Zarys teorji równań całkowych.

Cztery wykłady na kursie uzupełniającym dla nauczycieli szkół średnich, wygłoszone na Uniwersytecie we Lwowie w dniach 13 i 14 marca 1913 r.

Teorja równań całkowych, któremi mamy się tu w zarysie zająć, stała się w krótkim czasie klasycznym narzędziem badania w matematyce czystej i stosowanej.

Studjum tych równań doprowadziło w wielu razach do ścisłego rozstrzygnięcia, czy dane zadanie nie posiada rozwiązania, czy posiada rozwiązanie jednoznaczne lub wieloznaczne. Są one w tych razach analogją równań linjowych jednorodnych lub niejednorodnych o skończonej ilości niewiadomych. Jak te ostatnie dają bardzo typowe rozstrzygnięcia (przez znikanie lub nieznikanie pewnych wyznaczników) o nieistnieniu rozwiązania, albo o jednoznacznym lub wieloznacznym rozwiązaniu, tak i równania całkowe stosowane do poszczególnych zagadnień dają w uderzającej analogji rozstrzygnięcia w typach przypominających kryterja równań linjowych. Znajdzie to swoje uzasadnienie w teorji, którą się zajmujemy.

Z drugiej strony stała się ta teorja źródłem naturalnym rozwijania dowolnych funkcyj podług systemu pewnych dobrze określonych funkcyj. Rozwijania te odbywają się na wzór szeregów *Fouriera.* Te ostatnie okazały się szczególnym wypadkiem bardzo ogólnych wyników, do jakich teorja równań całkowych ze związania jej z równaniami różniczkowemi doprowadziła (teorja sprężystości, przewodnictwo ciepła, teorja potencjału).

Literatura, (główniejsze prace).

Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionelles. Acta mathematica. T. 27. 1903.

Hilbert. Grundzüge einer allg. Theorie der linearen Integralgleichungen. Göttinger Nachrichten 1904 — 1910, zebrane w jedną książkę w 1912 (G. Teubner).

Schmidt. Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Ann. T. 63.

H. B. Heywood et M. Frechet. L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Paris 1912.

Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie... (Lipsk 1909).

Horn J. Einführung in die Theorie der partiellen Differenzialgleichungen (Lipsk 1910).

Korn A. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. (Lipsk 1910).

Kneser A. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. (Brunświg 1911).

Lalesco T. Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris 1912) z licznemi notatkami z literatury.

I.

Równania przedstawiające się w formach

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t).\,\varphi(t).\,dt \tag{A}$$

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t).\,\varphi(t).\,dt=0 \tag{B}$$

nazywamy równaniami całkowemi, albo równaniami *Fredholma.*

Typ (A) zwie się równaniem niejednorodnym (rodzaju drugiego); typ (B) jest równaniem jednorodnym (rodzaju pierwszego).

W równaniach (A), (B) są a, b wielkości rzeczywiste; zakładamy $a<b$ przyczym $K(s, t)$ jest daną, ciągłą i skończoną funkcją*) dwuch od siebie niezależnych rzeczywistych zmiennych s, t w obszarze $(s, t)=(a \ldots b)$ i nazwaną *jądrem* równania (A) lub (B).

$f(s)$ (funkcja wolna) jest daną, ciągłą i skończoną funkcją w obszarze $s=(a \ldots b)$.

Stałe spółczynniki zawarte w $K(s, t)$ i w $f(s)$ są rzeczywiste.

Funkcja $\varphi(s)$ jest niewiadomą. Przez jej oznaczenie rozwiązujemy równanie (A) lub (B).

Parametr λ odgrywa w teorji równań Fredholma bardzo ważną rolę. Jest on nieograniczony i przybierać może każdą wartość rzeczywistą lub urojoną.

Jego znaczenie bardzo doniosłe poznajemy już w najelementarniejszych równaniach typu (A), których rozwiązanie nie daje najmniejszej trudności.

Przyjmijmy np., że w (A) mamy

$$K(s,t)=A_1(s).\ B_1(t)\ , \tag{1}$$

---

*) Badania w wypadkach nieciągłości funkcji $K(s, t)$ wykluczamy z naszych poszukiwań.

a więc jądro jest iloczynem dwuch funkcji, z których pierwsza zależy od samego s, druga od samego t.

Mamy wtedy równanie

$$(2)\qquad f(s)=\varphi(s)-\lambda\,.\,A_1(s)\int_a^b B_1(t)\,.\,\varphi(t)dt\,.$$

Połóżmy

$$(3)\qquad \int_a^b B_1(t)\,.\,\varphi(t)dt=C=\text{const}\,,$$

to dostajemy z (2)

$$(a)\qquad \varphi(s)=f(s)+\lambda\,.\,A_1(s)\,.\,C,\ \text{a więc}$$

$$(b)\qquad \varphi(t)=f(t)+\lambda\,.\,A_1(t)\,.\,C\,.$$

Wstawmy (b) w (3), to dostaniemy

$$(4)\qquad \int_a^b B_1(t)\,.\,[f(t)+\lambda A_1(t)\,.\,C]dt=C$$

i połóżmy

$$\int_a^b B_1(t)\,.\,f(t)dt=(B_1\,,\,f)=(f,\,B_1)=\text{const}.$$

$$\int_a^b B_1(t)\,.\,A_1(t)dt=(B_1\,,\,A_1)=(A_1\,,\,B_1)=\text{const}.$$

to, zakładając $(B_1\,,\,f)\neq 0$, $(B_1\,,\,A_1)\neq 0$, dostajemy z (4)

$$C=\frac{(B_1\,,\,f)}{1-\lambda(A_1\,,\,B_1)}\,.$$

Wstawiając tak obliczone (C) w (a), mamy

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\,.\,A_1(s)\,.\,\frac{(B_1\,,\,f)}{1-\lambda(A_1\,,\,B_1)}\,.$$

Widocznie, gdy $\lambda=\frac{1}{(A_1\,,\,B_1)}$, równanie (2) nie posiada rozwiązania skończonego. Z nieograniczonego obszaru wartości λ, tę jedną wartość wykluczyć trzeba.

Ale, gdy $\lambda=\frac{1}{(A_1\,,\,B_1)}$, to właśnie—i to tylko przy tej wartości—równanie jednorodne

$$(5)\qquad \varphi(s)=\lambda A_1(s)\int_a^b B_1(t)\,.\,\varphi(t)dt$$

posiadać będzie rozwiązanie. Uważajmy w (5) λ jeszcze za całkiem dowolne i wprowadźmy stałą C. Mamy wtedy

$$a')\qquad \varphi(s)=\lambda\,.\,A_1(s)\,.\,C\ ,$$

$$b')\qquad \varphi(t)=\lambda\,.\,A_1(t)\,.\,C\ .$$

Po wstawieniu b') w (3) dostajemy

$$\int_a^b B_1(t)\,.\,[\lambda A_1(t)\,.\,C]dt=C,$$

a to — po skróceniu przez C — daje

$$1-\lambda(A_1\,,\,B_1)=0\ ,$$

czyli

$$\lambda=\frac{1}{(A_1,\ B_1)}\,.$$

Przy takiej, *jedynej* wartości parametru λ istnieje rozwiązanie równania (5), a jest ono postaci

$$\varphi(s)=\frac{A_1(s)}{(A_1\,,\ B_1)}\int_a^b B_1(t)\left[\frac{A_1(t)\,.\,C}{(A_1\,,\ B_1)}\right]dt=\frac{C\,.\,A_1(s)}{(A_1,\,B_1)^2}\cdot(A_1,\ B_1)$$

albo—wskutek dowolnej stałej C—postaci

$$\varphi(s)=C'.\,A_1(s)\ ;$$

C' jest stałą dowolną.

Uwagi godnym jest, że wyjęta wartość λ, przy której nie mamy rozwiązania równania niejednorodnego (2), nie zależy wcale od tego, jaką jest funkcja $f(s)$, ale zależną jest tylko od jądra i od granic całkowania a, b.

Przejdźmy do równań niejednorodnych o ogólniejszym jądrze

$$(6)\qquad K(s,\,t)=A_1(s)\,.\,B_1(t)+A_2(s).B_2(t)+\,...\,+A_n(s).\ B_n(t)$$

$$n=2,\ 3,\ 4,\ ...\ \text{ale skończone.}$$

Równanie całkowe ma teraz postać

$$(7)\qquad f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}A_\alpha(s)\,.\,B_\alpha(t)\Big)\varphi(t)\,.\,dt\ .$$

Połóżmy

$$\int_a^b B_\alpha(t) \,.\, \varphi(t) dt = C_\alpha\,, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{8}$$

to mamy z (7)

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \,.\, A_\alpha(s)\,. \tag{9}$$

Stałe C_α trzeba teraz tak oznaczyć, aby się równanie (7) spełniło. Temu stanie się zadość, gdy związki (8) utrzymają się po wstawieniu w nie

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha A_\alpha(t)\,.$$

Z takich podstawień dostajemy

$$\int_a^b B_\beta(t) \,.\left[f(t) + \lambda \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \,.\, A_\alpha(t) \right] dt = C_\beta \tag{10}$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Połóżmy

$$\int_a^b B_\beta(t) \,.\, f(t) \,.\, dt = (B_\beta, f) = (f, B_\beta)$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, n$$

$$\int_a^b B_\beta(t) \,.\, A_\alpha(t) dt = (B_\beta, A_\alpha) = (A_\alpha, B_\beta) = R_{\beta,\,\alpha} = K_{\alpha\beta}$$

$$\alpha \gtreqless \beta = 1, 2, 3, \ldots, n$$

to związki (10) napiszą się teraz w takich postaciach:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda K_{11})C_1 \quad -\lambda K_{12}\, C_2 - \lambda K_{13} C_3 - \ldots \quad -\lambda K_{1n}\, C_n = (B_1, f) \\ -\lambda K_{21} C_1 + (1-\lambda K_{22}) C_2 - \lambda K_{23} C_3 - \ldots \quad -\lambda K_{2n}\, C_n = (B_2, f) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda K_{n1} C_1 - \quad \lambda K_{n2}\, C_2 - \ K_{n3} C_3 - \ldots + (1-\lambda K_{nn}) C_n = (B_n, f) \end{array} \right. \tag{11}$$

Aby z tych równań wynikły C_α skończone i niezależne od siebie, trzeba spełnić warunek

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}, & -\lambda K_{12}, & -\lambda K_{13}, \dots, & -\lambda K_{1n} \\ -\lambda K_{21}, & 1-\lambda K_{22}, & -\lambda K_{23}, \dots, & -\lambda K_{2n} \\ -\lambda K_{31}, & -\lambda K_{32}, & 1-\lambda K_{33}, \dots, & -\lambda K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K_{n1}, & -\lambda K_{n2}, & -\lambda K_{n3}, \dots, & 1-\lambda K_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Przyjmijmy, że λ różne jest od wszystkich pierwiastków λ_α, $\alpha=1, 2, \dots, n$, równania

$$D(\lambda)=0 ,$$

to C_α obliczone z równań (11) mają postacie

$$C_\alpha=\left[\sum_{\beta=1}^{n} W_{\alpha,\,\beta}(\lambda)\cdot(B_\beta f)\right] : D(\lambda), \quad \alpha=1, 2, \dots, n$$

w których $W_{\alpha,\,\beta}(\lambda)$ są wymiernemi, całkowitemi funkcjami wartości parametru λ.

Po wstawieniu tak obliczonych C_α w (10) dostajemy

$$\text{(12)}\quad \begin{cases} \varphi(s)=f(s)+ \\ +\lambda\dfrac{\left[\sum\limits_{\alpha=1}^{n} W_{\alpha_1}(\lambda)\,A_\alpha(s)\right].(B_1, f)+\dots+\left[\sum\limits_{\alpha=1}^{n} W_{\alpha n}(\lambda)\,A_\alpha(s)\right](B_n, f)}{D(\lambda)} \end{cases}.$$

Że zaś

$$(B_\alpha, f)=\int_a^b B_\alpha(t).f(t)dt, \quad \alpha=1, 2, \dots, n,$$

więc możemy napisać

$$\text{(13)}\qquad \varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t, \lambda)f(t)dt ,$$

gdzie

$$K(s, t, \lambda)=$$

$$=\frac{\left[\sum\limits_{\alpha=1}^{n} W_{\alpha_1}(\lambda)\,A_\alpha(s)\right]B_1(t)+\dots+\left[\sum\limits_{\alpha=1}^{n} W_{\alpha n}(\lambda)A_\alpha(s)\right]B_n(t)}{D(\lambda)}$$

albo

$$\text{(14)}\qquad K(s, t, \lambda)=\frac{\triangle(s, t, \lambda)}{D(\lambda)},$$

jeżeli licznik w $K(s, t, \lambda)$ krótko przez $\triangle(s, t, \lambda)$ naznaczymy.

Wyraz $K(s, t, \lambda)$ nazywa się *jądrem rozwiązującym*. Jak z formy jego wynika, nie zależy ono od wolnej funkcji $f(s)$, bo tak jego mianownik $D(\lambda)$, jak i jego licznik zawierają elementy, które jedynie w danym jądrze (6) i w granicach a, b swój początek biorą. Wszystkie zatem równania niejednorodne z jednym jądrem (6) i z temi samemi granicami całkowania a, b będą miały to samo jądro rozwiązujące.

Funkcję $\varphi(s)$ przedstawioną formą (13) wstawmy w dane równanie

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \,.\, \varphi(t) dt \,, \tag{15}$$

w którym $K(s, t)$ ma postać (6), to mieć będziemy

$$f(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t, \lambda) f(t) \,.\, dt$$

$$- \lambda \int_a^b K(s, t) \,.\, [f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau] dt$$

albo

$$\int_a^b [K(s, t, \lambda) - K(s, t)] f(t) dt - \lambda \int_a^b K(s, t) \left(\int_a^b K(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau \right) dt = 0 \,.$$

W drugim wyrazie pozmieniajmy zmienne całkowania t, τ ze sobą *). Wtedy pod pierwszą i drugą całką zawierać się będzie czynnik $f(t) \,.\, dt$, a równanie napisać będzie można w ten sposób

$$\int_a^b [K(s, t, \lambda) - K(s, t) - \lambda \int_a^b K(s, \tau) \,.\, K(\tau, t, \lambda) d\tau] f(t) dt = 0 \,.$$

Że zaś to ma się ostawać przy wszelkich $s = (a \ldots b)$, przeto być musi

$$K(s, t, \lambda) - K(s, t) - \lambda \int_a^b K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau = 0 \,. \tag{P}$$

Gdybyśmy przeciwnie $f(s)$ przedstawione formą (13) wstawili w (12), dostalibyśmy—postępując analogicznie, jak przed chwilą

$$K(s, t, \lambda) - K(s, t) - \lambda \int_a^b K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t) d\tau = 0 \,. \tag{Q}$$

---

*) Jest oczywistym, że zmienną całki o stałych granicach można dowolnie nazwać. W całkach wielokrotnych zmienne odnoszące się do różnych całkowań odróżnić trzeba od siebie różnemi literami.

Między jądrem danym, a jądrem rozwiązującym zachodzą tu zawsze identyczne relacje (P), (Q).

Napiszmy (12) krótko w postaci

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\,.\frac{\psi(s,\lambda)}{D(\lambda)}$$

i wstawmy w dane równanie (15). Dostaniemy wtedy

$$0=\lambda\,.\frac{\psi(s,\lambda)}{D(\lambda)}-\lambda\int\limits_a^b K(s,t)\,.\left[f(t)+\lambda\,\frac{\psi(t,\lambda)}{D(\lambda)}\right]dt\,,$$

albo

$$\psi(s,\lambda)=\int\limits_a^b K(s,t)[f(t)\,.\,D(\lambda)+\lambda\,.\,\psi(t,\lambda)]dt\,. \tag{16}$$

Przyjmijmy, że równanie $D(\lambda)=0$ ma same niepowtarzające się pierwiastki λ_α. Wtedy wszystkie $\psi(s,\lambda_\alpha)$ są różne od zera, a z (16) — gdy λ dąży do granicy λ_α — wynika

$$\psi(s,\lambda_\alpha)=\lambda_\alpha\int\limits_a^b K(s,t)\,.\,\psi(t,\lambda_\alpha)dt \tag{17}$$

$$\alpha=1,2,3,\ldots,n\,.$$

Są to równania typu (B), a więc jednorodne z obliczonemi już niewiadomemi funkcjami $\varphi(s)=\psi(s,\lambda_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,n$.

Z tego widzimy: *Wartości* $\lambda=\lambda_\alpha$ *(pierwiastki niepowtarzające się równania* $D(\lambda)=0$*), za których użyciem równanie niejednorodne nie posiadało rozwiązania skończonego, są takie, że właśnie użyte w równaniu jednorodnym dają rozwiązania skończone, (a tożsamościowo nieznikające w zmiennej s).*

Z drugiej strony zauważmy, że równanie niejednorodne przechodzi na jednorodne, gdy się założy, że w nim wolna funkcja $f(s)$ stają się identycznie zerem.

Wtedy w równaniach (11) są wszystkie $(B_\alpha, f)\equiv 0$, $\alpha=1,2,\ldots,n$. Równania stają się jednorodne linjowe, a warunkiem, aby C_α z nich wynikające były różne od zera, jest

$$D(\lambda)=0\,.$$

Niechże λ' będzie pierwiastkiem niepowtarzającym się tego równania.

Z (11) dostajemy w tym razie rozwiązanie postaci

$$C_1=C_nD_1(\lambda'),\;C_2=C_nD_2(\lambda'),\ldots,\;C_{n-1}=C_nD_{n-1}(\lambda')\;,$$

a wracając do (9), gdzie $f(s)\equiv 0$ uwzględniamy, mamy

$$\varphi(s)=\lambda'.C_n\sum_{\beta=1}^{n}D_\beta(\lambda')A_\beta(s),\ D_n(\lambda')=1.$$

C_n, stała dowolna.

Przyjmijmy, że λ' jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $D(\lambda)=0$. Wtedy w $D(\lambda')=0$ znikają wszystkie pierwsze podwyznaczniki, a równania 11— z uwzględnieniem $f(s)\equiv 0$—dają

$$C_1=L_1(C_{n-1},\lambda'),\ C_2=L_2(C_{n-1},C_n,\lambda'),$$

$$\dots C_{n-2}=L_{n-5}(C_{n+1},C_n,\lambda'),$$

gdzie L_1, L_2, ... L_{n-2} są linjowe jednorodne funkcje dowolnych C_{n-1}, C_n.

Wracając do (9), gdzie już naprzód $f(s)\equiv 0$ uwzględniono, dostajemy

$$\varphi(s)=\lambda'\sum_{\beta=1}^{n-2}L_\beta(C_{n-1},C_n,\lambda')A_\beta(s)+\lambda' C_{n-1}A_{n-1}(s)+\lambda' C_nA_n(s)$$

albo

(18) $$\varphi(s)=C_{n-1}\psi_1(s,\lambda)+C_n\psi_2(s,\lambda)$$

przy dowolnych C_{n-1}, C_n.

W szczególności, gdy $C_{n-1}=1$, $C_n=0$ mamy

$$\varphi(s)=\psi_1(s,\lambda')$$

a gdy $C_{n-1}=0$, $C_n=1$, mamy

$$\varphi(s)=\psi_2(s,\lambda').$$

Stąd wnosimy: *Do dwukrotnego pierwiastka λ' należą dwa szczególne rozwiązania równania jednorodnego. Ogólne rozwiązanie jest jednorodną linjową funkcją (18) tych rozwiązań.*

Do analogicznych wniosków dojdziemy przy założeniu, że użyty pierwiastek λ' powtarza się w równaniu $D(\lambda)=0$ razy 3, 4, ...

Wszystkie pierwiastki równania $D(\lambda)=0$ nazywają się *wartościami podstawowemi.* Między niemi niema wartości $\lambda=0$, gdyż $D(\lambda)$ ma wolny wyraz $=1$. Każdą powtarzającą się wartość podstawową liczymy za tyle wartości podstawowych (między sobą równych), ile razy ona powtarza się jako pierwiastek równania $D(\lambda)=0$. *Każda podstawowa wartość λ' użyta w równaniu jednorodnym daje jedno rozwiązanie skończone tego równania. Każde takie rozwiązanie nazywa się podstawową funkcją należącą do tej wartości λ'.*

Podstawowe wartości i podstawowe funkcje zależą tylko od jądra.

Stąd też mówimy o podstawowych wartościach i podstawowych funkcjach należących do danego jądra.

II.

Opuszczając szczególne formy jądra, przyjmijmy, że mając równanie

$$(1) \qquad f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\ ,$$

udało się nam wyznaczyć funkcję $K(s, t, \lambda)$ spełniającą z jądrem $K(s, t)$ związek (P) lub (Q) — art. I.

Z (1) dostajemy

$$(2) \qquad \varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt\ .$$

Zmieniając tu s na t, a t na t_1, mamy

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t, t_1)\,.\,\varphi(t_1)dt_1\ .$$

Pomnóżmy obie strony przez $K(s, t, \lambda)dt$ i całkujmy w granicach od a do b; mieć będziemy

$$\int_a^b K(s, t, \lambda)\varphi(t)dt=\int_a^b K(s, t, \lambda)f(t)dt+\lambda\int_a^b\int_a^b K(s, t, \lambda)\,.\,K(t, t_1)\,.\,\varphi(t_1)dt\ .$$

Zmieńmy zmienną całkowania t po pierwszej stronie na t_1, to będzie można ostatni związek w ten sposób napisać

$$\int_a^b [K(s, t_1, \lambda)+\lambda\int_a^b K(s, t, \lambda)K(t, t_1)dt]\,\varphi(t_1)dt_1=\int_a^b K(s, t, \lambda)f(t)dt\ .$$

Lecz podług związku (Q) — art. I — wyraz w nawiasie, jaki mamy pod całką na pierwszej stronie jest $=K(s, t_1)$.

Wskutek tego jest

$$\int_a^b K(s, t_1)\varphi(t_1)dt_1=\int_a^b K(s, t, \lambda)\,.\,f(t)dt\ .$$

Uwzględnijmy to w (2), zmieniwszy tam zmienną całkowania t na t_1, to ostatecznie dostajemy

$$(3) \qquad \varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t, \lambda)\,.\,f(t)dt\ .$$

Z tego wynika: *Jakiekolwiek jest jądro $K(s, t)$, jeżeli znamy funkcję $K(s, t, \lambda)$, która z $K(s, t)$ daje związek (P), lub (Q) — art. I — to każde równanie całkowe niejednorodne o jądrze $K(s, t)$ ma rozwiązanie formy (3). $K(s, t, \lambda)$ nazywa się i w tym najogólniejszym wypadku jądrem rozwiązującym.*

To twierdzenie ma doniosłe zastosowanie w rozważaniach z fizyki teoretycznej. Równania całkowe pozostają tam w ścisłym związku z równaniami różniczkowemi, a ten wzgląd dozwala znaleźć funkcję spełniającą z danym jądrem związek (P) lub (Q). Przez to w krótkiej drodze przez zastosowanie formy (3) rozwiązuje się dane równanie całkowe.

Jądrem w tych zadaniach jest tak zwana funkcja *Greena.*

Lecz opuszczając ten pomyślny wypadek, postarajmy się naprzód rozwiązać równanie (1) przynajmniej w pewnym ograniczonym zakresie wartości parametru λ.

W tym celu załóżmy, że

$$|K(s, t)| < M, \text{ gdy } (s, t) = (a \dots b) \tag{4}$$

i że

$$|f(s)| < N, \text{ gdy } s = (a \dots b)\ , \tag{5}$$

gdzie M, N są skończone, dodatnie wielkości.

Wartości parametru λ ograniczmy w ten sposób, że ma być

$$q = |\lambda| M(b-a) < 1 \tag{6}$$

i wprowadźmy dowolną zresztą, ale ciągłą i skończoną funkcję $\varphi_0(s)$ w zakresie $s = (a \dots b)$ przyjmując, że w tym zakresie mamy

$$|\varphi_0(s)| < P\ ; \tag{7}$$

P jest znowu skończoną i dodatnią wielkością.

Mając te założenia, zdefiniujmy funkcję $\varphi_1(s)$ w ten sposób:

$$\varphi_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi_0(t)dt\ . \tag{8}$$

Dalej—używając funkcji $\varphi_1(s)$, jak przed chwilą funkcji $\varphi_0(s)$ — zdefiniujmy

$$\varphi_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi_1(t) \cdot dt\ .$$

Uwzględniając tu (8), mamy

$$\varphi_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) f(t) \cdot dt + \lambda^2 \int_a^b K(s,t) \int_a^b K(t, t_1)\varphi_0(t_1)dt_1 \cdot dt\ .$$

Podobnie dostaniemy

$$\varphi_3(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1\,dt$$

$$+\lambda^3\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)\int_a^b K(t_1,t_2)\varphi_0(t_2)dt_2\,.\,dt_1\,.\,dt$$

a dalej przy ogólnym n

$$\varphi_{n+1}(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)dt+\ldots$$

$$+\lambda^n\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)\ldots\int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}\ldots dt$$

$$+\lambda^{n+1}\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)\ldots\int_a^b K(t_{n-1},t_n)\varphi_0(t_n)\,.\,dt_n\ldots dt\,.$$

Mamy tu po porządku całki: jednokrotną, dwukrotną i t. d. Nazwijmy je

$$J_1,\, J_2,\, J_3,\, \ldots\, J_n,\, J_{n+1,\,0},\ ^{*)}$$

to wskutek założeń (4), (5), (7) mamy

$$|f(s)|<N$$
$$|J_1|<N\,.\,M(b-a)$$
$$|J_2|<N\,.\,M^2(b-a)^2$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$|J_n|<N\,.\,M^n(b-a)^n$$
$$|J_{n+1,\,0}|<P\,.\,M^{n+1}(b-a)^{n+1}\,.$$

Ponieważ zaś założyliśmy $q=|\lambda|M(b-a)<1$, więc w granicy

(9) $$\lim_{n=\infty}\varphi_{n+1}(s)=f(s)+\lambda J_1+\lambda^2 J_2+\lambda^3 J_3+\ldots$$

mamy

---

*) Są one wszystkie funkcjami zmiennej s; $s=(a\ldots b)$.

$$|f(s)|+|\lambda . J_1|+|\lambda^2 J_2|+\ldots$$

$$<N[1+q+q^2+q^3+\ldots], \text{ i}$$

$$\lim_{n=\infty} \left| \lambda^{n+1} J_{n+1}, {}_0 \right| = \lim_{n=\infty} P . q^{n+1} = 0 \ .$$

Stąd wynika, że szereg (9) jest absolutnie, a więc i jednostajnie zbieżny, gdy s, t ograniczone są na wnętrze obszaru $(a \ldots b)$, a λ na obszar dany warunkiem (6).

Każda funkcja $\varphi_n(s)$ związana jest z poprzedzającą równaniem

$$\varphi_{n+1}(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi_n(t) dt \ .$$

Przejdźmy do $n=\infty$. Ponieważ

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \varphi_{n+1}(s) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(s) = \\ &= f(s) + \lambda . J_1 + \lambda^2 J_2 + \lambda^3 J_3 + \ldots = \varphi(s, \lambda) \ , \end{aligned} \right.$$

więc mieć będziemy

$$\varphi(s, \lambda) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t, \lambda) dt \ .$$

Z tego wynika, że szereg $\varphi(s, \lambda)$ w obszarze (6) parametru λ i przy $(s, t) = (a \ldots b)$ jest rozwiązaniem danego równania *Fredholma.*

W każdej z całek J_n, $n=2, 3, 4, \ldots$ naznaczmy zmienną t_{n-1} która w $f(t_{n-1})$ i w $K(t_{n-2}, t_{n-1})$ się znajduje, przez t; zmienne zaś

$$t,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-2} \text{ nazwijmy}$$

τ, τ_1, τ_2, ... τ_{n-2}. Wtedy — pozostawiając całkowanie podług nowo nazwanej zmiennej t na koniec — mamy

$$J_n = \int_a^b K(s, \tau) \int_a^b K(\tau, \tau_1) \ldots \int_a^b K(\tau_{n-2}, t) f(t) d\tau \ldots d\tau_{n\ 2} dt$$

$$J_1 = \int_a^b K(st) f(t) dt \ .$$

Nazwijmy

$$K(s, t)=K_1(s, t)$$

$$K_2(s, t)=\int_a^b K(s, \tau)K_1(\tau, t)d\tau$$

$$K_3(s, t)=\int_a^b K(s, \tau)K_2(\tau, t) \ ,$$

$$. \quad . \quad . \quad .$$

Możemy (10) napisać w takiej formie

$$\varphi(s, \lambda)=f(s)+\lambda\int_a^b [+K_1(s, t)+\lambda^2 K_2(s, t)+ \dots]f(t)dt \ ,$$

gdzie szereg

(11) $$+K_1(s, t)+\lambda K_2(s, t)+ \dots =K(s, t, \lambda) \ ,$$

w obszarze danym nierównością (6) będzie również w ten sam sposób zbieżny jak szereg $\varphi(s, \lambda)$. Rozwiązanie ma teraz postać

$$\varphi(s, \lambda)=f(s)+\lambda \int_a^b K(s, t, \lambda)f(t)dt \ ,$$

a szereg (11) jest widocznie, podług definicji art. I, jądrem rozwiązującym

W równaniu definiującym

(12) $$K_n(s, t)=\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K(s, t_1)K(t_1 , t_2) \dots K(t_{n-1}t)dt_{n-1} \dots dt_1$$

zmienną t_{r-1}, $(r<n)$, nazwijmy τ i całkowanie podług niej pozostawimy na sam koniec. Wtedy (12) można będzie w ten sposób napisać

(13) $$\left| \begin{array}{l} K_n(s, t)=\int_a^b K_r(s, \tau)K_p(\tau, t)d\tau \\ r+p=n \ . \end{array} \right.$$

Z tej uwagi godnej formy skorzystamy, aby okazać, że i tu jądro rozwiązujące związane jest z jądrem danym równaniami (P) i (Q) art. I.

Z równania (11) mamy

$$K(s, t, \lambda)-K(st)=\lambda K_2(s, t)+\lambda^2 K_3(s, t)+ \dots \ ,$$

a więc podług (13) albo

$$=\lambda\int_a^b K_1(s,\tau)K_1(\tau,t)d\tau+\lambda^2\int_a^b K_2(s,\tau)K_1(\tau,t)d\tau+$$

$$+\ldots+\lambda^n\int_a^b K_n(s,\tau)K_1(\tau,t)d\tau+\ldots,$$

albo też

$$=\lambda\int_a^b K_1(s,\tau)K_1(\tau,t)d\tau+\lambda^2\int_a^b K_1(s,\tau)K_2(\tau,t)d\tau+$$

$$+\ldots+\lambda^n\int_a^b K_1(s,\tau)K_n(\tau,t)d\tau+\ldots\,.$$

Stąd mamy

$$K(s,t,\lambda)-K(st)=$$

$$=\lambda.\int_a^b [K_1(s,\tau)+\lambda K_2(s,\tau)+\ldots]K.(\tau,t)d\tau$$

$$=\lambda\int_a^b [K_1(\tau,t)+\lambda K_2(\tau,t)+\ldots]K(s,\tau)d\tau\,.$$

Uwzględniając, że wyrazy w nawiasach są odpowiednio równe

$$K(s,\tau,\lambda)\ ,\quad K(\tau,t,\lambda)\,,$$

dostajemy równania

$$K(s,t,\lambda)-K(s,t)=\lambda\int_a^b K(s,\tau,\lambda)K(\tau,t)d\tau$$

$$K(s,t,\lambda)-K(st)=\lambda\int_a^b K(s,\tau)K(\tau,t,\lambda)d\tau$$

a to są właśnie związki (Q), (P) art. I-go.

Uwaga. Przyjmijmy, że oprócz rozwiązania $\varphi(s,\lambda)$, mamy jeszcze w obszarze (6) i przy $s=(a\ldots b)$ drugie ciągłe rozwiązanie $\psi(s,\lambda)$ różne od $\varphi(s,\lambda)$.

Weźmy owo $\psi(s,\lambda)$ za funkcję $\varphi_0(s)$, to $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... będą wciąż $=$ $=\psi(s,\lambda)$.

Funkcja $\psi(s,\lambda)$ będzie zatym zdefinjowana znowu takim szeregiem (10), jak funkcja $\varphi(s,\lambda)$, a stąd wynika identyczność

$$\psi(s,\lambda)\equiv\varphi(s,\lambda)\ .$$

To znaczy: *Równanie (1) ma tylko jedno rozwiązanie, przedstawiające się szeregiem potęgowym w parametrze* λ, (*gdy* $s=(a\ldots b)$), *a zbieżne w zakresie*

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}\ .$$

(Ciąg dalszy nastąpi). *Prof. Józef Puzyna.*