

**Raport Badawczy**  
**Research Report**

**RB/40/2017**

**Optimalizacja i symulacja  
przejazdu pociągu: analiza  
przejazdów optymalnych**

**A. Myśliński, Z. Nahorski,  
W. Radziszewska, K. Szulc**

**Instytut Badań Systemowych**  
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**  
**Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:  
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2017



# Optymalizacja i symulacja przejazdu pociągu: analiza przejazdów optymalnych

Andrzej Myśliński, Zbigniew Nahorski,  
Weronika Radziszewska, Katarzyna Szulc

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Uproszczony model pociągu</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Dane do obliczeń numerycznych</b>	<b>13</b>
3.1	Masa pociągu $M$ . . . . .	13
3.2	Pochylenie toru . . . . .	15
3.3	Opory ruchu . . . . .	15
3.4	Siła pociągowa . . . . .	18
3.5	Wskaźnik jakości $J$ . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Sterowanie odcinkami stałe</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Jazda z maksymalną siłą pociągową</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Warunki konieczne optymalności</b>	<b>28</b>
7.1	Sformułowanie zadania . . . . .	28
7.2	Warunki konieczne . . . . .	30
7.3	Wyznaczanie czasów przełączeń z warunków zasady maksimum . . .	36
7.3.1	Wyznaczenie czasów przełączeń z równań sprzężonych . . . .	36
7.3.2	Numeryczne wyznaczanie czasów przełączeń . . . . .	37
<b>8</b>	<b>Zestawienie wzorów dla optymalnych fragmentów</b>	<b>41</b>
8.1	Przyspieszanie . . . . .	41
8.2	Zerowe sterowanie . . . . .	42
8.3	Stała prędkość . . . . .	43
8.4	Hamowanie . . . . .	44
<b>9</b>	<b>Trajektorie optymalne</b>	<b>45</b>
9.1	Trajektoria najszybsza – przejazd A. . . . .	45
9.2	Dodatek zerowego sterowania – przejazd B. . . . .	49
9.3	Wybór między przejazdami B i C . . . . .	51
9.4	Duże zerowe sterowanie – przejazd C . . . . .	55
9.5	Wybór między przejazdem C a wolniejszymi . . . . .	57
9.6	Przejazd z fragmentem stałej prędkości – przejazd D . . . . .	61
9.7	Wybór między przejazdem D a przejazdami DE . . . . .	63
9.8	Przejazdy pośrednie DE1 i DE2 . . . . .	65
9.9	Przejazd najwolniejszy – przejazd E . . . . .	69



9.10 Algorytm poszukiwania optymalnego przejazdu . . . . .	73
<b>10 Obliczanie energii przejazdów dla poszczególnych typów przejazdów</b>	<b>74</b>
10.1 Energia przejazdu dla optymalnych reżymów sterowania . . . . .	74
10.2 Energia przejazdu na odcinkach drogi . . . . .	75
<b>A Załącznik</b>	<b>77</b>
A.1 Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu dla zakresu stałej mocy .	77
A.2 Model z uwzględnieniem jazdy po łuku . . . . .	82
A.3 Równanie zależne od drogi . . . . .	86
A.4 Dodatkowy stały wiatr. . . . .	87
<b>B Literatura</b>	<b>90</b>

# 1 Wprowadzenie

Kolej obsługuje sporą część transportu osobowego (w Polsce około 10%) i towarowego (w Polsce ponad 30%), zużywając w tym celu znaczną ilość energii. W odróżnieniu od wielu innych środków transportu, transport kolejowy pozwala na oszczędności energii związane ze sposobem jazdy, ze względu na wydzielone trakcje z bezkolizyjnym ruchem, gdy są zachowane rozkłady jazdy. Oszczędność energii ma nie tylko wymiar ekonomiczny, ale także powoduje zmniejszenie emisji gazów cieplarnianych i innych zanieczyszczeń atmosfery, a więc ma także wymiar ekologiczny.

Pierwsze prace dotyczące optymalizacji profilu prędkości jazdy pojawiły się w Japonii w latach 60-tych ubiegłego wieku [17]. Istotny postęp w analizie tego problemu wprowadziła praca [5]. Jednak zdecydowany rozwój badań dotyczących sterowania jazdą pociągu nastąpił dopiero w XXI w. Wczesne intensywne badania na przełomie wieków prowadzono w Australii [30, 15, 13, 14, 9], ale główny wysyp prac nastąpił dopiero po 2010 r. Część tych prac przedstawiono w wykazie literatury tego opracowania, można je także znaleźć w wykazach literatury artykułów przeglądowych [2, 3, 33]. W Europie powstał w tym czasie projekt [26], w ramach którego jest możliwość wymiany doświadczeń i współpracy w rozwijaniu tej tematyki.

Większość prac kontynuuje metody rozwiązania przedstawione w najwcześniejszych pracach i opiera optymalizację na zasadzie maksimum Pontriagina [29]. Trudności w jej zastosowaniu wynikają z występowania ograniczeń na jeden ze stanów – prędkość – i zależnych od innego stanu – drogi, a także zmienności równania w zależności od drogi, co wynika z różnych oporów zależnych od różnicy wzniesień, zakrętów, czy oporów powietrza, na przykład w tunelach. Stosując zasadę maksimum Pontriagina można stosunkowo łatwo uzyskać ogólną charakterystycję optymalnych fragmentów przejazdów, jednak duży kłopot sprawia wyznaczenie czasów przełączeń między tymi fragmentami. Z tego powodu pojawiły się prace, w których do optymalizacji używa się metod heurystycznych. Innym kierunkiem jest modyfikacja rozkładu jazdy w celu zmniejszenia wydatku energii, a także układanie regionalnych rozkładów jazdy i zarządzanie w takich regionach ruchem pociągów pod kątem oszczędności energii, patrz [33].

W tym opracowaniu zajmujemy się najprostszym zagadnieniem wyznaczania optymalnych profili jazdy. Jednak celem jest opracowanie takich profili dla tras ruchu lokalnego w terenie polodowcowym, charakteryzującym się licznymi zmianami nachylenia trasy. Łącznie z licznymi zmianami ograniczeń na prędkość powoduje to, że kłopotliwe wyznaczanie punktów przełączeń jest w takim przypadku liczne.

Metody rozpatrywane w opracowaniu są oparte na zasadzie maksimum Pontriagina, jednak zaproponowano tu liczne uproszczenia powodujące przyspieszenie obliczeń. Podstawowym z nich jest użycie analitycznych rozwiązań równań ruchu



zamiast przyjętych ogólnie rozwiązań numerycznych. Głównym rozwiązywanym w opracowaniu przypadkiem są liniowe równania ruchu powstałe przez przyjęcie liniowej zależności oporu powietrza od prędkości względnej pociągu. Jednak podano także rozwiązania analityczne równań nieliniowych, które można będzie rozpatrzeć w dalszych badaniach.

Innym pomysłem rozważanym w tym opracowaniu jest podział trasy między przystankami na odcinki o stałych ograniczeniach prędkości oraz stałym równaniu ruchu. Rozwiązania optymalne dla takich odcinków sprowadzają się do kilku typów przejazdów. Sklasyfikowano te typy przejazdów, przedstawiono sposoby wyznaczania w nich chwil przełączeń między fragmentami o stałych wymuszeniach oraz podano algorytm wyboru typu przejazdu przy zadanych początkowych i końcowych czasach przejazdu oraz prędkościach w tych chwilach. Okazało się przy tym, że dla dokładnych wzorów występowały trudności numeryczne w wyznaczaniu rozwiązań układów równań nieliniowych. Opracowano przybliżenia wzorów sprowadzające równania do równań kwadratowych, których rozwiązanie nie nastęrcza trudności, a jednocześnie jest wystarczająco dokładne.

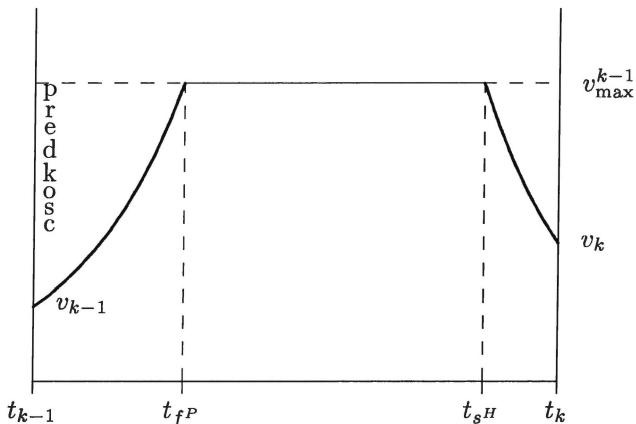
W tym opracowaniu nie rozważono natomiast metod połączenia przejazdów na odcinkach w optymalny przejazd na całej trasie między przystankami, poza ogólnym zarysowaniem możliwych metod postępowania. Rozwiązanie tego zagadnienia będzie tematem dalszych prac.

W opracowaniu nie podano także przykładów numerycznych wyznaczania rozwiązań. Będzie to tematem oddzielnego opracowania.

## 9 Trajektorie optymalne

### 9.1 Trajektorja najszybsza – przejazd A.

Popatrzmy teraz na wykres z rys. 5. Zakładając, że faza przyspieszania odbywa się przy sterowaniu  $h_{\max}$ , a hamowania przy  $-h_{\min}$ , to przedstawia on najszybszy możliwy przy ograniczeniach przejazd od prędkości  $v_{k-1}$  zadanej w chwili  $t_{k-1}$  do prędkości  $v_k$  w chwili  $t_k$ . W tym czasie pociąg przejedzie drogę będącą polem pod wykresem prędkości (całką). Jak widać, zadanie ma rozwiązanie, jeżeli to pole jest nie mniejsze od różnicy  $s_k - s_{k-1} = \Delta s_{k-1}^k$ .



Rysunek 5: Trajektorja najszybsza – przejazd A.

Zapiszmy to spostrzeżenie matematycznie. Ponieważ w tym przypadku  $v_f = v_{\max}$ , to czas przejazdu fragmentu przyspieszania wynosi

$$\Delta^P t_{k-1}^{fP} = t_{fP} - t_{k-1} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_{\max}^{k-1} - (h_{\max} + MR_{k-1})}$$

a przebyta droga

$$\begin{aligned} \Delta^P s_{k-1}^{fP} = s_{fP} - s_{k-1} = & \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})[t_{fP} - t_{k-1} - \frac{M}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})})] + \\ & + \frac{Mv_{k-1}}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})}) \end{aligned}$$



Czas przejazdu fragmentu hamowania jest natomiast równy

$$\Delta^H t_{s^H}^k = t_k - t_{s^H} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{\max}^{k-1} + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}$$

a droga

$$\begin{aligned} \Delta^H s_{s^H}^k &= s_k - s_{s^H} = \\ &= \frac{M}{p^2} (pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}) (e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{s^H})} - 1) - \frac{1}{p} (h_{\min} - MR_{k-1}) (t_k - t_{s^H}) \end{aligned}$$

Zauważmy też, że z powyższych zależności możemy wyznaczyć czasy przełączenia  $t_{f^P}$  i  $t_{s^H}$  oraz odpowiednie punkty drogi  $s_{f^P}$  i  $s_{s^H}$ . Na to, aby istniał fragment jazdy z maksymalną prędkością musi zachodzić warunek

$$t_{f^P} \leq t_{s^H} \quad (94)$$

Jeżeli zachodzi równość, to trajektoria w jednym punkcie dotyka prędkości maksymalnej. Jeżeli warunek nie jest spełniony, to krzywe przecinają się poniżej prędkości maksymalnej.

Założymy na razie, że warunek (94) jest spełniony. Ponieważ znamy (stałą) prędkość na tym fragmencie  $v_{\max}^{k-1}$ , to musi zachodzić

$$\Delta^S s_{f^P}^{s^H} = s_{s^H} - s_{f^P} = v_{\max}^{k-1} (t_{s^H} - t_{f^P})$$

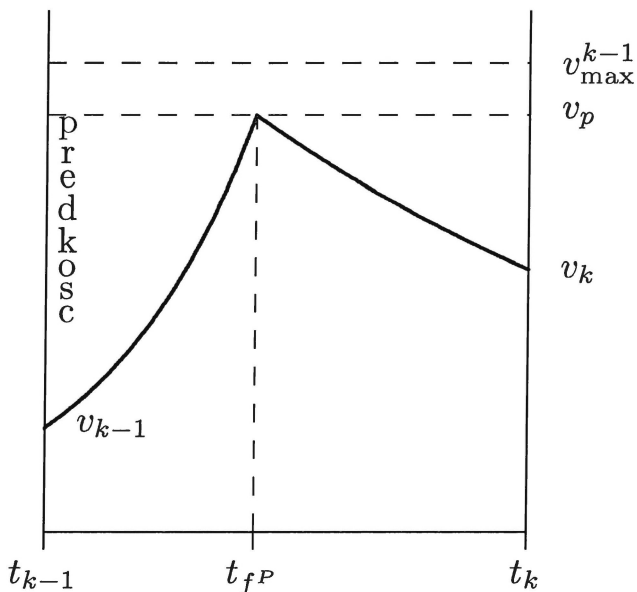
W rezultacie warunek na istnienie rozwiązania ma postać

$$\Delta^P s_{k-1}^{f^P} + \Delta^S s_{f^P}^{s^H} + \Delta^H s_{s^H}^k \geq s_k - s_{k-1} = \Delta s_{k-1}^k \quad (95)$$

Jeżeli w powyższej zależności występuje równość, to nasze zadanie jest rozwiązane - należy przejechać odcinek najszybciej, jak to możliwe.

Dla przybliżonych wzorów na drogi wzór (95) przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} v_s(t_{f^P} - t_{k-1}) - \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{2M} (t_{f^P} - t_{k-1})^2 + \\ + v_{\max}^{k-1} (t_{s^H} - t_{f^P}) + \\ + v_k(t_k - t_{s^H}) + \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{2M} (t_k - t_{s^H})^2 = \\ = \Delta s_{k-1}^k \end{aligned} \quad (96)$$



Rysunek 6: Trajektoria najszybsza – przejazd A1.

**Przejazd A1.** Jeżeli warunek (94) nie jest spełniony, to przechodzimy do przejazdu C. Jednym z jego granicznych przypadków jest przejazd z tylko dwoma fragmentami przejazdu: przyspieszanie i hamowanie. Ich trajektorie spotykają się chwili  $t_{fP}$  poniżej prędkości maksymalnej. Taki typ przejazdu oznaczymy jako przejazd A1. Zachodzą dla niego wzory

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} = s_{fP} - s_{k-1} = \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})[t_{fP} - t_{k-1} - \frac{M}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})})] + \frac{Mv_{k-1}}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})})$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta^H s_{fP}^k &= s_k - s_{fP} = \\ &= \frac{M}{p^2}(pv_k + h_{\min} - MR_{k-1})(e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fP})} - 1) - \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(t_k - t_{fP}) \end{aligned}$$

Rozwiązanie istnieje, jeżeli jest spełnione równanie

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} + \Delta^H s_{fP}^k = \Delta s_{k-1}^k \quad (97)$$



i o ile jego rozwiązaniem jest pierwiastek rzeczywisty  $t_{fP}$ , dla którego zachodzi

$$t_{k-1} \leq t_{fP} \leq t_k \quad (98)$$

Przejazd taki jest także czasooptymalny, jednak bez osiągnięcia wartości maksymalnej (jeżeli wcześniej wykluczaliśmy przejazd A). Przejazd taki może się zdarzyć tylko przy odpowiednim zestawieniu zadanej drogi i czasu jej przebycia.

Równanie (97) jest jednak nieliniowe i wymaga zastosowania do rozwiązania metody numerycznej. W tym celu można użyć przybliżonych wyrażań dla dróg, co zamiast (97) daje

$$\begin{aligned} v_{k-1}(t_{fP} - t_{k-1}) - \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{2M}(t_{fP} - t_{k-1})^2 + \\ + v_k(t_k - t_{fP}) + \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{2M}(t_k - t_{fP})^2 = \\ = \Delta s_{k-1}^k \end{aligned} \quad (99)$$

Jest to przejazd najszybszy, co oznacza, że jeżeli w zadanym czasie droga do przebycia jest dłuższa, a jednocześnie wcześniej wykluczaliśmy przejazd A, to zadanie nie ma rozwiązania. Inaczej mówiąc, aby zadanie miało rozwiązanie, musi zachodzić

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} + \Delta^H s_{k-1}^k \geq \Delta s_{k-1}^k \quad (100)$$

Sprawdzenie tego warunku wymaga jednak znajomości czasu  $t_{fP}$ . Tymczasem rozwiązanie równania (97) czy nawet równania z aproksymacjami (99) nie zawsze jest możliwe. Poniżej wyprowadzimy inny sposób wyznaczania tego czasu.

Oznaczmy prędkość, przy której następuje przełączenie z fazy przyspieszania na fazę hamowania, przez  $v_p$ . Zachodzą wówczas następujące wzory na czas  $t_{fP}$ , w którym ta prędkość jest osiągnięta:

- od strony przyspieszania

$$t_{fP} = t_{k-1} + \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_p - (h_{\max} + MR_{k-1})}$$

- od strony hamowania

$$t_{fP} = t_k - \frac{M}{p} \ln \frac{pv_p + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}$$

Ponieważ lewe strony są równe, więc po przekształceniach otrzymujemy

$$t_k - t_{k-1} = \frac{M}{p} \left( \ln \frac{pv_{k-1} - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_p - (h_{\max} + MR_{k-1})} + \ln \frac{pv_p + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}} \right)$$

a dalej

$$e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} = \frac{pv_{k-1} - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_p - (h_{\max} + MR_{k-1})} \cdot \frac{pv_p + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}$$

Po dalszych przekształceniach dochodzimy do równania liniowego względem  $v_p$ , którego rozwiązanie wyraża się wzorem

$$pv_p = \frac{h_{\max} e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} + h_{\min} \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}}{e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} + \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}} + MR_{k-1}$$

Podstawienie tej wartości do jednego ze wzorów po kropce pozwala na wyznaczenie czasu przełączenia  $t_{fP}$ . Podstawienie z kolei tego czasu do wzorów na drogi pozwala na sprawdzenie warunku (100) bez konieczności rozwiązywania równania (97).

Zauważmy też, że w przypadku, gdy w warunku (100) wystąpi równość, to powyżej wyznaczony czas  $t_{fP}$  jest rozwiązaniem dla przejazdu A1 i nie trzeba wtedy dodatkowo rozwiązywać równania (97).

## 9.2 Dodatek zerowego sterowania – przejazd B.

Jeżeli jednak nierówność jest ostra, to trzeba zmniejszyć prędkość na pewnym fragmencie trajektorii, tak aby pole pod wykresem prędkości (przebyta droga) były równe drodze zadanej. Przeglądając optymalne rozwiązania na fragmentach trajektorii dochodzimy do wniosku, że przede wszystkim trzeba włączyć fragment z zerowym sterowaniem (zero kosztu) między fragment stałej prędkości i hamowania, tak jak na rys. 7.

Fragment przyspieszania jest taki sam, więc wzory się nie zmieniają. Fragment jazdy ze stałą prędkością maksymalną jest krótszy, więc zachodzi

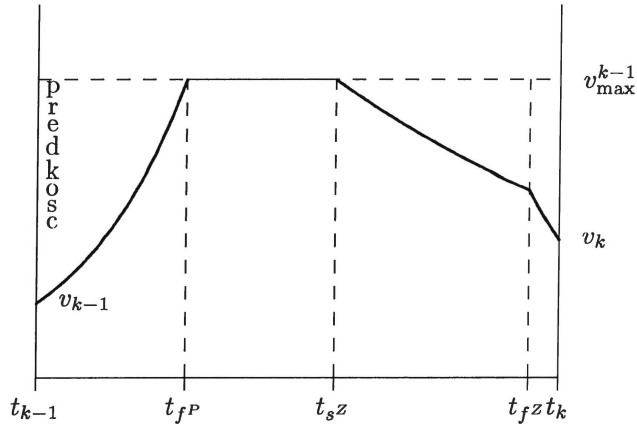
$$\Delta^S s_{fP}^Z = v_{\max}^{k-1} (t_{sz} - t_{fP})$$

Fragment hamowania jest teraz krótszy, więc droga przejazdu wynosi

$$\begin{aligned} \Delta^H s_{fz}^k &= s_{t_k} - s_{t_{fz}} = \\ &= \frac{M}{p^2} (pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}) (e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fz})} - 1) - \frac{1}{p} (h_{\min} - MR_{k-1}) (t_k - t_{fz}) \end{aligned}$$

Dodatkowo, dochodzi teraz fragment jazdy z zerowym sterowaniem. Długość przebytej drogi na tym fragmencie wynosi

$$\Delta^Z s_{sz}^{fz} = s_{fz} - s_{sz} = \frac{M}{p} R_{k-1} (t_{fz} - t_{sz}) + \frac{M}{p} (v_{\max}^{k-1} + \frac{M}{p} R_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fz} - t_{sz})})$$



Rysunek 7: Trajektoria z fragmentem zerowego sterowania.

Sumując drogi dostajemy warunek

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} + \Delta^S s_{fP}^{sZ} + \Delta^Z s_{sZ}^{fZ} + \Delta^H s_{fZ}^k = \Delta s_{k-1}^k \quad (101)$$

W tym warunku są dwie niewiadome: czasy  $t_{sZ}$  i  $t_{fZ}$ . Drugie równanie uzyskamy z ciągłości prędkości w chwili  $t_{fZ}$ , co prowadzi do równania

$$\begin{aligned} \frac{M}{p} R_{k-1} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{sZ})}) + v_{\max}^{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{sZ})} = \\ = v_k e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fZ})} + \frac{1}{p} (h_{\min} - M R_{k-1}) (e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fZ})} - 1) \end{aligned} \quad (102)$$

**Wzory przybliżone.** Dla tego przypadku wzory przybliżone dla przebytej drogi składają się z czterech części, jak w równaniu (101), czyli:

- droga przyspieszania

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} = v_{k-1} (t_{fP} - t_{k-1}) - \frac{p v_{k-1} - h_{\max} - M R_{k-1}}{2M} (t_{fP} - t_{k-1})^2$$

- droga ze stałą prędkością

$$\Delta^S s_{fP}^{sZ} = v_{\max}^{k-1} (t_{sZ} - t_{fP})$$

- droga z zerowym sterowaniem

$$\Delta^Z_{s_{fz}} = v_{\max}^{k-1}(t_{fz} - t_{sz}) - \frac{pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{2M}(t_{fz} - t_{sz})^2$$

- droga hamowania

$$\Delta^H_{s_{fz}} = v_k(t_k - t_{fz}) + \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{2M}(t_k - t_{fz})^2$$

Do tego dochodzą aproksymacje w równaniu ciągłości prędkości (102), co prowadzi do równania

$$\begin{aligned} v_{\max}^{k-1} - \frac{pv_{\max} - MR_{k-1}}{M}(t_{fz} - t_{sz})[1 - \frac{p}{2M}(t_{fz} - t_{sz})] = \\ = v_k + \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{M}(t_k - t_{fz})[1 + \frac{p}{2M}(t_k - t_{fz})] \end{aligned} \quad (103)$$

W tym równaniu dostatecznie dobre powinno być nawet przybliżenie liniowe, co sprowadza się do pominięcia po obu stronach równania czynników w nawiasach kwadratowych.

### 9.3 Wybór między przejazdami B i C

Rozwiązanie dla przejazdu B będzie istniało, jeżeli istnieją pierwiastki rzeczywiste, a uzyskane z rozwiązania tych równań czasy  $t_{sz}$  i  $t_{fz}$  będą spełniały następujące warunki

$$t_{fp} \leq t_{sz} \leq t_{fz} \leq t_k \quad (104)$$

Brak środkowej nierówności oznacza, że fragment z zerowym sterowaniem nie jest potrzebny. I z tego powodu nie jest interesujący, bo wcześniej sprawdzaliśmy, że jest on potrzebny. Ciekawsze są nierówności lewa i prawa. Niespełnienie warunku lewego oznacza, że nie jest potrzebny fragment jazdy z maksymalną prędkością. Niespełnienie warunku prawego oznacza, że nie jest potrzebny fragment hamowania, ale także może być wskazówką, że fragment przyspieszania powinien być krótszy.

Niestety, warunek na czasy jest niewygodny, gdyż nie zawsze możemy się spodziewać, że istnieją rozwiązania rzeczywiste równań. Z tego względu lepszy byłby warunek, w którym nie trzeba by było wyznaczać pierwiastków równań. Taki warunek można ustalić porównując drogi. Otóż najkrótszą drogę w przejeździe B otrzymamy, gdy reżymem bez sterowania dojedziemy do prędkości końcowej. Jeżeli droga w tym przypadku jest nadal dłuższa od drogi zadanej, to oznacza, że trzeba przejść do rozpatrywania przejazdu C. Rozpatrzmy ten przypadek. Skorzystamy ze wzoru na hamowanie od prędkości  $v_{\max}^{k-1}$  do prędkości  $v_k$ , gdzie przyjmiemy

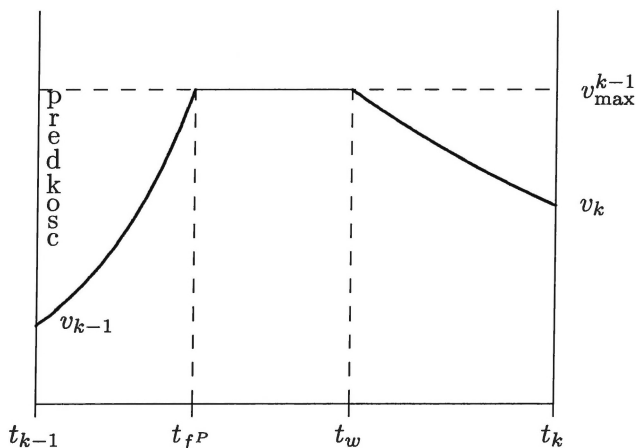


hamowanie zerowe. W ten sposób otrzymujemy wzór na czas  $t_w$  rozpoczęcia jazdy z zerowym sterowaniem od prędkości maksymalnej, aby dojechać do prędkości końcowej

$$t_w = t_k - \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}}$$

Na to, aby był to przejazd B, musi zachodzić

$$t_w \geq t_{fP} \quad (105)$$



Rysunek 8: Graniczny przejazd typu B. Przypadek  $t_w \geq t_{fP}$ .

**Przypadek  $t_w \geq t_{fP}$ .** Warunek na to, aby przejść do przejazdu C wygląda teraz następująco

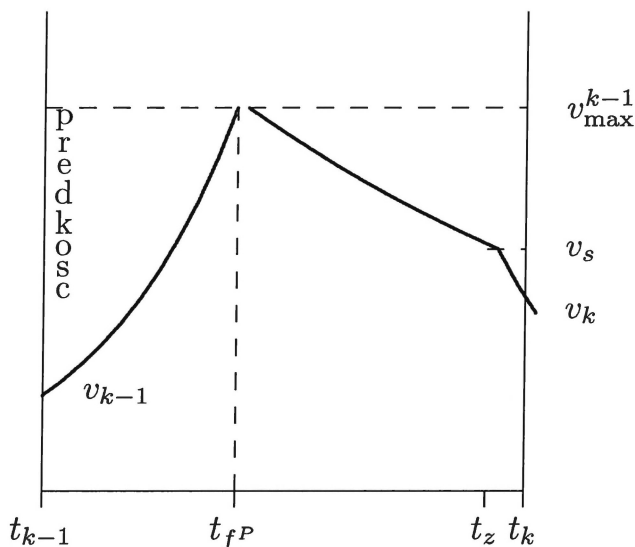
$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} + \Delta^S s_{fP}^w + \Delta^Z s_w^k \geq \Delta s_{k-1}^k \quad (106)$$

Podstawiając wzory na drogi otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})[t_{fP} - t_{k-1} - \frac{M}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})})] + \frac{Mv_{k-1}}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})}) + \\ + v_{\max}^{k-1}(t_w - t_{fP}) + \\ + \frac{M}{p}R_{k-1}(t_{k-1} - t_w) + \frac{M}{p}(v_{\max} + \frac{M}{p}R_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{k-1} - t_w)}) \geq \Delta s_{k-1}^k \quad (107) \end{aligned}$$

gdzie  $t_{fP}$  jest dane wzorem

$$t_{fP} = t_{k-1} + \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_{\max}^{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}$$



Rysunek 9: Graniczny przejazd typu B. Przypadek  $t_w < t_{fP}$ .

**Przypadek  $t_w < t_{fP}$ .** Jeżeli  $t_w < t_{fP}$ , to musimy rozważyć drugą sytuację graniczną, gdy zerowe sterowanie zaczyna się w punkcie  $t_{fP}$ . W takim przypadku na końcu musi być jeszcze wystąpić odcinek z hamowaniem. Chwilę przełączenia między odcinkiem bez sterowania i z hamowaniem oznaczmy przez  $t_z$ , a prędkość  $v(t_z) = v_z$ . Oznaczmy też  $x = e^{\frac{p}{M}t_z}$ . Mamy więc zależności

$$v_z = \frac{MR_{k-1}}{p} \left(1 - \frac{e^{\frac{p}{M}t_{fP}}}{x}\right) + v_{\max}^{k-1} \frac{e^{\frac{p}{M}t_{fP}}}{x}$$

$$v_k = v_z x e^{-\frac{p}{M}t_k} - \frac{1}{p} (h_{\min} - MR_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}t_k} x)$$

Podstawiając  $v_z x$  z pierwszego równania do drugiego dostajemy

$$v_k = \frac{MR_{k-1}}{p} (x - e^{\frac{p}{M}t_{fP}}) e^{-\frac{p}{M}t_k} + v_{\max}^{k-1} e^{\frac{p}{M}t_{fP}} e^{-\frac{p}{M}t_k} - \frac{1}{p} (h_{\min} - MR_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}t_k} x)$$

co po uporządkowaniu prowadzi do wyrażenia

$$x = \left(1 + \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\min}}\right) e^{\frac{p}{M}t_k} - \frac{pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}} e^{\frac{p}{M}t_{fP}}$$

Uwzględniając podstawienie na  $x$ , z powyższego wyrażenia można wyznaczyć  $t_z$ . Jednak w potrzebnych w warunku wzorach na drogi potrzebujemy różnic czasów. Możemy je od razu uzyskać przekształcając dodatkowo powyższe wyrażenie

$$e^{\frac{p}{M}t_z} = \left\{ \left(1 + \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\min}}\right) - \frac{pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}} e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{fP})} \right\} e^{\frac{p}{M}t_k}$$

skąd otrzymujemy

$$t_z - t_k = \frac{M}{p} \ln \left\{ \left(1 + \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\min}}\right) - \frac{pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}} e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{fP})} \right\}$$

i analogicznie

$$t_z - t_{fP} = \frac{M}{p} \ln \left\{ \left(1 + \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\min}}\right) e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fP})} - \frac{pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}} \right\}$$

Warunek na to, aby przejść do przejazdu C wygląda teraz następująco

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} + \Delta^Z s_{fP}^z + \Delta^H s_w^k \geq \Delta s_{k-1}^k \quad (108)$$

gdzie

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} = \frac{1}{p} (h_{\max} + MR_{k-1}) [t_{fP} - t_{k-1} - \frac{M}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})})]$$

$$\Delta^Z s_{fP}^z = \frac{M}{p} R_{k-1} (t_z - t_{fP}) + \frac{M}{p} (v_{\max} + \frac{M}{p} R_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_z - t_{fP})})$$

$$\Delta^H s_w^k = \frac{M}{p^2} (pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}) (e^{\frac{p}{M}(t_k - t_z)} - 1) - \frac{1}{p} (h_{\min} - MR_{k-1}) (t_k - t_z)$$

przy czym

$$e^{-\frac{p}{M}(t_z - t_{fP})} = \frac{h_{\min}}{(h_{\min} + pv_k - MR_{k-1}) e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fP})} - (pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1})}$$

$$e^{\frac{p}{M}(t_k - t_z)} = \frac{h_{\min}}{(h_{\min} + pv_k - MR_{k-1}) - (pv_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}) e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{fP})}}$$

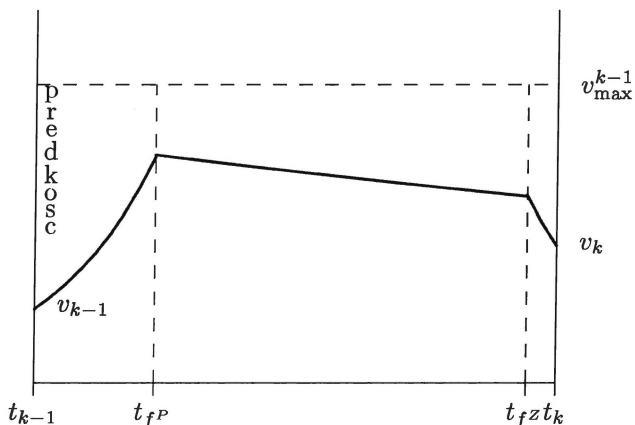
**Końcowy algorytm.** W rezultacie warunków, czy należy przejść do przejazdu C, wymaga sprawdzenia dwóch gałęzi:

- jeżeli zachodzi (105), to sprawdź (106),
- jeżeli nie zachodzi (105), to sprawdź (108).

Pozytywny wynik sprawdzenia w którymkolwiek przypadku oznacza, że należy przejść do rozpatrywania przejazdu C. W żadnym wzorze potrzebnym do sprawdzenia nie zachodzi potrzeba rozwiązywania równań.

## 9.4 Duże zerowe sterowanie – przejazd C

Przejdziemy teraz do przejazdów, które nie osiągają prędkości maksymalnych. Taki przejazd, przedstawiony na rys. 10, należy rozważyć jako przejazd o krótszej drodze niż w przejeździe A1 lub B, gdy nie są w nich spełnione odpowiednie warunki.



Rysunek 10: Trajektoria z dużym fragmentem zerowego sterowania.

W tym przypadku  $\Delta^P s_{k-1}^{fP}$  i  $\Delta^H s_{fZ}^k$  są opisane takimi samymi wzorami, jak w przejeździe A1. Natomiast droga dla fragmentu przejazdu z zerowym sterowaniem wyraża się wzorem

$$\Delta^Z s_{fP}^{fZ} = s_{fZ} - s_{fP} = \frac{M}{p} R_{k-1} (t_{fZ} - t_{fP}) + \frac{M}{p} (v(t_{fP}) - \frac{M}{p} R_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{fP})})$$

Musi być teraz spełniony warunek

$$\Delta^P s_{k-1}^{fP} + \Delta^Z s_{fP}^{fZ} + \Delta^H s_{fZ}^k = \Delta s_{k-1}^k \quad (109)$$

W równaniu tym są właściwie dwie niewiadome:  $t_{fP}$  i  $t_{fZ}$ , gdyż  $v(t_{fP})$  wyznacza się wzorem

$$v(t_{fP}) = \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})}) + v_{k-1}e^{-\frac{p}{M}(t_{fP} - t_{k-1})} \quad (110)$$

a więc jest znaną funkcją  $t_{fP}$ . Dodatkowe równanie uzyskamy, jak poprzednio, z wymogu ciągłości prędkości w chwili  $t_{fZ}$ . Mamy więc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p}MR_{k-1}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{fP})}) + v(t_{fP})e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{fP})} = \\ & = v_k e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fZ})} + \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fZ})} - 1) \end{aligned} \quad (111)$$

Poprawne rozwiązanie jest wtedy, gdy istnieją pierwiastki rzeczywiste i

$$t_{k-1} \leq t_{fP} \leq t_{fZ} \leq t_k \quad (112)$$

Jeżeli lewa i prawa nierówność są równościami, to przejazd z zerowym sterowaniem występuje na całym odcinku. Jeżeli te nierówności nie są spełnione, to przejazd musi być jeszcze wolniejszy.

**Wzory przybliżone.** Dla przybliżonych wyrażeń dla dróg zamiast (109) mamy

$$\begin{aligned} & v_{k-1}(t_{fP} - t_{k-1}) - \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{2M}(t_{fP} - t_{k-1})^2 + \\ & + v(t_{fP})(t_{fZ} - t_{fP}) - \frac{pv(t_{fP}) - MR_{k-1}}{2M}(t_{fZ} - t_{fP})^2 + \\ & + v_k(t_k - t_{fZ}) + \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{2M}(t_k - t_{fZ})^2 = \\ & = \Delta s_{k-1}^k \end{aligned} \quad (113)$$

Z kolei przyjmując rozwinięcie funkcji eksponencjalnej tylko do składnika liniowego mamy przybliżenie wzoru (110) na prędkość  $v(t_{fP})$

$$v(t_{fP}) = v_{k-1} + \left(\frac{h_{\max} - v_{k-1}}{M} + R\right)(t_{fP} - t_{k-1}) \quad (114)$$

Przybliżenie liniowe jest wystarczająco dokładne w tym przypadku. Dla przybliżenia kwadratowego otrzymujemy

$$v(t_{fP}) = v_{k-1} + \left(\frac{h_{\max} - v_{k-1}}{M} + R\right)(t_{fP} - t_{k-1})\left(1 - \frac{p}{2M}(t_{fP} - t_{k-1})\right)$$

Ze względu na bardzo mały współczynnik  $\frac{p}{2M}$  poprawka dla niedużych czasów przyspieszania jest niewielka.

Natomiast dodatkowe równanie (111) ma wtedy postać

$$R_{k-1}(t_{fz} - t_{fP}) + v(t_{fP}) \left(1 - \frac{p}{M}(t_{fz} - t_{fP})\right) = v_k \left(1 + \frac{p}{M}(t_k - t_{fz})\right) + \left(\frac{h_{\min}}{M} - R_{k-1}\right)(t_k - t_{fz})$$

co można sprowadzić do nieco prostszej postaci

$$\left(R_{k-1} - \frac{p}{M}v(t_{fP})\right)(t_{fz} - t_{fP}) + \left(R_{k-1} - \frac{p}{M}v_k - \frac{h_{\min}}{M}\right)(t_k - t_{fz}) + v(t_{fP}) - v_k = 0 \quad (115)$$

Przybliżenia liniowe są praktycznie wystarczające także w tym równaniu. Przyjmując bowiem przybliżenia kwadratowe otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} & \left(R_{k-1} - \frac{p}{M}v(t_{fP})\right)(t_{fz} - t_{fP}) \left(1 - \frac{p}{2M}(t_{fz} - t_{fP})\right) + \\ & + \left(R_{k-1} - \frac{p}{M}v_k - \frac{h_{\min}}{M}\right)(t_k - t_{fz}) \left(1 + \frac{p}{2M}(t_k - t_{fz})\right) + v(t_{fP}) - v_k = 0 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że wartość  $\frac{p}{2M}$  jest bardzo mała, poprawki kwadratowe mogłyby być istotne dopiero przy bardzo dużych czasach przejazdów dla fragmentów z zerowym sterowaniem i hamowaniem. W szczególności w przypadku hamowania jest to niemożliwe.

Równania (113) – (115) mają więcej rozwiązań niż jedno, ale część może być zespolona, a wśród rzeczywistych trzeba wyszukać to, które spełnia warunki zadania.

## 9.5 Wybór między przejazdem C a wolniejszymi

Aby zbadać najwolniejsze przejazdy typu C rozpatrzmy przypadek, gdy pociąg osiąga na końcu odcinka prędkość  $v_k$  jadąc rozpędem, z zerowym sterowaniem. Taki przejazd przez cały odcinek będzie wtedy, gdy rozpocznie się w czasie  $t_{k-1}$  z prędkością  $v_s$  spełniającą równanie

$$v_k = \frac{MR_{k-1}}{p} \left(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}\right) + v_s e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}$$

czyli dla prędkości wyrażającej się wzorem

$$v_s = \frac{pv_k - MR_{k-1}}{p} e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} + \frac{MR_{k-1}}{p}$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki, w zależności od tego, czy zachodzi

$$v_s \geq v_{k-1} \quad (116)$$

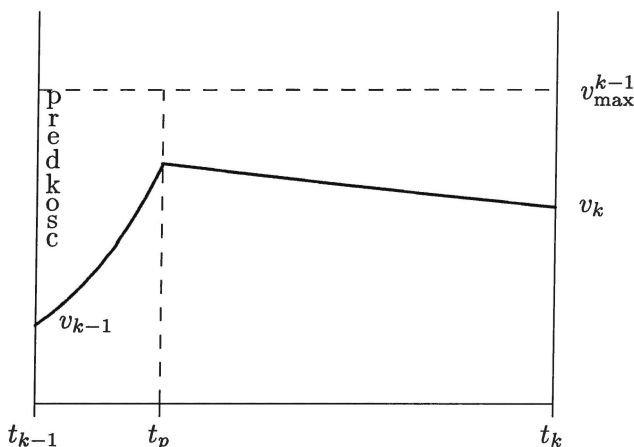
czy też nie.

**Przypadek  $v_s \geq v_{k-1}$ .** Jeżeli  $v_s \geq v_{k-1}$ , to najwolniejszy przejazd typu C składa się z fazy przyspieszania oraz fazy jazdy z zerowym sterowaniem. Załóżmy, że prędkość na przełączeniu tych faz, w czasie  $t_p$ , ma wartość  $v_p$ . Dla fazy przyspieszania mamy wtedy

$$v_p = v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})} + \frac{1}{p} (h_{\max}^{k-1} + MR_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})$$

a dla fazy zerowego sterowania

$$v_k = v_p e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_p)} + \frac{MR_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_p)})$$



Rysunek 11: Przypadek graniczny dla  $v_s \geq v_{k-1}$ , między przejazdem C a przejazdem D.

Podstawiając  $v_p$  z pierwszego równania do drugiego otrzymamy równanie, z którego będziemy mogli wyznaczyć czas  $t_p$ . Po podstawieniu otrzymujemy

$$v_k = [v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})} + \frac{1}{p} (h_{\max}^{k-1} + MR_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})] e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_p)} + \frac{MR_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_p)})$$

a po przekształceniach

$$e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_p)} = \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\max}^{k-1}} - \frac{pv_k - h_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\max}^{k-1}} e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}$$



skąd możemy wyznaczyć potrzebną dalej różnicę

$$t_k - t_p = \frac{M}{p} \ln \frac{h_{\max}^{k-1}}{pv_k - MR_{k-1} - [pv_k - h_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}]e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}}$$

Z drugiej strony, mnożąc wcześniejsze równanie stronami przez  $e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}$  otrzymujemy

$$e^{\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})} = \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\max}^{k-1}} e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} - \frac{pv_k - h_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\max}^{k-1}}$$

skąd obliczamy potrzebną drugą różnicę

$$t_p - t_{k-1} = \frac{M}{p} \ln \left( \frac{pv_k - MR_{k-1}}{h_{\max}^{k-1}} e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} - \frac{pv_k - h_{\max}^{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\max}^{k-1}} \right)$$

Powyższe wyrażenia pozwalają na obliczenie dróg dla faz przyspieszania i zerowego sterowania

$$\Delta^P s_{k-1}^p = \frac{1}{p} (h_{\max}^{k-1} + MR_{k-1}) [t_p - t_{k-1} - \frac{M}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})] + \frac{Mv_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})$$

$$\Delta^Z s_p^k = \frac{MR_{k-1}}{p} (t_k - t_p) + \frac{M}{p} (v_p - \frac{MR_{k-1}}{p}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_p)})$$

co prowadzi do warunku przejścia do przejazdu typu D

$$\Delta^P s_{k-1}^p + \Delta^Z s_p^k > \Delta s_{k-1}^k \quad (117)$$

**Przypadek**  $v_s < v_{k-1}$ . Jeżeli  $v_s < v_{k-1}$ , to najwolniejszy przejazd składa się z odcinków jazdy z zerowym sterowaniem od czasu  $t_{k-1}$  do pewnego czasu  $t_f$ , a następnie hamowania. Dla przejazdu z zerowym sterowaniem mamy

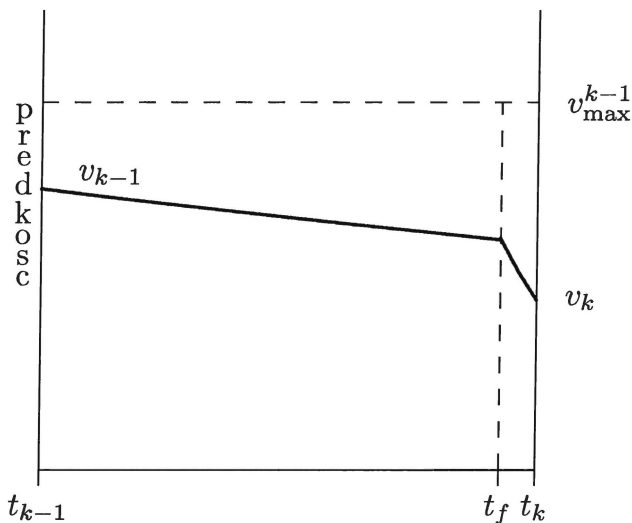
$$v_f = v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_{k-1})} + \frac{MR_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_{k-1})})$$

a dla odcinka hamowania

$$v_k = \frac{1}{p} (-h_{\min} + MR_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)}) + v_f e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)}$$

Po podstawieniu  $v_f$  z pierwszego równania do drugiego i po przekształceniach dostajemy

$$e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)} = \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{h_{\min}} - \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}} e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}$$



Rysunek 12: Przypadek graniczny dla  $v_s < v_{k-1}$ , między przejazdem C a przejazdem E.

skąd uzyskujemy

$$t_k - t_f = \frac{M}{p} \ln \frac{h_{\min}}{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1} - [pv_{k-1} - MR_{k-1}]e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}}$$

Po przemnożeniu obu stron wcześniejszego równania przez  $e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})}$  otrzymujemy też

$$e^{\frac{p}{M}(t_f - t_{k-1})} = \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{h_{\min}} e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} - \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}}$$

a z tego

$$t_f - t_{k-1} = \frac{p}{M} \ln \left( \frac{pv_k + h_{\min} - MR_{k-1}}{h_{\min}} e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{k-1})} - \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{h_{\min}} \right)$$

Obliczenie powyższych czasów pozwala na wyznaczenie dróg jazdy z zerowym sterowaniem i z hamowaniem

$$\Delta^Z s_{k-1}^f = \frac{MR_{k-1}}{p}(t_f - t_{k-1}) + \frac{M}{p}(v_{k-1} - \frac{MR_{k-1}}{p})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_{k-1})})$$

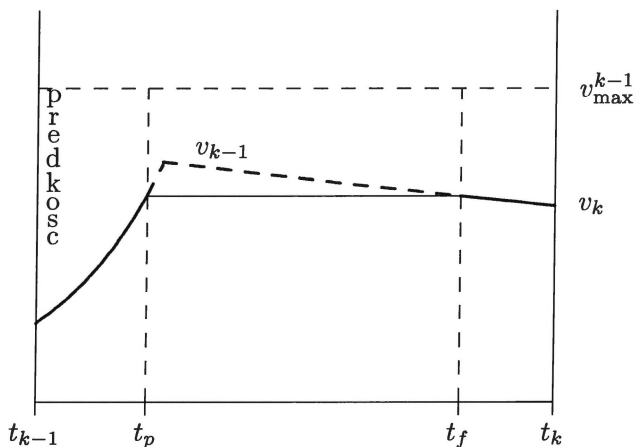
$$\Delta^H s_f^k = \frac{M}{p^2}(pv_k + h_{\min} - MR_{k-1})(e^{\frac{p}{M}(t_k - t_f)} - 1) - \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(t_k - t_f)$$

a to z kolei na sprawdzenie warunku przejścia do przejazdu typu E

$$\Delta^Z s_{k-1}^f + \Delta^H s_f^k > \Delta s_{k-1}^k \quad (118)$$

## 9.6 Przejazd z fragmentem stałej prędkości – przejazd D

Ten typ przejazdu pojawia się, gdy najwolniejszy przejazd typu C z przyspieszeniem na początku jest nadal zbyt szybki dla zadanej odległości i czasu przejazdu na rozpatrywanym odcinku jazdy. Dalsze zwolnienie przejazdu w ramach dostępnych reżymów jazdy to dołożenie między fragmentem przyspieszania i zerowego sterowania fragmentu przejazdu ze stałą prędkością.



Rysunek 13: Przejazd D.

Oznaczając przez  $t_p$  czas przełączenia z fazy przyspieszania na fazę stałej prędkości i przez  $v_D = v(t_p)$  prędkość w tym czasie, uzyskujemy równanie

$$v_D = v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})} + \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})$$

Po przekształceniach możemy wyznaczyć z tego równania

$$e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})} = \frac{pv_D - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}$$

skąd otrzymujemy

$$t_p - t_{k-1} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_D - h_{\max} - MR_{k-1}}$$

Oznaczmy przez  $t_f$  czas przełączenia z fazy stałej prędkości do fazy przejazdu bez sterowania. Dla fazy bez sterowania zachodzi wtedy

$$v_k = v_D e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)} + \frac{M R_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)})$$

skąd mamy

$$e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)} = \frac{p v_k - M R_{k-1}}{p v_D - M R_{k-1}}$$

oraz

$$t_k - t_f = \frac{M}{p} \ln \frac{p v_D - M R_{k-1}}{p v_k - M R_{k-1}}$$

Między czasami  $t_p$  i  $t_f$  mamy przejazd ze stałą prędkością.

Prędkość przejazdu  $v_D$  wyznaczmy teraz z równości dróg

$$\Delta^P s_{k-1}^p + \Delta^S s_p^f + \Delta^Z s_f^k = \Delta_{k-1}^k \quad (119)$$

gdzie

$$\Delta^P s_{k-1}^p = \frac{1}{p} (h_{\max} + M R_{k-1}) [t_p - t_{k-1} - \frac{M}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})] + \frac{M v_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_p - t_{k-1})})$$

$$\Delta^S s_p^f = v_D (t_f - t_p)$$

$$\Delta^Z s_f^k = \frac{M R_{k-1}}{p} (t_k - t_f) + \frac{M}{p} (v_D - \frac{M R_{k-1}}{p}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_f)})$$

**Wzory przybliżone.** Rozwiązanie równania (119) może sprawiać kłopoty i z tego względu rozważymy także równania przybliżone. Rozumując analogicznie jak wcześniej otrzymujemy

$$\Delta^P s_{k-1}^p \approx v_{k-1} (t_p - t_{k-1}) - \frac{p v_{k-1} - h_{\max} - M R_{k-1}}{2M} (t_p - t_{k-1})^2$$

$$\Delta^Z s_f^k \approx v_k (t_k - t_f) + \frac{p v_k - M R_{k-1}}{2M} (t_k - t_f)^2$$

Trzecie równanie jest liniowe i nie wymaga aproksymacji.

Zmienna  $v_D$  występuje jednak także w silnie nieliniowych równaniach ustalania czasów. Dlatego i dla tych równań podamy aproksymacje wyznaczone analogicznie do wzoru (93), co prowadzi do

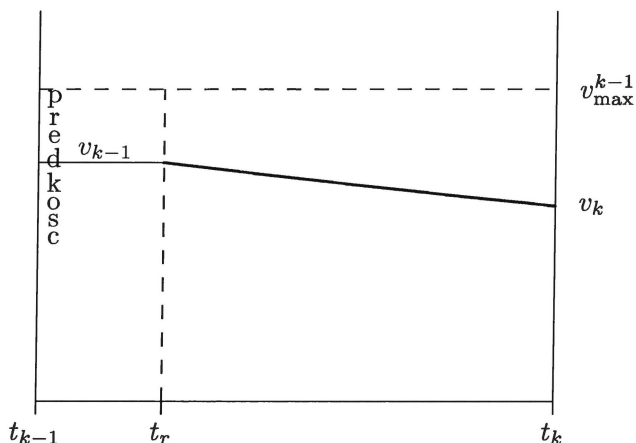
$$t_p - t_{k-1} = \frac{M(v_D - v_{k-1})}{h_{\max} + M R_{k-1}} \left( 1 + \frac{p}{2} \frac{v_D + v_{k-1}}{h_{\max} + M R_{k-1}} \right)$$

$$t_k - t_f = \frac{v_k - v_D}{R} \left( 1 + \frac{p(v_k + v_D)}{2MR} \right)$$

## 9.7 Wybór między przejazdem D a przejazdami DE

Krańcowe najwolniejsze przejazdy typu D zależą od tego, która z prędkości  $v_{k-1}$  i  $v_k$  jest mniejsza. Rozważymy najpierw przypadek

$$v_k \leq v_{k-1} \quad (120)$$



Rysunek 14: Przejazd graniczny między przejazdami D i DE1.

**Przypadek**  $v_k \leq v_{k-1}$ . W takim przypadku najwolniejszy przejazd typu D składa się z fragmentu jazdy ze stałą prędkością i z fragmentu jazdy bez sterowania (na wybiegu). Punkt przełączenia  $t_r$  znajdujemy ze wzoru dla jazdy na wybiegu

$$v_k = v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_r)} + \frac{MR_{k-1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_r)})$$

skąd otrzymujemy

$$e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_r)} = \frac{pv_k - MR_{k-1}}{pv_{k-1} - MR_{k-1}}$$

oraz

$$t_k - t_r = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}}$$

Całkowita droga składa się z fragmentu jazdy ze stałą prędkością  $v_{k-1}$ , czyli

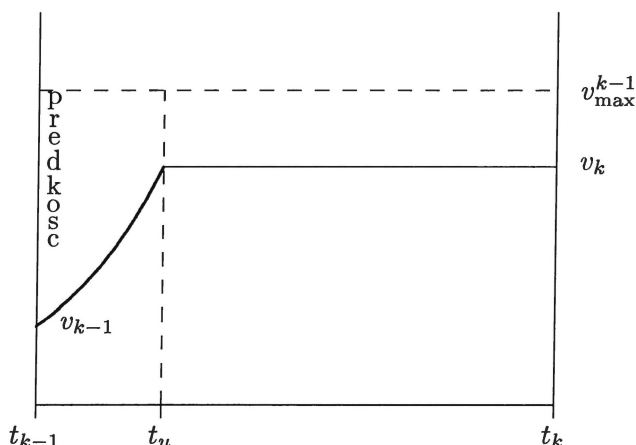
$$\Delta^S s_{k-1}^r = v_{k-1}(t_r - t_{k-1})$$

oraz jazdy na wybiegu

$$\Delta^Z s_r^k = \frac{MR_{k-1}}{p}(t_k - t_r) + \frac{M}{p}(v_{k-1} - \frac{MR_{k-1}}{p})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - t_r)})$$

Warunek do przejścia do wolniejszego typu przejazdu DE1, czyli przejazdu pośredniego między D i E, jest następujący

$$\Delta^S s_{k-1}^r + \Delta^Z s_r^k > \Delta s_{k-1}^k \quad (121)$$



Rysunek 15: Przejazd graniczny między przejazdami D i DE2.

**Przypadek**  $v_k > v_{k-1}$ . W tym przypadku  $v_k > v_{k-1}$ . Wtedy najpierw pociąg należy rozpędzić do prędkości  $v_k$ , którą osiągniemy w pewnym czasie  $t_u$ , a następnie jechać ze stałą prędkością. Mamy więc dla fragmentu przyspieszania wzór

$$v_k = \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_{k-1})}) + v_{k-1}e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_{k-1})}$$

Stąd wyliczamy

$$e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_{k-1})} = \frac{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}$$

oraz

$$t_u - t_{k-1} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}$$

Dla dróg mamy

$$\Delta^P s_{k-1}^u = \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})[t_u - t_{k-1} - \frac{M}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_{k-1})})] + \frac{MV_{k-1}}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_{k-1})})$$

$$\Delta^Z s_u^k = v_k(t_k - t_u)$$

a warunek przejścia do wolniejszego przejazdu DE2 ma postać

$$\Delta^P s_{k-1}^u + \Delta^Z s_u^k > \Delta s_{k-1}^k \quad (122)$$

Zauważmy, że ten przypadek jest równoważny przejazdowi A, gdy  $v_{\max}^{k-1} = v_k$ .

## 9.8 Przejazdy pośrednie DE1 i DE2

**Przejazd DE1.** W tym przejeździe, dla  $v_k \leq v_{k-1}$ , przejazd na wybiegu rozpoczyna się wcześniej niż w przejeździe D i kończy przed czasem  $t_k$ . Oznaczmy czas rozpoczęcia jazdy na wybiegu przez  $t_r \geq t_{k-1}$ , koniec przez  $t_u \leq t_k$ . Wtedy przejazd składa się z 3 fragmentów: jazdy ze stałą prędkością  $v_{k-1}$  od czasu  $t_{k-1}$  do  $t_r$ , jazdy na wybiegu od czasu  $t_r$  do czasu  $t_u$  i jazdy ze stałą prędkością  $v_k$  od czasu  $t_u$  do czasu  $t_k$ . Mamy

$$e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_r)} = \frac{pv_k - MR_{k-1}}{pv_{k-1} - MR_{k-1}}$$

oraz

$$t_u - t_r = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}}$$

oraz warunek na drogę

$$\Delta^S s_{k-1}^r + \Delta^Z s_r^u + \Delta^S s_u^t = \Delta s_{k-1}^k \quad (123)$$

gdzie

$$\Delta^S s_{k-1}^r = v_{k-1}(t_r - t_{k-1})$$

$$\Delta^Z s_r^u = \frac{MR_{k-1}}{p}(t_u - t_r) + \frac{M}{p}(v_{k-1} - \frac{MR_{k-1}}{p})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_r)})$$

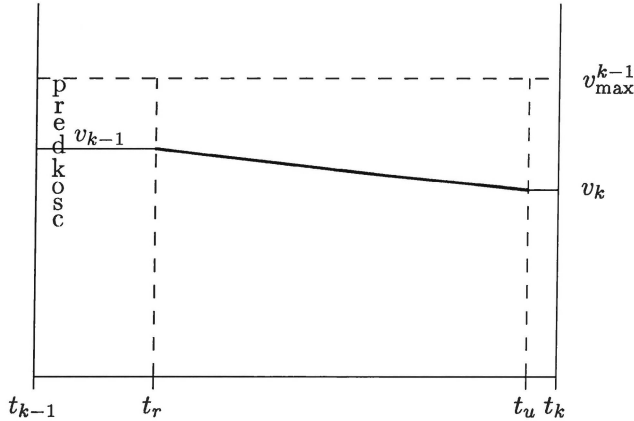
$$\Delta^S s_u^t = v_k(t_k - t_u)$$

Czasy przełączeń między tymi fragmentami wyznaczmy rozwiązując układ powyższych dwóch równań.

Zauważmy jednak, że  $t_u - t_r$  jest wyrażone wcześniejszymi wzorami. Po ich podstawieniu do równania (123) otrzymujemy

$$v_{k-1}(t_r - t_{k-1}) + \frac{M^2 R_{k-1}}{p^2} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}} +$$





Rysunek 16: Przejazd DE1.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{M}{p} \left( v_{k-1} - \frac{MR_{k-1}}{p} \right) \left( 1 - \frac{pv_k - MR_{k-1}}{pv_{k-1} - MR_{k-1}} \right) + \\
 & + v_k \left( t_k - t_r - \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}} \right) = \Delta s_{k-1}^k
 \end{aligned}$$

czyli równanie liniowe względem zmiennej  $t_r$ . Po uproszczeniu można je zapisać jako

$$\begin{aligned}
 (v_{k-1} - v_k)t_r - v_{k-1}t_{k-1} + v_k t_k - \frac{M(pv_k - MR_{k-1})}{p^2} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}} + \\
 + \frac{M}{p} (v_{k-1} - v_k) = \Delta s_{k-1}^k
 \end{aligned}$$

skąd, przy założeniu że  $v_{k-1} \neq v_k$  otrzymujemy

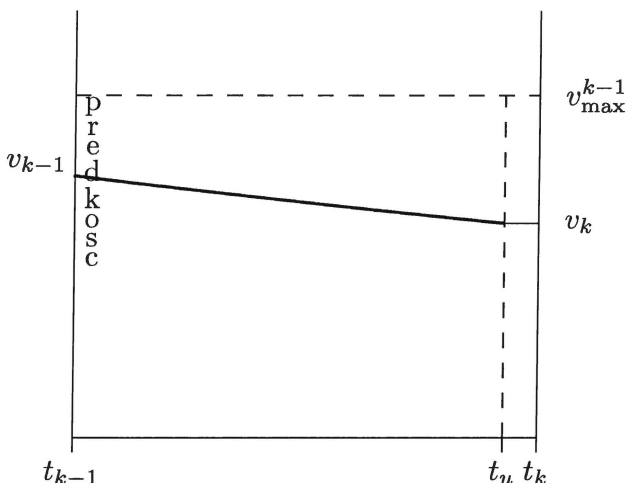
$$t_r = \frac{\Delta s_{k-1}^k}{v_{k-1} - v_k} + \frac{v_{k-1}t_{k-1} - v_k t_k}{v_{k-1} - v_k} + \frac{M(pv_k - MR_{k-1})}{p^2(v_{k-1} - v_k)} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}} - \frac{M}{p}$$

Najwolniejszy przejazd tego typu jest wtedy, gdy jazda na wybiegu zaczyna się od czasu  $t_{k-1}$ . Mamy więc

$$t_r - t_{k-1} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - MR_{k-1}}{pv_k - MR_{k-1}}$$

skąd warunek przejścia do przejazdu E ma postać

$$\Delta s_{s_r}^r + \Delta s_{s_r}^k \geq \Delta s_{k-1}^k \quad (124)$$



Rysunek 17: Przejazd graniczny między przejazdami DE1 i E.

czyli

$$\frac{MR_{k-1}}{p}(t_r - t_{k-1}) + \frac{M}{p}(v_{k-1} - \frac{MR_{k-1}}{p})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_r - t_{k-1})}) + v_k(t_k - t_r) \geq \Delta s_{k-1}^k$$

**Przejazd DE2.** Natomiast w tym typie przejazdu, przy  $v_k > v_{k-1}$ , przyspieszanie zaczyna się później niż w czasie  $t_{k-1}$ . Przejazd składa się z 3 fragmentów: ze stałą prędkością  $v_{k-1}$  od  $t_{k-1}$  do  $t_r$ , z maksymalnym przyspieszeniem od  $t_r$  do  $t_u$  oraz ze stałą prędkością  $v_k$  od  $t_u$  do  $t_k$ . Mamy

$$t_u - t_r = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}$$

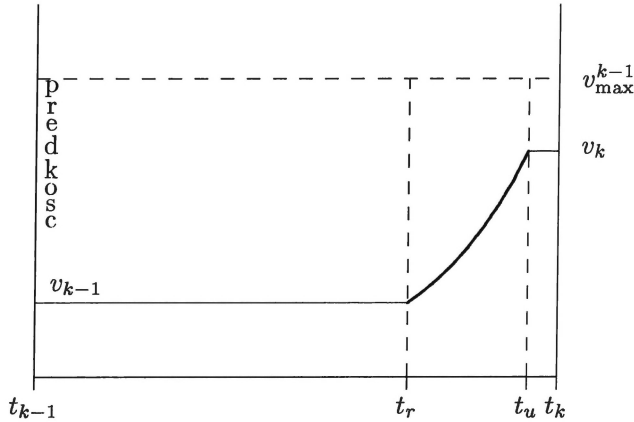
oraz warunek na drogę

$$\Delta^S s_{k-1}^r + \Delta^P s_r^u + \Delta^S s_u^t = \Delta s_{k-1}^k$$

gdzie  $\Delta^S s_{k-1}^r$  i  $\Delta^S s_u^t$  wyrażają się tymi samymi wzorami, jak poprzednio, a

$$\Delta^P s_r^u = \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(t_u - t_r) - \frac{M}{p^2}(pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_r)})$$

Czasy przełączeń uzyskamy z rozwiązania powyższych dwóch równań.



Rysunek 18: Przejazd DE2.

Podobnie jak dla przejazdu DE1, i tutaj można sprowadzić te dwa równania do równania liniowego. Układ ten różni się tylko tym, że fragment z zerowym sterowaniem należy zamienić na fragment z przyspieszeniem, dla którego zachodzi

$$\Delta^P s_r^u = \frac{M}{p^2} (h_{\max} + MR_{k-1}) \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}} - \frac{M}{p} (v_{k-1} - v_k)$$

Po przekształceniach uzyskujemy wzór

$$t_r = \frac{v_k t_k - v_{k-1} t_{k-1}}{v_k - v_{k-1}} - \frac{M}{p^2} \frac{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}{v_k - v_{k-1}} \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}} + \frac{M}{p}$$

Najwolniejszy przejazd typu DE2 jest wtedy, gdy fragment przyspieszania znajduje się na końcu odcinka, czyli gdy zachodzi

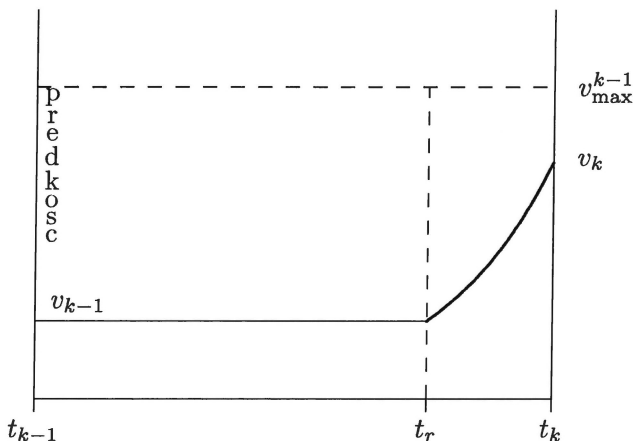
$$t_u - t_k = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1}}{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}$$

Warunek przejścia z przejazdu DE2 do przejazdu E ma wobec tego postać

$$\Delta^S s_{k-1}^u + \Delta^P s_u^k \geq \Delta^S s_{k-1}^k \quad (125)$$

czyli

$$v_{k-1}(t_u - t_{k-1}) + \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(t_u - t_{k-1}) - \frac{M}{p^2}(pv_{k-1} - h_{\max} - MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_u - t_{k-1})}) \geq \Delta^S s_{k-1}^k$$



Rysunek 19: Przejazd graniczny między przejazdami DE2 i E.

## 9.9 Przejazd najwolniejszy – przejazd E

Ostatni typ przejazdu, nie osiągający dolnego ograniczenia na prędkość ( $v = 0$ ), składa się z fragmentów: hamowanie, przejazd z zerowym sterowaniem, patrz rys. 20, przyspieszenie. Wydaje się, że ten typ przejazdu raczej nie będzie się zdarzał w rozwiązaniu optymalnym dla całego odcinka, bo trudno sobie wyobrazić, aby rozkład jazdy był aż tak zaniżony. Niemniej jednak dla kompletu trzeba takie rozwiązanie także rozważyć.

W tym typie rozwiązania mamy do czynienia z przestawieniem fragmentu przyspieszania i hamowania, stąd musimy użyć innych wzorów. Dla fragmentu hamowania mamy

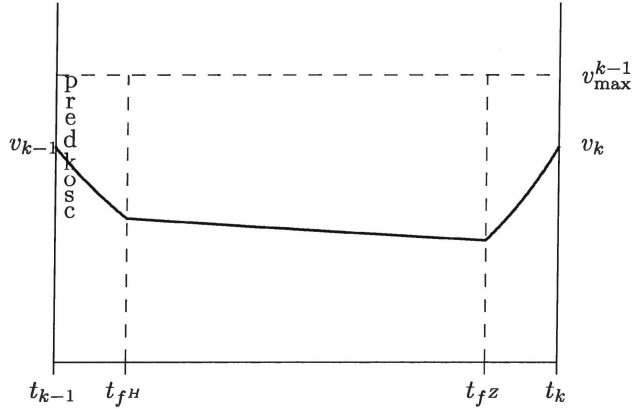
$$\Delta^H t_{k-1}^{f^H} = t_{f^H} - t_{k-1} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_H + h_{\min} - MR_{k-1}}$$

gdzie

$$v_H = v(f^H) = v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t_{f^H} - t_{k-1})} - \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{f^H} - t_{k-1})})$$

Drogę wyznaczymy przez całkowanie prędkości

$$\begin{aligned} \Delta^H s_{k-1}^{f^H} &= s_{f^H} - s_{k-1} = \\ &= \frac{M}{p} (v_{k-1} + \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{f^H} - t_{k-1})}) - \end{aligned}$$



Rysunek 20: Trajektoria prędkości z najwolniejszym przejazdem.

$$-\frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(t_{fH} - t_{k-1})$$

Dla fragmentu przyspieszania czas przejazdu wyraża się wzorem

$$\Delta^P t_{fZ}^k = t_k - t_{fZ} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_Z - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_k - (h_{\max} + MR_{k-1})}$$

gdzie  $v_Z = v(t_{fZ})$ , a równanie prędkości uzależnimy od  $v_k$

$$v(t) = v_k e^{\frac{p}{M}(t_k - t)} - \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(e^{\frac{p}{M}(t_k - t)} - 1)$$

Po jego scałkowaniu od uzyskamy drogę

$$\begin{aligned} \Delta^P s_{fH}^k &= s_k - s_{fZ} = \\ &= \frac{M}{p}(v_k - \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1}))(e^{\frac{p}{M}(t_k - t_{fZ})} - 1) + \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})(t_k - t_{fZ}) \end{aligned}$$

Dla fragmentu z zerowym sterowaniem mamy natomiast prędkość na końcu fragmentu

$$v_Z = \frac{M}{p}R_{k-1}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{fH})}) + v_H e^{-\frac{p}{M}(t_{fZ} - t_{fH})}$$

czas przejazdu

$$\Delta^Z t_{fH}^Z = t_{fZ} - t_{fH} = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_H - MR_{k-1}}{pv_Z - MR_{k-1}}$$

oraz długość przebytej drogi

$$\Delta^Z s_{fH}^{fZ} = s_{fZ} - s_{fH} = \frac{M}{p} R_{k-1} (t_{fZ} - t_{fH}) + \frac{M}{p} (v_H - \frac{M}{p} R_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M} (t_{fZ} - t_{fH})})$$

Stawiamy teraz warunek

$$\Delta^H s_{k-1}^{fH} + \Delta^Z s_{fH}^{fZ} + \Delta^P s_{fH}^k = \Delta s_{k-1}^k \quad (126)$$

Prócz tego, z ciągłości prędkości w punkcie przełączenia  $v_Z$  uzyskujemy równanie

$$\begin{aligned} \frac{M}{p} R_{k-1} (1 - e^{-\frac{p}{M} (t_{fZ} - t_{fH})}) + v_H e^{-\frac{p}{M} (t_{fZ} - t_{fH})} = \\ = v_k e^{\frac{p}{M} (t_k - t_{fZ})} - \frac{1}{p} (h_{\max} + M R_{k-1}) (e^{\frac{p}{M} (t_k - t_{fZ})} - 1) \end{aligned} \quad (127)$$

Jeżeli istnieje rozwiązanie rzeczywiste, to z warunków tych wyznaczymy dwie nieznanne zmienne:  $t_{fH}$  i  $t_{fZ}$ , które powinny spełniać warunki

$$t_h \leq t_{fH} \leq t_{fZ} \leq t_z \quad (128)$$

gdzie  $t_h$  jest czasem osiągnięcia prędkości zerowej przy maksymalnym hamowaniu z prędkości  $v_{k-1}$  w chwili  $t_{k-1}$ , a więc wyraża się wzorem

$$t_h = t_{k-1} + \frac{M}{p} \ln \frac{pv_{k-1} + h_{\min} - M R_{k-1}}{h_{\min} - m R_{k-1}}$$

a  $t_z$  jest czasem, od którego można osiągnąć prędkość  $v_k$  w chwili  $t_k$ , a więc wyraża się wzorem

$$t_z = t_k - \frac{M}{p} \ln \frac{h_{\max} + M R_{k-1}}{h_{\max} + M R_{k-1} - pv_k}$$

Zmienna  $v_H$  jest znaną funkcją  $t_{fH}$  i może być wprost podstawiona do powyższego równania.

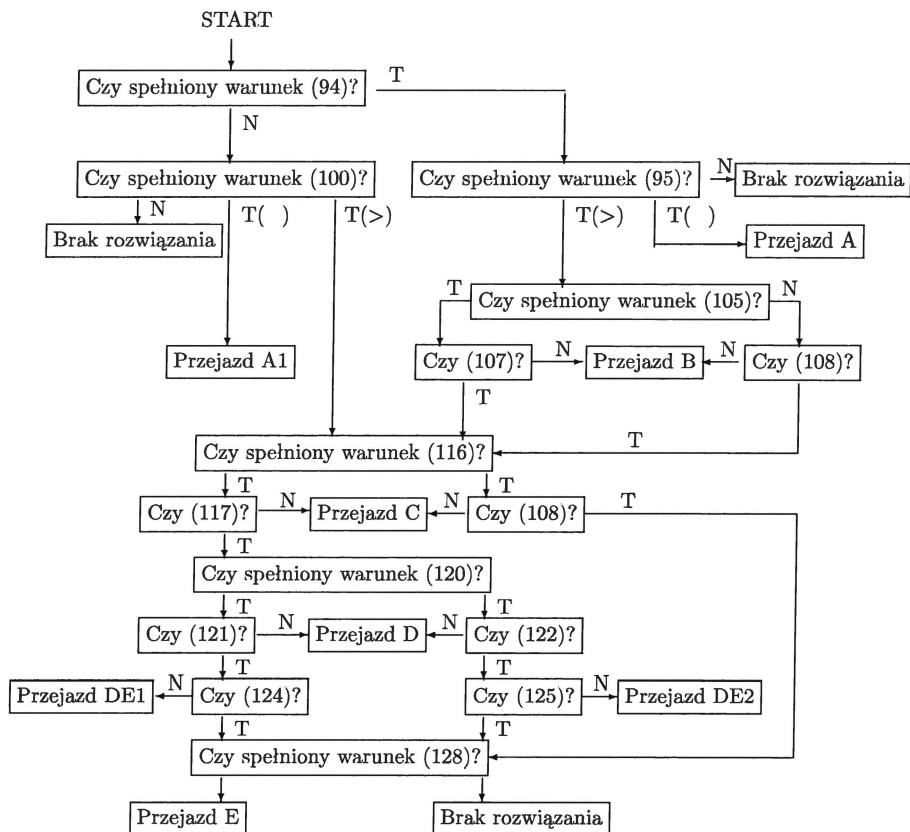
**Wzory przybliżone.** Rozwijając funkcje eksponencjalne w szeregi Taylora do drugiego stopnia otrzymamy następujące przybliżenia:

- droga hamowania

$$\Delta^H s_{k-1}^{fH} \approx v_{k-1} (t_{fH} - t_{k-1}) - \frac{pv_{k-1} + h_{\min} - M R_{k-1}}{2M} (t_{fH} - t_{k-1})^2$$

- droga z zerowym sterowaniem

$$\Delta^Z s_{fH}^{fZ} \approx v_H (t_{fZ} - t_{fH}) - \frac{pv_H - M R_{k-1}}{2M} (t_{fZ} - t_{fH})^2$$



Rysunek 21: Schemat blokowy algorytmu poszukiwania przejazdu optymalnego na odcinku trasy.

- droga przyspieszania

$$\Delta P_{S_{fH}^k} \approx v_k(t_k - t_{fz}) + \frac{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}{2M}(t_k - t_{fz})^2$$

- równanie ciągłości prędkości w czasie  $t_{fz}$

$$v_H - \frac{pv_H - MR_{k-1}}{M}(t_{fz} - t_{fH})[1 - \frac{p}{2M}(t_{fz} - t_{fH})] \approx$$

$$\approx v_k + \frac{pv_k - h_{\max} - MR_{k-1}}{M}(t_k - t_{fz})[1 + \frac{p}{2M}(t_k - t_{fz})]$$

- równanie prędkości w czasie  $t_{fH}$

$$v_H \approx v_{k-1} - \frac{pv_{k-1} + h_{\min} - MR_{k-1}}{M}(t_{fH} - t_{k-1})\left[1 - \frac{p}{2M}(t_{fH} - t_{k-1})\right]$$

## 9.10 Algorytm poszukiwania optymalnego przejazdu

Z przeprowadzonego rozumowania wynika algorytm poszukiwania rozwiązania przedstawiony na rys. 21. W algorytmie tym uwzględniono warunki przełączeń nie wymagające rozwiązywania równań.



# A Załącznik

## A.1 Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu dla zakresu stałej mocy

Mnożąc obie strony przez  $v$  otrzymujemy

$$v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\zeta}{M} - \frac{p}{M} v^2(t) + R_{k-1} v(t) \quad (133)$$

Podstawiając nową zmienną

$$w(t) = v(t) e^{\frac{p}{M} t}$$

a następnie

$$\tau = \frac{p}{M} t$$

doprowadzamy do równania

$$w(\tau) \frac{dw(\tau)}{d\tau} = \frac{\zeta}{p} e^{2\tau} + w(\tau) \frac{M R_{k-1}}{p} e^{\tau} \quad (134)$$

Jest to pewna forma równania Abela drugiego rodzaju, którą można sprowadzić do równania liniowego ze zmiennymi współczynnikami po podstawieniach

$$\tau = \ln \xi \quad w = u\xi$$

Mamy bowiem

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{d(u\xi)}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \xi + u \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \xi + u \frac{d\xi}{du} \frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \left( \xi + u \frac{d\xi}{du} \right)$$

Ponieważ jednak

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{d\tau}{d\xi} \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{du}$$

więc

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\tau}{du}} = \frac{\xi}{\frac{d\xi}{du}}$$

W rezultacie, po podstawieniu do (134) otrzymujemy

$$u\xi \frac{\xi}{\frac{d\xi}{du}} \left( \xi + u \frac{d\xi}{du} \right) = \frac{1}{p} (\zeta + u M R_{k-1}) \xi^2$$

skąd dochodzimy do końcowego równania liniowego

$$\left( -u^2 + u \frac{M R_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p} \right) \frac{d\xi}{du} = u\xi \quad (135)$$

Ponieważ jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, więc rozwiązanie uzyskamy obliczając poniższe całki

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{udu}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

Całka po lewej stronie jest równa

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi$$

Trudniejszą całkę po prawej stronie możemy sprowadzić do sumy dwóch całek

$$\int \frac{udu}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2u + \frac{MR_{k-1}}{p})du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} + \frac{MR_{k-1}}{2p} \int \frac{du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

Pierwszą całkę po prawej stronie łatwo obliczymy po podstawieniu nowej zmiennej równej mianownikowi wyrażenia podcałkowego uzyskując

$$-\frac{1}{2} \int \frac{(-2u + \frac{MR_{k-1}}{p})du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = -\frac{1}{2} \ln(-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})$$

Aby obliczyć drugą całkę po prawej stronie obliczymy wyznacznik mianownika

$$\Delta = \frac{M^2 R_{k-1}^2}{p^2} + 4 \frac{\zeta}{p} = \frac{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}{p^2} > 0$$

Po rozkładzie na ułamki proste dochodzimy do rozwiązania

$$\int \frac{du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = \frac{p}{\sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \ln \frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}$$

W rezultacie pierwotna całka po prawej stronie jest równa

$$\ln \left( C \sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \right) / \sqrt{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania, skąd otrzymujemy końcowe rozwiązanie ogólne

$$\xi = C \sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} / \sqrt{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} \quad (136)$$

które daje nam zależność  $\xi(u)$ . Do wyznaczenia stałej  $C$  jest potrzebny dodatkowy warunek. Uzyskamy go z warunku początkowego początkowego równania. Otóż śledząc kolejne podstawienia dostajemy

$$w(t_{\nu_1}) = v(t_{\nu_1})e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad \tau_{\nu_1} = \frac{p}{M}t_{\nu_1}$$

skąd dostajemy

$$\xi_{\nu_1} = e^{\tau_{\nu_1}} = e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad u_{\nu_1} = \frac{w(t_{\nu_1})}{e^{\tau_{\nu_1}}} = v(t_{\nu_1})$$

Podstawiając te wielkości do rozwiązania (136) dochodzimy do zależności

$$e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} = C \frac{\sqrt{\frac{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}}{\sqrt{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}}$$

z której wyznaczamy  $C$

$$C = \frac{\sqrt{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}}{\sqrt{\frac{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

Po podstawieniu  $C$  do równania (136) dostajemy rozwiązanie szczególne naszego równania

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}{\frac{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}} \sqrt{\frac{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad (137)$$

Aby powrócić do początkowych zmiennych, z zależności

$$\tau = \ln \xi(u)$$

powinniśmy wyznaczyć funkcję odwrotną  $u(\tau)$ , co następnie pozwoliłoby znaleźć

$$w(\tau) = u(\tau)\xi(\tau) = u(\tau)e^{\tau}$$

aby dojść do końcowego wzoru

$$v(t) = w\left(\frac{p}{M}t\right)e^{-\frac{p}{M}t} = u\left(\frac{p}{M}t\right)$$

Jednak kłopot polega na wyznaczeniu funkcji odwrotnej  $u(\xi)$ , potrzebnej do uzyskania  $u(\tau)$ . Do tego celu przyjmijmy pewną aproksymację. Otóż zauważmy, że po rozważeniu zakresu wartości parametrów możemy przyjąć

$$1 + \frac{4p\zeta}{M^2 R_{k-1}^2} \approx 1$$

Wtedy zależność  $\xi(u)$  we wzorze (137) upraszcza się do

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{u}{v(t_{\nu_1})}(-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{\frac{pv - MR_{k-1}}{pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1}}(-u^2 + u\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

co doprowadza do równania

$$\xi^2 = \frac{u \frac{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}{v(t_{\nu_1})}}{\frac{(pv - MR_{k-1})(-u^2 + u\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1}}} e^{2\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

czyli po przekształceniach do

$$pu^3 - 2MR_{k-1}u^2 + \left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{p} + P - \zeta\right)u + \frac{MR_{k-1}\zeta}{p} = 0$$

gdzie

$$P = \frac{(pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1})(-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{v(t_{\nu_1})} e^{-2\frac{p}{M}(t-t_{\nu_1})}$$

Jest to równanie algebraiczne trzeciego stopnia, które w zasadzie można rozwiązać analitycznie.

Po standardowych podstawieniach sprowadzamy je do równania kanonicznego

$$u^3 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)u^2 + \frac{MR_{k-1}}{3p^2}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right) = 0$$

i obliczamy wyróżnik

$$\Delta = -\frac{1}{27p^3}\left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)^3 + \frac{M^2 R_{k-1}^2}{12p^4}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)^2$$

Typ rozwiązania i odpowiednie wzory na pierwiastki zależą od znaku wyróżnika. Jednak nie wygląda na to, aby można było łatwo ustalić ten znak. Dla dodatniego znaku jedyne rozwiązanie rzeczywiste wyraża się wzorem

$$u = \sqrt[3]{-\frac{MR_{k-1}}{6p^2}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right) + \sqrt{\Delta}} + \sqrt{\Delta}$$

$$-\sqrt[3]{\frac{MR_{k-1}}{6p^2}\left(\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)} + \sqrt{\Delta}$$

i na to, aby było ono dodatnie, musiałyby zachodzić  $\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P < 0$ . Natomiast dla ujemnego wyróżnika dostajemy trzy pierwiastki rzeczywiste, z których trzeba wybrać pierwiastek dodatni. Jeżeli jest tylko jeden pierwiastek, to jest to rozwiązanie naszego zadania. Jeżeli pierwiastków dodatnich jest więcej, to potrzeba dodatkowe kryterium wyboru rozwiązania właściwego. Te trzy pierwiastki wyrażają się wzorami

$$u_1 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi}{3}$$

$$u_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}$$

$$u_3 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi + 4\pi}{3}$$

gdzie

$$\cos \phi = \frac{-\frac{MR_{k-1}}{2p}\left(\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)}{\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)^3}}$$

Jak widać, zależność  $u$ , czyli  $w$  od czasu  $t$  jest skomplikowana. Od czasu  $t$  zależy wykładniczo wartość  $P$ , która z kolei wchodzi bardzo nieliniowo do końcowego rozwiązania, niezależnie od tego, które z rozwiązań jest właściwe.

## A.2 Model z uwzględnieniem jazdy po łuku

Dla przypomnienia, równania ruchu dla zakresu stałej mocy ma następującą postać

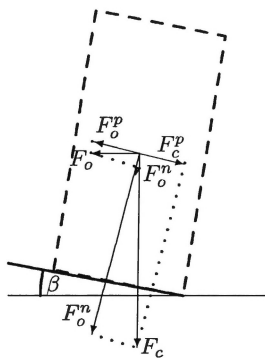
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\zeta}{M} \frac{1}{v(t)} - \frac{p}{M} v(t) + R_{k-1} \quad (138)$$

z warunkiem początkowym

$$v(t_{\nu_1}) = v_{\nu_1}$$

Równanie to teoretycznie można rozwiązać analitycznie. Jednak prowadzi to do bardzo skomplikowanych wzorów. Ich wyprowadzenie przedstawiono w załączniku.

Powróćmy teraz do modelu (1), jednak przyjmiemy w wyprowadzeniu oporów częściowo inne założenia. Otóż przyjmiemy, że zależność oporu od prędkości jest kwadratowa, natomiast założymy, że nie ma wiatru. Dodatkowo, rozpatrzmy opory przy jeździe pociągu po łuku toru. Zacniemy od wyprowadzenia tej zależności.



Rysunek 22: Siły w jeździe po łuku.

Obliczymy na początek siły działające na pociąg jadący po łuku. Przyjmiemy, że pociąg jest jedną bryłą, co jest pewnym przybliżeniem, szczególnie dla składów wielowagonowych. Siła powodująca skręt pociągu jest tu wynikiem reakcji kół z torami, przez co na tor działa siła (siła odśrodkowa) równa  $F_o = M a_o$ , gdzie  $a_o = v^2/R$  jest przyspieszeniem dośrodkowym,  $v$  jest prędkością pociągu, a  $R$  promieniem skrętu. Jednak tory są często budowane na zakrętach z nachyleniem w kierunku skrętu. Powoduje to, że siła odśrodkowa nie jest równoległa do płaszczyzny torów, gdyż jest pozioma – równoległa do płaszczyzny ziemi, patrz rys. 22. Po rozłożeniu tej siły na składową równoległą do poziomemu torów  $F_o^p$  i składową

prostopadła do płaszczyzny torów  $F_o^n$  otrzymamy zależności

$$F_o^p = F_o \cos \beta \quad F_o^n = F_o \sin \beta$$

Jednak na skutek pochylenia torów, pionową siłą ciężkości  $F_c = Mg$  możemy rozłożyć także na dwie składowe działające w tych samych kierunkach, co składowe siły odśrodkowej

$$F_c^p = F_c \sin \beta \quad F_c^n = F_c \cos \beta$$

Ponieważ składowe równoległe do poziomu torów mają przeciwne zwroty, końcowe wypadkowe składowe, po wstawieniu wzorów na siłę odśrodkową i siłę ciężkości, wyglądają następująco

$$F_p = F_o^p - F_c^p = Mg\left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta\right) \quad F^n = F_o^n + F_c^n = Mg\left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta\right) \quad (139)$$

Po pomnożeniu przez współczynnik tarcia związany z ruchem po łuku  $\mu_R$  otrzymamy związaną z tym ruchem siłę tarcia

$$T_R = \mu_R F_p = \mu_R Mg\left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta\right) \quad (140)$$

Siła prostopadła do płaszczyzny torów jest zaś związana z siłą tarcia tocznego

$$T_T = \mu_T Mg\left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta\right) \quad (141)$$

które będzie jeszcze zależało od nachylenia torów w kierunku jazdy (będzie pomnożone przez  $\cos \alpha$ ).

W rezultacie równanie ruchu pociągu (po zaniechaniu wiatru) będzie wyglądało następująco

$$\begin{aligned} M \frac{dv(t)}{dt} = \\ = -pv^2(t) + h(t) + gM \sin \alpha - \mu_T Mg\left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta\right) \cos \alpha - \mu_R Mg\left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta\right) \end{aligned} \quad (142)$$

Równanie to można zapisać następująco

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av^2(t) + C \quad (143)$$

gdzie

$$A = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta \cos \alpha + \mu_R \cos \beta}{R}$$

i

$$C = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha - \mu_T g \cos \beta \cos \alpha + \mu_R g \sin \beta$$

Jest to równanie różniczkowe Riccatiego.

Jeżeli w podziale trasy przejazdu na odcinki uwzględnimy łuki założymy, jak poprzednio, że sterowanie  $u$  jest na każdym odcinku stałe, to na każdym odcinku parametry  $A$  i  $C$  są stałe. Można w takim przypadku łatwo zauważyć, że ma ono wtedy rozwiązanie szczególne stałe na odcinku

$$v^0(t) = \sqrt{\frac{C}{A}} \quad (144)$$

Istnieje wzór pozwalający wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania Riccatiego, gdy jest znane jego rozwiązanie szczególne, patrz np. [28]. Jeżeli zapiszemy powyższy typ równania w sposób ogólniejszy

$$\frac{dv(t)}{dt} = f_2(t)v^2(t) + f_1(t)v(t) + f_0(t) \quad (145)$$

i znamy pewne rozwiązanie szczególne tego równania  $v^0(t) = \phi(t)$ , to wzór na równanie ogólne ma postać

$$v(t) = v^0(t) + \frac{\Phi(t)}{D - \int \Phi(t)f_2(t)dt} \quad (146)$$

$$\Phi(t) = e^{\int [2f_2(t)v^0(t) + f_1(t)]dt}$$

gdzie  $D$  jest dowolną stałą. W naszym przypadku współczynniki  $f_i$  oraz rozwiązanie szczególne  $v^0(t)$  są stałe i przyjmują wartości

$$f_2(t) = -A \quad f_1(t) = 0 \quad f_0(t) = C \quad v^0(t) = \sqrt{\frac{C}{A}}$$

wobec czego

$$\Phi(t) = e^{-\int 2A\sqrt{\frac{C}{A}}dt} = e^{-2\sqrt{AC}t}$$

i rozwiązanie ogólne równania (143) przyjmuje następującą postać

$$v(t) = \sqrt{\frac{C}{A}} + \frac{e^{-2\sqrt{AC}t}}{D - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{C}}e^{-2\sqrt{AC}t}} \quad (147)$$

Na odcinku  $k-1$  stałą  $D$  wyznaczymy z warunku początkowego  $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$ . Dla podkreślenia, że rozpatrujemy rozwiązanie na tym odcinku, wszystkim stałym dodamy wskaźnik  $k-1$ . Tak więc mamy

$$v_{k-1} = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + \frac{e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}}{D - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}}e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}}$$



skąd

$$D = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}} + \frac{1}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} \right) e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}$$

Po podstawieniu wyznaczonej stałej do rozwiązania ogólnego, otrzymamy rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy

$$v^{k-1}(t) = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \left( 1 + \frac{2e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}}{\frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} - e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}} \right) \quad (148)$$

co można też zapisać w bardziej symetrycznej formie

$$v^{k-1}(t) = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}}{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} - (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}} \quad (149)$$

Ze wzrostem czasu rozwiązanie zbiega do rozwiązania szczególnego stałego (144). Jeżeli ta zbieżność jest szybka, to rozwiązanie takie jest dosyć wygodne w praktycznej implementacji, gdyż po prostu można podać maszyniście, jaką prędkość ma utrzymywać na danym odcinku i ewentualnie po jakim czasie przejściowym.

Na końcu przedziału, dla  $t = t_k$ , zachodzi

$$v_k = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}}{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} - (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}} \quad (150)$$

W powyższych wzorach

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R \cos \beta_{k-1}}{R_{k-1}}$$

$$C_{k-1} = h_{k-1} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R g \sin \beta_{k-1}$$

Jeżeli odcinek jest prosty, to  $R_{k-1} = \infty$  i  $\beta = 0$ . Wtedy wzory na współczynniki  $A_{k-1}$  i  $C_{k-1}$  przyjmują postać

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} \quad C_{k-1} = h_{k-1} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \alpha_{k-1}$$

Jak widać, wprowadzenie zależności oporów od kwadratu prędkości znacznie komplikuje rozwiązanie od strony technicznej, gdyż prowadzi do bardziej skomplikowanych wzorów. Niemniej jednak idea sprowadzenia całego zadania do nieliniowej optymalizacji statycznej, w której należy wyznaczyć wartości  $h_{k-1}$  i  $\Delta_{k-1} = t_k - t_{k-1}$  dla  $k = 1, \dots, K$ , pozostaje aktualna.

### A.3 Równanie zależne od drogi

Pochodną prędkości po czasie możemy łatwo zamienić na pochodną od drogi  $s$  korzystając z zależności

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} v(s)$$

Zamieniając zmienne w równaniu (143) i podstawiając powyżej wyprowadzoną zależność otrzymujemy

$$v(s) \frac{dv(s)}{ds} = -Av^2(s) + C \quad (151)$$

Równanie to możemy zapisać następująco

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2(s)}{ds} = -Av^2(s) + C$$

skąd po podstawieniu  $v^2(s) = z(s)$  otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{1}{2} \frac{dz(s)}{ds} = -Az(s) + C$$

Równanie to ma rozwiązanie ogólne

$$z(s) = De^{-2As} + \frac{C}{A}$$

Z warunku początkowego  $z(s_{k-1}) = v_{k-1}^2$  uzyskujemy

$$D = e^{2As_{k-1}} (v_{k-1}^2 - \frac{C}{A})$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające ten warunek

$$z^{k-1}(s) = v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})})$$

a po uwzględnieniu podstawienia

$$v^{k-1}(s) = \sqrt{v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})})} \quad (152)$$

Na końcu odcinka równanie to przyjmuje wartość

$$v^{k-1}(s_k) = \sqrt{v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s_k - s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s_k - s_{k-1})})}$$

Może trochę nieoczekiwanie, równania te mają trochę prostszą formę niż w poprzednim punkcie, a nieliniowość typu funkcji wymiernej jest zamieniona na nieliniowość typu pierwiastkowego.

## A.4 Dodatkowy stały wiatr.

Przy wyprowadzeniu w poprzednim punkcie przyjęto jednak, że nie ma wiatru, co jest sporym uproszczeniem. Podstawowe rozumowanie można jednak rozszerzyć na przypadek, gdy wieje stały wiatr z prędkością  $w$ . Podobnie jak w równaniu liniowym, przyjmiemy, że kierunki ruchu pociągu i wiatru mają ten sam zwrot, wobec czego równanie ruchu pociągu przyjmuje postać

$$M \frac{dv(t)}{dt} = -p(v-w)^2(t) + h(t) + gM \sin \alpha - \mu_T M g \left( \frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta \right) \cos \alpha - \mu_R M g \left( \frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta \right) \quad (153)$$

Po rozwinięciu wyrazu kwadratowego uzyskamy teraz równanie

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av^2(t) + Bv(t) + C \quad (154)$$

gdzie

$$A = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta \cos \alpha + \mu_R \cos \beta}{R}$$

$$B = \frac{2pw}{M}$$

$$C = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha - \mu_T g \cos \beta \cos \alpha + \mu_R g \sin \beta - \frac{pw^2}{M}$$

Współczynnik  $A$  jest tu dokładnie taki sam, jak poprzednio, natomiast w  $C$  pojawił się dodatkowy (ostatni) składnik. Pozostawimy jednak tę samą literę, aby nie mnożyć oznaczeń.

Podobnie jak poprzednio, równanie (154) ma rozwiązanie szczególne stałe, które spełnia równanie kwadratowe

$$-Av^2(t) + Bv(t) + C = 0$$

Z dwóch możliwych rozwiązań tego równania

$$\frac{B}{2A} \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) \quad \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)$$

wyberzemy dodatnie (po prawej stronie), czyli nasze rozwiązanie szczególne wyraża się wzorem

$$v^0(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) \quad (155)$$

We wzorze (146) przyjmujemy teraz wielkości

$$f_2(t) = -A \quad f_1(t) = B \quad f_0(t) = C \quad v^0(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)$$

i otrzymujemy

$$\Phi(t) = e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t}$$

oraz rozwiązanie ogólne

$$v(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) + \frac{e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t}}{D - \frac{A}{B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}}e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t}}$$

Podstawiając warunek początkowy  $v_{k-1}$  dla  $T_{k-1}$  obliczamy stałą  $D$

$$D = \frac{A}{B} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}} + \frac{1}{\frac{A}{B}v_{k-1} - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}})} \right) e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t_{k-1}}$$

Po podstawieniu tak wyliczonej stałej do rozwiązania ogólnego otrzymujemy rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy  $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$

$$\begin{aligned} v^{k-1}(t) = & \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-B_{k-1}\sqrt{1+4\frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}(t-t_{k-1})}}{\frac{1}{\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}v_{k-1} - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}})} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}} (1 - e^{-B_{k-1}\sqrt{1+4\frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}(t-t_{k-1})})} \right) \end{aligned} \quad (156)$$

przy czym

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R \cos \beta_{k-1}}{R_{k-1}}$$

$$B_{k-1} = \frac{2pw}{M}$$

$$C_{k-1} = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R g \sin \beta_{k-1} - \frac{pw^2}{M}$$

Jeżeli  $w = 0$ , to rozwiązanie to sprowadza się do rozwiązania (148).

Na końcu odcinka prędkość jest równa

$$v_k = \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}}{2} + \frac{e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} \Delta_{k-1}}}{\frac{1}{\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} v_{k-1} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}})} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}} (1 - e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} \Delta_{k-1}})} \right) \quad (157)$$

## B Literatura

### Literatura

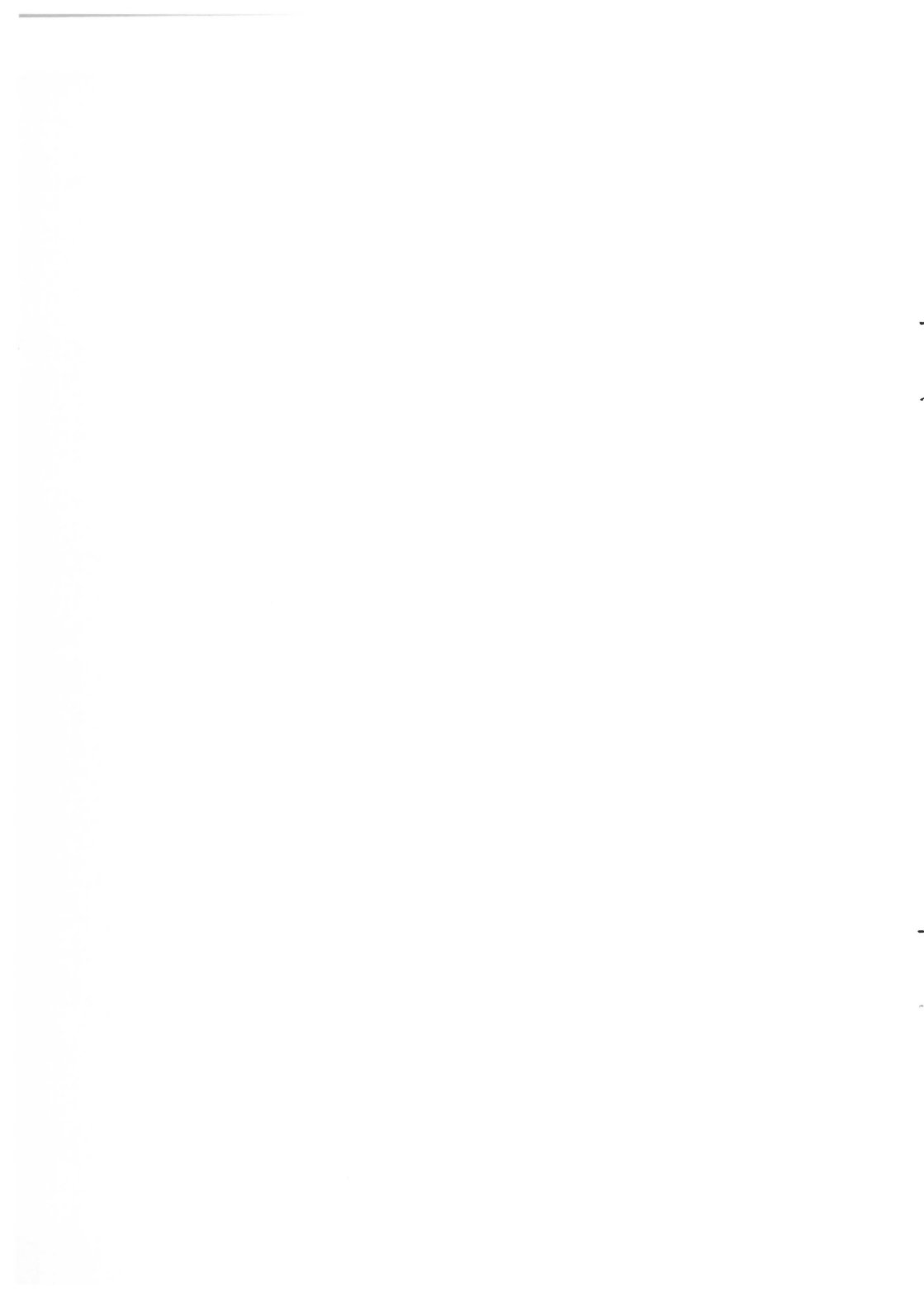
- [1] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, Energy-efficient train control: From local convexity to global optimization and uniqueness, *Automatica*, 49:3072 – 3078, 2013.
- [2] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, P. Zhou: The key principles of optimal train control - Part 1: Formulation of the model, strategies of optimal type, evolutionary lines, location of optimal switching points. *Transportation Research Part B*, 94:482–508, 2016.
- [3] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, P. Zhou: The key principles of optimal train control - Part 2: Existence of an optimal strategy, the local energy minimization principle, uniqueness, computational techniques. *Transportation Research Part B*, 94:509–538, 2016.
- [4] T. Albrecht, S. Oettich, A new integrated approach to dynamic schedule synchronization and energy-saving train control. W: J. Allan, R.J. Hill, C.A. Brebbia, G. Scutto, S. Sone (Eds.) *Computers in Railways VIII*, WIT Press, Ashurst Lodge, UK, 847-856, 2002.
- [5] I.A. Asnis, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, Solution of the problem of the energetically optimal control of the motion of a train by the maximum principle. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25(6):37–44, 1985.
- [6] I.A. Asnis, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, Applications of realtime speed control in rail-bound public transportation systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25(6):37–44, 1987.
- [7] M.H. Bigharaz, A. Afshar, A. Suratgar, F. Safaei, Simultaneous optimization of energy consumption and train performances in electric railway systems, *Prepr. 19th World Congress, IFAC, Cape Town, South Africa, 6270–6275, August 24–29, 2014*
- [8] R. Burak–Romanowski, K. Woźniak, Energetyczne aspekty modernizacji linii kolejowych, *Technical Transactions on Electrical Engineering*, 108(13):13–29, 2011.
- [9] R. Franke, P. Terwiesch, M. Meyer, An algorithm for the optimal control of the driving of trains. *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control, Sydney, Australia, 2123–2127, 2000.*

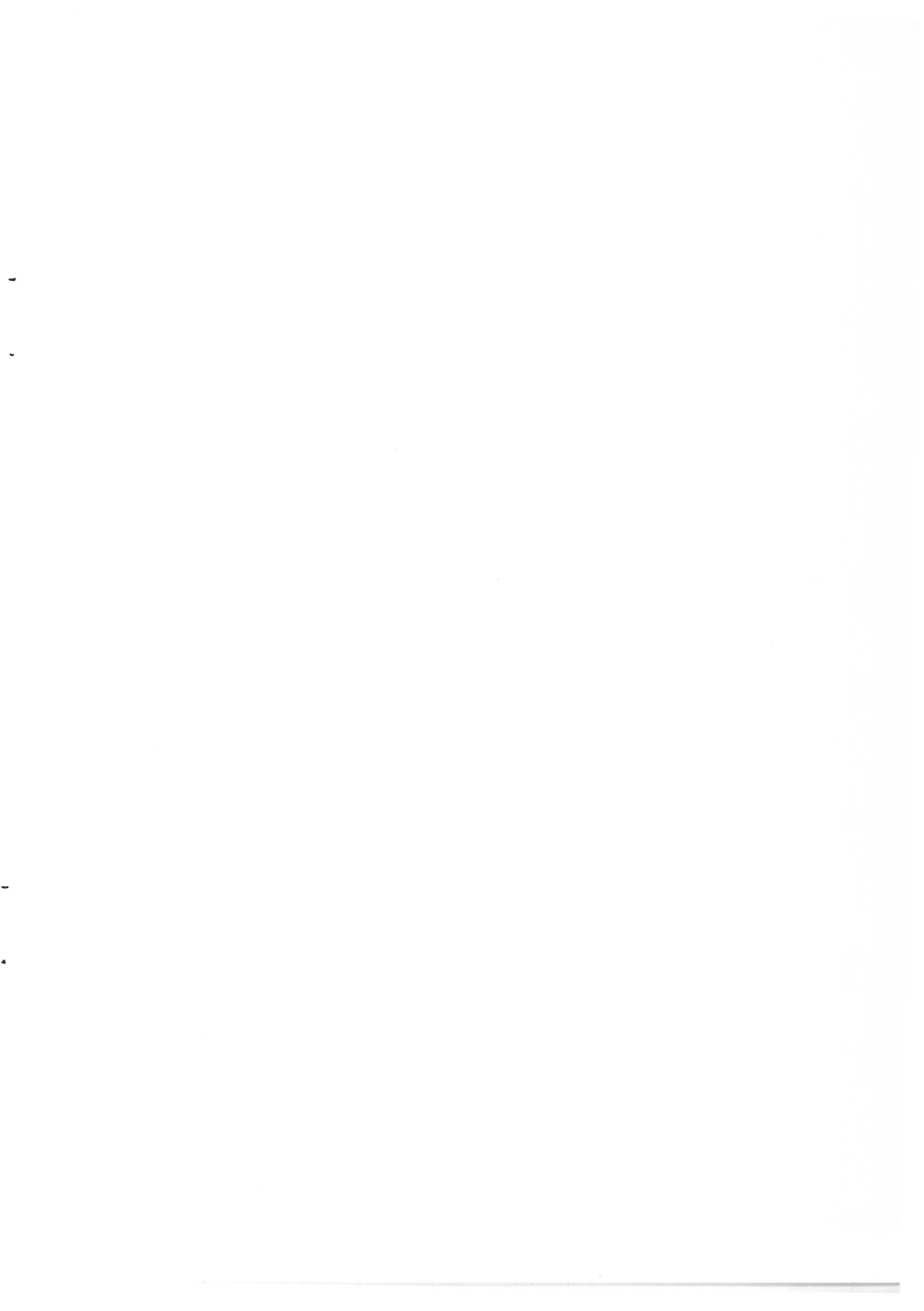
- [10] P. Gkortzas, Study on optimal train movement for minimum energy consumption, MSc Thesis, Mälardalen University, Sweden, 2013. (<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mdh:diva-21234>)
- [11] H. Górecki, S. Fuksa, A. Korytowski, W. Mitkowski, Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości, PWN, Warszawa, 1983.
- [12] R.F. Hartl, S.P. Sethi, R.G. Vickson, A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints, *SIAM Review*, 37(2):181-218, 1995.
- [13] P. Howlett, Optimal strategies for the control of a train. *Automatica*, 32(4):519 – 532, 1996.
- [14] P. Howlett, The optimal control of a train, *Annals of Operations Research*, 98:65-87, 2000.
- [15] P.G. Howlett, P.J. Pudney, *Energy-Efficient Train Control*. Springer, 1995.
- [16] P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, Local energy minimization in optimal train control, *Automatica*, 45:2692-2698, 2009.
- [17] K. Ichikawa, Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation of train, *Bull. Japan Soc. Math. and Engng*, 11(47):857-865, 1968.
- [18] E. Khmelnitsky, On an optimal control problem of train operation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:1257–1266, 2000.
- [19] P. Kulinowski, *Obliczenia trakcyjne*, AGH, Kraków.
- [20] L. Lipiński, M. Miszewski, Wyznaczanie charakterystyk trakcyjnych pojazdów kolejowych z asynchronicznymi napędami trakcyjnymi, *Zeszyty Problematyczne – Maszyny Elektryczne* Nr 1(94):67-74, 2012.
- [21] R. Liu, I.M. Golovitcher, Energy-efficient operation of rail vehicles. *Transportation Research Part A*, 37:917-932, 2003.
- [22] H. Maurer, Tutorial on control and state constrained optimal control problems, Part 2 : Mixed Control-State Constraints, Imperial College, 2011.
- [23] M. Miyatake, H. Ko, Optimization of train speed profile for minimum energy consumption, *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, *IEEJ Trans.*, 5:263–269, 2010.

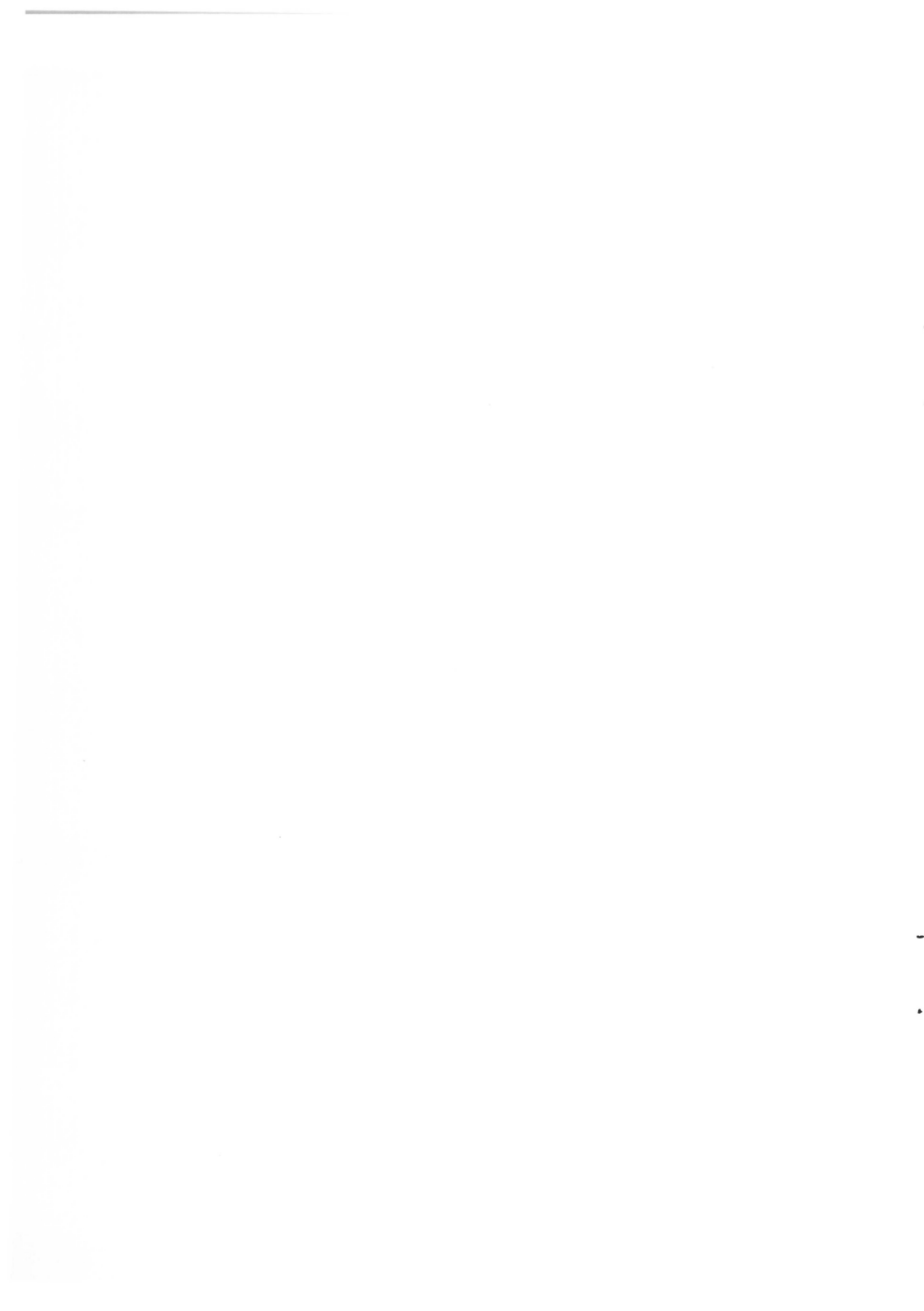
- [24] T. Montrone, Energy Consumption Minimization in Railway Systems. Dottorato di Ricerca in Matematica - XXVIII Ciclo, Dipartimento di Matematica e Fisica 'Ennio de Giorgi', Università del Salento, 2017.
- [25] H. Novak, M. Vašak, V. Lešiči, Hierarchical energy management of multi-train railway transport system with energy storages, IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT), 23-25 Aug. 2016, Birnigham, UK, 130–138, 2016.
- [26] ONTIME Consortium. Optimal networks for train integration management across europe. <http://www.ontime-project.eu/home.aspx>, 2017. Dostęp w grudniu 2017.
- [27] PKP Cargo, Katalog wagonów, Warszawa, 2013.
- [28] A.D. Polyinin, V.F. Zaitsev, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [29] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mischenko. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc, New York, London, 1962.
- [30] P. Pudney and P. Howlett. Optimal driving strategies for a train journey with speed limits. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 36:38–49, 1994.
- [31] B.P. Rochard, F. Schmid, A review of methods to measure and calculate train resistances, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail Rapid Transit*, 214(4):185–199, 2000.
- [32] G.M. Scheepmaker, R.M.P. Goverde, The interplay between energy-efficient train control and scheduled running time supplements. *J. Rail Transport Planning & Management*, 5:225-239, 2015.
- [33] G.M. Scheepmaker, R.M.P. Goverde, L.G. Kroon: Review of energy-efficient train control and time tabling. *European Journal of Operation Research*, 257:355-376, 2017.
- [34] Y. Song, W. Song, A novel dual speed-curve optimization based approach for energy-saving operation of a high-speed trains. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 17(6):1564-1575, 2016.
- [35] S. Su, T. Tang, X. Li, Z. Gao, A subway train timetable optimization approach based on energy-efficient operation strategy. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 14(2):883-693, 2013.



- [36] S. Su, T. Tang, X. Li, Z. Gao, Optimization of multitrain operations in a subway system. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 15(2):673-684, 2014.
- [37] J. Vittek, P. Butko, B. Ftorek, P. Makys, L. Gorel, Energy near optimal control strategies for industrial and traction drives with a.c. motors, *Mathematical Problems with Engineering*, Vol. 2017, article id 1857186, 2017.
- [38] P. Wang, R.M. Goverde. Multiple-phase train trajectory optimization with signalling and operational constraints. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 69:255–275, 2016.
- [39] Y. Wang, B. Ning, F. Cao, B. De Schutter, and T.J.J. van den Boom, A survey on optimal trajectory planning for train operations, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT 2011)*, Beijing, China, 589–594, July 2011.
- [40] M. Wnuk, Wyznaczenie jazdy optymalnej pociągu na odcinku z ograniczeniem prędkości, *Technika Transportu Szybowego*, 4:54-59, 2012.
- [41] H. Ye, R. Liu, A multiphase optimal control method for multi-train control and scheduling on railway lines, *Transportation Research Part B*, 93:377–393, 2016.







the 1990s, the number of people who have been employed in the public sector has increased in all countries. The increase in public sector employment has been particularly rapid in the United Kingdom, where the public sector has grown from 10.5% of the total labour force in 1980 to 17.5% in 1997 (see Figure 1).

There are a number of reasons for the increase in public sector employment. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In many countries, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

There are also a number of reasons for the increase in public sector employment in the United Kingdom. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In the United Kingdom, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

There are also a number of reasons for the increase in public sector employment in the United Kingdom. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In the United Kingdom, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

There are also a number of reasons for the increase in public sector employment in the United Kingdom. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In the United Kingdom, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

There are also a number of reasons for the increase in public sector employment in the United Kingdom. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In the United Kingdom, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

There are also a number of reasons for the increase in public sector employment in the United Kingdom. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In the United Kingdom, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

There are also a number of reasons for the increase in public sector employment in the United Kingdom. One reason is that the public sector has become a more important part of the economy. In the United Kingdom, the public sector has become a major employer of labour, and its growth has been a major factor in the overall growth of the economy. Another reason is that the public sector has become a more attractive place to work. This is due to a number of factors, including the fact that the public sector is often seen as a more stable and secure place to work than the private sector.

