1). Pisząc we wzorze (1') za μ wszystkie liczby pierwsze względem m i mniejsze od m, otrzymamy ν przemian, jeżeli ν jest liczbą liczb pierwszych mniejszych od m.

Przykład. Dana przemiana, pierwotna

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.$$

Wszystkie liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 są pierwsze względem 7, a więc sześć przemian odpowiednich sześciu podstawieniom kołowym, za pomocą wzoru (1') otrzymamy. Przemianami temi są :

$$x_1, x_{1+1}, x_{1+2}, x_{1+3}, x_{1+4}, x_{1+5}, x_{1+6},$$
$$x_1, x_{1+2}, x_{1+2\cdot 2}, x_{1+3\cdot 2}, x_{1+4\cdot 2}, x_{1+5\cdot 2}, x_{1+6\cdot 2},$$
$$x_1, x_{1+3}, x_{1+2\cdot 3}, x_{1+3\cdot 3}, x_{1+4\cdot 3}, x_{1+5\cdot 3}, x_{1+6\cdot 3},$$
$$x_1, x_{1+4}, x_{1+2\cdot 4}, x_{1+3\cdot 4}, x_{1+4\cdot 4}, x_{1+5\cdot 4}, x_{1+6\cdot 4},$$
$$x_1, x_{1+5}, x_{1+2\cdot 5}, x_{1+3\cdot 5}, x_{1+4\cdot 5}, x_{1+5\cdot 5}, x_{1+6\cdot 5},$$
$$x_1, x_{1+6}, x_{1+2\cdot 6}, x_{1+3\cdot 6}, x_{1+4\cdot 6}, x_{1+5\cdot 6}, x_{1+6\cdot 6}.$$

które po wykonaniu działań, przechodzą na następujące

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,$$
$$x_1,\ x_3,\ x_5,\ x_7,\ x_2,\ x_4,\ x_6,$$
$$x_1,\ x_4,\ x_8,\ x_3,\ x_6,\ x_2,\ x_5,$$
$$x_1,\ x_5,\ x_2,\ x_6,\ x_3,\ x_7,\ x_4,$$
$$x_1,\ x_6,\ x_4,\ x_2,\ x_7,\ x_5,\ x_3,$$
$$x_1,\ x_8,\ x_6,\ x_5,\ x_4,\ x_3,\ x_2,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7;$$

albowiem w miejsce każdego iloczynu $\omega\mu$, należy pisać resztę wypadłą z podzielenia jego przez ilość m. Reszty takie otrzymamy zawsze i wszystkie różne między sobą, bo μ jest pierwsze względem m, a $\omega < m$.

8. a) Widzieliśmy [**5**. Tw. I), że przemiany *nierozdzielne względem podstawienia danego*, mają tę własność, że liczby ich i jakości żadne z *podstawień przez nie oznaczonych* nie zmienia. Gdy jednak przeciwnie, mamy przemiany posiadające tę ostatnią własność, nie można sądzić, ażeby one były nierozdzielnemi względem jednego tylko podstawienia. Owszem, wiele razy tak się zdarzy, wolno nam zawsze myśleć, że pomiędzy podstawieniami przez te przemiany oznaczonemi, znajdzie się pewna ich liczba od liczby wszystkich mniejsza, za pomocą których wszystkie te przemiany utworzyć będzie można. Podstawienia te, będą miały tę własność, że przemiany względem każdego z nich zosobna nierozdzielne, mają tylko jedną przemianę (pierwotną) wspólną. W szczególnym tylko przypadku trafić się może jedno takie podstawienie. Przemiany o których teraz mówiliśmy nazwiemy *pzemianami niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych.*

b) Niech symbol $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\mu \end{pmatrix}$ wyobraża podstawienie jakiekolwiek z m ilości $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$. Jeżeli do niego zastosujemy podstawienie wyrażone przez symbol $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\alpha \end{pmatrix}$, także jakiekolwiek, otrzymamy nowy symbol $\begin{pmatrix} P_\alpha \\ P_\rho \end{pmatrix}$, który razem z symbolem $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\mu \end{pmatrix}$ wyobraża tę myśl: że w jaki sposób przemiana P_α powstała z przemiany P_1, w taki sam sposób powstała przemiana P_ρ z przemiany P_μ. Z tego wypada, że gdy nie zwrócimy żadnéj uwagi na ilości $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, ale na miejsca przez te ilości zajęte, możemy powiedzieć, że w jaki sposób powstało P_μ z P_1, w taki sam sposób powstało P_ρ z P_α. Jeżeli zatém podstawienie $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\mu \end{pmatrix}$ było względem ilości $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ kołowém, podstawienie $\begin{pmatrix} P_\alpha \\ P_\rho \end{pmatrix}$ względem ilości $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots x_\nu$ ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$, są liczby między sobą różne i stanowiące szereg $1, 2, 3, \ldots m$ inaczéj uporządkowany), będzie takiém samém.

9. Twierdzenie IV. Jeżeli we wzorze

$$x_1,\ x_{1+\mu},\ x_{1+2\mu},\ \ldots\ x_{1+(m-1)\mu},$$

za μ napiszemy wszystkie liczby pierwsze względem m, ν przemian tym sposobem utworzonych, są niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych.

Niech symbole

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_3+1} \end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_\nu+1} \end{pmatrix},$$

wyobrażają wszystkie podstawienia kołowe, jakie z m ilości być mogą; a

(2) $$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ P_{\nu-1},\ P_\nu,$$

niech będą przemianami tym podstawieniom odpowiadającemi. Którybądź z symbołów (1) można napisać w ten sposób:

$$\begin{pmatrix} x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m \\ x_{1+\mu_\varrho},\ x_{2+\mu_\varrho},\ x_{3+\mu_\varrho},\ \ldots,\ x_{m+\mu_\varrho} \end{pmatrix}$$

lub także,

$$\begin{pmatrix} x_1,\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)} \\ x_{1+\mu_\varrho},\ x_{1+(\mu_\varrho+1)},\ x_{1+(\mu_\varrho+2)},\ \ldots,\ x_{1+(\mu_\varrho+m-1)} \end{pmatrix}$$

Stosując do tego ostatniego symbolu podstawienie

$$\begin{pmatrix} x_1,\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots\ x_{1+(m-1)} \\ x_1,\ x_{1+\mu_\alpha},\ x_{1+\mu_\alpha},\ \ldots\ x_{1+(m-1)\mu_\alpha} \end{pmatrix},$$

otrzymamy nowy symbol złożony z kolumn kształtu

$$\begin{pmatrix} x_{1+\lambda\mu_\alpha} \\ x_{1+(\mu_\varrho+\lambda)\mu_\alpha} \end{pmatrix}$$

Ponieważ różnica znaczków u zmiennéj x jest równą $\mu_\alpha\mu_\varrho$, liczbie pierwszéj względem m, a zatém, podstawienie nasze po dokonaniu w niém pomienionego działania nie przestało być kołowém względem tych samych ilości. Symbole (1) wyobrażają podstawienia kołowe różne, i nowe symbole teraz otrzymane, muszą być także różnemi między sobą, ale temi samemi co tamte. Przemiany zatém (2) są niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych, *c.b.d.o.*

Uwaga. Gdy jest dana liczba m, i wszystkie liczby względem niéj pierwsze, jednę z nich którąkolwiek niech wyobraża liczba μ. Podnosząc tę liczbę μ do potęg $0, 1, 2, 3, \ldots, \nu'$, liczby w ten sposób otrzymane są także pierwszemi względem liczby m. Jeżeli w miejsce tych, weźmie się reszty wypadłe z dzielenia ich przez m, te będą także pierwszemi względem m, ale i mniejszemi od m. Otóż, znajdzie się taka liczba ν', że reszta wypadła z podzielenia liczby $\mu^{\nu'}$ przez m, będzie jednością, to jest, $=\mu^0$, i od tego miejsca wszystkie te liczby, które poprzednio wypadały i w tym samym porządku, powtarzać się będą. Takim zatém sposobem otrzymamy pewną gruppę ν' liczb pierwszych względem m. Gdy liczb wszystkich pierwszych względem m i mniejszych od m jest ν, i gdy $\nu = \nu'$, wtedy liczba μ nazywa się *pierwiastkiem pierwotnym* (racine primitive) liczby m.

Jeżeli naprzykład liczbą m jest 7, liczb względem niéj pierwszych i mniejszych jest 6. Poddając każdą z nich (1, 2, 3, 4, 5, 6,) wskazanemu wyżéj działaniu, przekonać się łatwo można, że żadna nie jest pierwiastkiem pierwotnym 7ki. Przeciwnie się dzieje z 6kę, która posiada dwie tylko liczby (1, 5) względem niéj pierwsze i mniejsze, i dla któréj jednocześnie 5ka jest pierwiastkiem pierwotnym.

Twierdzenie V. Jeżeli μ jest liczbą pierwszą względem m i mniejszą od m, przemiany utworzone z wzoru:

(1) $$x_1\ x_{1+\mu},\ x_{1+2\mu},\ \ldots\ x_{1+(m-1)\mu},$$

przez zastąpienie μ liczbami $\mu^1, \mu^2, \mu^3, \ldots \mu^{\nu'}$, są nierozdzielne względem podstawienia

(2) $$\begin{pmatrix} x_1\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots\ x_{1+(m-1)} \\ x_1,\ x_{1+\mu},\ x_{1+2\mu},\ \ldots\ x_{1+(m-1)\mu} \end{pmatrix}.$$

Jakoż, utwórzmy za pomocą danego podstawienia pewną liczbę ν' przemian. Przemianami temi są następujące :

$$
(3)\qquad
\begin{array}{l}
x_1,\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)},\\
x_1,\ x_{1+\mu},\ x_{1+2\mu},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\mu},\\
x_1,\ x_{1+\mu^2},\ x_{1+2\mu^2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\mu^2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1,\ x_{1+\mu^{\nu'}},\ y_{1+2\mu^{\nu'}},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\mu^{\nu'}}.
\end{array}
$$

Jeżeli ν' jest liczbą taką, że $\mu^{\nu'}$ po wydzieleniu przez m daje na resztę jedność, co zakładamy, przemiany (3) są nierozdzielnemi względem podstawienia (2). Ale przemiany z wzoru (1) otrzymane sposobem w twierdzeniu opowiedzianém, są temi samemi co przemiany (3), więc twierdzenie jest dowiedzionėm.

Wniosek. Gdy $\nu'=\nu$, wypada : jeżeli μ jest pierwiastkiem pierwotnym liczby m, ν przemian utworzone sposobem opisanym w [7], są nierozdzielnemi względem podstawienia (2).

Twierdzenie VI. Jeżeli μ jest taką liczbą pierwszą względem m, że za pomocą niéj, w sposób powyżéj opisany, otrzymamy ν' liczb pierwszych względem m; jeżeli nadto λ jest liczbą także pierwszą względem m, ale różną od każdéj z tam otrzymanych, podstawienia :

$$
\begin{pmatrix} x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_m \\ x_1,\ x_{1+\lambda},\ x_{1+2\lambda},\ \ldots\ x_{1+(m-1)\lambda}\end{pmatrix}
\quad \text{i} \quad
\begin{pmatrix} x_1,\ x_{1+\mu^\alpha},\ x_{1+2\mu^\alpha},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\mu^\alpha} \\ x_1,\ x_{1+\lambda\mu^\alpha},\ x_{1+2\lambda\mu^\alpha},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\lambda\mu^\alpha}\end{pmatrix}
$$

są równoważne (α jest liczbą całkowitą zawartą między 1 i $\nu'-1$).

Jakoż, ponieważ pierwsze z danych podstawień, można wyrazić przez symbol następujący :

$$
\begin{pmatrix} x_1,\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)} \\ x_1,\ x_{1+\lambda},\ x_{1+2\lambda},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\lambda}\end{pmatrix},
$$

a szereg reszt otrzymany z dzielenia liczb pierwszych μ^α, $2\mu^\alpha$, $3\mu^\alpha$, ..., $(m-1)\mu^\alpha$ przez m, daje wszystkie liczby w szeregu 1, 2, 3, ..., $m-1$ zawarte, widocznėm jest, że oba wypisane podstawienia są równoważne.

Uwaga. Jeżeli $\mu=\mu_1$, i jeżeli $\lambda=\mu_2$, jest taką liczbą pierwszą względem m, że utworzywszy z niéj ν'' liczb pierwszych i mniejszych względem m, te będą różnemi od ν' liczb, w podobny sposób z μ_1 otrzymanych; przemiany nierozdzielne względem podstawienia

$$
(1)\qquad \begin{pmatrix} x_1,\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)} \\ x_1,\ x_{1+\mu_1},\ x_{1+2\mu_1},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\mu_1}\end{pmatrix},
$$

i przemiany nierozdzielne względem podstawienia

$$
(2)\qquad \begin{pmatrix} x_1,\ x_{1+1},\ x_{1+2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)} \\ x_1,\ x_{1+\mu_2},\ x_{1+2\mu_2},\ \ldots,\ x_{1+(m-1)\mu_2}\end{pmatrix},
$$

będą miały tylko jedną przemianę (pierwotną) wspólną. Utworzywszy zatém z każdéj z przemian nierozdzielnych względem podstawienia (1) przemiany nierozdzielne względem podstawienia (2), otrzymamy prostokąt przemian niezmieniających się od podstawień przez nie oznaczonych, na mocy twierdzenia VI, a liczba ich oznaczy się przez $\nu'\nu''$. Dobierając liczbę μ_3 taką, aby się względem μ_1 i μ_2 jednocześnie podobnie zachowała jak to było z μ_2 względem μ_1, i oznaczając przez ν''' liczbę przemian jéj odpowiadających; po utworzeniu z każdéj z $\nu'\nu''$ przemian ν''', przemian nierozdzielnych względem nowego podstawienia, otrzymamy $\nu'\nu''\nu'''$ przemian, niezmieniających się od podstawień przez nie oznaczonych. Postępując w podobny sposób daléj, widoczném jest, że jeżeli liczby $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$ są względem siebie i względem m takiemi, jakiemi były liczby μ_1, μ_2, μ_3, poprzednio uważane, i jeżeli $\nu', \nu'', \nu''', \ldots \nu^{(n)}$ są liczbami przemian nierozdzielnych odpowiadających liczbom $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$; to utworzywszy podobnie jak wyżéj, przemiany niezmieniające się od podstawień przez nie oznaczonych, liczba ich wyrazi się przez iloczyn

$$l = \nu'\nu''\nu''' \ldots \nu^{(n)}.$$

Jeżeli zaś liczby μ są wszystkiemi, jakie liczbie m odpowiadają, a ν liczba wszystkich liczb pierwszych i mniejszych względem m, jest

$$l = \nu = \nu'.\nu''.\nu''' \ldots \nu^{(n)}.$$

Przykład. Niech przemianą daną będzie następująca:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$$

W przypadku teraźniejszym mamy $\nu = 6$, a biorąc $\mu_1 = 2$ i $\mu_2 = 6$, znajdujemy $\mu^0{}_1 = 1$, $\mu_1 = 2$, $\mu^2{}_1 = 4$, zatém $\nu' = 3$; następnie $\mu^0{}_1 = 1$, $\mu_2 = 6$, zatém $\nu'' = 2$, jak być powinno, bo $\nu = \nu'.\nu'' = 3.2 = 6$.

Przemiany otrzymane ugrupują się jak następuje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \quad x_1, x_3, x_5, x_7, x_2, x_4, x_6, \quad x_1, x_5, x_2, x_6, x_3, x_7, x_4,$$
$$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, \quad x_1, x_6, x_4, x_2, x_7, x_5, x_3, \quad x_1, x_4, x_7, x_3, x_6, x_2, x_5,$$

Podług twierdzenia IV wypadło, że ν przemian dopiero co uważanych, są niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych, w uwadze zaś do twierdzenia VI należącéj, okazaliśmy, że można te ν przemian uporządkować w szereg podwójny, potrójny i t. d. innemi słowy, że można znaleźć takie podstawienia, za pomocą których przemiany te można utworzyć, i znaleźć ich wszystkich liczbę, znając liczby przemian nierozdzielnych względem każdego z tych podstawień. Podstawienie względem którego ν' przemian są nierozdzielnemi, będziemy oznaczali przez symbol $\begin{pmatrix} P_m \\ P_{m,\nu'} \end{pmatrix}$

10. Jeżeli z pomiędzy pewnéj liczby przemian *niezmieniających się od podstawień przez nie oznaczonych* wybierzemy takie, które stanowią *przemiany nierozdzielne* względem pewnego oznaczonego podstawienia, każdéj z nich odpowiada szereg *przemian niezmieniających się od podstawień przez nie oznaczonych.* Wybrawszy z takiego szeregu przemiany względem pewnego oznaczonego podstawienia *nierozdzielne*, każdéj z nich znowu odpowiadać będzie szereg przemian podobnych jak wyżéj, z którym więc tak samo postąpić będziemy mogli. Działając w taki sposób do końca, znajdziemy podstawienia

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\lambda_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\lambda_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\lambda_3} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

za pomocą których otrzymują się przemiany z jakich wyszliśmy. Oznaczając przeto przez l_x liczbę przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\lambda_x} \end{pmatrix}$, liczba przemian o których była mowa wyraża się

$$L = l_1.l_2.l_3 \ldots l_n.$$

Twierdzenie VII. Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia dającego się rozłożyć na $\varkappa$ cząstkowych, w ten sposób, że symbol jego napisaćby można pod postacią

$$\left[\begin{pmatrix}P_{m_1}\\ P_{m_1,\nu'_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{m_2}\\ P_{m_2,\nu'_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{m_3}\\ P_{m_3,\nu'_3}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}P_{m_\alpha}\\ P_{m_\alpha,\nu'_\alpha}\end{pmatrix}\right]$$

wyraża się

$$L=\frac{\nu'_1.\nu'_2.\nu'_3\ldots\nu'_\alpha}{r'_2.r'_3.r'_4\ldots r'_\alpha},$$

gdzie ν_x wyobraża największy wspólny dzielnik liczb

$$\frac{\nu'_1.\nu'_2.\nu'_3\ldots\nu'_{x-1}}{r'_2.r'_3.r'_4\ldots r'_{x-1}} \quad \text{i} \quad \nu'_x,$$

dla każdego x pomiędzy 2 i α.

Pomiędzy liczbami ν'_x mogą się znaleźć liczby ν, a wzór ten prawdziwym zawsze będzie.

11. Twierdzenie VIII. Jeżeli μ_1 i μ_2 są liczbami mniejszemi od m, a ρ_1 i ρ_2 największe wspólne dzielniki: ρ_1 dla m i μ_1, zaś ρ_2 dla m i μ_2; przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix}P_1\\ P_{\mu_1+1}\end{pmatrix}$ i przemiany nierodzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix}P_1\\ P_{\mu_2+1}\end{pmatrix}$, mają:

1° przemian wspólnych $T=\frac{m}{\theta}$, gdy ρ_1 i ρ_2 są względem siebie niewielokrotne, a θ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb $\rho_1\rho_2$ i m.

2° przemian wspólnych $T=\frac{m}{\rho_2}$, gdy ρ_2 jest wielokrotnością ρ_1.

Uważmy, że każdą przemianę z nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix}P_1\\ P_{\mu_1+1}\end{pmatrix}$ otrzymamy z wzoru

$$(a)\qquad x_{\omega_1\mu_1+1},\ x_{\omega_1\mu_1+2},\ x_{\omega_1\mu_1+3},\ \ldots,\ x_{\omega_1\mu_1+m}$$

kładąc za ω_1 po kolei, liczby: $0, 1, 2, \ldots \frac{m}{\rho_1}-1$.

Tak samo, każdą przemianę z nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix}P_1\\ P_{\mu_2+1}\end{pmatrix}$, otrzymamy z wzoru

$$(b)\qquad x_{\omega_2\mu_2+1},\ x_{\omega_2\mu_2+2},\ x_{\omega_2\mu_2+3},\ \ldots,\ x_{\omega_2\mu_2+m}$$

kładąc z ω_2 po kolei, liczby: $0, 1, 2, \ldots \frac{m}{\rho_2}-1$.

Jeżeli pomiędzy przemianami (a) i (b) mają znaleźć się wspólne, powinno być $x_{\omega_1\mu_1+\alpha}=x_{\omega_2\mu_2+\alpha}$, a gdy ilości zmienne uważamy za pierwiastki równania $x^\pi-1=0$, aby założony warunek miał miejsce, musi istnieć jednocześnie równanie

$$\omega_1\mu_1-\omega_2\mu_2=km,$$

w którém k jest liczbą całkowitą.

Połóżmy

$$\mu_1=c_1\rho_1 \quad \text{i} \quad \mu_2=c_2\rho_2$$

równanie nasze zamieni się na

$$(\omega_1 c_1)\rho_1 - (\omega_2 c_2)\rho_2 = km,$$

które, gdy rozwiążemy względem $\omega_1 c_1$ i $\omega_2 c_2$, będziemy mieli:

1° jeżeli ρ_1 i ρ_2 nie są względem siebie wielokrotne

$$\omega_1 c_1 = k\frac{m}{\rho_1} + \rho_2 t \qquad \omega_2 c_2 = \rho_1 t \tag{1}$$

2° jeżeli $\rho_2 = p\rho_1$,

$$\omega_1 c_1 = k\frac{m}{\rho_1} + pt \qquad \omega_2 c_2 = t, \tag{2}$$

gdzie t jest liczbą całkowitą.

Z równań (1) otrzymamy:

$$\omega_1 \mu_1 = km + \rho_1 \rho_2 t, \qquad \omega_2 \mu_2 = \rho_1 \rho_2 t, \tag{3}$$

zaś z równań (2)

$$\omega_1 \mu_1 = km + \rho_2 t, \qquad \omega_2 \mu_2 = \rho_2 t, \tag{4}$$

Ponieważ liczba k jest całkowitą, z wzorów (3) i (4) czytamy, że przemiany wspólne otrzymujemy tylko przy takich wartościach całkowitych t, dla których iloczyn $\rho_1\rho_2 t$ lub $\rho_2 t$ nie jest podzielnym bez reszty przez m. Po takiéj ostatniéj wartości na t, nastąpi ta, przy któréj nasz iloczyn jest podzielnym przez m. Jeżeli więc tą liczbą jest T, każda liczba $T + t$ dla wszystkich wartości t od 0 do $T - 1$, daje iloczyn $\rho_1\rho_2(T + t)$ lub $\rho_2(T + t)$, który po wydzieleniu przez m pozostawia tę samą resztę co iloczyn $\rho_1\rho_2 t$ lub $\rho_2 t$. Liczba więc T wyobraża liczbę przemian wspólnych o jakich mowa w twierdzeniu.

Aby tę liczbę otrzymać potrzeba rozwiązać względem T równanie

$$\rho_1\rho_2 T = \gamma m \quad \text{lub} \quad \rho_2 T = \gamma m$$

(γ wyobraża liczbę całkowitą), z których po rozwiązaniu znajdziemy, pisząc wartości najmniejsze dodatne i różne od zera

$$T = \frac{m}{\theta} \quad \text{lub} \quad T = \frac{m}{\rho_2}$$

co było do dowodzenia.

Wniosek I. Gdy ρ_1 i ρ_2 nie są względem siebie wielokrotnemi i gdy $\rho_1\rho_2 = \lambda . m$ (λ liczba całkowita), wtedy $\theta = m$ i $T = 1$. A zatém w tym przypadku między przemianami (a) i (b) będzie tylko jedna przemiana (pierwotna) wspólna.

Wniosek II. Gdy $\rho_2 = p\rho_1$ wtedy $T = \frac{m}{\rho_2} = \frac{m}{p\rho_1}$, a gdy jeszcze $p = 1$, będzie $T = \frac{m}{\rho_1}$, to jest, wszystkie przemiany będą wspólne. Ponieważ liczby c_1 i c_2 mogą być jakiekolwiek byle tylko pierwsze względem $\frac{m}{\rho_1}$, a więc, gdy c_1 i c_2 są liczbami pierwszemi względem m, a ρ_1 dzielnikiem m, przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{e_1\rho_1+1} \end{pmatrix}$ i przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{e_2\rho_1+1} \end{pmatrix}$ są temi samemi.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},x_{14},\ x_{15}$$

i dane podstawienia, pierwsze :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15} \\ x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \end{pmatrix},$$

drugie :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15} \\ x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10} \end{pmatrix}.$$

Podług tego przypadku mamy $m=15$, $\mu_1=6$, $\mu_2=10$, więc $\rho_1=3$, $\rho_2=5$, $\rho_1\rho_2=15$, $\theta=15$; zatém przemian wspólnych będzie $T=\frac{m}{\theta}=\frac{15}{15}=1$.

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia pierwszego oznaczy się za pomocą wzoru $t=\frac{m}{\rho_1}=\frac{15}{3}=5$; przemianami temi są :

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},$$
$$x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,$$
$$x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},$$
$$x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$
$$x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9.$$

Liczba przemian nierozdzielnych względem drugiego podstawienia, oznaczy się za pomocą wzoru: $l=\frac{m}{\rho_2}=\frac{15}{5}=3$. Przemianami temi są :

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15}$$
$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10}$$
$$x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,$$

Porównywając obie gruppy przemian, widzimy, że tylko jedna jest wspólną, jak być powinno.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},$$

i dane podstawienia, jedno :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12} \\ x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_1, & x_2 \end{pmatrix}$$

drugie :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12} \\ x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}.$$

Podług tych danych mamy: $m=12$, $\mu_1=2$, $\mu_2=3$, więc, $\rho_1=2$, $\rho_2=3$, $\rho_1\rho_2=6$ i $\theta=6$, zatém będzie, $T=\frac{m}{\theta}=\frac{12}{6}=2$.

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia pierwszego, oznaczy się za pomocą wzoru $l=\frac{m}{\rho_1}=\frac{12}{2}=6$. Przemianami temi są:

$$
\begin{array}{l}
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12}\\
x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2\\
x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\\
x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\\
x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8\\
x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10}.
\end{array}
$$

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia drugiego, oznaczy się za pomocą wzoru $l=\frac{m}{\rho_2}=\frac{12}{3}=4$. Przemianami temi są:

$$
\begin{array}{l}
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\\
x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\\
x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\\
x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9.
\end{array}
$$

Porównywając obie gruppy przemian, widzimy, że mają dwie przemiany wspólne, jak z rachunku wypadło.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,$$

i dane podstawienia, jedno:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}$$

drugie:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \\ x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \end{pmatrix}.$$

Mamy obecnie $m=8$, $\mu_1=4$, $\mu_2=6$, więc $\rho_1=4$, $\rho_2=2$, zatém $\rho_1=2.\rho_2=2.2$, $T=\frac{m}{\rho_1}=\frac{8}{4}=2$.

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia pierwszego, oznaczy się za pomocą wzoru $l=\frac{m}{\rho_1}=\frac{8}{5}=2$. Przemianami temi są:

$$
\begin{array}{l}
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8\\
x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.
\end{array}
$$

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia drugiego, oznaczy się za pomocą wzoru $l=\frac{m}{\rho_2}=\frac{8}{2}=4$. Przemianami temi są:

$$
\begin{array}{l}
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_7,\ x_7,\ x_8,\\
x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_2,\\
x_5.\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\\
x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6.
\end{array}
$$

Porównywając obie grupy przemian widzimy, że mają dwie wspólne.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8$$

i dane podstawienia, jedno :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \\ x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{pmatrix}$$

drugie :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}$$

Podług tych danych mamy : $m=8$, $\mu_1=5$, $\mu_2=4$, więc, $\rho_1=1$, $\rho_2=4$ a $T=\frac{m}{\rho_2}=\frac{8}{4}=2$.

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia pierwszego, wyrazi się, $l=\frac{m}{\rho_1}=8$. Przemianami temi są :

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \\ x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \\ x_3, & x_4. & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2 \\ x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1 \\ x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3 \end{matrix}$$

Liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia drugiego, wyrazi się, $l=\frac{m}{\rho_2}=\frac{8}{4}=2$. Przemianami temi są :

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4. \end{matrix}$$

Porównywając obie grupy przemian widzimy, że mają dwie wspólne.

Przykład. Dana przemiana pierwotna :

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},$$

i dane podstawienia, jedno :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15} \\ x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{pmatrix},$$

drugie :

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15} \\ x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10} \end{pmatrix}.$$

W tym przypadku mamy $m=15$, $\mu_1=5$, $\mu_2=10$, więc, $\rho_1=\rho_2=5$, a $T=\frac{m}{\rho_1}l=\frac{15}{5}=3$

Przemianami nierozdzielnemi względem podstawienia pierwszego są :

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, \\ x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \\ x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}. \end{matrix}$$

Przemianami nierozdzielnemi względem podstawienia drugiego są:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15}$$
$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10}$$
$$x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$$

Widzimy, że przemiany obydwóch grup są wszystkie wspólne i nierozdzielne względem obydwóch danych podstawień.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$$

i dane podstawienia, pierwsze:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_1 \end{pmatrix},$$

drugie:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ x_6, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \end{pmatrix}.$$

W tym przypadku mamy, $m=6$, $\mu_1=1$, $\mu_2=5$, $\rho_1=\rho_2=1$, zatém, $T=\frac{m}{\rho_1}=\frac{m}{\rho_2}=6$. Liczba przemian i w jednym i drugim razie, wyraża się przez $l=m=6$. Przemianami temi są:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$
$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1,$	$x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,$
$x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2,$	$x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4,$
$x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3,$	$x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3,$
$x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4,$	$x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2,$
$x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,$	$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1,$

Tu widzimy, że obie grupy zawierają te same przemiany nierozdzielne względem każdego podstawienia kołowego z sześciu ilości $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

12. Niech będą podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix}$. Ażeby jedno podstawienie do drugiego zastosować, potrzeba, podług przytoczonéj wyżéj zasady [**8**, *b*], z przemiany P_{μ_1+1} utworzyć nową w ten sposób, jak przemiana P_{μ_2+1} z przemiany P_1 powstała, następnie, przemianę nowoutworzoną pod przemianą P_{μ_2+1} podpisać. Ale przemiana P_{μ_2+1} powstała z przemiany P_1 przez dodanie liczby μ_2 do znaczku każdéj ilości w niéj zachodzącéj, zatém i przemiana o którą nam chodzi z przemiany P_{μ_1+1} w ten sam sposób powstaje. Symbolem więc nowo utworzonym jest oczywiście $\begin{pmatrix} P_{\mu_2+1} \\ P_{\mu_1+\mu_2+1} \end{pmatrix}$, który równoważy się z symbolem $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$ jak to kształt jego pokazuje. Dla téj saméj przyczyny symbol powstały z drugiego, przez zastosowanie do niego pierwszego podstawienia, jest $\begin{pmatrix} P_{\mu_1+1} \\ P_{\mu_1+\mu_2+1} \end{pmatrix}$, równoważny z symbolem $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix}$.

Twierdzenie IX. Jeżeli z każdéj z przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$, utworzymy przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix}$, szereg podwójny przemian pozostanie tym samym, choćbyśmy do niego zastosowali podstawienie niezmieniające szeregu przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$, lub podstawienie, niezmieniające szeregu przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix}$.

Jakoż, jeżeli

$$P_1,\ P_{\mu_1+1},\ P_{2\mu_1+1},\ \ldots,\ P_{(l_1-1)\mu_1+1}$$

wyobrażają przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$, i jeżeli

$$P_1,\ P_{\mu_2+1},\ P_{2\mu_2+1},\ \ldots,\ P_{(l_2-1)\mu_2+1}$$

wyobrażają przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2} \end{pmatrix}$, szereg podwójny przemian jest:

$$\begin{array}{c}
P_1,\ P_{\mu_1+1},\ P_{2\mu_1+1},\ \ldots,\ P_{(l_1-1)\mu_1+1} \\
P_{\mu_2+1},\ P_{\mu_1+\mu_2+1},\ P_{2\mu_1+\mu_2+1},\ \ldots,\ P_{(l_1-1)\mu_1+\mu_2+1} \\
\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\
\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\
P_{(l_2-1)\mu_2+1},\ P_{\mu_1+(l_2-1)\mu_2+1},\ P_{2\mu_1+(l_2-1)\mu_2+1},\ \ldots,\ P_{(l_1-1)\mu_1+(l_2-1)\mu_2+1}.
\end{array}$$

Z szeregu tego widzimy, że każdy wiersz poziomy wyobraża przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$, a każdy wiersz pionowy wyobraża przemiany nierozdzielne względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix}$. Gdy zatém tak jest, twierdzenie jest oczywistém.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,$$

i dane podstawienia, jedno:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ x_3, & x_4, & x_5, & x_9, & x_1, & x_2 \end{pmatrix},$$

drugie:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ x_4, & x_5, & x_6, & x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}.$$

Podwójny szereg przemian będzie:

$$\begin{array}{ll}
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6, & x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \\
x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_1,\ x_2, & x_6,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \\
x_5,\ x_6,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, & x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_1,
\end{array}$$

Uwaga. Jeżeli przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$ jest $\frac{m}{\rho_2}$, a przemian nierozdzielnych względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_2+1} \end{pmatrix}$ jest $\frac{m}{\rho_2}$, przemian o których w twierdzeniu była mowa jest $\frac{m^2}{\rho_1\rho_2}$. Jeżeli przemiany te mają być między sobą różne, koniecznėm jest i dostatecznėm, ażeby ρ_1 i ρ_2 nie były względem siebie wielokrotnemi, i aby było $\frac{\rho_1\rho_2}{m} = \rho_3$, liczbie całkowitéj [**11**, Wnios. 1, Twier. VIII]. Założywszy to wszystko, jest $\frac{m^2}{\rho_1\rho_2} = \frac{m}{\rho_3}$, gdzie ρ_3 dzieli bez reszty m. Ztąd pokazuje się, że istnieje zawsze liczba $\mu_3 < m$ [**11**, Wnios. 2, Twier. VIII], zawierająca w sobie czynnik ρ_3 będący dla niéj i dla liczby m największym wspólnym dzielnikiem, mówię taka liczba, że przemiany o jakich mowa są nierozdzielnemi względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_3+1} \end{pmatrix}$. Gdyby było $\rho_3 = 1$, wtedy $\frac{m^2}{\rho_1\rho_2} = m$, i przemiany nasze byłyby nierozdzielnemi względem każdego podstawienia kołowego.

13. Twierdzenie X. Gdy we wzorze

$$(1)\qquad x_\alpha,\ x_{\alpha+\mu},\ x_{\alpha+2\mu},\ \ldots,\ x_{\alpha+(m-1)\mu}$$

za α napiszemy liczby :

$$1,\ \mu.\mu_1+1,\ 2\mu.\mu_1+1,\ \ldots,\ \left(\frac{m}{\rho_1}-1\right)\mu.\mu_1+1,$$

(ρ_1 jest największym wspólnym dzielnikiem liczb μ_1 i m, μ liczba pierwsza względem m); przemiany w ten sposób otrzymane są nierozdzielnemi względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu.\mu_1+1} \end{pmatrix}$.

Jakoż, napisawszy w (1) za α liczby : $\omega\mu\mu_1 + 1$ i $(\omega+1)\mu\mu_1 + 1$, znajdziemy :

$$\begin{pmatrix} x_{\omega\mu\mu_1+1},\ x_{(\omega\mu_1+1)\mu+1},\ x_{(\omega\mu_1+2)\mu+1},\ \ldots,\ x_{(\omega\mu_1+2m-1)\mu+1}, \\ x_{(\omega+1)\mu\mu_1\pm1},\ x_{(\omega+1\mu_1)\mu+1},\ x_{\omega+1\mu_1+2)\mu+1},\ \ldots,\ x_{(\omega+1\mu_1+m-)\mu+1}, \end{pmatrix}$$

Uważając obie te przemiany za symbol podstawienia, widzimy, że on jest równoważny z symbolem $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu\mu_1+1} \end{pmatrix}$, a zatém przemiany w opisany w twierdzeniu sposób z (1) powstałe są nierozdzielnemi względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu\mu_1+1} \end{pmatrix}$ jakiekolwiek jest μ, byle tylko pierwsze względem m. [**11**, Wn. 2, Twier. VIII]. Gdy w szczególności $\mu = 1$, podstawienie $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu_1+1} \end{pmatrix}$ jest kołowém.

Przykład. Dana przemiana pierwotna

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8.$$

Liczbą μ może być 3 albo 5. Weźmy jednę i drugą i przemiany im odpowiednie. Stosując wzór (1) znajdziemy trzy przemiany wraz z pierwotną następujące :

$$(2)\qquad \begin{matrix} x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8, \\ x_1,\ x_4,\ x_7,\ x_2,\ x_5,\ x_8.\ x_3,\ x_6, \\ x_1,\ x_6,\ x_3,\ x_8.\ x_5,\ x_2,\ x_7,\ x_4, \end{matrix}$$

Weźmy teraz $\mu_1 = 2$, zatém $\mu\mu_1 = 6$ w jednym przypadku i $\mu\mu_1 = 10$ w przypadku drugim. A że za $\mu\mu_1$ bierze się właściwie reszta wypadła z podzielenia $\mu\mu_1$ przez m, zatém w przypadku drugim $\mu\mu_1 = 2$. Z powodu że $m = 8$, liczba przemian nierozdzielnych względem obydwóch podstawień $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{6+1} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{2+1} \end{pmatrix}$ jest jednakową i przemiany wspólne, bo $T = \frac{m}{\rho_2} = \frac{m}{\rho_1} = \frac{8}{2} = 4$. Tworząc zatém z każdéj z przemian (2) przemiany nierozdzielne względem któregobądź z podstawień $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{6+} \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{2+1} \end{pmatrix}$

otrzymamy zawsze to samo.

$$\begin{array}{lll}
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, & x_1, x_4, x_7, x_2, x_5, x_8, x_3, x_6, & x_1, x_5, x_3, x_8, x_5, x_2, x_7, x_4, \\
x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. x_8, x_1, x_2, & x_3, x_6, x_1, x_4, x_7, x_2, x_5, x_8, & x_3, x_8, x_4, x_2, x_7, x_4, x_1, x_6, \\
x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, x_2, x_3, x_4, & x_5, x_8, x_3, x_6, x_1, x_4, x_7, x_2, & x_5, x_2, x_7, x_4, x_1, x_6, x_3, x_8, \\
x_7, x_8, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, & x_7, x_2, x_5, x_8, x_3, x_6, x_1, x_4, & x_7, x_4, x_1, x_6, x_3, x_8, x_5, x_2.
\end{array}$$

14. Jeżeli dane jest jakie podstawienie, to jak wiadomo, symbol jego rozdzielić można na pewną liczbę symbolów cząstkowych wyrażających podstawienia kołowe. Może się jednak trafić, że podstawienie wyrażone przez pewną liczbę takich symbolów cząstkowych, da się jeszcze wyrazić przez symbol złożony z podstawień kształtu $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu+1} \end{pmatrix}$ gdzie μ nie jest liczbą pierwszą względem liczby kolumn symbol ten składających. Podług tego co już wyżej powiedzieliśmy [**6**. Twier. III], liczba przemian nierozdzielnych względem takiego podstawienia oznacza się za pomocą wzoru

$$l = \frac{m_1 . m_2 . m_3 \ldots m_\alpha}{\rho_1 . \lambda_2 . \rho_2 . \lambda_3 . \rho_3 . \lambda_4 \ldots \lambda_\alpha . \rho_\alpha} .$$

Jeżeli dobierzemy takie liczby $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots \mu'_\alpha$ ażeby:

1° były mniejszemi i niepierwszemi względem liczb $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\alpha$

2° ażeby $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \ldots \rho'_\alpha$ i odpowiednio $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_\alpha$ nie były względem siebie wielokrotnemi,

3° ażeby niektóre z iloczynów $\rho_1\rho'_1, \rho_2\rho'_2, \rho_3\rho'_3, \ldots \rho_\alpha\rho'_\alpha$ były podzielnemi odpowiednio przez

$$m_1, m_2, m_3. \ldots m_\alpha ;$$

to podług twierdzenia VIII [**11**] i jego wniosków, pomiędzy przemianami nierozdzielnemi względem podstawienia składającego się z podstawień cząstkowych kszałtu $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu'+1} \end{pmatrix}$, a przemianami nierozdzielnemi względem podstawienia poprzednio uważanego, zajdzie tylko jedna pierwotna przemiana wspólna. Ponieważ liczba tych nowych przemian jest:

$$l_1 = \frac{m_1 . m_2 . m_3 . \ldots m_\alpha}{\rho' . \lambda'_2 . \rho'_2 . \lambda'_3 . \rho'_3 . \lambda'_4 \ldots \lambda'_\alpha . \rho'_\alpha} ,$$

zatém liczba przemian niezmieniających się od uważanych dwóch podstawień, wyrazi się przez iloczyn

$$L = l . l_1 = \frac{m^2_1 . m^2_2 . m^2_3 \ldots m_\alpha}{\rho_1\rho'_1\lambda_2\lambda'_2\rho_2\delta'_2\lambda_3\lambda'_3 \ldots \lambda_\alpha\lambda'_\alpha\rho_\alpha\rho'_\alpha} ,$$

Przemiany te, których teraz liczbę wyraziliśmy, są wszystkie między sobą różne, co z warunków użytych do ich utworzenia oczywiście wypada.

Biorąc pod uwagę ilorazy wypadłe z dzielenia liczb $\rho_1\rho'_1, \rho_2\rho'_2, \ldots \rho_\alpha\rho'_\alpha$ odpowiednio przez $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\alpha$, możemy dobrać liczby $\rho''_1, \rho''_2 \ldots \rho''_\alpha$ względem wypadłych teraz niewielokrotne, i w ogólności, zadosyć czyniące warunkom na początku tego ustępu wymienionym. Możemy zatém utworzyć odpowiednie podstawienie złożone z podstawień cząstkowych kształtu $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_{\mu''+1} \end{pmatrix}$, aby liczba przemian względem niego nierozdzielnych oznaczała się przez wzór:

$$l_2 = \frac{m_1 . m_2 . m_3 \ldots m_\alpha}{\rho'' . \lambda''_2 . \rho''_2\lambda''_3 1\rho''_3 \ldots \lambda''_\alpha . \rho''_\alpha} .$$

Zastosowawszy to podstawienie do każdéj z przemian poprzednio uważanych otrzymamy

$$\mathrm{L}=l_1 l_2 l_3=\frac{m^3{}_1.m^3{}_2\ldots m^3{}_\alpha}{\rho_1.\rho'_1.\rho''\lambda_2\lambda'_2\lambda''_2.\rho_2\rho'_2\rho''_2.\lambda_3\lambda'_3\lambda''_3\ldots\lambda_\alpha\lambda'_\alpha\lambda''_\alpha\rho_\alpha\rho'_\alpha\rho''_\alpha},$$

przemian różnych między sobą i niezmieniających się od trzech uważanych podstawień.

W ogólności zatém

$$\mathrm{L}=l_1.l_2.l_3\ldots l_n$$

jest liczbą przemian niezmieniających się od n uważanych podstawień a różnych między sobą. Przemiany te są niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych, co więcéj, znajduje się zawsze takie podstawienie, względem którego są nierozdzielnemi [**12**. Uwaga Twier. IX]. Maximum wielkości liczby L jest

$$\frac{m_1.m_2.m_3\ldots m_\alpha}{\lambda_2.\lambda_3.\lambda_4.\ldots\lambda_\alpha},$$

to jest liczba przemian nierozdzielnych względem podstawienia dającego się rozdzielić na α cząstkowych kołowych, i w tym przypadku, przemiany te są nierozdzielnemi względem tego podstawienia.

15. Oprócz podstawień, jakie stosowaliśmy do przemian nierozdzielnych względem podstawienia uważanego w poprzednim ustępie [**14**], możemy jeszcze podług ustępu [**10**] i Twierdzenia X [**13**] zastosować inne.

Niech $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3, \ldots \nu'_\alpha$ będą liczbami liczb pierwszych względem $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\alpha$, odpowiadającemi liczbom pierwszym $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_\alpha$. Liczba przemian nierozdzielnych dla tych liczb wyrazi się, podług twierdzenia VII [**10**], jak następuje

$$\mathrm{L}'=\frac{\nu'_1.\nu'_2.\nu'_3\ldots\nu'_\alpha}{r'_2.r'_3.r'_4\ldots r'_\alpha}.$$

Jeżeli teraz w ogólności, liczby $\nu', \nu'', \nu''', \ldots \nu^{(\alpha)}$ oznaczają liczby takie, jak w uwadze do twier. VI [**9**], to na zasadzie tego samego twierdzenia i ustępu [**10**], można położyć

$$\mathrm{L}=\mathrm{L}'.\mathrm{L}''.\mathrm{L}'''\ldots\mathrm{L}^{(\rho)}=\frac{\nu'_1.\nu'_2\ldots\nu'_\alpha}{r'_2.r'_3\ldots r'_\alpha}.\frac{\nu''_1.\nu''_2\ldots\nu''_\alpha}{r''_2.r''_3\ldots r''_\alpha}\ldots\frac{\nu_1{}^{(\rho)}.\nu_2{}^{(\rho)}\ldots\nu_\alpha{}^{(\rho)}}{r_2{}^{(\rho)}.r_3{}^{(\rho)}\ldots r_\alpha{}^{(\rho)}}.$$

Gdy jest $\rho=n$, będzie $\nu'_x, \nu''_x, \nu'''_x, \ldots \nu_x{}^{(\alpha)}=\nu_x$, liczbie wszystkich liczb pierwszych względem m_x i mniejszych od m_x dla x od 1 do α.

Z każdéj z przemian L otrzymamy l przemian, podług poprzedniego ustępu, i będziemy mieli na zasadzie twierdzenia X [**12**],

$$\mathrm{L}=\frac{\rho_1\lambda_2\rho_2\lambda_3\ldots\lambda_\alpha\rho_\alpha}{m_1.m_2\ldots m_\alpha}.\frac{\nu'_1.\nu'_2\ldots\nu_\alpha}{r'_2.r'_3\ldots r'_\alpha}.\frac{\nu''_1\,\nu''_2\ldots\nu''_\alpha}{r''_2.r''_3\ldots r''_\alpha}\ldots$$

Gdyby każda z liczb $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\alpha$ miała pierwiastek pierwotny, mogłoby być

$$\mathrm{L}=\frac{m_2.m_2\ldots m_\alpha}{\rho_1\lambda_2\rho_2\lambda_3\ldots\lambda_\alpha\rho_\alpha}.\frac{\nu_1.\nu_2\ldots\nu_\alpha}{r_1.r_2\ldots r_\alpha}.$$

Jeżeli $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\ldots=\rho_\alpha=1$ jest:

$$\mathrm{L}=\frac{m_1.m_2\ldots m_\alpha}{\lambda_2.\lambda_3\ldots\lambda_\alpha}.\frac{\nu_1.\nu_2\ldots\nu_\alpha}{r_2.r_3\ldots r_\alpha}.$$

Gdy każda z liczb $m_1, m_2, \ldots m_\alpha$ jest liczbą pierwszą, wzór ostatni jest jeszcze możebnym.

16. Jeżeli każde z podstawień cząstkowych ustępu [**14**] wyobraża dowolne podstawienie, liczba przemian niezmieniających się względem takiego podstawienia, wyraża się jak następuje :

$$L = m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots m_\alpha!$$

17. Zbierając ostatecznie wszystko o czém dotąd powiedzieliśmy, otrzymujemy następujące wzory, na liczbę przemian niezmieniających się od podstawień przez nie oznaczonych.

$$L = \frac{m_1 . m_2 \ldots m_\alpha}{\rho_1 . \lambda_2 . \rho_2 \lambda_3 \ldots \lambda_\alpha . \rho_\alpha}$$

$$L = \frac{m_1 . m_2 \ldots m_\alpha}{\lambda_2 . \lambda_3 \ldots s_\alpha} .$$

$$L = \frac{\nu'_1 . \nu_2 \ldots \nu'_\alpha}{r'_2 . r'_3 \ldots r'_\alpha} \cdot \frac{\nu''_1 . \nu''_2 \ldots \nu''_\alpha}{r''_2 . r''_3 \ldots r''_\alpha} \cdot \frac{\nu'''_1 . \nu'''_2 \ldots \nu'''_\alpha}{r'''_2 . r'''_3 \ldots r'''_\alpha} \ldots$$

$$L = \frac{\nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_\alpha}{r_2 . r_3 \ldots r_\alpha} .$$

$$L = \frac{m_1 . m_2 \ldots m_\alpha}{\rho_1 \lambda_2 \rho_2 \lambda_3 \ldots \rho_\alpha \lambda_\alpha} \ldots \frac{\nu'_1 . \nu'_2 \ldots \nu'_\alpha}{r'_2 . r'_3 \ldots r'_\alpha} \ldots$$

$$L = \frac{m_1 . m_2 \ldots m_x}{\rho_1 \lambda_2 \rho_2 \lambda_3 \ldots \lambda_\alpha \rho_\alpha} \cdot \frac{\nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_\alpha}{r_2 . r_3 \ldots r_\alpha}$$

$$L = \frac{m_1 . m_2 \ldots m_\alpha}{\lambda_2 . \lambda_3 \ldots m_\alpha} \cdot \frac{\nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_\alpha}{r_2 . r_3 \ldots r_\alpha} .$$

$$L = m_1! . m_2! . m_3! \ldots m_\alpha! .$$

18. Zgodziliśmy się [**1**], ażeby za równe wartości funkcyi uważać takie tylko, które przy wszelkich wartościach zmiennych w tę funkcyę wchodzących nie przestają być sobie równemi. I nawzajem, gdy mamy na myśli różne wartości funkcyi, te także takiemi mają pozostać przy wszelkich wartościach ilości zmiennych.

Twierdzenie XI. Funkcya m zmiennych niezależnych, niezmieniająca swojéj wartości skutkiem dokonanego w niéj podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\lambda \end{pmatrix}$, ma jedną tylko wartość dla wszystkich przemian nierozdzielnych względem tego podstawienia.

Niech $v = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$, będzie funkcyą m zmiennych niezależnych, o któréj zakładamy, że nie zmienia swojéj wartości przez dokonanie w niéj podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\lambda \end{pmatrix}$, czyli innemi słowy, zakładamy równanie,

$$f(P_1) = f(P_\lambda) .$$

Równanie to ma się utrzymać przy wszelkich wartościach ilości zmiennych; stosując zatém do tego równania to samo podstawienie, otrzymamy nowe :

$$f(P_\lambda) = f(P_{2\lambda}),$$

które dla téj saméj przyczyny, posiada własność poprzedzającego. Otrzymamy przeto oprócz tych dwóch, następujący szereg równań :

$$f(P_{2\lambda}) = f(P_{3\lambda})$$
$$f(P_{3\lambda}) = f(P_{4\lambda})$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(P_{(l-1)\lambda}) = f(P_{(l-1)}).$$

a z nich wypada oczywiście

$$f(P_1) = f(P_\lambda) = f(P_{2\lambda}) = \ldots = f(P_{(l-1)\lambda}).$$

A że przemiany

(1) $$P_1,\ P_\lambda,\ P_{2\lambda},\ \ldots\ P_{(l-1)\lambda}$$

są względem podstawienia $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_\lambda \end{pmatrix}$ nierozdzielnemi, twierdzenie jest dowiedzionéin.

Wniosek. Ponieważ przemiany (1) są także niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych, jeżeli

$$f(P_1),\ f(P_\lambda),\ f(P_{2\lambda}),\ \ldots,\ f(P_{(l-1)\lambda}$$

są różnemi wartościami funkcyi v, iloczyn ich

$$F = f(P_1) . f(P_\lambda) . f(P_{2\lambda}) \ldots f(P_{(l-1)\lambda}).$$

lub summa :

$$\varphi = f(P_1) + f(P_\lambda) + f(P_{2\lambda}) + \ldots + f(P_{(l-1)\lambda})$$

jest funkcyą ilości $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_m$, niezmieniającą się od żadnego z podstawień przez przemiany (1) wyznaczonych.

Ponieważ wszystkie przemiany z m ilości są niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych funkcye :

$$F = f(P_1) . f(P_2) \ldots f(P_{m!}),$$
$$\psi = f(P_1) + f(P_2) + \ldots + f(P_{m!}).$$

zachowują tę samę wartość dla każdego z pomienionych podstawień. Funkcya taka F lub ψ nazywa się funkcyą symetryczną względem m ilości zmiennych w nie wchodzących.

Twierdzenie XII (Lagrange'a). Liczba różnych wartości funkcyi m zmiennych niezależnych, jest dzielnikiem liczby $m!$

Niech

$$v = f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m)$$

będzie funkcyą m zmiennych niezależnych, o któréj zakładamy, że ma mniéj jak $m!$ wartości różnych.

Jeżeli przez

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots,\ V_{m!}$$

oznaczymy wszystkie jéj wartości, to jest, równe i różne między sobą, wielomian

(1) $$(V - V_1)(V_1 - V_2)(V - V_3) \ldots (V - V_{m!}) = \sum_{0}^{m!} A_\lambda V^{m! - \lambda}$$

$m!$ stopnia względem V ma te wartości za swoje pierwiastki. Współczynniki tego wielomianu są funkcyami symetrycznemi ilości $x_1, x_2, \ldots x_m$. Współczynnik $A_{m!}$ w szczególności, przedstawić można pod postacią:

$$A_{m!} = (-1)^{m!} V_\alpha^a . V_\beta^b . V_\gamma^c \ldots V_\nu^k$$

gdzie $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, \ldots V_\nu$ wszystkiemi różnemi wartościami funkcyi V, a $a+b+c+\ldots+k=m!$

Stosując do wielomianu (1) jakiekolwiek podstawienie z tych samych m ilości zmiennych, wartości jego współczynników pozostaną niezmiennemi i będziemy mieli w ogólności:

$$A_{m!} = (-1)^{m!} V_\alpha^{a_1} . V_\beta^{b_1} . V_\gamma^{c_1} \ldots V_\nu^{k_1};$$

albowiem podstawienie tu dokonane mogło tylko zmienić w $A_{m!}$ porządek różnych czynników, lub co na jedno wychodzi porządek ich wykładników.

Podług więc tego powinno być

$$V_\alpha^{a-a_1} . V_\beta^{b-b_1} . V^{c-c_1} \ldots V_\nu^{k-k_1} = 1$$

przy wszelkich wartościach ilości $x_1, x_2, \ldots x_m$ lub z czego wypada, przy wszelkich wartościach $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, \ldots V_\nu$. To zaś inaczéj być nie może, jak tylko wtedy gdy

$$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1, \ldots, k = k_1,$$

a więc gdy wszystkie wykładniki $a, b, c, \ldots, k$ są między sobą równemi.

Kładąc teraz

$$a = b = c = \ldots = k = L,$$

jeżeli D wyobraża liczbę wykładników znajdujemy

$$L . D = m!, \quad \text{lub} \quad D = \frac{m!}{L},$$

co pokazuje że liczba D różnych wartości funkcyi v jest dzielnikiem liczby $m!$

Twierdzenie XIII. Równe wartości funkcyi odpowiadają przemianom niezmieniającym się od podstawień przez nie oznaczonych.

Niech

(1) $$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_l$$

będą przemianami odpowiadającemi wszystkim równym wartościom funkcyi wyobrażonym przez szereg następujący

(2) $$f(P_1), f(P_2), f(P_3), \ldots f(P_l).$$

Niech $P_1^{(\alpha)}$ będzie przemianą odpowiadającą różnéj wartości funkcyi od téj jaką teraz uważamy. Po zastosowaniu podstawienia wyrażonego przez symbol $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_1^{(\alpha)} \end{pmatrix}$ do przemian (1) i do funkcyi (2), znajdziemy

(3) $$P_1^{(\alpha)}, P_2^{(\alpha)}, P_3^{(\alpha)}, \ldots, P_l^{(\alpha)},$$

(4) $$f(P_1^{(\alpha)}), f(P_2^{(\alpha)}), f(P_3^{(\alpha)}), \ldots, f(P_l^{(\alpha)}).$$

Przemiany (3) odpowiadają wartościom funkcyi (4). Ponieważ wartości funkcyi (2) są równemi sobie, z określenia wypada, że i wartości funkcyi (4) są także sobie równemi. Jeżeli zatém przemiana $P_1^{(\alpha)} = P_\lambda$ którėjbądź z przemian (1), szereg wartości funkcyi (4) jest szeregiem wartości funkcyi (2) inaczéj uporządkowanym; a ztąd już wypada, że szereg przemian (3) jest, w takim przypadku, szeregiem przemian (1) inaczéj uporządkowanym. Przemiany więc (1) są niezmieniającemi się od podstawień przez nie oznaczonych.

Z twierdzenia tego wypada, że pisząc w równaniu

$$D = \frac{m!}{L}$$

za L którąbądź liczbę ustępu [**17**], otrzymamy wyrażenie liczby różnych wartości funkcyi.

19. Jeżeli funkcya ma mniéj jak $m!$ różnych wartości, pomiędzy przemianami wszystkiemi, musi zachodzić przynajmniéj jedna P_λ, i taka, że podstawienie $\binom{P_1}{P_\lambda}$ wartości téj funkcyi nie zmienia. Podług twierdzenia XI funkcya nasza ma jednę tylko wartość dla wszystkich przemian nierozdzielnych względem tego podstawienia, a podług twierdzenia poprzedniego, wszystkie jéj równe wartości odpowiadają przemianom niezmieniającym się od podstawień przez nie oznaczonych. Rozwiązanie więc naszego zadania sprowadza się do dwóch następujących:

a) Mając dane podstawienia $\binom{P_1}{P_\lambda}$ znaleźć wszystkie inne takie, któreby do tego zastosowane, nie zmieniły jego natury względem tych samych ilości.

b) Znalazłszy je wszystkie, wybrać z nich te tylko, względem których przemiany nierozdzielne, i przemiany nierozdzielne względem podstawienia danego $\binom{P_1}{P_\lambda}$ mają jedną tylko przemianę wspólną P_1.

Taki bieg rzeczy nadaliśmy naszéj pracy.
