Zarys teorji równań całkowych.

(Dokończenie).

III.

Metoda art. II jest o tyle niedoskonała, że daje rozwiązanie równania całkowego tylko w ograniczonym obszarze parametru λ. Ten obszar zapełniony jest wyłącznie takiemi wartościami, że przy ich użyciu istnieją skończone (zbieżne) rozwiązania.

Trzeba się teraz uwolnić od tego ograniczenia i postarać się o formę rozwiązania przypominającą wypadki poszczególne rozważane w art. I. Do tego prowadzi metoda *Fredholma*, którą tu rozwiniemy.

Zauważmy wyznacznik

$$\overline{D}_n(l)=\begin{vmatrix} 1-lK_{11}, & -lK_{12}, & \dots, & -lK_{1n} \\ -lK_{21}, & 1-lK_{22}, & \dots, & -lK_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ -lK_{n1}, & -lK_{n2}, & \dots & 1-lK_{nn} \end{vmatrix}$$

w którym $K_{\alpha\beta}$ są wielkości dane skończone, a l parametrem dowolnym.

Połóżmy dla uproszczenia

$$\begin{vmatrix} K\rho_1\rho_1, & K\rho_1\rho_2, & \dots, & K\rho_1\rho_r \\ K\rho_2\rho_1, & K\rho_2\rho_2, & \dots, & K\rho_2\rho_r \\ . & . & . & . \\ K\rho_r\rho_1, & K\rho_r\rho_2, & \dots, & K\rho_r\rho_r \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} \rho_1\rho_2 \dots \rho_r \\ \rho_1\rho_2 \dots \rho_r \end{pmatrix} *)$$

to wyznacznik $D_n(l)$ rozwinięty podług potęg l przedstawi się w ten sposób

$$\overline{D}_n(l) = 1 - \sum_{\rho_1} K\begin{pmatrix}\rho_1\\\rho_1\end{pmatrix}.l + \sum_{\rho_1<\rho_2} K\begin{pmatrix}\rho_1\rho_2\\\rho_1\rho_2\end{pmatrix}.l^2$$

$$- \sum_{\rho_1<\rho_2<\rho_3} K\begin{pmatrix}\rho_1\rho_2\rho_3\\\rho_1\rho_2\rho_3\end{pmatrix}.l^3 + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{\rho_1<\rho_2 \dots <\rho_n} K\begin{pmatrix}\rho_1\rho_2 \dots \rho_n\\\rho_1\rho_2 \dots \rho_n\end{pmatrix} l_n.$$

W każdej z tych sum bierze się $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ z szeregu liczb $1, 2, 3, \dots, n$.

Z sumy $\sum\limits_{\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_r}$ zauważmy jeden dodajnik

$$l^r.K\begin{pmatrix} t_1, t_2, \dots, t_r \\ t_1, t_2, \dots, t_r \end{pmatrix}.$$

Gdy w wyznaczniku mają elementy—jak tutaj—znaczki t_α, t_β, z których pierwszy wskazuje numer wiersza, drugi zaś numer kolumny, a $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ zmienimy na dowolną permutację, to wyznacznik nie zmienia swej wartości.

Takich permutacyj

(1) $$(P_i),\ i=1, 2, \dots, r!$$

jest $r!$ Gdy więc tak utworzone wyznaczniki w ilości $r!$ dodamy do siebie i sumę podzielimy przez $r!$ będziemy mogli napisać

(2) $$l^r K\begin{pmatrix} t_1, t_2, \dots, t_r \\ t_1, t_2, \dots, t_r \end{pmatrix} = \frac{l^r}{r!} \sum_{(r!)} K\begin{pmatrix} t_1, t_2, \dots, t_r \\ t_1, t_2, \dots, t_r \end{pmatrix}.$$

---

*) ρ_λ z pierwszego wiersza w K, zestawione z wszystkiemi ρ wiersza drugiego w K, daje elementy

$$(\rho_\lambda\rho_1),\ (\rho_\lambda\rho_2). \dots (\rho_\lambda\rho_r)$$

wiersza λ-go w wyznaczniku naznaczonym przez K.

Suma odnosi się tu do wszystkich permutacyj (1) utworzonych z liczb $t_1, t_2, \dots, t_r$.

Uzupełnijmy teraz permutacje (1) do zbioru wszystkich r^r warjacyj z powtórzeniami. W tych uzupełniających zestawieniach znajdować się będą — w każdej z nich — identyczne sobie t_α. A więc wyznacznik utworzony na podstawie każdej z tych uzupełniających warjacyj będzie zerem. Mimo tego dodajmy sumę tych wszystkich znikających wyznaczników do sumy zawartej w (2) i połóżmy teraz

$$l^r K\binom{t_1, t_2, \dots, t_r}{t_1, t_2, \dots, t_r} = \frac{l^r}{r!}\sum_{(r^r)} K\binom{t_1, t_2, \dots, t_r}{t_1, t_2, \dots, t_r}.$$

W ten sam sposób postąpmy z wszystkiemi dodajnikami sumy

$$\sum_{\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_r}.$$

Wtedy mieć będziemy

$$l^r \sum_{\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_r} K\binom{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_r}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_r} = \frac{l^r}{r!}\sum_{(n^r)} K\binom{\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_r}{\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_r}, \tag{3}$$

gdzie suma po prawej stronie odnosi się do wszystkich n^r warjacyj z powtórzeniami utworzonych z liczb 1, 2, 3, ... , n.

Elementom $K_{\rho_\alpha \rho_\beta}$ nadajmy takie znaczenie:

Dana jest funkcja $K(s, t)$ dwuch zmiennych s, t od siebie niezależnych, skończona i ciągła w obszarze $(s, t) = (a \dots b)$, $a < b$ (rzeczywiste).

$(t_{\rho_\alpha}, t_{\rho_\beta})$ uważajmy za miejsce znaczące się w obszarze $(s, t) = (a \dots b)$; a więc $K(t_{\rho_\alpha}, t_{\rho_\beta})$ jest wartością funkcji $K(s, t)$ na miejscu $(t_{\rho_\alpha}, t_{\rho_\beta})$. Miejsca te, których jest n^2, poźniej stosownie zdefiniujemy.

Mając to, uważajmy na chwilę

$$K\binom{s_1 s_2 \dots s^r}{s_1 s_2 \dots s_r} = \begin{vmatrix} K(s_1 s_1), & K(s_1 s_2), & \dots, & K(s_1 s_r) \\ K(s_2 s_1), & K(s_2 s_2), & \dots, & K(s_2 s_r) \\ . & . & . & . \\ K(s_r s_1), & K(s_r s_2), & \dots, & K(s_r s_r) \end{vmatrix} \tag{4}$$

za funkcję r od siebie niezależnych zmiennych $s_1, s_2, \dots, s_r$, z których każda przebiega obszar $(a \dots b)$. Ten obszar $(a \dots b)$ każdej ze zmiennych podzielimy na $(n+1)$ równych części punktami

$$t_1 = a,\ t_2 = a + \delta,\ \dots,\ t_{n+1} = b.$$

Połóżmy

$$\delta=(t_{\rho_{k+1}}-t_{\rho_k})=\triangle t_{\rho_k}, \quad k=1,\ 2, \dots, n$$

i

$$l^r=\lambda^r\delta^r=\lambda^r\triangle t_{\rho_1}\cdot\triangle t_{\rho_2}\dots\triangle t_{\rho_n},$$

gdzie teraz λ ma być dowolnym parametrem. Odnosząc (3) do funkcji (4) r zmiennych $s_1, s_2, \dots s_r$, położymy

$$\lambda^r.\,\delta^r \sum_{\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_r} K\begin{pmatrix} t_{\rho 1}, & t_{\rho 2}, & \dots, & t_{\rho_r} \\ t_{\rho 1}, & t_{\rho 2}, & \dots, & t_{\rho r}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda^r}{r!}\sum_{(n^r)} K\begin{pmatrix} t_{\rho 1}\, t_{\rho 2} \dots t_{\rho_r} \\ t_{\rho 1}\, t_{\rho 2} \dots t_{\rho_r}\end{pmatrix}\triangle t_{\rho 1}\triangle t_{\rho 2}\dots\triangle t_{\rho_n}$$

gdzie $Kt_{\rho_\alpha}t_{\rho_\beta}=K(t_{\rho_\alpha}, t_{\rho_\beta})$.

Przejdźmy do $n=\infty$. W ostatniej relacji po prawej stronie odnosi się suma do wszystkich n^r warjacyj $(t_{\rho 1}, t_{\rho 2}, \dots, t_{\rho_r})$ punktów $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ w ten sposób, że

$t_{\rho 1}$ brany jest z obszaru $(a \dots b)$ zmiennej s_1,

$t_{\rho 2}$ „ „ „ „ „ s_2,

. . . .

. . . .

. . . .

t_{ρ_r} „ „ „ „ „ s_r

funkcji $K\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \dots & s_r \\ s_1, & s_2, & \dots & s_r\end{pmatrix}$.

Na podstawie zatym definicji r — krotnej całki określonej, jako granicy sumy, mamy

$$\lim_{n=\infty}\delta^r\lambda^r\sum_{\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_r}=\frac{\lambda^r}{r!}\int_a^b\int_a^b\dots\int_a K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_r \\ s_1 s_2 \dots s_r\end{pmatrix}ds_1 ds_2 \dots ds_r$$

Mamy zatym wracając do funkcji $K(s, t)$, taki rezultat:
Wyznacznik

$$(5)\quad D_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\delta\lambda K(s_1s_1), & -\delta\lambda K(s_1s_2), & \dots & -\delta\lambda K(s_1s_n) \\ -\delta\lambda K(s_2s_1), & 1-\delta\lambda K(s_2s_2), & \dots & -\delta\lambda K(s_2s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\delta\lambda K(s_ns_1), & -\delta\lambda K(s_ns_2), & \dots & 1-\delta\lambda K(s_ns_n) \end{vmatrix}$$

w którym λ jest dowolnym parametrem, a $s_1=a$, $s_2=a+\delta$, ... $s_n=b-\delta$ są punktami podziału obszaru $(a \dots b)$ na $(n+1)$ równych sobie części δ, każdej ze zmiennych s, t funkcji $K(s, t)$, dąży — gdy $n=\infty$ do granicy, przedstawiającej się szeregiem nieskończonym

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} D_n(\lambda)= \\ &=D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(s_1s_1)ds_1+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1s_2\\s_1s_2\end{pmatrix}ds_1ds_2 \\ &+\dots+(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1s_2\dots s_m\\s_1s_2\dots s_m\end{pmatrix}ds_1ds_2\dots ds_m+\dots \end{aligned}\right.$$

Ale trzeba rozstrzygnąć, czy i w jaki sposób ta granica jest zbieżną. *Hadamard* udowodnił takie twierdzenie.

Gdy w wyznaczniku D_μ stopnia μ-go wszystkie jego elementy $a_{\alpha\beta}$ są takie, że

$$\left|a_{\alpha\beta}\right| \leqq M\ ,\quad \alpha \gtreqless \beta=1,\ 2, \dots,\ \mu\ ,$$

gdzie M jest skończoną, dodatnią wielkością, to

$$\left|D_\mu\right| \leqq \sqrt{\mu^\mu}\cdot M^\mu\ .$$

Przyjmijmyż, że cały zapas wartości funkcji $K(s, t)$ w obszarze $(s, t)= =(a \dots b)$ jest taki, że tam

$$\left|K(s, t)\right| < M\ ,$$

M jest znowu skończoną dodatnią wielkością.

Wtedy mamy w (6)

$$\left| \int_a^b K(s_1 s_1)\, ds_1 \right| < M.(b-a)\ ,$$

a stosując dalej dopiero co przytoczone twierdzenie *Hadamarda* do wyrażeń zawartych pod całkami w (6), dostajemy

$$\left| \int_a^b \int_a^b K\binom{s_1 s_2}{s_1 s_2} ds_1 ds_2 \right| < \sqrt{2^2} M^2 (b-a)^2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\left| \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K\binom{s_1 s_2 \dots s_\mu}{s_1 s_2 \dots s_\mu} ds_1 ds_2 \dots ds_\mu \right| < \sqrt{\mu^\mu}\, M^\mu\, (b-a)^\mu$$

. . . .

. . . .

a zatym jest

$$|D(\lambda)| < 1 + |\lambda| M.(b-a) + \cdot \frac{|\lambda|^2}{2!} M^2 (b-a) + \dots$$

$$\dots + \frac{|\lambda^\mu|}{\mu!} \sqrt{\mu^\mu}\,.M^\mu (b-a)^\mu + \dots$$

$$= 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

a dalej

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{u_{\mu+1}}{u_\mu} = \lim_{\mu=\infty} \frac{|\lambda|\,.\,M}{\sqrt{\mu+1}} (b-a) \sqrt{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu} = \lim_{\mu=\infty} \frac{|\lambda|\,.\,M}{\sqrt{\mu+1}} \cdot \sqrt{e}$$

a więc = *zero* przy każdej skończonej wartości parametru λ. Z tego wynika: *$D(\lambda)$ jest—gdy $(s, t) = (a \dots b)$ – bezustannie zbieżnym szeregiem w parametrze λ.*

IV.

Przejście z wyznacznika $D_n(\lambda)$ do jego granicy $D(\lambda)$, czym zajmowaliśmy się w art. poprzedzającym, dozwoli nam teraz rozwiązać niejednorodne równanie *Fredholma*

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

w którym o $K(s, t)$, $f(s)$ i λ zatrzymujemy założenia uczynione w art. I.

Podzielmy obszar $(a \dots b)$ na n równych części $\delta = \frac{b-a}{n}$ punktami

$$s_1 = a + \delta,\ s_2 = a + 2\delta, \dots,\ s_n = a + n\delta\ .$$

Gdy $s = s_p$, mamy z (1)

$$f(s_p) = \varphi(s_p) - \lambda \int_a^b K(s_p, t)\,.\,\varphi(t)dt\ ,$$

albo na podstawie definicji całki określonej, jako granicy sumy

$$f(s_p) = \varphi(s_p) - \lim_{n=\infty} \left\{ \delta\lambda \sum_{q=1}^{n} K(s_p,\ s_q)\varphi(s_q) \right\}$$

$$p = 1,\ 2,\ 3, \dots,\ n\ .$$

Przy skończonym n mamy przybliżenia

$$\varphi(s_p) - \delta \sum_{q=1}^{n} \varphi(s_q)\lambda K(s_p, s_q) = f(s_p) \tag{2}$$

$$p = 1,\ 2, \dots,\ n\ .$$

Mamy tu n równań linjowych niejednorodnych o niewiadomych

$$\varphi(s_1),\ \varphi(s_2), \dots,\ \varphi(s_n)\ .$$

Wspólnym mianownikiem tych niewiadomych będzie wyznacznik

$$D_n(\lambda)$$

który rozważaliśmy w art. poprzedzającym.

Szukajmy licznika niewiadomej $\varphi(s_p)$.

W p-tym pionie wyznacznika $D_n(\lambda)$ mamy elementy

$$-\delta\lambda K(s_1 s_p),\ -\delta\lambda K(s_2 s_p), \dots,\ 1-\delta\lambda K(s_p s_p)\ ,$$

$$\dots -\delta\lambda K(s_n s_p)\ ;$$

nazwijmy je krótko

$$a_{1p}\,,\ a_{2p}\,, \dots,\ a_{pp}\,, \dots,\ a_{np}$$

to licznikiem tym będzie

$$D_{n,\,p}(\lambda)=$$

$$\frac{\partial D_n(\lambda)}{\partial a_{1p}} f(s_1)+\frac{\partial D_n(\lambda)}{\partial a_{2p}} f(s_2)+\dots+\frac{\partial D_n(\lambda)}{\partial a_{np}} f(s_n)$$

$$= D_n(\lambda)\,.\,f(s_p)$$

$$+\lambda\left\{\sum_{\alpha=1}^{n} K(s_p s_\alpha) f(s_\alpha)\,\delta-\frac{\lambda}{1!}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} K\begin{pmatrix} s_p s_\beta \\ s_\alpha s_\beta\end{pmatrix} f(s_\alpha)\delta^2\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} K\begin{pmatrix} s_p s_\beta s_\gamma \\ s_\alpha s_\beta s_\gamma\end{pmatrix} f(s_\alpha)\delta^3-\dots\right\}$$

Przejdźmy i tu do granicy $n=\infty$.
$D_n(\lambda)$ przejdzie na $D(\lambda)$.

Każda suma — gdy się uwzględni, że w μ—krotnej sumie mamy δ^μ —przejdzie na całkę.

s_α, do którego się $\sum\limits_{\alpha=1}^{n}$ odnosi, nazwijmy t

s_β, „ „ „ $\sum\limits_{\beta=1}^{n}$ „ „ s_1

s_γ, „ „ „ $\sum\limits_{\gamma=1}^{n}$ „ „ s_2

i t. d.

Punkt s_p, który teraz może być dowolnym punktem wewnątrz obszaru $(a \dots b)$ nazwijmy s.

$$\delta^\mu \text{ kładziemy} = ds_1 ds_2 \dots ds_{\mu-1}\, dt\ .$$

Wtedy mieć będziemy

$$\lim_{n=\infty} D_{n,\,p}(\lambda)=D(\lambda)\,.\,f(s)+$$

$$+\lambda\int_a^b[K(s,t)-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K\begin{pmatrix}ss_1\\ts_1\end{pmatrix}ds_1+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}ss_1s_2\\ts_1s_2\end{pmatrix}ds_1ds_2+\ldots]f(t)dt\,.$$

Szereg, który tu mamy w nawiasie, okaże się znowu za zastosowaniem twierdzenia Hadamarda bezustannie zbieżnym w λ, gdy $(s,t)=(a\ldots b)$.

Nazywają go $D\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}, \lambda\Big)$.

Gdy do granicy $n=\infty$ przeszliśmy, to każde z równań (2) zastępuje teraz równanie Fredholma (1); zatym jego rozwiązaniem powinno być

$$\varphi(s)=\frac{\lim\limits_{n=\infty} D_{n,\,p}(\lambda)}{D(\lambda)}$$

czyli

(3) $$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b\frac{D\left(\begin{matrix}s\\t\end{matrix}\lambda\right)}{D(\lambda)}f(t)\,.\,dt$$

z zastrzeżeniem, że $D(\lambda)\neq 0$.

Połóżmy

(4) $$\frac{D\left(\begin{matrix}s\\t\end{matrix}\lambda\right)}{D(\lambda)}=K(s,t,\lambda)$$

to napiszemy (3) w formie

(5) $$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t,\lambda)f(t)dt.$$

A teraz sprawdzimy, że $\varphi(s)$ o formie (5) jest w istocie rozwiązaniem równania całkowego.

Wyznacznik

(6) $$K\begin{pmatrix}ss_1s_2\ldots s_\mu\\ts_1s_2\ldots s_\mu\end{pmatrix}=K(st)\,.\,K\begin{pmatrix}s_1s_2\ldots s_\mu\\s_1s_2\ldots s_\mu\end{pmatrix}+\triangle\,\mu\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\begin{vmatrix}s_1s_2\ldots s_\mu\\s_1s_2\ldots s_\mu\end{vmatrix},$$

gdzie

$$\triangle_\mu \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\!\!\begin{vmatrix} s_1 s_2 \dots s_\mu \\ s_1 s_2 \dots s_\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & K(ss_1), & K(ss_2), \dots, & K(ss_\mu) \\ K(s_1 t), & K(s_1 s_1), & K(s_1 s_2) \dots, & K(s_1 s_\mu) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ K(s_\mu t), & K(s_\mu s_1), & K(s_\mu s_2) \dots, & K(s_\mu s_\mu) \end{vmatrix}.$$

Możemy więc napisać

$$D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big) = K(s,t) - \frac{\lambda}{1!}\int_a^b [K(st)\,.\,K(s_1 s_1) + \triangle_1]ds_1$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \left[K(st)K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1 s_2 \end{pmatrix} + \triangle_2\right]ds_1 ds_2 - \dots ,$$

albo

(7) $$D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big) = K(s,t)D(\lambda) + R(s,t) ,$$

gdzie

(8) $$R(s,t) = -\frac{\lambda}{1!}\int_a^b \triangle_1 ds_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \triangle_2 ds_1 ds_2 + \dots$$

Rozwijając $\triangle_\mu$ podług wiersza pierwszego, mamy

$$\triangle_\mu = \sum_{p=1}^{\mu}(-1)^p K(s, s_p)\,.\,K\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \dots s_p & \dots s_\mu \\ t & s_1 \dots s_{p-1}, & \dots s_\mu \end{pmatrix}.$$

Dając tu w każdym wyznaczniku tej sumy wiersz p-ty na miejsce wiersza pierwszego, mamy

$$\triangle_\mu = -\sum_{p=1}^{\mu} K(s, s_p) K\begin{pmatrix} s_p s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_{p+1}, \dots s_\mu \\ t\ s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_{p+1} \dots s_\mu \end{pmatrix}$$

Zastąpmy tu

$$s_p,\ s_{p+1},\ s_{p+2},\ \dots,\ s_\mu$$

przez

$$\tau,\ s_p,\ s_{p+1}\ \dots,\ s_{\mu-1},$$

to sumowanie da μ równych sobie wyrażeń i mieć będziemy

$$\triangle_\mu = -\mu\,.\,K(s,\tau)\,.\,K\begin{pmatrix} \tau s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_p \dots s_{\mu-1} \\ t\ s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_p \dots s_{\mu-1} \end{pmatrix}.$$

Kładąc tu analogicznie, jak w (6)

$$K\begin{pmatrix}\tau s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_p \dots s_{\mu-1} \\ t\, s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_p \dots s_{\mu-1}\end{pmatrix} =$$

$$K(\tau, t) K\begin{pmatrix}s_1 s_2 \dots s_{\mu-1} \\ s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}\end{pmatrix} + \triangle_\mu \left(\begin{array}{c|c}\tau & s_1 s_2 \dots s_{\mu-1} \\ \underline{t} & s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}\end{array}\right),$$

dostajemy

$$\triangle_\mu =$$

$$-\mu K(s\tau) K(\tau t) \,.\, K\begin{pmatrix}s_1 s_2 \dots s_{\mu-1} \\ s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}\end{pmatrix},$$

$$-\mu K(s\tau) \triangle_\mu \left(\begin{array}{c|c}\tau & s_1 s_2 \dots s_{\mu-1} \\ \underline{t} & s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}\end{array}\right),$$

$$\mu = 1,\ 2,\ 3, \dots, \quad \triangle_0 = 0 \,.$$

Po wstawieniu tak przedstawionych $\triangle_\mu$ w (7) okaże się, że

$$R(s, t) = \lambda \,.\, D(\lambda) \int_a^b K(s\tau) K(\tau, t) d\tau$$

$$+ \lambda \int_a^b K(s\tau) \,.\, R(\tau, t) d\tau .$$

Ze związku zaś (7) mamy

$$R(\tau, t) = D\begin{pmatrix}\tau \\ t\end{pmatrix}\lambda\Big) - K(\tau, t) D(\lambda) \,.$$

Teraz — wracając do (7) — mieć będziemy

$$D\begin{pmatrix}s \\ t\end{pmatrix}\lambda\Big) - D(\lambda) K(st) =$$

$$\lambda \,.\, D(\lambda) \int_a^b K(s, \tau) K(\tau, t) d\tau$$

$$+ \lambda \int_a^b K(s,\tau) \Big[D\begin{pmatrix}\tau \\ t\end{pmatrix}\lambda\Big) - K(\tau, t) D(\lambda) \Big[d\tau \,.$$

Stąd po uproszczeniu i podzieleniu przez $D(\lambda)$, wynika

$$K(s,t,\lambda)-K(st)=\lambda\int_a^b K(s,\tau)K(\tau,t,\lambda)\,d\tau$$

[związek (P), art. II], a to dowodzi że funkcja $\varphi(s)$ zdefinjowana w (5) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania całkowego.

Lwów. *Prof. Józef Puzyna.*
